КВАНТ
ЖУРНАЛ

1985

1 - 12

НОМЕР
1

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант
Основан в 1970 году

1 1985

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**

2	«Кванту» — 15 лет	Kvant is fifteen
3	К нашим читателям	To our readers
4	*Л. В. Тарасов.* Мирные профессии лазерного луча	*L. V. Tarasov.* Peaceful professions of the laser ray
10	*О. В. Ляшко.* Почему не уменьшится сопротивление	*O. V. Layshko.* Why the resistance does not decrease
16	*Ф. Н. Склокин.* Белая мгла, или Не верь глазам своим	*F. N. Sklokin.* White haze, or Don't believe your own eyes
	Математический кружок	**Mathematics circle**
19	*Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* Пары чисел и действия с ними	*N. B. Vassiliev, V. L. Gutenmacher.* Pairs of numbers and operations with them
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
29	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
34	Избранные школьные задачи	Selected school problems
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
35	Задачи	Problems
36	*С. С. Кротов.* О давлении и законе Паскаля, или Почему у сыра круглые дыры	*S. S. Krotov.* On pressure and Pascal's law, or Why does cheese have round holes
	Новости науки	**Science news**
41	Топ-кварк и тигренок Топ	Top-quarks and Top the little tiger
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
42	Задачи М901—М905; Ф913—Ф917	Problems M901—M905; P913—P917
45	Решения задач М884, М885; Ф894—Ф897	Solutions M884, M885; P894—P897
	Информация	**Information**
51	Братиславская летняя школа юных программистов	Young programmer's summer school in Bratislava
52	Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondance school
53	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the Maly Mechmat correspondance school
54	Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	The MISIS physico-technical correspondance school
55	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examinations**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(40)*	**Kvant smiles *(40)***
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Фантастика на шахматной доске *(3-я с. обложки)*	**Sciencce fiction on the chessboard *(3rd cover page)***

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985

«Кванту» — 15 лет

В состав редакционной коллегии и редакционного совета журнала «Квант» входят 18 академиков и членов-корреспондентов АН СССР и АПН СССР, 14 докторов и 20 кандидатов наук. С 1983 года журнал переводится и издается в Греции. Во Франции выпущено два сборника статей из «Кванта». Журнал получил высокую оценку экспертов ЮНЕСКО (Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры). Сейчас у журнала 175 000 подписчиков, из них 10 000 — зарубежных. По данным, сообщенным нашими читателями, с каждым экземпляром работают в среднем пять школьников. В журнале 15 рубрик. Три из них («Школа в «Кванте», «Квант» улыбается» и «Калейдоскоп «Кванта») появились совсем недавно по инициативе наших читателей. Журнал активно участвует в праздниках юных математиков и физиков, летних школах и других интересных мероприятиях.

Исполнилось пятнадцать лет с тех пор, как вышел первый номер нашего журнала. У его истоков стояли крупнейшие советские ученые. Вместе с ними в создании журнала активно участвовали молодые ученые, организаторы первых Всесоюзных олимпиад по физике и математике для школьников: Ю. М. Брук, Н. Б. Васильев, Г. И. Косоуров, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий и др.

«Квант» занял особое место среди журналов для старших школьников, издаваемых в разных странах. По оценке экспертов ЮНЕСКО, журнала, подобного «Кванту», нет ни в одной стране.

Журнал стремится проложить мост между современной наукой и школой, дать пищу для самостоятельных размышлений и занятий тем школьникам, которые увлекаются физикой и математикой, пробудить интерес к этим наукам у остальных школьников, повысить физико-математическую культуру учащихся. Его задачи отчетливо видны из воспроизведенного здесь обращения «К нашим читателям», которое было опубликовано в первом номере журнала. За годы существования «Кванта» многие наши читатели стали известными учеными. Читателей «Кванта» мы регулярно видим среди победителей Всесоюзных и Международных олимпиад.

Редакция ведет обширную переписку со школьниками, регулярно проводит встречи с читателями, ежегодно обращается к ним со специальной анкетой, публикуемой в двенадцатых номерах журнала. Читатели помогают нам в выборе тем, в организации новых разделов, в оценке опубликованных материалов, и мы пользуемся случаем, чтобы поблагодарить их за эту помощь.

«Кванту» уже пятнадцать лет, но мы прекрасно понимаем, что далеко не всё в нем совершенно. Впереди еще много увлекательной работы по поиску новых тем, по увеличению доступности и увлекательности публикуемых статей, улучшению оформления журнала. И мы с удовольствием приглашаем наших читателей принять участие в этой работе.

К нашим читателям

В нашей стране издается много журналов. Они нужны математикам и физикам, биологам и врачам, географам и геологам, инженерам разных специальностей, учителям и, конечно,... школьникам. Но своего научного журнала у школьников пока не было. Настала пора заполнить этот пробел. Мы хотели бы, чтобы для школьников, интересующихся математикой и физикой, «Квант» стал их первым научным журналом.

Конечно, мы рассчитываем на школьников, которым математика и физика просто «нравятся» или могут понравиться. Но сейчас очень велика потребность страны в молодежи, занимающейся наукой с увлечением и сверх обязательных школьных требований. В СССР на конец 1968 года было более 800 000 научных работников и среди них более 80 000 специалистов по физико-математическим наукам. Общее же число научных работников, инженеров, экономистов и т. п., которым надо с инициативой и собственной выдумкой владеть математическими методами и искусством физического эксперимента, скоро будет исчисляться миллионами. Наша страна заинтересована в том, чтобы школьники, которые чувствуют в себе способности справляться с математическими и физическими задачами, своевременно задумались о выборе такого дальнейшего жизненного пути, на котором их способности и интересы не пропадут даром. Поэтому и создаются все возможности для усиленных занятий математикой и физикой. Организуются специальные физико-математические школы, со старшими школьниками ведутся дополнительные факультативные занятия, устраиваются физические и математические олимпиады. Этой же цели служит и «Квант». В журнале будет много материала, подходящего для работы в школьных кружках. Но с журналом можно будет работать и самостоятельно.

Сразу надо подчеркнуть это слово — работа. В журнале вы найдете и веселые странички, и материал для сравнительно легкого чтения. Но основные материалы журнала рассчитаны на школьников, которые будут над ними работать. Задачи надо решать, статьи читать с бумагой и карандашом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести.

Бóльшая часть материалов журнала рассчитана на старшеклассников, но и ученики 6—7 классов, мы надеемся, найдут в журнале кое-что интересное.

Не пугайтесь, если вначале что-либо покажется вам недоступным и трудным. Возьмитесь за другие материалы журнала, попроще, но через некоторое время попробуйте вернуться к тем, которые сначала оставили в стороне.

В заключение о том, почему журнал назван «Квант». В свое время появление идеи о кванте вызвало глубокие изменения в физической науке. Нам хочется надеяться, что появление нового журнала тоже вызовет большое продвижение и даже заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке. Повторим еще раз: чтобы наши надежды стали реальностью, надо, чтобы читатели сразу включились вместе с нами в активную работу.

Желаем успеха!

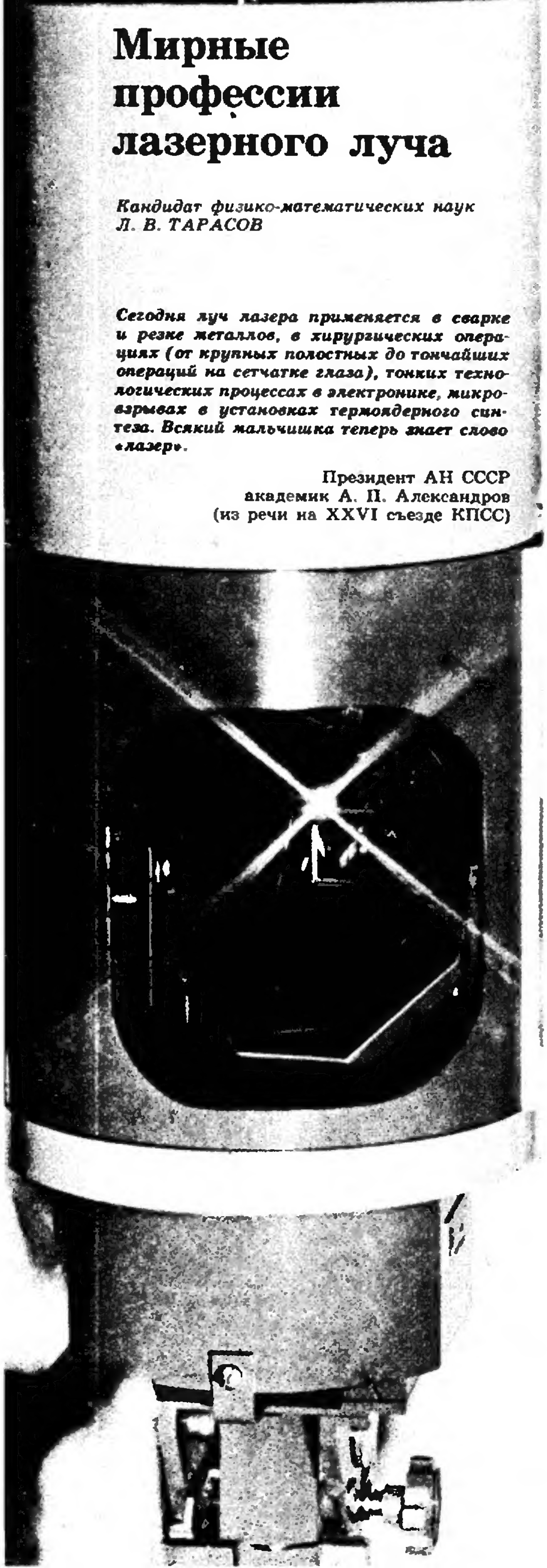
Редакционная коллегия

(«Квант», № 1, 1970 г.)

Мирные профессии лазерного луча

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

> ***Сегодня луч лазера применяется в сварке и резке металлов, в хирургических операциях (от крупных полостных до тончайших операций на сетчатке глаза), тонких технологических процессах в электронике, микровзрывах в установках термоядерного синтеза. Всякий мальчишка теперь знает слово «лазер».***
>
> Президент АН СССР
> академик А. П. Александров
> (из речи на XXVI съезде КПСС)



Лазерная установка «Рубин-2», используемая для контроля радиоэлектронной аппаратуры.

Создав лазер, человек получил возможность необычайно сильно концентрировать световую энергию и посылать ее в том или ином направлении в пространстве. Этот поток световой энергии может быть и непрерывным, и в виде следующих друг за другом мощных импульсов. Можно управлять и частотой следования лазерных импульсов, и их параметрами — энергией, длительностью. Лазерный луч можно сфокусировать на облучаемой поверхности в световое пятно диаметром до 1—10 мкм. Современная лазерная техника легко позволяет сконцентрировать на поверхности материала световую интенсивность 10^5—10^6 Вт/см^2. Иными словами, на участке облучения размером ~1 мкм на поверхность материала ежесекундно попадает энергия порядка 0,1 Дж. При столь больших интенсивностях металлы начинают плавиться. Сегодня не составляет особого труда обеспечить еще более высокую световую интенсивность: 10^6—10^8 Вт/см^2. В этом случае происходит интенсивное испарение облучаемого материала.

Мощный лазерный луч может стать грозным оружием, но он же может успешно использоваться в мирных целях. Советские ученые и инженеры убедительно показали, сколь широк круг мирных профессий лазерного луча. Они доказали эффективность и перспективность использования лазеров для обработки материалов, в медицине, в современной вычислительной технике, в точнейших контрольно-измерительных устройствах, для научных исследований. Одно из величайших изобретений XX века — лазер — может и должен быть тружеником, а не солдатом.

В пределах одной статьи невозможно даже кратко рассказать о всех мирных профессиях лазерного луча. Мы ограничимся здесь лишь двумя темами: обработка материалов лазерным лучом и применение лазеров в медицине.

Лазерный луч — новый инструмент для обработки материалов

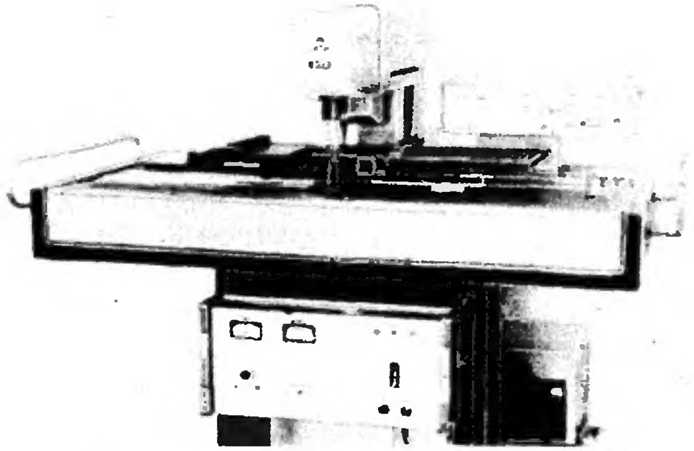
На циферблате ручных часов «Полет» есть надпись: «23 камня». Упоминание о числе камней можно видеть и на циферблатах других часов с механическим заводом. Что это за камни? Речь идет о рубиновых камнях, используемых в часовом механизме в качестве подшипников скольжения. Чтобы изготовить такой подшипник, надо высверлить в рубине (материале весьма твердом и в то же время хрупком) небольшое углубление диаметром всего 0,1 мм. Многие годы эта операция выполнялась механическим способом с использованием сверл из специально обработанной тонкой проволоки. Сверло делало в минуту более 10 000 оборотов и одновременно совершало при этом около 100 возвратно-поступательных перемещений. Для сверления одного камня требовалось примерно 15 минут.

Начиная с 1964 года малопроизводительное механическое сверление отверстий в часовых камнях стало повсеместно заменяться лазерным сверлением. Конечно, термин «лазерное сверление» не надо понимать буквально. Лазерный луч не сверлит отверстие — оно создается за счет интенсивного испарения материала. Отверстие в рубиновом камне (при толщине заготовки 1 мм) пробивается серией из нескольких лазерных импульсов, имеющих энергию 0,1 Дж и длительность порядка 10^{-4} с (то есть имеющих максимальную мощность порядка 10^3 Вт); при фокусировке лазерного импульса в световое пятно диаметром 0,01 см обеспечивается световая интенсивность порядка 10^7 Вт/см^2. Производительность работы лазерной установки, действующей в автоматическом режиме, — один камень в секунду. Это примерно в тысячу (!) раз выше производительности механического сверления.

Во многих измерительных приборах, в технологических процессах, требующих соблюдения высокой точности, необходимы очень тонкие проволоки из меди, бронзы, вольфрама. Чтобы получить такую проволоку, металл протягивают сквозь отверстия соответствующего диаметра, высверленные в сверхтвердом материале, например в алмазе (так называемые алмазные фильеры). Алмазные фильеры позволяют получать проволоку диаметром всего 10 мкм; эта проволока в десятки раз тоньше человеческого волоса. Но как просверлить столь тонкое отверстие в таком сверхтвердом материале, каким является алмаз? Механически это сделать довольно трудно; для сверления одного отверстия требуется до десяти часов. Зато совсем нетрудно пробить это отверстие серией из нескольких сфокусированных мощных лазерных импульсов.

Как видите, лазерное сверление обладает рядом весьма важных преимуществ: оно позволяет получать отверстия в материалах, отличающихся высокой твердостью (например, алмаз) или повышенной хрупкостью (например, глиноземная керамика); можно получать очень тонкие отверстия, и при этом отношение глубины пробиваемых лазером отверстий к их диаметру достигает рекордно больших значений (по сравнению с другими методами сверления) — глубина отверстия может превышать его диаметр в 10—50 раз. Во всех случаях лазерное сверление отличается высокой производительностью. Наконец, в отличие от обычных сверл «лазерные сверла» не ломаются и не изнашиваются.

Развитие микроэлектроники органически связано с совершенствованием технологии изготовления микросхем. Большую помощь может оказать здесь лазерный луч. Вначале лазеры применяли лишь для микросварки. Так, при помощи рубинового лазера приваривались вводы к контактам на кремниевых пластинках, приваривались тонкие провода к тонким пленкам. Затем начали применять CO_2-лазеры (лазеры на углекислом газе) для пробивания отверстий в керамических подложках для микросхем. Сегодня лазерный луч все чаще используют для подгонки параметров тонкопленочных схем и для изготовления отдельных элементов схемы. С помощью лазера можно целиком изготовить пленочную схему — со всеми входящими в нее резисторами, конденсаторами, индуктивностями. Предположим, что на диэлектрическую подложку микросхемы нанесена напылением тонкая металлическая пленка. Перемещая вдоль поверхности пленки сфокусированное лазерное пятно, можно испарить определенные участки пленки и тем самым создать нужный «рисунок» микросхемы.



Установка «Квант-20», предназначенная для резки с помощью лазерного луча специально обработанного стекла.

В наши дни лазерный луч широко применяют для резания материалов. Им можно резать практически любой материал: ткань, бумагу, дерево, фанеру, резину, пластмассу, керамику, листовой асбест, стекло, листы металла. При лазерной резке можно получать аккуратные разрезы сложного профиля, с гладкими необожженными краями среза. Для резки используются непрерывно генерирующие лазеры или лазеры, генерирующие последовательность световых импульсов с высокой частотой следования. Требуемая мощность излучения зависит от разрезаемого материала и толщины заготовки.

Чтобы продемонстрировать, насколько широко используется сегодня лазерная резка, приведем два примера. Первый пример — лазерная резка и раскрой тканей на современной ткацкой фабрике. Устройство включает в себя непрерывно генерирующий CO_2-лазер мощностью 100 Вт, систему фокусировки и перемещения лазерного луча, ЭВМ и систему для натяжения и перемещения ткани. В процессе резания лазерный луч перемещается по поверхности ткани со скоростью до 1 м/с. Диаметр сфокусированного светового пятна равен 0,2 мм. Перемещениями лазерного луча и ткани управляет ЭВМ. Подобное устройство позволяет, например, в течение часа раскроить материал для 50 костюмов. Раскрой производится не только быстро, но и с очень высокой точностью. При этом обеспечивается хорошее качество краев разреза.

Другой пример — применение лазерной резки в авиационной промышленности и, в частности, при производстве космических летательных аппаратов. С помощью лазеров осуществляют автоматизированное разрезание листов титана, стали, алюминия. Непрерывно генерирующий CO_2-лазер мощностью 3 кВт разрезает лист титана толщиной 5 мм со скоростью 3,5 м/мин.

Наряду с лазерной резкой широко применяется сегодня и лазерная сварка. Замечательно, что прочность сварных соединений (ширина шва составляет несколько миллиметров) достигает уровня прочности свариваемого материала. Осуществляется автоматическая лазерная сварка кузовов автомобилей, обшивки судов, сварка газопроводов. На автозаводе имени И. А. Лихачева в Москве, например, при помощи CO_2-лазера мощностью 5 кВт производят автоматическую лазерную сварку карданных валов автомобилей. Срок службы валов повысился в три раза.

Лазерная сварка успешно конкурирует с хорошо известными способами сварки, например с дуговой сваркой. Это убедительно подтверждает таблица, помещенная на этой странице. В таблице приведены данные, относящиеся к дуговой и лазерной сварке одного погонного метра стального листа толщиной 20 мм.

Параметр	Дуговая сварка	Лазерная сварка
Скорость сварки, м/ч	10—15	50—150
Количество проходов, необходимое для получения прочного шва	5—8	1
Время сварки, мин	32	0,6
Ширина шва, мм	20	5

При лазерной сварке происходит быстрое локальное проплавление в данной точке или вдоль заданной линии, и подвергающаяся тепловому воздействию зона имеет очень малые размеры; свариваемые детали не загрязняются какими-либо примесями.

Лазерным лучом можно осуществлять дистанционную обработку, на расстоянии; например, можно осуществлять сварку, посылая луч через прозрачную перегородку (сварка в вакуумированном объеме или в объеме, заполненном инертным газом).

Остановимся еще на одном способе лазерной обработки материалов — лазерном закаливании. Когда лазерный луч падает на поверхность металла, быстро нагревается тонкий приповерхностный слой в том месте, куда направлен луч. По мере перемещения луча на другие участки поверхности происходит быстрое остывание нагретого участка. Это используют для закалки поверхностных слоев, существенно повышающей их прочность. Лазерная закалка позволяет избирательно увеличивать прочность именно тех участков поверхности, тех деталей, которые в наибольшей мере подвергаются износу. Так, лазерную закалку применяют в автомобильной промышленности — для упрочнения головок цилиндров двигателей, направляющих клапанов, шестерен, распределительных валов и т. д. На Московском автозаводе имени Ленинского комсомола производится поверхностная закалка корпуса заднего моста автомобиля «Москвич».

За неимением места мы не можем рассказать о многих других видах лазерной обработки материалов. Так, мы не рассказали о лазерном остекловывании металлов (когда при очень быстром охлаждении нагретой лазерным излучением поверхности металла возникает тонкий приповерхностный стеклообразный слой, отличающийся высокой прочностью и коррозионной стойкостью). Не рассказали мы и о лазерной маркировке изделий, в частности хрупких изделий и изделий малых размеров, о лазерной очистке проводов от изоляции и ряде других процессов.

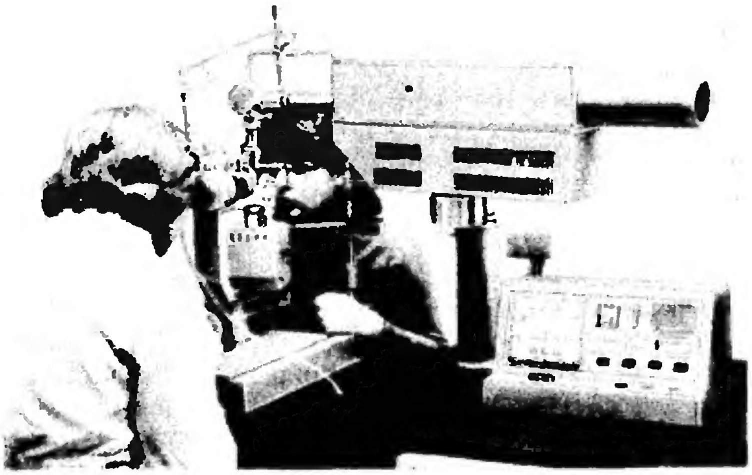
Как заметил академик Н. Г. Басов, «история техники свидетельствует о том, что массовое внедрение новых технологических процессов всегда оказывало революционизирующее воздействие на промышленность. Так было при появлении методов скоростного резания, холодной штамповки, точного литья, дуговой сварки — перечень примеров легко продолжить. В настоящее время промышленная технология во всем мире, по-видимому, находится в преддверии нового качественного скачка, обусловленного широким внедрением лазеров».

Такая высокая оценка роли лазеров совершенно оправдана. Лазерным лучом можно производить самые разнообразные операции и притом над самыми различными материалами. Лазерный луч работает быстро, с высокой точностью, качественно. И еще одно важное преимущество лазерной обработки материалов — возможность широкой автоматизации процессов.

Лазерный луч — необычный медицинский скальпель

Первой областью клинической медицины, в которой лазеры получили наиболее широкое применение, стала офтальмология — область медицины, имеющая дело с глазными заболеваниями. Появление лазера в клинической медицине связано с лечением отслоения сетчатки — излучение, сфокусированное на отслоившиеся участки, «приваривало» их к глазному дну. Затем был разработан метод лечения лазерным лучом глаукомы — заболевания, поражающего 2—3 % людей в возрасте старше 40 лет. Вызывается оно накоплением в глазу внутриглазной жидкости. В здоровом состоянии жидкость, которая вырабатывается внутри глаза и является «смазкой» для хрусталика, выводится из глаза через своеобразную дренажную систему радужной оболочки. Если эта система нарушается, «закупоривается», жидкость накапливается в глазу, возрастает ее давление, появляются боли — развивается глаукома. Заболевание сопровождается сначала ухудшением зрения (очертания предметов становятся туманными, возникают радужные ореолы), а затем приводит к слепоте.

Традиционные хирургические методы лечения глаукомы крайне сложны, сильно травмируют глаз и к тому же крайне ненадежны. Казалось естественным воспользоваться в дан-



Лазерная установка «Ятаган-2», применяемая в глазной микрохирургии.

ном случае лазерным лучом — «прожечь» отверстия (протоки) в радужной оболочке и тем самым восстановить нормальный отток внутриглазной жидкости. Очень скоро, однако, выяснилось, что «прожигание» радужной оболочки вызывает воспаление, которое довольно быстро ликвидирует сделанные протоки. Исследования советских медиков во главе с академиком АМН СССР М. М. Красновым показали, что надо не прожигать, а «пробивать» протоки в радужной оболочке. Для этого нужно, чтобы лазерный импульс был чрезвычайно коротким. В применяемой для лечения глаукомы советской лазерной установке «Ятаган» используются лазерные импульсы длительностью всего 10^{-7}с. Вся операция занимает 10—15 минут.

Начиная со второй половины 60-х годов лазерный луч стал применяться в качестве своеобразного скальпеля в хирургии. В СССР практическое использование лазеров в хирургии началось в 1966 году в Институте хирургии имени А. В. Вишневского (под руководством академика АМН СССР А. А. Вишневского). Лазерный скальпель был применен в операциях на внутренних органах грудной и брюшной полостей. В настоящее время лазерным лучом делают кожно-пластические операции, оперируют пищевод, желудок, кишечник, почки, печень, селезенку и другие внутренние органы. Делаются первые шаги по применению лазера в операциях на сердце.

Обычно используется CO_2-лазер непрерывного действия мощностью в несколько десятков ватт. Излучение лазера поступает в систему шарнирно соединенных полых раздвигающихся трубок, по которой свет распространяется, отражаясь от зеркал. На выходе из системы излучение вырывается наружу в виде достаточно интенсивного светового луча. Во время операции хирург держит в руке выходную трубку и может перемещать ее, свободно поворачивая в разных направлениях и тем самым посылая лазерный луч в нужное место.

Лазерный скальпель используют как для рассечения, так и для сшивания тканей. Рассечение тканей производят сфокусированным лучом. При мощности излучения 20 Вт и диаметре сфокусированного лазерного пятна 1 мм достигается интенсивность около 2,5 кВт/см^2. Излучение проникает в ткань примерно на глубину 50 мкм. Следовательно, объемная плотность мощности излучения, идущая на нагрев ткани достигает 500 кВт/см^3. Для биологических тканей это огромная величина. Естественно, происходит быстрое разогревание и испарение ткани — налицо эффект рассечения ткани лазерным лучом.

Если же снизить интенсивность излучения до 25 Вт/см^2, то ткань испаряться не будет, а будет происходить поверхностная коагуляция (сгущение) тканевой жидкости. Вот этот-то процесс и используют для сшивания разрезанной ткани. Биологическая сварка осуществляется за счет коагуляции жидкости, содержащейся в рассекаемых стенках оперируемого органа и специально выдавливаемой в промежуток между соединяемыми участками ткани.

Лазерный луч как хирургический

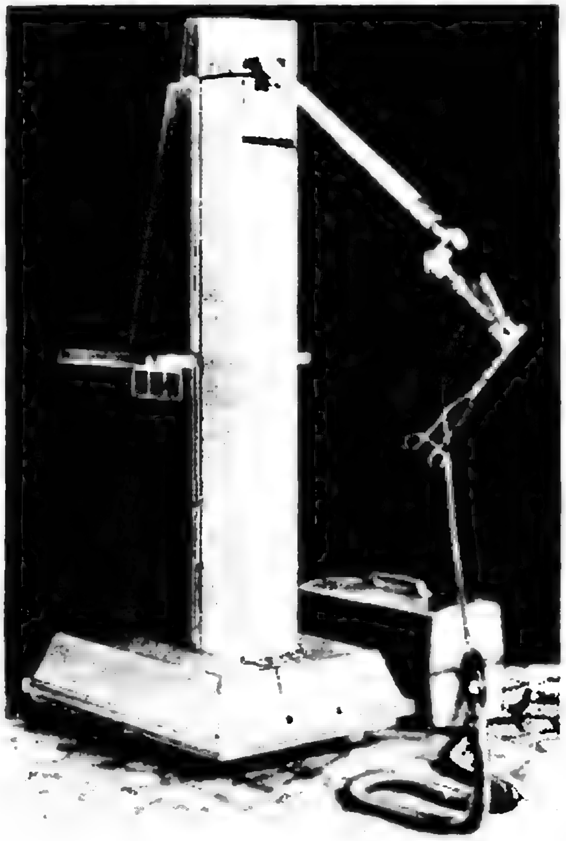
скальпель обладает целым рядом достоинств. Он делает почти бескровный разрез, так как одновременно с рассечением тканей происходит «заваривание» мелких кровеносных сосудов на краях раны. Лазерный луч прозрачен, и это позволяет хирургу хорошо видеть оперируемый участок. Лазерный скальпель обеспечивает абсолютную стерильность — ведь с тканью взаимодействует только излучение. Наконец, как показала клиническая практика, рана от лазерного скальпеля почти не болит и относительно быстро заживляется.

В советской лазерной хирургической установке «Скальпель-1» и во многих подобных ей установках световая энергия передается от лазера к оперируемому органу по системе жестких полых трубок. Вместо системы трубок можно использовать гибкие световоды*). Они позволяют хирургу значительно свободнее манипулировать лазерным скальпелем. Главное же, передача излучения по тонким световодам (их диаметр порядка 1 мм) делает возможным выполнение хирургических операций принципиально нового типа. Обычно при операции, например, на желудке необходимо предварительно сделать вскрытие брюшной полости. Использование же тонких световодов позволяет (при некоторых заболеваниях) обойтись без вскрытия: гибкий «лазерный скальпель» вводят внутрь желудка через рот и пищевод и производят операцию, так сказать, изнутри.

Недавно в нашей стране сделана первая в мире операция с помощью лазера, восстанавливающая кровоснабжение сердца.

Лазерной хирургии принадлежит большое будущее. Залог тому — широкие экспериментальные исследования возможностей применения лазеров в самых различных направлениях этой отрасли медицины.

Ученые разных специальностей — медики, биологи, химики, физики — совместно изучают воздействие лазерного излучения на энергетические процессы в нервной системе; на защитные и восстановительные способности организма; на состав крови и процесс кроветворения; на злокачественные опухоли.



Лазерная хирургическая установка «Скальпель-1» с лазерным хирургическим инструментом «Скальпель-2».

Еще раз хочется сказать: круг мирных профессий лазерного луча очень широк. Мы коснулись лишь некоторых из них.*) Но надеемся, что уже этот короткий обзор дал вам почувствовать, сколь плодотворно и перспективно использование лазеров в мирных целях, на благо человека.

---

*) Принцип действия световодов основан на явлении полного внутреннего отражения: луч, вошедший в световод, испытывает полное внутреннее отражение при каждом попадании на внутреннюю стенку световода. В гибких световодах это условие выполняется и при сгибании самого световода.

*) В этом году издательство «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу Л. В. Тарасова «Лазеры: действительность и надежды», в которой читатель найдет подробный рассказ о различных применениях лазеров. (*Примеч. ред.*)

Почему не уменьшится сопротивление

Кандидат физико-математических наук
О. В. ЛЯШКО

Хотя в этой статье решается чисто физическая задача, перед вами — статья по математике. Для ее понимания не требуется серьезных знаний по физике; статья не ставит себе целью подробно описать какие-либо глубокие физические явления. Как часто бывает в приложениях математической науки, здесь строится математическая модель рассматриваемой ситуации и вводится математический аппарат, применение которого дает простое решение исходной задачи, а также позволяет ответить на многие другие вопросы, не только по физике — но и по экономике и геометрии.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резисторов, и измерим общее сопротивление R цепи между двумя ее точками A и B. Предположим теперь, что один из резисторов сгорел и его сопротивление возросло*). Вновь измерим сопротивление R между A и B. Как вы думаете, может ли тогда оказаться, что сопротивление R 1) увеличилось? 2) осталось неизменным? 3) уменьшилось?

1) Ясно, что сопротивление увеличиться может. Например, если цепь состояла из одного или нескольких последовательно соединенных резисторов, то общее сопротивление цепи равно сумме входящих в цепь сопротивлений; поэтому — увеличилось одно из слагаемых, возрастет и сумма (рис. 1).

2) Чуть подумав, вы, наверное, сумеете привести пример, когда общее сопротивление не меняется. Две такие цепи показаны на рисунке 2. В обеих цепях увеличение сопротивления R_0 не изменяет общего сопротивления (продумайте, почему).

3) А вот попытки привести пример, когда общее сопротивление уменьшается, не приводят к успеху. Так может ли это быть?

— Конечно, нет, — правильно ответит здравомыслящий читатель (так, во всяком случае, отвечают все мои знакомые). Но на вопрос почему этого не может быть, точного ответа от них мне не довелось услышать. Это не удивительно. Ответ на этот вопрос, то есть строгое математическое доказательство того, что при увеличении одного из сопротивлений любой резисторной цепи ее общее сопротивление уменьшиться не может, совсем не прост. Он основан на одном глубоком принципе, который можно назвать *принципом минимальности* (физики чаще говорят *принцип наименьшего действия).*

---

*) Случай, когда резистор разрушился (перестал проводить ток), мы не исключаем, считая, что его сопротивление «возросло до бесконечности».

Суть его в следующем: многие физические процессы происходят таким образом, что некоторая величина принимает минимальное значение. Так, например, мыльная пленка, натянутая на проволочный контур в пространстве, выбирает из всех возможных форму ту, при которой ее площадь минимальна. Луч света в среде с переменным показателем преломления из всех возможных траекторий выбирает ту, при которой время его путешествия минимально («принцип Ферма»). Дождевая капля, стекающая вниз с выпуклой горы, выбирает тот путь между данными уровнями, чья длина наименьшая и т. п.

Поэтому, чтобы решить соответствующую задачу (найти форму пленки, или траекторию луча, или путь капли), нужно найти минимум соответствующей функции (площади, или времени, или длины). Вот здесь, конечно, и нужна математика: математическая формулировка принципа минимальности, математические приемы для его использования.

Я думаю, читателю будет интересно не столько установление самого факта, сколько эти приемы и принципы. Впрочем, любопытный читатель, наверное, уже сейчас задаст себе такой вопрос: как это можно дать «строгое математическое доказательство» факта (в данном случае физического), не имеющего к математике никакого отношения? Попробуем, забегая вперед, сначала наметить ответ на этот вопрос.

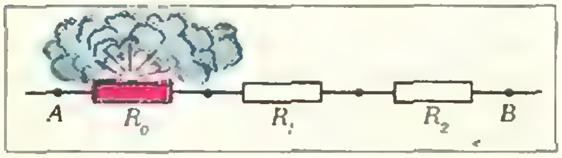


Рис. 1.

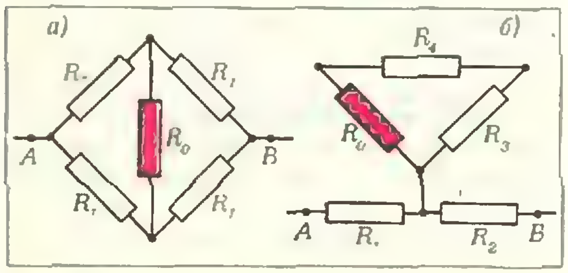


Рис. 2.

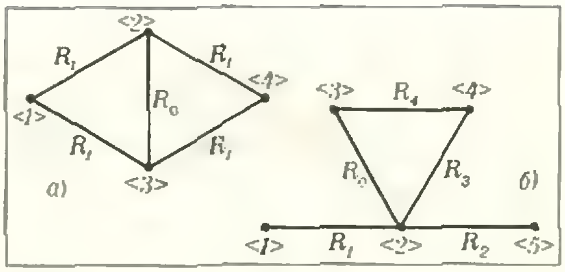


Рис. 3.

Когда математик берется за решение прикладной задачи, он обычно начинает с построения ее *математической модели*. Для этого он должен выделить нужные для описания задачи основные понятия и отбросить те стороны явления, которые не существенны для ее решения. В результате возникает абстрактное описание задачи, в котором *реальные* предметы и явления заменены на математические абстракции (точки, линии, числа, функции), а законы, которым подчинены эти явления, выражаются в виде уравнений. Так, наша электрическая цепь превратится в «нагруженный граф», сопротивления станут числами, закон Ома и правила Кирхгофа запишутся в виде «основной системы уравнений». Мы забудем, что изоляция проводов сработана из пластмассы желтого цвета, что проводники и резисторы сделаны из каких-то металлов, что ток — «это бегущие электроны»: все это для нас станет одинаково несущественным. Но я, наверное, слишком забежал вперед. Обо всем по порядку.

Нагруженный граф (или электрическая цепь)

Сопоставим каждой электрической цепи *нагруженный граф*, то есть конечную совокупность точек плоскости или пространства (их называют *вершинами*) и некоторый набор соединяющих точки дуг (*ребра* графа), на которых написаны числа (*нагрузки* ребер). Например, электрическим цепям на рисунке 2 сопоставляются графы, показанные на рисунке 3; более сложный пример графа показан на рисунке 4.

Вершины перенумеруем числами от 1 до n; вершину с номером i будем обозначать $\langle i \rangle$. Мы будем рассматри-

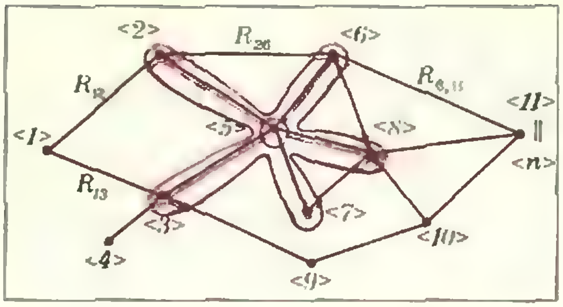


Рис. 4.

вать только такие графы, у которых каждые две вершины соединены **не более чем одним** ребром; ребро, соединяющее вершины $\langle i\rangle$ и $\langle j\rangle$, будем обозначать $\langle i, j\rangle$; при этом вершина $\langle i\rangle$ называется *началом* ребра, а $\langle j\rangle$ — его концом. Например, на графе, приведенном на рисунке 4, ребра $\langle 2, 3\rangle$ нет вовсе. Нагрузку на ребре $\langle i, j\rangle$ мы будем обозначать R_{ij} и, помня исходную задачу, часто будем называть *сопротивлением* (хотя в нашей математической модели R_{ij} — просто число).

Наконец, *окружением* вершины $\langle i\rangle$ мы будем называть совокупность всех вершин, соединенных с вершиной $\langle i\rangle$ ребрами, и обозначать S_i. Окружения вершины $\langle 5\rangle$ графа на рисунке 4 выделены красным цветом.

Гармонический потенциал (или цепь под напряжением)

Пусть дан нагруженный граф Г с вершинами $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \ldots, \langle n\rangle$, ребрами $\langle i, j\rangle$ и нагрузками R_{ij}. Наша цель — граф Г (математическую модель электрической цепи) *поставить под напряжение*. Математически это означает следующее.

Прежде всего, нужно *создать разность потенциалов на входе и выходе нашей цепи (на вершинах $\langle 1\rangle$ и $\langle n\rangle$ графа)*, то есть выбрать произвольно два числа φ_1 и φ_n. Далее следует подобрать числа $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ (*значения потенциала*) для остальных вершин, но теперь уже не произвольно, а так, чтобы выполнялась некоторая система уравнений, которую мы назовем «основной системой». Прежде чем ее выписать, я поясню, откуда она берется. Рассмотрим любую вершину нашей цепи, например вершину $\langle 5\rangle$. Так как в этой вершине нет источника тока, в нее «втекает» такой же ток, какой «вытекает». Эта закономерность называется **первым правилом Кирхгофа** и обычно формулируется так: *алгебраическая сумма токов, идущих по всем ребрам, выходящим из одной вершины, равна нулю.* (О правилах Кирхгофа можно прочитать в этом номере «Кванта» на с. 26). Если ток, идущий по ребру $\langle i, j\rangle$, обозначить через I_{ij}, то правило Кирхгофа для вершины $\langle 5\rangle$ можно записать так (см. рис. 5):

$$I_{52}+I_{56}+I_{58}+I_{57}+I_{53}=0.$$

Воспользовавшись знаком суммы Σ и записью S_5 для окружения вершины $\langle 5\rangle$, это уравнение можно записать короче:

$$\sum_j I_{5j}=0 \text{ (сумма берется по } j\in S_5).$$

Для произвольной вершины $\langle i\rangle$, где $i=2, \ldots, n-1$, соответствующее уравнение имеет вид:

$$\sum_j I_{ij}=0 \text{ (сумма по } j\in S_i).$$

Теперь вспомним, что по закону Ома ток I_{ij} равен отношению напряжения (разности потенциалов) $U_{ij}=\varphi_i-\varphi_j$ к сопротивлению, то есть $I_{ij}=(\varphi_i-\varphi_j)/R_{ij}$. Поэтому *основная система уравнений* запишется в виде

$$\boxed{\sum_j \frac{\varphi_i-\varphi_j}{R_{ij}}=0\ (j\in S_i),\ i=2, \ldots, n-1.} \tag{1}$$

Поскольку неудобно все время говорить о потенциале, который удовлетворяет системе уравнений (1), мы придумаем для него специальное название. А именно, назовем такой потенциал *гармоническим*. (А слово *потенциал* без этого прилагательного означает **произвольную** функцию на вершинах графа, то есть любой набор чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.)

Теперь можно дать точную математическую формулировку исходной задачи. Предположим, что одну из нагрузок (сопротивлений) R_{ij} графа Г заменили на бо́льшую: $R'_{ij}>R_{ij}$. Может ли тогда увеличиться общее сопротивление, то есть число

$$\boxed{R=\frac{\varphi_1-\varphi_n}{I}, \text{ где } I=\sum_j \frac{\varphi_1-\varphi_j}{R_{1j}}\ (j\in S_1)?} \tag{2}$$

(Физический смысл этих соотношений ясен: здесь, по первому правилу Кирхгофа, I — это ток, втекающий*)

---

*) Или вытекающий из вершины $\langle n\rangle$:

$$I=\sum_j\left(-\frac{\varphi_n-\varphi_j}{R_{nj}}\right)\ (j\in S_n). \tag{2'}$$

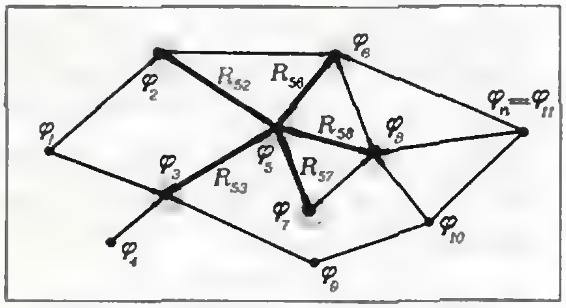


Рис. 5.

в первую вершину $\langle 1\rangle$, $\varphi_1-\varphi_n$ — это разность потенциалов на входе и выходе, стало быть, по закону Ома, R — общее сопротивление цепи.)

Существование гармонического потенциала (или расчет резисторной цепи)

Математически задача расчета резисторной цепи, поставленной под напряжение, состоит в следующем. Дан граф Г с нагрузками R_{ij} и выбраны значения потенциала φ_1, φ_n на входе и выходе; требуется найти гармонический потенциал с этими данными значениями на входе и выходе, то есть решить основную систему (1) относительно неизвестных $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ при данных φ_1, φ_n.

Физики знают из практики, что первого правила Кирхгофа (то есть системы (1)) хватает для расчета любых резисторных цепей. Математикам, конечно, этого мало — им нужна соответствующая общая теорема. И она есть:

Теорема 1. *Для любого графа* Г *с положительными нагрузками* R_{ij} *и любыми значениями потенциала* φ_1, φ_n *на входе и выходе существует единственный гармонический потенциал* φ.

Я не привожу прямого доказательства теоремы по двум причинам. Во-первых, оно нам в дальнейшем не потребуется. Во-вторых, для строгого доказательства нужны некоторые понятия из «линейной алгебры», дисциплины, не изучаемой в обычной средней школе. Идея же доказательства состоит в том, что у основной системы всего $n-2$ неизвестных $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ и столько же (линейных) уравнений, притом эти уравнения независимы, и потому имеют единственное решение.

Упражнения

1. Найдите другое доказательство теоремы 1, опирающееся на основную теорему (см. с. 14).

2. Проверьте, что в случае графов 2,*а* и 2,*б* ток действительно не течет по ребрам с сопротивлением R_0 (то есть разность потенциалов на концах этих ребер равна нулю).

3. Докажите в общем случае, что при $\varphi_1=\varphi_n$ общий ток (см. формулу (2)) равен нулю.

4. Составьте основную систему уравнений для графа на рисунке 4 и прикиньте, сколько нужно времени для ее решения вручную. Если вы умеете программировать, подумайте, как подключить к этой задаче компьютер.

5. Удвойте одно из сопротивлений на графе 2,*а* и сосчитайте, на сколько увеличится его общее сопротивление.

6. Докажите, что из уравнений (1), (2) и закона Ома следует (2′), а из (1), (2′) и закона Ома следует (2).

Для любого нагруженного графа (электрической цепи) Г с вершинами $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, ..., \langle n\rangle$ и положительными нагрузками (сопротивлениями) R_{ij} на ребрах мы знаем, что можно сосчитать гармонический потенциал φ этого графа, то есть для произвольных значений потенциала φ_1, φ_n на входе и выходе находить остальные значения $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ потенциала, решая систему уравнений (1). Далее, подставляя полученные значения потенциала в соотношения (2), мы можем найти общее сопротивление цепи R. Для конкретной цепи всегда можно таким образом проверить, уменьшилось ли общее сопротивление при увеличении одного из R_{ij} или нет. Но нам этого мало — мы хотим доказать общий факт, установить, что при увеличении одного сопротивления общее сопротивление никогда не уменьшается, независимо от конкретного выбора цепи.

К сожалению, доказать этот факт непосредственно из уравнений (1) и формулы (2) не удается (попробуйте!). Как говорится — нужна идея!

Квадратичная функция (или тепловая мощность цепи)

Эту идею нам подскажет не математическая интуиция, а один из тех принципов минимальности, о котором шла речь в начале статьи: напряжение в резисторной электрической цепи распределяется согласно такому принципу. Оказывается, ток «ленивый»: из всех возможных вариантов поведения он выбирает тот, при котором его энергетические затраты (мощность, выделяющаяся на проводниках электрической цепи) минимальны. Напомним, что при прохождении по проводнику с сопротивлением R_{ij}

тока I_{ij}, соответствующего разности потенциалов $U_{ij}=\varphi_i-\varphi_j$, на проводнике $\langle i, j\rangle$ выделяется тепловая мощность (то есть количество тепла за единицу времени), равная

$$q_{ij}=R_{ij}I_{ij}^2=U_{ij}I_{ij}=U_{ij}^2/R_{ij}=(\varphi_i-\varphi_j)^2/R_{ij},$$

а на всей цепи — мощность $Q=\Sigma q_{ij}$, где сумма берется по всем ребрам $\langle i, j\rangle$ нашего графа. Общая мощность Q зависит от значений потенциала $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; поэтому общую мощность мы будем записывать в виде $Q[\varphi]$.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение функцию

$$\boxed{Q[\varphi]=\Sigma q_{ij}, \text{ где } q_{ij}=\frac{(\varphi_i-\varphi_j)^2}{R_{ij}},} \qquad (3)$$

которую мы будем называть *квадратичной*. (Сумма в выражении (3) берется по всем ребрам $\langle i, j\rangle$ нашего графа.)

Подчеркнем, что с математической точки зрения мы просто дали определение некоторой функции Q на множестве всех потенциалов φ графа Г и (исходя из физических соображений) интересуемся ее минимумом.

Квадратичная функция Q сама зависит не от числовой переменной, а от другой функции — потенциала φ. Такие «функции от функций» математики называают *функционалами*. Поиск их экстремумов — одна из важных задач *вариационного исчисления*, замечательной ветви математики, зародившейся еще в работах Я. Бернулли, Эйлера и Лагранжа.

Упражнение 7. Выпишите квадратичную функцию Q для графа на рисунке 4. Подумайте, есть ли у вас методы для поиска его минимума.

Указание. Функция Q зависит от $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{11}(=\varphi_{n-1})$, то есть от нескольких переменных. В школе изучают только методы поиска экстремумов функций от одной переменной, поэтому поиск минимума Q — пока недоступная для вас задача.

Минимальный принцип (или принцип наименьшего действия)

Наша ближайшая цель — найти минимум квадратичной функции Q. Но есть ли у нее минимум? Начнем с ответа на этот вопрос. Наш читатель, конечно же, угадал, что ответ — положительный (это тоже «физически очевидно»). Те, кто готов принять на веру это утверждение, могут пропустить доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Для функции Q существует набор значений переменных $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, при котором она достигает минимального значения.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\varphi_1 \geqslant \varphi_n$. Обозначим через M множество всех наборов значений переменных $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, удовлетворяющих условиям $\varphi_1 \geqslant \varphi_i \geqslant \varphi_n$ при всех i. Рассмотрим какой-нибудь набор значений $(\varphi_2', \ldots, \varphi_{n-1}') \notin M$ и построим по нему новый набор значений $(\varphi_2'', \ldots, \varphi_{n-1}'') \in M$, заменив все значения, большие чем φ_1, на φ_1, и все значения, меньшие φ_n, на φ_n. При этом, как легко видеть, значение функции Q уменьшится:

$$Q(\varphi_2'', \ldots, \varphi_{n-1}'')<Q(\varphi_2', \ldots, \varphi_n').$$

Таким образом, наименьшее значение Q на множестве M будет и наименьшим значением Q на всем множестве потенциалов. Нам остается сослаться на теорему Вейерштрасса из анализа, которая утверждает, что непрерывная функция (Q) на замкнутом ограниченном множестве (M) достигает своего наименьшего значения. (Эту теорему в школе не проходят: точное объяснение понятий непрерывности, замкнутости и ограниченности, использующихся в ней, завело бы нас слишком далеко, так что мы не станем здесь этим заниматься.)

Доказательство — типичное для математической «теоремы существования» — не дает нам ни способа найти интересующий нас минимум, ни способа как-либо описать его. Однако следующая теорема, выражающая минимальный принцип для нашей ситуации, характеризует искомый минимум.

Основная теорема. *Потенциал, на котором достигается минимальное значение функции Q, — гармонический.*

Доказательство. Пусть φ^0 — потенциал, на котором достигается наименьшее значение. Нам нужно доказать, что числа $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0, \varphi_n^0$, где $\varphi_1^0=\varphi_1$, $\varphi_n^0=\varphi_n$, являются решением системы уравнений (1). Зафиксируем все переменные, кроме одного — φ_j. Тогда функция

$$Q(\varphi_2^0, \ldots, \varphi_{j-1}^0, \varphi_j, \varphi_{j+1}^0, \varphi_{n-1}^0)$$

одной переменной φ_j также достигает минимума при $\varphi_j=\varphi_j^0$.

Эта функция является квадратным трехчленом по φ_j: $Q=a\varphi_j^2+b\varphi_j+c$, причем коэффициенты a и b легко вычислить, раскрывая скобки в выражении (3):

$$a=\Sigma \frac{1}{R_{ij}}, \quad b=-2\Sigma \frac{\varphi_i^0}{R_{ij}}$$

(здесь суммы берутся по всем i, для которых $\langle i\rangle \in S_j$).

Так как минимум функции $a\varphi_j^2+b\varphi_j+c$ $(a>0)$ достигается в точке φ_j^0, которая удовлетворяет уравнению $a\varphi_j^0+b/2=0$, мы получим, подставляя в него выражения для коэффициентов a и $в$,

$$\sum\varphi_j^0/R_{ij}-\sum\varphi_i^0/R_{ij}=\sum(\varphi_j^0-\varphi_i^0)/R_{ij}=0.$$

Таким образом, $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0, \varphi_n^0$ — решение системы (1), что и требовалось доказать.

И, наконец, последний вопрос, на который мы ответим: чему равно минимальное значение функции Q. Как чему? — удивится знающий физику читатель, — минимальное значение Q — это сумма мощностей тепла, выделяющегося на проводниках нашей цепи, значит — это общая мощность тепла, выделяющегося на всей цепи, значит — это U^2/R. Стоп! Мы определили тепловую мощность формулой U_{ij}^2/R_{ij} только для одного проводника, а не для всей цепи. Величина R и значение минимума Q находятся независимо друг от друга по величинам R_{ij}, $U=\varphi_1-\varphi_n$. Так что математически не очень ясно, почему это правильный ответ. Опять, те кто верят, что он правильный, могут следующую теорему пропустить.

Теорема 3. *Минимальное значение функции Q равно U^2/R, где R — общее сопротивление электрической цепи.*

Доказательство. Пусть $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ — набор чисел, на котором достигается минимум функции Q. Тогда, по основной теореме, — это решение системы уравнений (1). Следовательно, нам нужно показать, что $(\varphi_1-\varphi_n)^2/R=(\varphi_1-\varphi_n)I$ равно выражению

$$\sum(\varphi_i-\varphi_j)I_{ij} \text{ (сумма по всем ребрам } \langle ij\rangle),$$

где величины токов I и I_{ij} подчиняются первому правилу Кирхгофа (1), (2). Раскроем скобки в (1) и вычислим коэффициент при φ_i. Значение потенциала φ_i умножается на величины всех токов I_{ij}, проходящих по ребрам $\langle i, j\rangle$, выходящим из вершины $\langle i\rangle$ (если номер j меньше номера i, то φ_i умножается на $-I_{ji}=I_{ij}$). Поэтому коэффициент при φ_i равен

$$\sum I_{ij} \text{ (сумма по } \langle j\rangle \in S_i)$$

и, значит, равен нулю для всех $i\neq 1, n$, из (1). Коэффициенты при φ_1 и φ_n равны соответственно I и $-I$ из (2) и (2′), следовательно, суммируя по всем ребрам,

$$\sum(\varphi_i-\varphi_j)I_{ij}=\varphi_1\cdot I+\varphi_n(-I)=(\varphi_1-\varphi_n)I.$$

Решение исходной задачи

Пусть мы увеличили одно (или некоторые) из сопротивлений ребер: $R'_{ij}\geqslant R_{ij}$. Тогда для функций $Q=\sum(\varphi_i-\varphi_j)^2/R_{ij}$ и $Q'=\sum(\varphi_i-\varphi_j)^2/R'_{ij}$, (суммирование по всем ребрам $\langle ij\rangle$ нашего графа) справедливо неравенство $Q'[\varphi]\leqslant Q[\varphi]$ для любого потенциала φ, с данными φ_1 и φ_2 на входе и выходе. Очевидно, что то же неравенство справедливо и для их минимальных значений:

$$\min Q'=\frac{(\varphi_1-\varphi_n)^2}{R'}\leqslant\min Q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R},$$

а значит $R\leqslant R'$, что и требовалось доказать.

Другие применения нашей математической модели

А стоит ли игра свеч? — может спросить читатель. Нужно ли разводить такой математический формализм ради задачи, которая и так физически очевидна?

Математические модели создаются не только для того, чтобы математикам было удобнее работать. Отбрасывая конкретную специфику прикладной задачи, часто приходят к моделям, которые оказываются применимыми к совсем другим задачам, из совсем других областей человеческой деятельности. Исследование таких моделей позволяет, образно говоря, одним камнем убить много зайцев.

Здесь мы ограничимся перечислением некоторых ситуаций, в которых наш аппарат нагруженных графов (или его модификации) успешно работает.

1) *Сеть из резинок на прямой.* В системе из n точек на прямой некоторые пары соединены резинками известной жесткости; концевые точки растягиваются (к ним прикладываются известные силы); требуется определить положение равновесия точек.

2) *Второе правило Кирхгофа и формула Эйлера.* Это правило (см. с. 27 в этом номере) также удобно применять при расчете электрических цепей. Оказывается, что соответствующая математическая теория связана с формулой Эйлера $В-Р+Г=1$, где $В$, $Р$, $Г$ числа вершин, ребер и областей, ограниченных плоским графом.

3) *Транспортные потоки.* Плоский граф может изображать сеть дорог (авиалиний, железных дорог) между городами, нагрузки — определять стоимость перевозок между соседними городами; требуется найти минимальное по стоимости распределение транспортных потоков. Интересно, что на практике такие экономические задачи решаются моделированием транспортной сети с помощью электрической сети: оператор вводит данные о количестве транспортируемого товара и о стоимости перевозок, ставит сеть под напряжение и считывает ответ с соответствующих амперметров!

4) *Совершенные прямоугольники.* Так называются прямоугольники, которые можно разбить на конечное число квадратов разных размеров. Как это ни странно, все совершенные прямоугольники находятся построением и расчетом некоторых нагруженных графов!

Этот список можно было бы продолжить, но к этим вопросам «Квант» надеется в скором времени вернуться.

Белая мгла, или Не верь глазам своим

Кандидат технических наук
Ф. Н. СКЛОКИН

...Густой туман тонким слоем лежит на поверхности земли и насквозь пронизывается ярким весенним арктическим солнцем. Освещенность настолько велика, что без темных очков невозможно смотреть ни вдаль, ни перед собой. Белое, ослепительно яркое снежное покрытие океана полностью сливается на расстоянии нескольких метров с окружающим воздушным пространством, словно вы находитесь на дне банки с молоком. Предметы не отбрасывают тени, в окружающем ландшафте почти отсутствует контрастность...

Это — белая мгла, одно из необычных явлений природы, которое можно наблюдать иногда зимой в горах и почти всегда — весной в Арктике. В белой мгле зрительные ощущения очень часто не соответствуют действительной, реальной картине окружающего вас пространства. И это приводит иногда к довольно неприятным последствиям.

Основное препятствие на пути лыжников, идущих к Северному полюсу,— торосы. Размеры торосов — от нескольких десятков сантиметров до нескольких метров; их надо либо обходить, либо карабкаться через них, преодолевая «в лоб». В белой мгле внешний вид торосов преображается. Нередко впереди себя вы четко видите вмятину в снежном покрове. Но вот вы хотите пронести лыжу над вмятиной и... натыкаетесь на припорошенный снегом кусок льда. В результате этой неожиданной встречи вы теряете равновесие, падаете; а за плечами тяжелый рюкзак. Уже лежа, вы видите, что перед вами действительно торос, и сколько бы вы теперь ни смотрели на него, он не превратится во вмятину.

Хочу привести один случай из наших полярных экспедиций. Это было в первых числах мая во время лыжного перехода через пролив Лонга на остров Врангеля. Была самая настоящая белая мгла. Я внимательно всматривался в лыжню, проложенную идущими впереди товарищами, и вдруг заметил, что она стала выпуклой — след от лыж стал на десяток сантиметров выше, чем поверхность снежного покрова. Тут же я перевел взгляд на кончики своих лыж. Нет, лыжи вдавливались в снег. Но стоило отвести взор от лыж, как лыжня сразу же становилась выпуклой. Мне было ясно, что это лишь оптический эффект, но отделаться от этого «наваждения» было непросто.

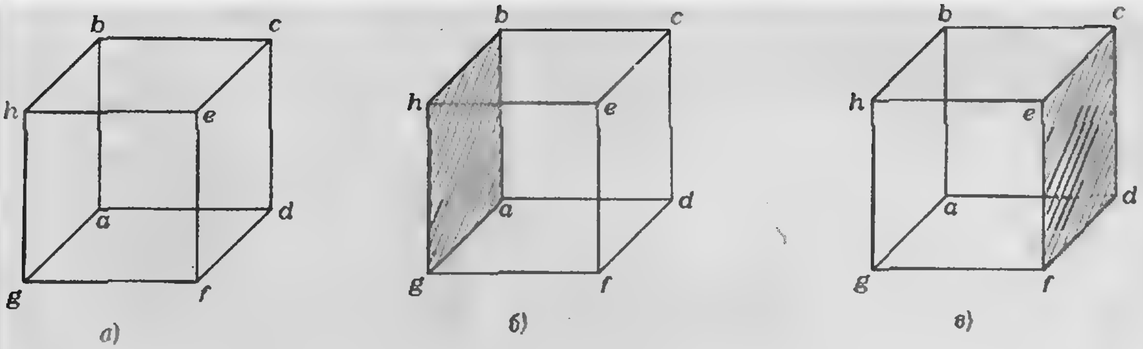


Рис. 1.

Объяснение подобным эффектам довольно несложное. Как известно, зрительное ощущение рельефа создается за счет тени. А в белой мгле в условиях сильного рассеянного света теней у предметов почти нет, и это вызывает зрительный эффект превращения выпуклого участка в вогнутый и наоборот.

Нечто подобное каждый может испытать дома, не отправляясь в Арктику. Нарисуйте на листе бумаги перспективное изображение куба — такое, как на рисунке 1, *а*. Попробуйте сосредоточить взгляд поочередно то на точке *a*, то на точке *e*. Вам будет казаться, что перспектива меняется: ближней будет то грань *abcd*, то грань *efgh*. Но если «затенить» грань *bagh*, то все сомнения отпадут: ближняя грань — это *bcda* (рисунок 1, *б*). «Затените» грань *cdfe* — и ближней станет грань *efgh* (рисунок 1,*в*).

Но вернемся в белую мглу Арктики, которая приготовила путешественникам еще один зрительный эффект.

Окружающий снежный покров сливается с туманом. Глядя вперед, вы видите какой-то предмет, парящий в «молоке» белой мглы. Вам кажется, что он еще довольно далеко, но вдруг этот предмет неожиданно вырастает перед вами. Если это торос, вы просто натыкаетесь на него.

Вот еще два случая из полярных экспедиций. Группа участников зимнего похода по Приполярному Уралу попала в белую мглу. Поднимались по снежному склону; впереди на пути чернел какой-то предмет. Стали спорить, как долго до него идти. Одни уверяли, что это камень, лежащий недалеко; другие — что это далекий утес. На самом же деле оказалось, что это был скальный выступ, до которого пришлось идти вверх по склону почти километр. А во время экспедиции по Северной земле произошел прямо противоположный случай. За скалу, которая виднелась, как казалось, в нескольких километрах, приняли всего-навсего камень с куриное яйцо величиной, лежащий в нескольких десятках шагов.

Известный полярный путешественник Фритьоф Нансен в своей книге «Во мраке льда и ночи» приводит интересный пример потери зрительного ощущения реальных размеров предметов в туманную погоду в Арктике. В проливе Дробак в Норвегии перед носом его экспедиционного корабля «Фрам» неожиданно выросла большая земля, и лоцман скомандовал: «Полный назад!» Когда «Фрам» осторожно подошел поближе, землею оказался кусок плывшего по воде черпака.

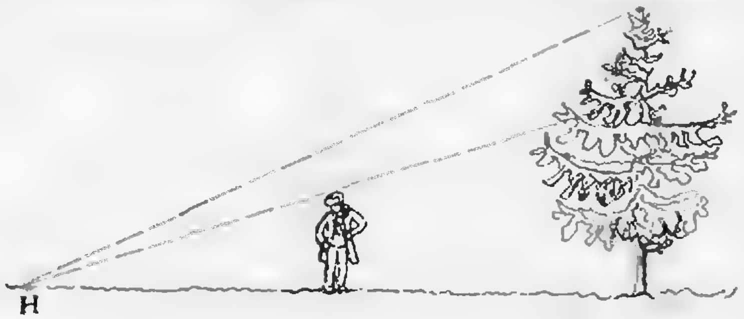


Рис. 2. Если l_1 *— расстояние до человека,* l_2 *— расстояние до дерева,* h_1 *— рост человека, то высота дерева —* $h_2 \approx \frac{3}{2} h_1 \frac{l_2}{l_1}$.

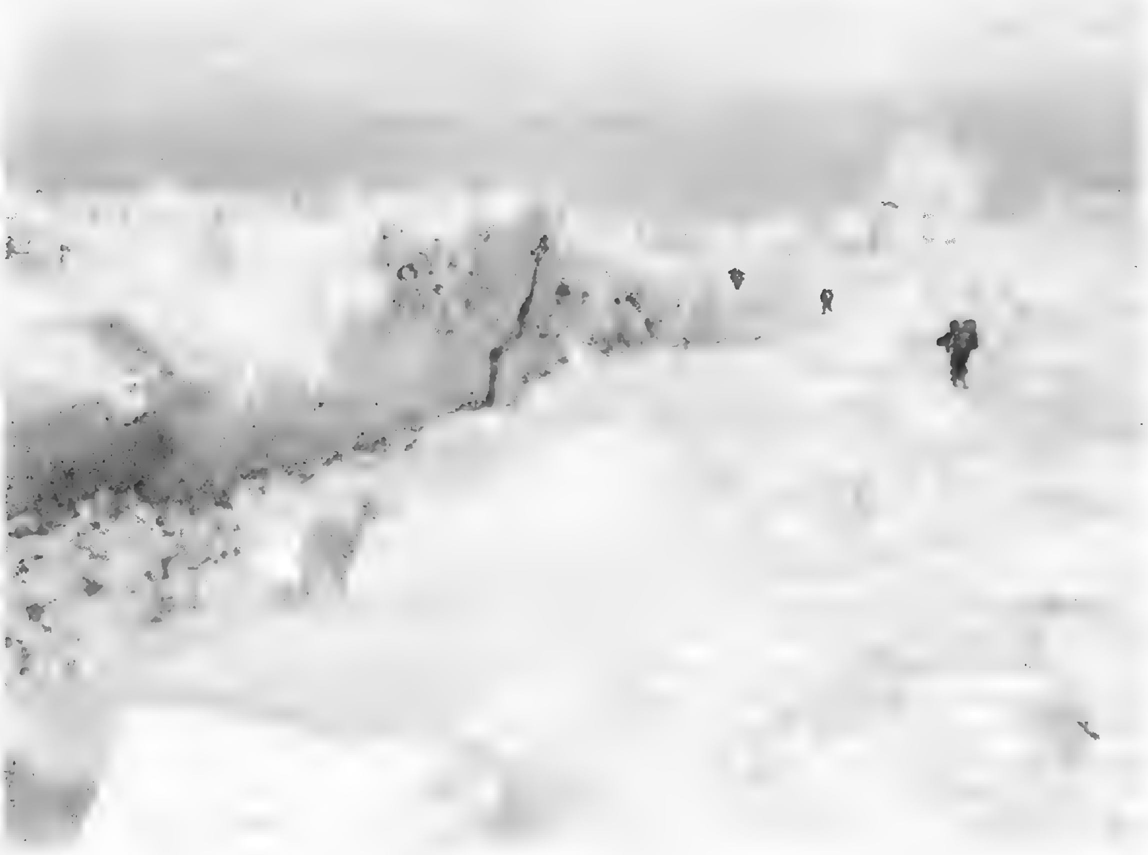
Эти обманы зрения объяснить нетрудно. О размерах предметов можно судить, если есть информация об их удаленности от нас и возможность зрительно сравнивать их величину с размерами известного эталона — например, с фигурой человека.

Если наблюдатель, находящийся в точке Н (рисунок 2), знает примерные расстояния до человека и до оцениваемого предмета и знает примерный рост человека, он может из сравнения этих данных найти приблизительную высоту предмета.

Зная реальные размеры объекта, мы можем по его видимым размерам оценить расстояние до него. В этом нам помогают окружающие предметы, ландшафт.

При оценке удаленности и величины предметов в Арктике наблюдателю не с чем сравнивать. Зрительный образ тороса не является эталоном — ведь торос может иметь любые размеры: от сантиметров до метров. Окружающий ландшафт, а в белой мгле — практически отсутствие такового, не дает возможности оценить расстояние. Отсюда такая неопределенность в оценке видимых размеров предметов в белой мгле.

Вот какие коварные сюрпризы готовит Арктика путешественникам, идущим сквозь белую мглу.



Пары чисел и действия с ними

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Содержание этой статьи в основном доступно ученикам седьмого класса. Однако мы рекомендуем ее также и старшеклассникам. В статье речь идет о решениях уравнений с двумя переменными в целых числах. В связи с этим рассматриваются различные правила умножения пар чисел, в том числе и умножение комплексных чисел.

1. Уравнение $ax-by=c$ в целых числах

Рассмотрим уравнение

$$8x-5y=19.$$

На примере этого уравнения мы продемонстрируем метод решения в целых числах линейных уравнений вида $ax-by=c$ с целыми a, b и c.

Поскольку $8\cdot3-5\cdot1=19$, пара чисел $x=3$, $y=1$ является решением исходного уравнения. Это решение мы нашли простым подбором.

Покажем теперь, как, имея одно решение, можно записать все остальные решения (их бесконечно много). Вычитая из уравнения $8x-5y=19$ равенство $8\cdot3-5\cdot1=19$, получаем $8(x-3)-5(y-1)=0$, или $x-3=5(y-1)/8$. Из последнего равенства видно, что число $x-3$ будет целым тогда и только тогда, когда $y-1$ делится на 8, то есть $y-1=8n$, где n — какое-нибудь целое число. Подставляя $y-1=8n$ в числитель дроби $5(y-1)/8$ и сокращая ее на 8, получаем $x-3=5n$.

Тем самым, все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x=3+5n, \\ y=1+8n, \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix};$$

здесь n — любое целое число.

Второй вид записи будет подробно объяснен в следующем пункте, а сейчас заметим, что тем же методом получается формула для всех целых решений любого уравнения $ax-by=c$ (где a и b — взаимно простые числа):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $(x_0;\ y_0)$ — какое-нибудь одно его целое решение.

Для решения предложенных ниже задач надо иметь ввиду следующие обстоятельства. Если целые числа a и b имеют общие делители (кроме 1 и —1), то надо разделить все члены уравнения на их наибольший общий делитель. В случае, когда c не делится на него, уравнение, очевидно, не имеет целых решений, а в случае, когда делится, такие решения существуют — надо только подобрать одно какое-нибудь решение и записать по формуле (*) все остальные.

Для любых чисел a и b имеется общий метод нахождения одного решения уравнения: этот метод основан на алгоритме Евклида (см. [1] и [5]).

Задачи

1. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах: а) $7x-5y=0$; б) $7x-5y=1$; в) $15x-9y=6$; г) $39x-63y=47$?

Если уравнение имеет решения, то укажите одно из них и запишите по общей формуле все его решения.

2. Сколько решений в натуральных (целых положительных) числах x, y имеют уравнения: а) $19x+85y=1985$; б) $7x+5y=99$?

3*. Автомат делает на ленте длиной 2 м синие пометки от ее начала через каждые 7 см и красные пометки тоже от ее начала через каждые 5 см. Сколько раз синяя и красная пометки окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

2. Пары чисел

Если решения уравнения с одним переменным x представляют собой отдельные числа, то решения уравнения с двумя переменными x и y — это уже пары чисел. В предыдущем пункте мы показали, как из одного целого решения уравнения $ax-by=c$ получать все остальные решения: надо к одному его решению — паре чисел $(x_0;\ y_0)$ — прибавить пару чисел $(b;\ a)$, умноженную на какое-нибудь целое число. Сейчас мы придадим точный смысл сложению пар чисел и умножению их на числа.

Для большей наглядности нам удобно пары чисел $(x;\ y)$ записывать в виде *столбиков* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; а сами числа x и y мы будем называть соответственно первой и второй *компонентами* данной пары (столбика). (Не надо путать столбик $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ с дробью $\frac{x}{y}$!)

Два столбика считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ только если } \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Сложить два столбика — это значит сложить их компоненты:

$$\text{пусть } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{тогда } u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как от перемены мест слагаемых сумма чисел не меняется: $a + b = b + a$, то же самое можно сказать и про столбики: $u + v = v + u$. Для столбиков верно также правило $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Умножить столбик u на число k — это значит умножить на k обе его компоненты:

$$\text{если } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ то } ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Особую роль, подобную той, которую для чисел играет число 0, для столбиков играет нулевой столбик $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если это не приводит к путанице, то его обозначают тоже через «0». Для всякого столбика u верно равенство $u + 0 = u$.

Казалось бы, столь же естественно ввести умножение столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Для такого умножения выполнены все те же свойства, что и для умножения чисел: 1) $uv = vu$, 2) $u(vw) = (uv)w$. 3) $(u + v)w = uw + vw$. Роль «единицы» играет столбик $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но в отличие от чисел, здесь не всегда возможно деление на ненулевой столбик. Например, если $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то не существует столбика v такого, что $uv = e$.

В конце статьи мы познакомимся с другим, как оказывается, тоже естественным и более содержательным правилом умножения пар чисел:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Это правило замечательно тем, что для него обратная операция — деление на ненулевой столбик — всегда возможна.

Пара чисел $(x;\ y)$, записанная не в виде столбика, а в виде строчки, используется обычно для обозначения координат точки на координатной плоскости Oxy. Метод координат позволяет связать алгебру с геометрией. Так, например, уравнение $ax - by = c$ соответствует прямой на координатной плоскости, а целые решения этого уравнения — точкам с целыми координатами (рис. 1). С помощью правил сложения пар чисел и умножения их на число можно записывать формулы для координат точек; например, если $A = (x_1;\ y_1)$, $B = (x_2;\ y_2)$ — две точки, то точка

$$C = \frac{1}{2}\left((x_1;\ y_1) + (x_2;\ y_2)\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

— середина отрезка AB.

Задачи

4. Даны столбики

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите столбики: а) $2u$; б) $2u - v$; в) $u + 2v - 3w$.

5. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$x\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Сравните результат с 4 в).

6. а) Пусть даны точки $A = (7;\ -1)$ и $B = (-2;\ 5)$. Найдите координаты такой точки $C = (x;\ y)$, что B — середина отрезка AC. б) Найдите координаты точек D и E, которые делят отрезок AB на три равные части.

3. Уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ в целых числах

В первом пункте мы показали, как, исходя из одного решения уравнения $ax - by = c$, получать и записывать бесконечную серию его решений. Подобный результат мы получим и для уравнения $x^2 - dy^2 = 1$, где d — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Но для этого потребуется свой, более сложный метод. Мы продемонстрируем его на примере уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Это уравнение имеет очевидные решения $(1;\ 0)$ и $(-1;\ 0)$. Ясно, что если $(x;\ y)$ — решение уравнения, то $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$ и $(-x;\ -y)$ — тоже решения. Поэтому можно ограничиться поиском только положительных (натуральных) решений. Вот два таких решения: $(3;\ 2)$, $(17;\ 12)$ — дальше в их

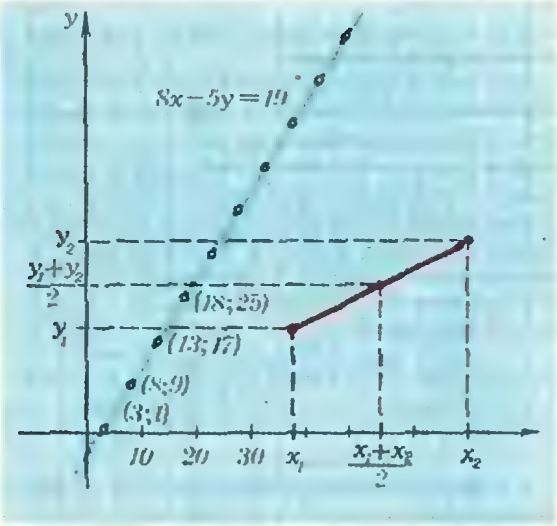


Рис. 1.

поисках продвинуться трудно.

Неожиданную помощь здесь оказывает иррациональное число $\sqrt{2}$. Пользуясь тождеством $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ разложим левую часть уравнения $x^2-2y^2=1$ на множители

$$(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})=1$$

и подставим сюда наше первое решение в натуральных числах $x=3$, $y=2$:

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1. \qquad (2)$$

Оказывается, что второе решение можно получить, если, пользуясь тождеством $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, возвести в квадрат число $3+2\sqrt{2}$ (или $3-2\sqrt{2}$):

$$(3+2\sqrt{2})^2=9+12\sqrt{2}+8=$$
$$=17+12\sqrt{2},$$
$$(3-2\sqrt{2})^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}.$$

Пара (17; 12) является вторым решением. Проверим это следующим образом. Возведем обе части верного равенства (2) в квадрат:

$$(3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2=1$$

и получим

$$(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})=1, \text{ или}$$
$$17^2-2\cdot 12^2=1.$$

Следующее новое решение можно получить, возведя число $3+2\sqrt{2}$ в куб:

$$(3+2\sqrt{2})^3=(3+2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})=$$
$$=99+70\sqrt{2}.$$

Совершенно аналогично получим $(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}$. Поскольку $(3+2\sqrt{2})^3(3-2\sqrt{2})^3=1$, имеем

$$(99+70\sqrt{2})(99-70\sqrt{2})=$$
$$=99^2-70^2\cdot 2=1,$$

то есть (99; 70) — тоже решения уравнения $x^2-2y^2=1$.

Теперь, наверное, уже ясен способ получения новых решений — надо и дальше возводить $3+2\sqrt{2}$ в степень, то есть если

$$(3+2\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n — натуральные числа, то пара $(x_n; y_n)$ является решением уравнения $x^2-2y^2=1$. Можно доказать, что этот способ дает все его решения в натуральных числах.

Рассмотрим теперь более общее уравнение такого вида:

$$x^2-dy^2=1,$$

где d — натуральное число, не являющееся полным квадратом.

Оказывается, что все его решения в натуральных числах получаются таким же методом. Надо угадать самое меньшее его решение $(x_0; y_0)$ и возводить число $x_0+y_0\sqrt{d}$ в степень n:

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^n=x_n+y_n\sqrt{d}.$$

(Самым меньшим решением называется такое решение $(x_0; y_0)$, что для любого другого решения $(x; y)$ выполняется неравенство $x_0+y_0\sqrt{d}<x+y\sqrt{d}$.)

Для любых чисел d имеется общий метод нахождения наименьшего натурального решения, основанный на разложении чисел в цепные дроби (см. [1] и [2]).

Задачи

7*. Найдите четыре решения в натуральных числах уравнения: а) $x^2-3y^2=1$; б) $x^2-5y^2=1$; в) $x^2-2y^2=-1$.

8*. Докажите, что

$$x_n=\frac{1}{2}((3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n),$$
$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}((3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n)$$

— целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2-2y^2=1$, а) для $n=1, 2, 3$; б) для любого натурального n.

9. Найдите все целые решения уравнения $x^2-4y^2=13$.

10*. Докажите, что уравнение $x^2-3y^2=-1$ не имеет решений в целых числах.

4. Числа вида $p+q\sqrt{2}$

Обратим внимание на то интересное обстоятельство, что числу вида $p+q\sqrt{2}$ с рациональными p и q можно естественно сопоставить пару чисел $(p; q)$. При этом равенство двух чисел $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ имеет место в том и только в том случае, когда $\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}$.

В самом деле, пусть $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ и $q_1\neq q_2$; тогда получится, что $\sqrt{2}$ равняется рациональному числу $(p_1-p_2)/(q_2-q_1)$, а это неверно. Следовательно, должно выполняться равенство $q_1=q_2$; но тогда из равенства $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ сразу получаем, что $p_1=p_2$.

Правило сложения чисел $p_1+q_1\sqrt{2}$ и $p_2+q_2\sqrt{2}$ такое же, как для столбиков:

$$(p_1+q_1\sqrt{2})+(p_2+q_2\sqrt{2})=(p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{2},$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1+p_2 \\ q_1+q_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим числа $p_1+q_1\sqrt{2}$ и $p_2+q_2\sqrt{2}$:

$$(p_1+q_1\sqrt{2})(p_2+q_2\sqrt{2})=$$
$$=(p_1p_2+2q_1q_2)+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{2}.$$

В результате мы приходим к числу такого же вида и получаем новое правило умножения для столбиков с рациональными компонентами p_1, q_1, p_2, q_2:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1p_2+2q_1q_2 \\ p_1q_2+p_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если следовать такому правилу, то можно записать решения уравнения $x^2-2y^2=1$ так: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}^n$ (возвести столбик в степень n — значит умножить столбик n раз на себя).

Для правила (3) выполнены обычные свойства умножения; роль единицы здесь играет столбик $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как он соответствует числу $1=1+0\sqrt{2}$.

Оперировать с числами $p+q\sqrt{2}$ очень помогает интересная симметрия в множестве таких чисел: каждому числу $\alpha=p+q\sqrt{2}$ соответствует число $\bar{\alpha}=p-q\sqrt{2}$, которое называется *сопряженным* к α. (Для столбиков переход к сопряженному означает просто изменение знака у второй компоненты.)

Для операции сопряжения выполнены такие свойства:

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},\quad \bar{\bar{\alpha}}=\alpha.$$

Но самое важное — это то, что произведение сопряженных чисел $(p+q\sqrt{2})(p-q\sqrt{2})=p^2-2q^2$ уже не содержит $\sqrt{2}$; $\alpha\bar{\alpha}$ — рациональное число. Это позволяет делить числа вида $p+q\sqrt{2}$ друг на друга, получая при этом число такого же вида. Чтобы разделить β на α, достаточно умножить β на $\bar{\alpha}$ и разделить результат на $\alpha\bar{\alpha}$.

Мы уже пользовались парами сопряженных чисел при решении уравнения $x^2-2y^2=1$. Левую часть x^2-2y^2 мы представили как произведение двух сопряженных чисел

$$\alpha=x+y\sqrt{2},\quad \bar{\alpha}=x-y\sqrt{2}.$$

Возьмем теперь два числа $\alpha=x_1+y_1\sqrt{2}$ и $\beta=x_2+y_2\sqrt{2}$ и сопряженные к ним $\bar{\alpha}=x_1-y_1\sqrt{2}$ и $\bar{\beta}=x_2-y_2\sqrt{2}$. Рассмотрим произведение $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$. Производя вычисления в определенном порядке — сначала $\alpha\bar{\alpha}$, потом $\beta\bar{\beta}$ и затем $(\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$ — получаем:

$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=(x_1^2-2y_1^2)(x_2^2-2y_2^2). \quad (4)$$

Если вычисление того же произведения $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$ произвести в другом порядке, то мы получим

$$\alpha\beta=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2},$$
$$\bar{\alpha}\bar{\beta}=(x_1x_2+2y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2},$$
$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=(x_1x_2+2y_1y_2)^2=2(x_1y_2+x_2y_1)^2. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) получаем тождество

$$(x_1^2-2y_1^2)(x_2^2-2y_2^2)=(x_1x_2+2y_1y_2)^2-2(x_1y_2+x_2y_1)^2. \quad (6)$$

Из этого тождества следует интересная связь между целыми решениями уравнений более общего вида $x^2-2y^2=c$.

Если для пары целых чисел $(x_1;\ y_1)$ выполнено равенство $x_1^2-2y_1^2=c_1$, а для пары целых чисел $(x_2;\ y_2)$ выполнено равенство $x_2^2-2y_2^2=c_2$, то пара целых чисел $(x_1x_2+2y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1)$ является решением уравнения $x^2-2y^2=c_1c_2$.

Все сказанное про числа вида $a+b\sqrt{2}$ верно и для чисел вида $a+b\sqrt{d}$, где d — простое число (или натуральное, не делящееся на квадрат). В частности, правило умножения для любого d будет таким:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2+dy_1y_2 \\ x_1y_2+x_2y_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тождество (6) будет выглядеть так:

$$(x_1^2-dy_1^2)(x_2^2-dy_2^2)=$$
$$=(x_1x_2+dy_1y_2)^2-d(x_1y_2+x_2y_1)^2. \quad (8)$$

Замечательно, что это тождество выполнено вообще для всех чисел x_1, y_1, x_2, y_2, d — это можно непосредственно проверить, раскрыв скобки. В частности, оно верно и при $d=-1$; получающееся при этом тождество будет играть центральную роль в следующем пункте.

Задачи

11. Перемножьте числа

$$(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}).$$

12. Разделите числа, избавившись от иррациональности в знаменателе

$$\text{а) } \frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{2}};\quad \text{б) } \frac{p_1+q_1\sqrt{d}}{p_2+q_2\sqrt{d}}.$$

13*. Докажите, что произведение чисел вида x^2+5y^2, где x и y — целые числа, есть снова число того же вида. Найдите все такие числа меньшие 100.

5. Замечательное тождество и композиция Виета

Любые две пары чисел $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ связаны таким тождеством, известным еще Диофанту:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2. \quad (9)$$

Оно получается из тождества (8) при $d=-1$ и часто используется в алгебре и теории чисел. Мы расскажем здесь о другом его применении: интересном способе, позволяющем получать из двух прямоугольных треугольников новый прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению их гипотенуз.

Возьмем один прямоугольный треугольник с катетами a_1, b_1 и гипотенузой c_1 и другой — с катетами a_2, b_2 и гипотенузой c_2. Поскольку по теореме Пифагора

$$a_1^2+b_1^2=c_1^2 \text{ и } a_2^2+b_2^2=c_2^2,$$

тождество (9) можно записать так:

$$(c_1c_2)^2=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2.$$

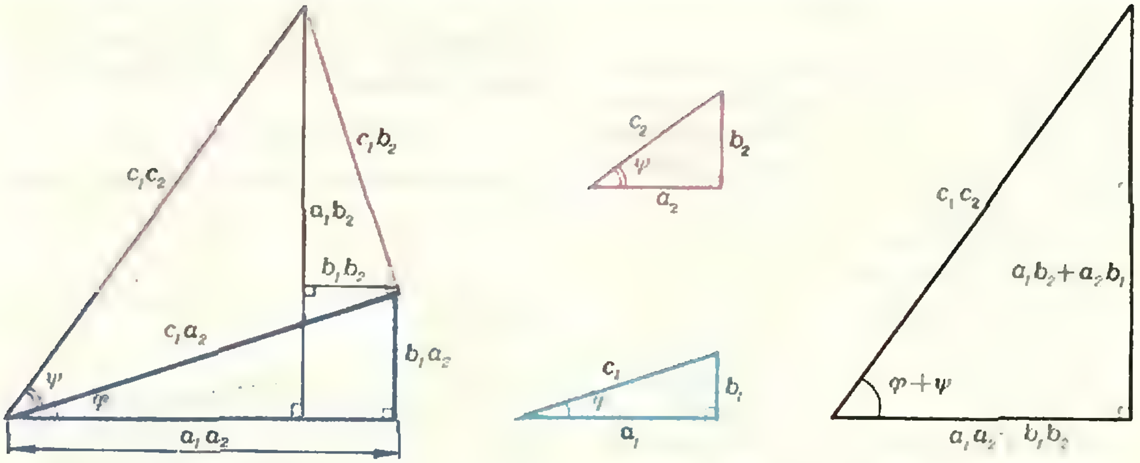


Рис. 2.

Из этого равенства видно, что существует прямоугольный треугольник с катетами $|a_1a_2-b_1b_2|$, $a_1b_2+a_2b_1$ и гипотенузой c_1c_2. По-видимому, это впервые заметил в XVI веке французский математик Франсуа Виет (см. [7]), поэтому назовем такой способ получения из двух прямоугольных треугольников нового прямоугольного треугольника *«композицией Виета»*.

Рассмотрим два одинаковых прямоугольных треугольника с катетами m, n и положим в тождестве (9) $a_1=a_2=n$, $b_1=b_2=m$. Получим

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2.$$

Мы видим, что композиция Виета дает новый прямоугольный треугольник с катетами $|m^2-n^2|$, $2mn$ и гипотенузой m^2+n^2. Интересно, что все прямоугольные треугольники с целыми (взаимно простыми) сторонами a, b, c — так называемые «пифагоровы тройки» — могут быть получены по этим формулам

$$c=m^2+n^2,\quad a=m^2-n^2,\quad b=2mn, \quad (10)$$

где m и n — (взаимно простые) натуральные числа разной четности, $m>n$.

Самое же неожиданное заключается в том, что при композиции Виета двух прямоугольных треугольников получается новый прямоугольный треугольник (рис. 2), у которого угол против катета $a_1b_2+a_2b_1$ равен сумме $\varphi+\psi$ углов φ и ψ исходных треугольников против катетов b_1 и b_2 (если $\varphi+\psi<90°$; если же $\varphi+\psi>90°$, то этот угол равен $180°-(\varphi+\psi)$). Таким образом, композицию Виета можно задать чисто геометрически. Композицией Виета двух прямоугольных треугольников является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению гипотенуз, и углом, равным сумме соответствующих углов взятых треугольников.

Задачи

14. На клинописной табличке, изготовленной в древнем Вавилоне примерно 1500 лет до н. э., среди других пифагоровых треугольников указан такой: 4961, 6480, 8161. Каким m и n в формулах (10) он соответствует?

15*. Найдите $\cos 75°$, используя композицию Виета для двух прямоугольных треугольников с углами 30° и 45°.

16. В пифагоровых треугольниках со сторонами 5, 12, 13 и 7, 24, 25 гипотенуза на 1 больше одного из катетов.

а) Найдите еще два таких пифагоровых треугольника.

б) Найдите общую формулу для сторон таких треугольников.

в)* Укажите среди них треугольники, у которых гипотенуза есть полный квадрат (как у треугольника 7, 24, 25: $25=5^2$).

6. Комплексные числа $a+bi$

В предыдущих пунктах мы с помощью чисел вида $a+b\sqrt{d}$ пришли к тождеству (8), которое оказалось верным при любом d. Затем мы положили в этом тождестве $d=-1$; при этом сами выражения $a+b\sqrt{d}=a+b\sqrt{-1}$ потеряли смысл, так как среди чисел нет $\sqrt{-1}$ — ведь квадрат любого числа является неотрицательным числом. Тем не менее оказывается целесообразным ввести в употребление новое «мнимое» число, квадрат которого равен -1. Его обозначают буквой i (от латинского слова imaginarius — мнимый, воображаемый).

Выражение вида $a+bi$, где a и b — обычные числа, называют *комплексными числами*. Два комплексных числа, по определению, равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$a_1+b_1i=a_2+b_2i$, только если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел $a+bi$ производится аналогично тому, как они производились для чисел вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b. Однако здесь a и b могут быть любыми числами, а $i^2=-1$. В результате этих операций мы снова получаем выражение вида $a+bi$:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+\\+(b_1+b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+\\+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Мы видим теперь, откуда взялось умножение (1) столбиков, которое мы указали в пункте 2. Это умножение по существу уже обсуждалось в предыдущем пункте — как композиция Виета двух прямоугольных треугольников с катетами $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$.

Особую роль играют *нулевое* комплексное число $0=0+0i$, *единица* $1=1+0i$ и *мнимая единица* $i=0+1i$. Заметим, что если какая-нибудь компонента a или b комплексного числа $a+bi$ равна нулю, то соответствующую часть комплексного числа при записи опускают.

В мире комплексных чисел можно делить на любое число, отличное от нуля $0=0+0i$. Вычисляя частное двух чисел, удобно умножить оба эти числа на сопряженное число $c-di$ к делителю $z=c+di$:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\\=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

Комплексные числа возникли впервые в алгебре, в задачах о решении алгебраических уравнений третьей и более высокой степени. Однако применения комплексных чисел охватывают едва ли не все основные области математики и физики — геометрию, теорию чисел, математический анализ и теорию вероятностей, расчет электрических цепей, гидродинамику и квантовую механику.

Мы получили комплексные числа как пары действительных чисел, определив для них умножение правилом (1), удовлетворяющее естественным условиям — коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Для математики интересна задача классификации всех таких правил. Оказывается, все они укладываются в общую схему: пары (x, y) записываются в виде «обобщенных комплексных чисел» $x+yj$ и j^2 в вычислениях заменяется на $r+sj$ (r, s — фиксированные числа, см. задачу 19); здесь возможны три существенно различных случая (к которым можно свести остальные): (1) $j^2=1$ (к этому типу относится подробно изученное нами правило $j^2=2$); (2) $j^2=0$ (любопытно, что соответствующее правило умножения, записанное для столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1y_2+x_2y_1 \end{pmatrix}$$

— это перевернутое правило сложения дробей

$$\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1x_2+x_2y_1}{x_1x_2}\ )$$

и, наконец, (3) $j^2=-1$ — настоящие комплексные числа.

Задачи

17. Будем изображать комплексное число $x+iy$ точкой $(x;\ y)$ на координатной плоскости. Пусть $u=1-i$, $v=-2+5i$. Найдите а) $\bar{u}$; б) $\bar{v}$; в) uv; г) $u\bar{v}$; д) u/v и изобразите все эти числа на координатной плоскости.

18. Пусть $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Найдите а) z^2, z^4, z^8; б) w^2, w^3, w^6, w^2+w+1.

19*. Пусть r и s — два фиксированных числа. Зададим умножение на парах чисел (всех, а не только рациональных) формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2+ry_1y_2 \\ x_1y_2+x_2y_1+sy_1y_2 \end{pmatrix}.$$

(Это правило соответствует умножению «обобщенных комплексных чисел» $x+jy$, где $j^2=r+sj$.)

а) Проверьте, что для этого умножения выполнены основные свойства 1) — 3) из пункта 2.

б) Какая пара e играет роль единицы?

в) При каких r и s для любой пары u, отличной от $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, существует такое v, что $uv=e$?

г) При каких r и s существует такая пара $u\neq 0$, что $u^2=0$?

20. Зададим умножение пар чисел $(a;\ b)$ так: каждой паре чисел $(a;\ b)$ соответствует линейная функция $u(t)=at+b$, а произведению $(a_1;\ b_1)$ на $(a_2;\ b_2)$ соответствует композиция функций $u_1(t)=a_1t+b_1$ и $u_2(t)=a_2t+b_2$, то есть подстановка первой во вторую $u_2(u_1(t))=a_2(a_1t+b_1)+b_2=a_2a_1t+a_2b_1+b_2$, или

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_2b_1+b_2 \end{pmatrix}.$$

Какие из следующих законов выполнены для этого умножения: $uv=vu$, $(uv)w=u(vw)$, $u(v+w)=uv+uw$, $(u+v)w=uw+vw$?

Список дополнительной литературы

1. Гельфонд А. О. *Решение уравнений в целых числах.* М.: Наука, 1983.— (Популярные лекции по математике, вып. 8.)

2. Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М. *Очерк о цепных дробях.* Квант, 1983, № 5, 6.

3. Вагутен Н. *Сопряженные числа.* Квант, 1980, № 2.

4. Ашманов С. *Числа и многочлены.* Квант, 1980, № 2.

5. *Заочные математические олимпиады.* М.: Наука, 1981.

6. Понтрягин Л. С. *Комплексные числа.* Квант, 1982, № 4.

7. Башмакова И. Г. *Становление алгебры.* М.: Знание, 1979.

Физика 8,9,10

Публикуемая ниже заметка «Какой из трех законов Ньютона важнее?» предназначена восьмиклассникам, «Правила Кирхгофа» — девятиклассникам и «На что способен микроскоп?» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Какой из трех законов Ньютона важнее?

На этот вопрос многие, не задумываясь, отвечают: «Конечно, второй! В первом-то и формулы никакой нет, а третий просто очевиден». Однако в действительности это не совсем так.

Открытие законов движения позволило за сравнительно небольшой промежуток времени достичь больших успехов в объяснении многочисленных явлений окружающего мира — от описания движения брошенного камня до вычисления отклонений в движении планет от законов Кеплера под влиянием других планет.

Первый шаг в понимании законов движения был сделан Галилео Галилеем, сформулировавшим принцип инерции. Он провозглашает, что тело, предоставленное самому себе, то есть когда на него не действуют никакие другие тела или действия других тел компенсируются, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, если оно двигалось до этого, или остается в покое, если оно до этого покоилось. Сейчас это утверждение кажется нам очевидным. Однако со времен Аристотеля было принято считать, что при отсутствии внешних воздействий тело может только покоиться, а для его движения даже с постоянной скоростью необходимо действие со стороны других тел. Ведь в повседневной жизни практически всегда при движении возникают те или иные силы трения, которые со временем это движение (если оно ничем не поддерживается) прекращают.

Исаак Ньютон пошел дальше. Он дал ответ на вопрос о том, как именно изменяется скорость тела под влиянием других тел. Для этого он сформулировал три закона динамики, получившие название законов Ньютона.

Первый из них фактически повторяет принцип инерции Галилея, однако в современной формулировке в него вкладывается несколько иной смысл: «Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действия других тел компенсируются». Другими словами, первый закон Ньютона позволяет выбирать наиболее удобные системы отсчета, в которых будут справедливы второй и третий законы. Рецепт прост: скомпенсируйте внешние воздействия на какое-либо тело и рассмотрите его движение в выбранной вами системе отсчета. Если оно будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно,— система отсчета инерциальна, если же тело будет двигаться ускоренно, — система неинерциальна и для описания движения непосредственно с помощью второго закона Ньютона не подходит.

Второй закон Ньютона связывает величину приложенной к телу силы с возникающим ускорением: $\vec{F}=m\vec{a}$. Он позволяет решать основную задачу *) механики — определять положение и скорость тела в любой момент времени по известным силам и начальным условиям («Физика 8», глава 6). Сила при этом выступает как физическая величина, характеризующая взаимодействие тел. С помощью второго закона, в принципе, можно решить любую механическую задачу. Однако о явных выражениях для сил в законах динамики ничего не говорится, а просто указывается на необходимость исследования сил, которые служат причиной изменения движения тел. Только в своем законе всемирного тяготения, который к трем основным законам динамики не относится, Ньютон дает непосредственное выражение для силы гравитационного притяжения между двумя телами.

---

*) Обратная задача — нахождение скоростей, ускорений и сил по известной зависимости координат тела от времени — решается несравненно проще. Однако следует заметить, что таким образом можно определить только равнодействующую всех сил, приложенных к телу, а не каждую силу в отдельности.

В качестве третьего закона Ньютон формулирует некоторое общее для всех типов взаимодействий свойство: действию всегда есть равное и противоположное противодействие. Так, если одно тело, действуя на второе, толкает его на север, то второе с такой же по модулю силой толкает первое на юг, и обе эти силы действуют строго вдоль одной и той же линии.

Таким образом, мы приходим к выводу, что нельзя сказать, какой из трех законов Ньютона важнее. Все они необходимы для описания движения тел и все вместе дают принципиальную возможность полного описания любого механического движения. Слово «принципиальная» здесь добавлено неспроста. Только в случае простейших типов сил уравнения Ньютона удается решить точно. Возникающие на практике реальные задачи из-за их математической сложности приходится решать более сложными методами с помощью ЭВМ. Так, задача о движении двух тел под действием их взаимного гравитационного притяжения решается сравнительно просто. Та же задача, но для трех тел, вообще не имеет точного решения, но может быть решена с любой степенью точности. С появлением ЭВМ получение заданной точности решения требует значительно меньшего времени.

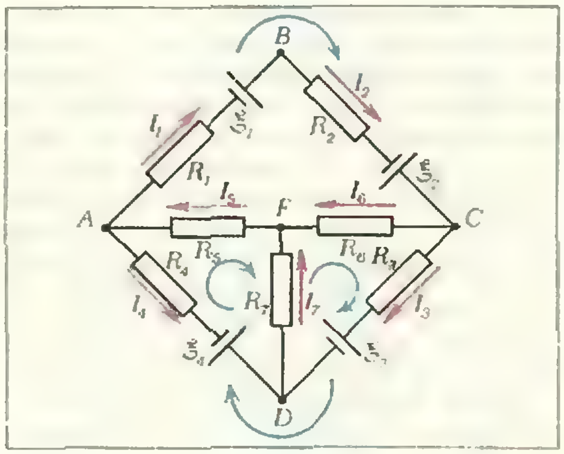
Правила Кирхгофа

Из учебника «Физика 9» (§ 65) мы узнали о законе Ома для замкнутой цепи, который позволяет находить ток, протекающий в простейшей неразветвленной электрической цепи, состоящей из источника тока и резистора. Однако на практике чаще приходится иметь дело со сложными, разветвленными цепями типа показанной на рисунке. Они могут содержать несколько источников тока и несколько резисторов. Эти цепи, в свою очередь, могут служить элементами еще более сложной цепи. Для отыскания токов в различных участках таких цепей служат правила Кирхгофа, которые мы и рассмотрим.

Точки цепи, в которых сходятся три или больше проводов (точки A, B, C, D, F), назовем точками разветвления, или узлами. Ради простоты внутреннее сопротивление каждого источника тока включим в сопротивление резистора в соответствующем участке цепи.

Прежде всего расставим и пронумеруем токи, текущие в каждом участке цепи, произвольно указав их направления. Будем считать ток положительным, если он «втекает» в точку разветвления, и отрицательным в противном случае (о правомерности такого выбора знаков будет сказано ниже). Понятно, что заряд не может ни накапливаться в узле, ни исчезать из него иначе как по подводящим проводам. Следовательно, какой заряд в единицу времени в узел «втекает», такой же заряд должен и «вытечь». Таким образом, мы пришли к первому правилу Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в любой точке разветвления цепи (в узле), равна нулю.*

Теперь выделим в нашей сложной схеме какой-либо простой замкнутый контур, например $ABCDA$, и произвольно выберем направление его обхода — скажем, по часовой стрелке, начиная от точки A. Рассмотрим участок AB этого контура. Пусть напряжение на нем равно U_{AB}. В отсутствие источника тока эта величина была бы равна падению напряжения I_1R_1 в резисторе (работа по перемещению заряда из точки A в точку B равна выделяющемуся в резисторе количеству теплоты). Если же на участке есть источник тока, то, в зависимости от его полярности, для переноса заряда из точки A в точку B придется совер-



шить работу, бо́льшую или меньшую чем I_1R_1. На данном участке источник тока с ЭДС $\mathscr{E}_1$ уменьшает разность потенциалов (сторонние силы внутри источника совершают положительную работу), и поэтому можно записать:

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=I_1R_1-\mathscr{E}_1. \qquad (1)$$

На участке BC все будет точно так же:

$$U_{BC}=\varphi_B-\varphi_C=I_2R_2-\mathscr{E}_2. \qquad (2)$$

В случае же участка CD источник тока имеет противоположную, по сравнению с предыдущими источниками, полярность, и поэтому он не уменьшает, а увеличивает разность потенциалов (сторонние силы внутри источника совершают отрицательную работу):

$$U_{CD}=\varphi_C-\varphi_D=I_3R_3+\mathscr{E}_3. \qquad (3)$$

На последнем участке рассматриваемого контура по нашему предположению ток течет от точки A к точке D, и ситуация полностью соответствует участку AB:

$$U_{AD}=I_4R_4-\mathscr{E}_4,$$

или, учитывая выбранное направление обхода,

$$U_{DA}=\varphi_D-\varphi_A=-U_{AD}=-I_4R_4+\mathscr{E}_4. \qquad (4)$$

Складывая почленно равенства (1)—(4), получаем:

$$I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3-I_4R_4=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4.$$

Это соотношение выражает второе правило Кирхгофа: *для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжения равна алгебраической сумме ЭДС.*

Правила Кирхгофа не выражают никаких новых свойств электрического поля и поэтому не могут рассматриваться как физические законы. Первое из них, как мы уже говорили, есть следствие закона сохранения заряда, второе — следствие закона сохранения энергии. Однако они оказываются чрезвычайно полезными при отыскании токов в разветвленных цепях.

Вернемся к схеме, изображенной на рисунке, и запишем уравнения, выражающие правила Кирхгофа для узлов A, B, C, F и контуров $ABCDA$, $AFDA$, $DFCD$:

$$I_5-I_1-I_4=0,$$
$$I_1-I_2=0,$$
$$I_2-I_3-I_6=0,$$
$$I_6+I_7-I_5=0,$$
$$I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3-I_4R_4=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4,$$
$$-I_4R_4-I_5R_5-I_7R_7=-\mathscr{E}_4,$$
$$I_7R_7-I_6R_6+I_3R_3=-\mathscr{E}_3.$$

Еще раз обратим внимание на выбор знаков «плюс» или «минус» при составлении уравнений. Перед падением напряжения на резисторе ставится знак «плюс», если выбранное нами направление тока на этом участке совпадает с выбранным направлением обхода, и знак «минус» — в противном случае. ЭДС источника берется со знаком «плюс», если направление тока, который он мог бы создать в контуре, совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «минус» — в противоположном случае.

Истинное же направление токов можно определить лишь после решения системы уравнений: если полученное значение какого-либо тока окажется положительным, то это значит, что направление этого тока было выбрано верно; если же ток получится отрицательным, значит, его истинное направление противоположно выбранному.

Нетрудно показать, что, применяя правила Кирхгофа, всегда можно получить ровно столько независимых уравнений, сколько неизвестных токов, то есть полностью и однозначно решить поставленную задачу*).

На что способен микроскоп?

При создании оптических приборов, «вооружающих» глаз, естественно возникает вопрос об их предельных возможностях. Для микроскопа, например, такой характеристикой служит его увеличение. С точки зрения геометрической оптики, подбирая соответствующие окуляр и объектив, увеличение микроскопа можно сделать сколь угодно большим. Однако в действительности это не так, и причина тому — волновая природа света. Представление о лучах света как о геометрических линиях служит

---

*) Подробное математическое доказательство этого факта имеется в статье О. В. Ляшко в этом номере журнала. (*Примеч. ред.*)

лишь приближением, справедливым до тех пор, пока длина волны света много меньше размеров исследуемого предмета.

Прежде чем говорить о «способностях» микроскопа, рассмотрим некоторую механическую задачу. Не будучи буквальной аналогией, она все же поможет понять, где лежат пределы возможностей оптических приборов.

Представьте себе, что некий исследователь решил изучать форму упругой холмистой поверхности. Для этого, в частности, ему понадобилось уметь восстанавливать перпендикуляр к поверхности в любой ее точке. К этой задаче исследователь подошел несколько необычным способом — он стал бросать на поверхность упругий шарик, измеряя каждый раз угол между направлениями падения и отражения шарика и строя биссектрису этого угла. Очевидно, что таким способом действительно можно получить необходимый набор перпендикуляров, но только в том случае, если диаметр шарика много меньше расстояний между ближайшими «горбами» и радиусами их кривизны (рис. 1, *а*). В противном случае (рис. 1, *б*) никакой информации о форме поверхности получить не удастся.

Нечто подобное происходит и при наблюдении за объектом в микроскоп, хотя между световыми лучами и шариками имеется существенное различие. По мере того как мы хотим рассматривать все более и более мелкие детали объекта, мы изменяем увеличение микроскопа. Оказывается, при увеличении примерно в 2000 раз можно различить две точки, если они находятся друг от друга на расстоянии порядка 0,2 мкм, что составляет около половины длины волны для видимого света. Формально можно довести увеличение микроскопа и до 5000, и до 10 000, однако при этом точки, находящиеся на расстояниях, меньше 0,2 мкм, останутся неразличимыми.

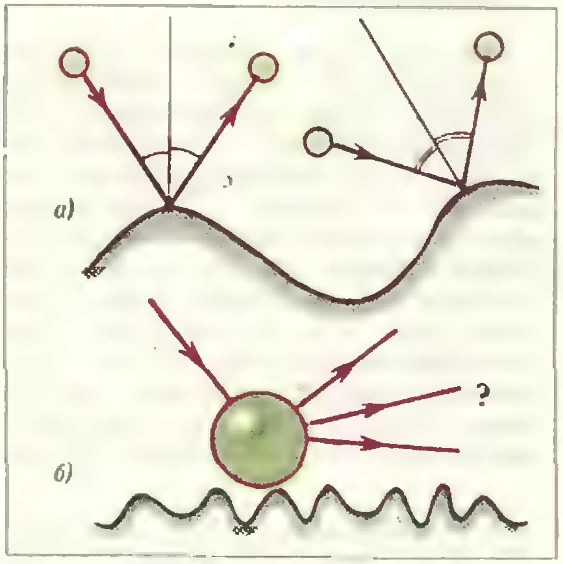


Рис. 1.

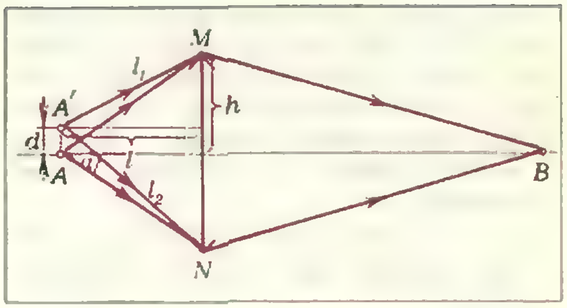


Рис. 2.

Попробуем разобраться, почему так происходит, обратившись к волновым свойствам света. Рассмотрим тонкую линзу (которая может служить объективом нашего микроскопа). Пусть изображение некоторой точки A находится в точке B (рис. 2). Возьмем точку A', близкую к точке A. Из геометрической оптики следует, что ее изображение будет находиться в некоторой точке B', заведомо не совпадающей с точкой B. Однако всегда ли наблюдателю удается различить точки B и B', то есть увидеть их именно как две точки?

С точки зрения волновой оптики изображение в линзе каждой точки формируется совокупностью всех лучей, проходящих через линзу. В нашем примере это означает, что изображение точки A' не совпадет с точкой B в том случае, если времена прохождения через линзу крайних лучей $A'MB$ и $A'NB$ будут различными. А что под этим подразумевается? Тут следует заметить, что времена можно считать различными, если они отличаются друг от друга хотя бы на период T колебаний световой волны. В рассматриваемой задаче это единственный имеющийся в нашем распоряжении масштаб времени.

Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$t_{A'NB}-t_{A'MB}>T=\frac{\lambda}{c},$$

где λ — длина волны, c — скорость света в вакууме. Поскольку времена прохождения света от точек M и N до B равны, полученное условие можно переписать в виде

$$t_{A'N}-t_{A'M}=\frac{l_2-l_1}{c}=\frac{\lambda}{c}. \qquad (*)$$

Из прямоугольных треугольников на рисунке 2 находим:

$$l_2^2=l^2+(h+d)^2,$$
$$l_1^2=l^2+(h-d)^2,$$

откуда, вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$l_2^2-l_1^2=(l_2-l_1)(l_1+l_2)=4hd.$$

Приняв $l_1+l_2=2l$ и $h/l=\sin\alpha$, находим:

$$l_2-l_1=\frac{2hd}{l}=2d\sin\alpha.$$

Тогда из условия (*) следует, что

$$d\geqslant\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$$

— изображения двух точек окажутся различимыми, если расстояние между ними больше или хотя бы порядка длины световой волны. Для видимого света длина волны составляет примерно 0,5 мкм.

Чем меньше размеры предмета, еще различимого микроскопом, тем больше так называемая разрешающая способность микроскопа.

Примечание. Кроме обычных оптических микроскопов существуют электронные микроскопы, у которых разрешающая способность много больше. При их помощи можно даже рассмотреть отдельные молекулы.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена девятиклассникам. Однако она может быть полезной и учащимся других классов.

Отражение кривых и преобразования формул

> *Сравнение математических фигур и величин служит материалом для игр и обучения мудрости.*
>
> И. Песталоцци

> *Математик любит прежде всего симметрию.*
>
> Дж. Максвелл

При исследовании функций и построении их графиков полезно учитывать симметрию получаемых кривых. Из школьного курса вам знакомы свойства графиков четных и нечетных функций. Напомним, что функция f с симметричной относительно нуля областью определения называется четной, если $f(-x)=f(x)$ для всех $x\in D(f)$, и нечетной, если $f(-x)=-f(x)$ для всех $x\in D(f)$. Легко показать, что график функции f симметричен относительно оси Oy в том и только в том случае, когда функция f является четной, и симметричен относительно начала координат в том и только в том случае, когда f — нечетная функция. Таким образом, отмеченные свойства графиков отражают простые особенности соответствующих формул.

Более общим способом задания кривых на плоскости является задание их с помощью уравнений с двумя переменными. Например, окружность радиуса r с центром в начале координат задается уравнением $x^2+y^2=r^2$. Прорешав упражнения, предлагаемые в данной статье, вы узнаете, какие свойства уравнений, задающих кривые, отвечают тем или иным видам симметрии этих кривых. Весь новый материал вы «откроете» самостоятельно, решая приводимые ниже упражнения. Мы же лишь напомним необходимые сведения и рассмотрим один простой пример.

1. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех тех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями этого уравнения. Другими словами, Γ есть график уравнения $f(x, y)=0$, если $M(x; y)\in\Gamma\Rightarrow f(x, y)=0$. Отметим, что график функции $y=f(x)$ можно рассматривать и как график уравнения $y-f(x)=0$.

2. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка координатной плоскости

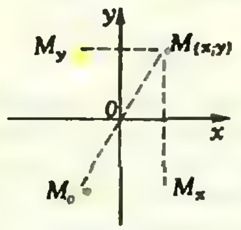


Рис. 1, а.

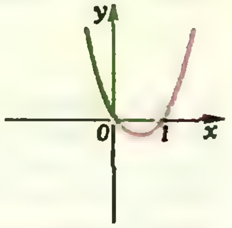


Рис. 1, б.

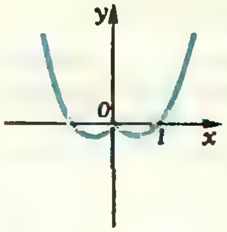


Рис. 1, в.

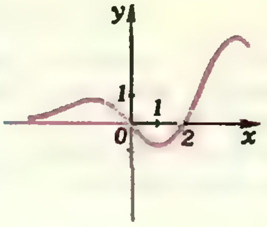


Рис. 1, г.

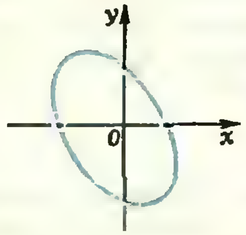


Рис. 1, д.

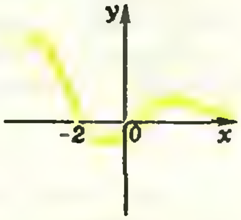


Рис. 2, а.

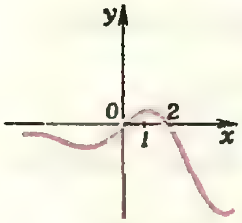


Рис. 2, б.

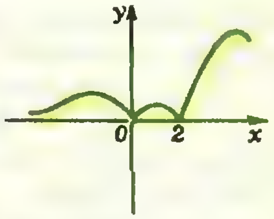


Рис. 2, в.

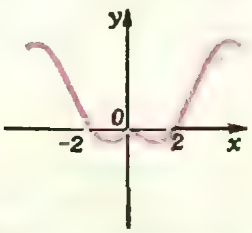


Рис. 2, г.

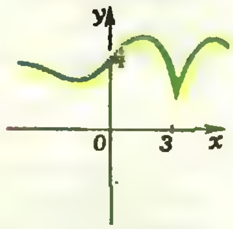


Рис. 2, д.

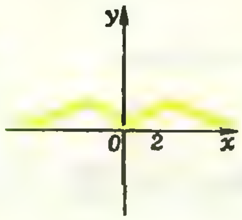


Рис. 2, е.

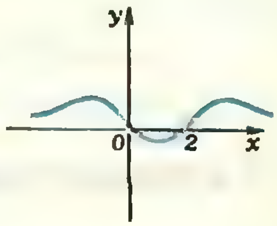


Рис. 2, ж.

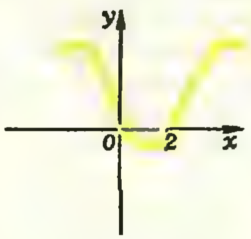


Рис. 2, з.

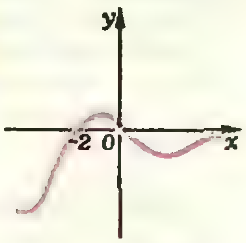


Рис. 2, и.

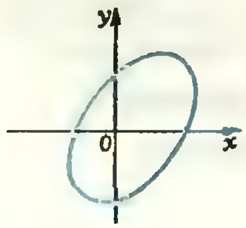


Рис. 3, а.

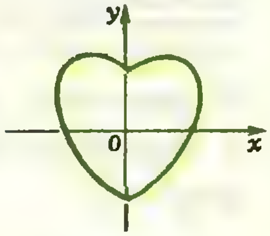


Рис. 3, б.

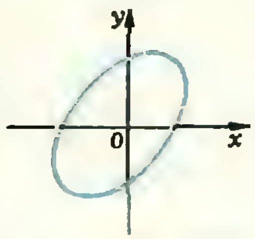


Рис. 3, в.

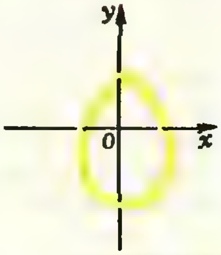


Рис. 3, г.

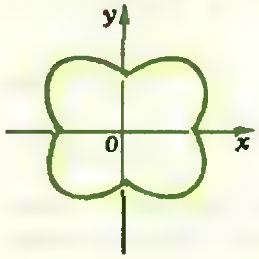


Рис. 3, д.

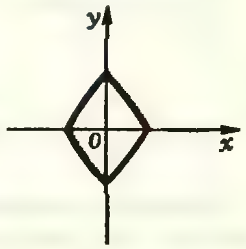


Рис. 3, е.

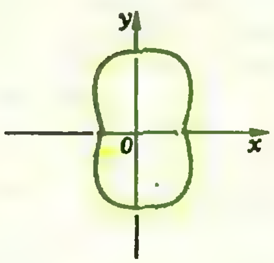


Рис. 3, ж.

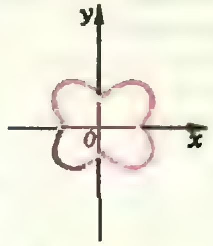


Рис. 3, з.

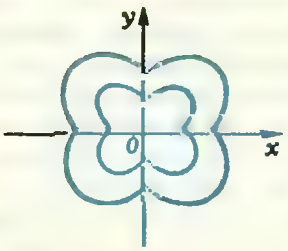


Рис. 3, и.

xOy (рис. 1, *а*), тогда точки M_X, M_Y, M_O, получаемые отражениями точки M относительно осей Ox, Oy и начала координат O соответственно, будут иметь следующие координаты:

$M_X(x;\ -y)$; $M_Y(-x;\ y)$; $M_O(-x;\ -y)$.

Упражнение 1. Какие координаты будут иметь точки, симметричные точке $M(x;\ y)$ относительно биссектрис углов, образованных осями координат?

3. Использование функции $|x|$ позволяет, исходя из уравнений произвольных кривых, получать уравнения кривых, обладающих определенными свойствами симметрии (относительно начала координат, осей Ox и Oy). Рассмотрим пример, иллюстрирующий сказанное, а общие выводы вы сделаете сами, решая предлагаемые упражнения.

Пример. *Построить график функции* $y=x^2-|x|$.

Решение. При $x \geqslant 0$ график данной функции совпадает с графиком функции $y=x^2-x$ (рис. 1, *б*), но функция $y=x^2-|x|$ *четная, следовательно*, ее график симметричен относительно оси Oy и выглядит так, как это изображено на рисунке 1, *в*.

Приступайте теперь к решению упражнений. Мы предлагаем следующие изменения в порядке работы в случае, если у вас возникнут затруднения при решении упражнений 2 и 3: если вы не справились с тем или иным заданием, то загляните в ответ и постарайтесь изобразить кривую, задаваемую приведенной в ответе формулой, отправляясь от новой исходной кривой, изображенной на с. 59 на рисунке 1 (текста ответов) для упражнения 2 и на рисунке 2 для упражнения 3. Если же и эти, дополнительные упражнения вызовут у вас затруднения и оперированию с произвольными кривыми и уравнениями (что необходимо для осознания общих принципов) вы предпочитаете действия с конкретными аналитическими выражениями, то, полагая $f(x)=x^2-x$ (или же выбрав другую функцию по своему усмотрению), постройте графики функций, заданных формулами, соответствующими ответам к упражнению 2. То же самое вы можете, в случае надобности, проделать и для упражнения 3, взяв, например, в качестве исходного уравнение $y+x-x^2=0$. Затем вернитесь снова к выполнению упражнений 2 и 3.

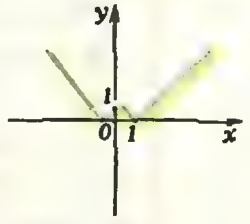


Рис. 4, а.

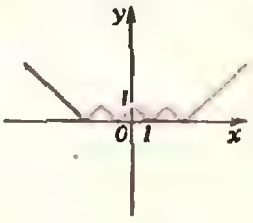


Рис. 4, б.

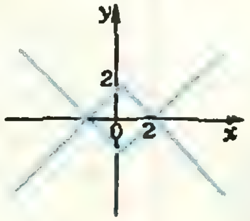


Рис. 4, в.

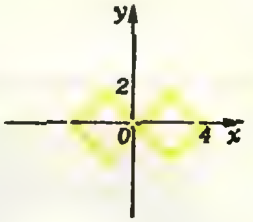


Рис. 4, г.

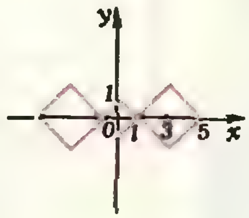


Рис. 4, д.

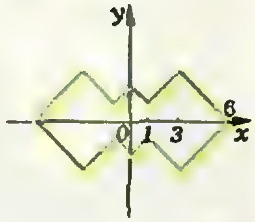


Рис. 4, е.

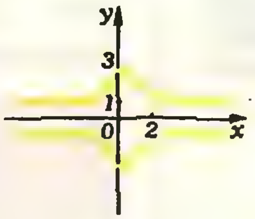


Рис. 4, ж.

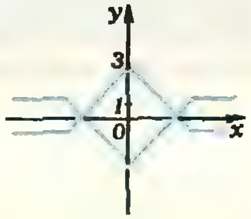


Рис. 4, з.

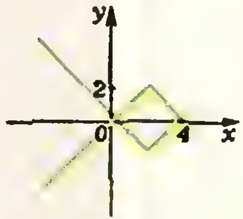


Рис. 4, и.

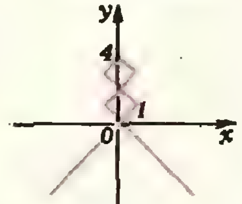


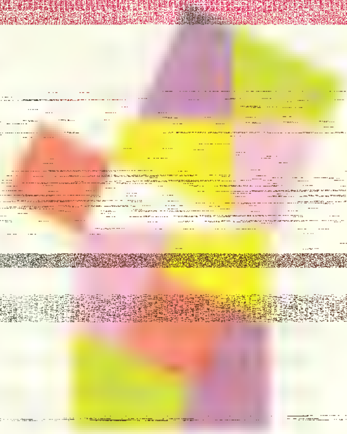
Рис. 4, к.

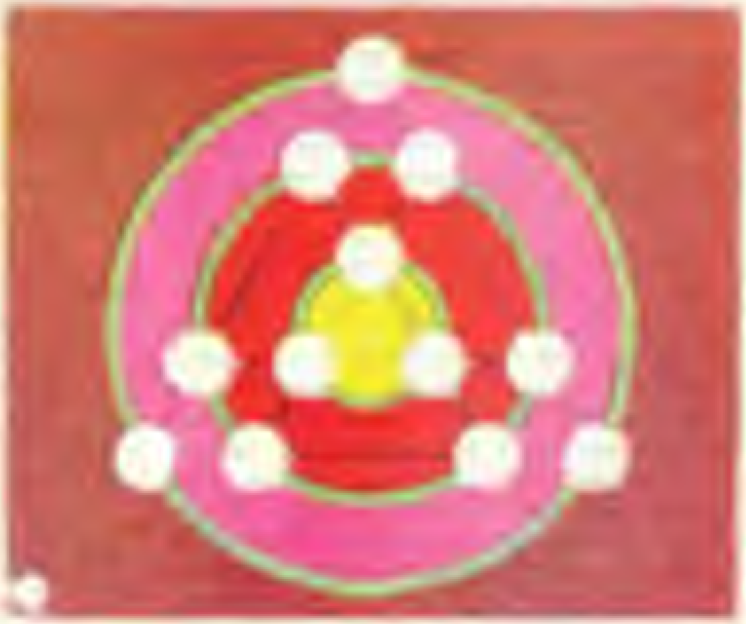
Упражнения

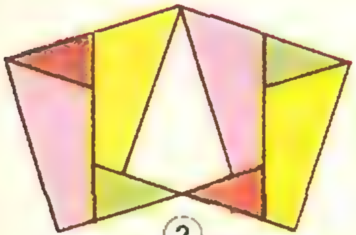
2. На рисунке 1, *г* изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Сравнивая каждый из рисунков 2, *а* — 2, *и* с исход-

(Окончание см. на с. 34)

[illegible] х 2 [illegible] К[illegible] рассчи[illegible] что эт[illegible] разворот может [illegible] форм[illegible]ия школьных [illegible] листов.





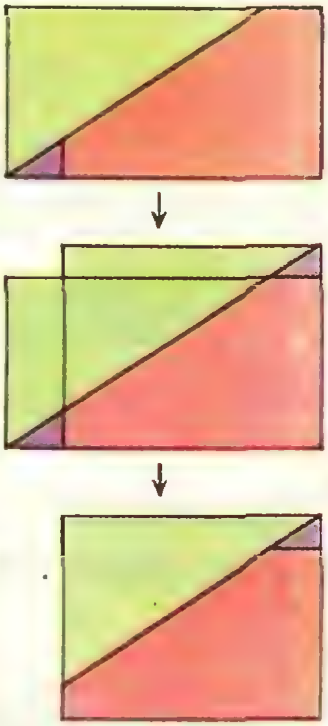

2

Если вы решили эту головоломку, вам, наверное, немало пришлось покрутить маленькие многоугольнички, прежде чем удалось сложить из них квадрат. А нельзя ли обойтись без вращений и сразу разрезать фигуру так, чтобы части совмещались без поворотов, одними параллельными переносами? Так, например, обстоит дело на рисунке 1; обратите внимание, многоугольнички одного цвета переводятся друг в друга параллельными переносами.

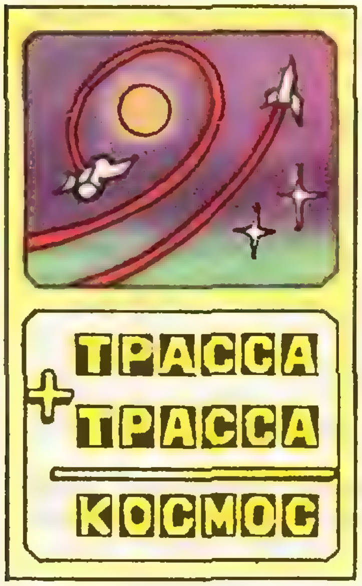
В 1951 г. два швейцарских математика, Г. Хадвигер и П. Глюр, доказали, что из двух многоугольников равной площади один всегда можно разрезать на меньшие многоугольники, из которых можно сложить второй, используя для перемещения частей лишь параллельный перенос и центральную симметрию. Этот факт кажется неправдоподобным. Повернем на небольшой угол квадрат. Кажется, что здесь такое разбиение невозможно. Но взгляните на рисунок 2 и вы убедитесь, сколь просто это можно осуществить. На рисунке 3 показан метод соответствующего разбиения двух прямоугольников равной площади с параллельными сторонами.

А можно ли обойтись лишь параллельным переносом? Оказывается, что не всегда. Верно следующее утверждение: для того чтобы выпуклый многоугольник можно было разбить на части, из которых параллельным переносом можно было бы сложить квадрат, необходимо и достаточно, чтобы многоугольник был центрально-симметричным.

А. П


3

ГОЛОВОЛОМКИ



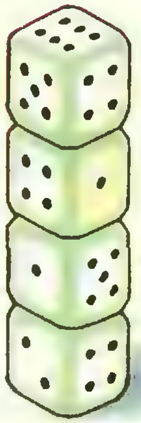
2

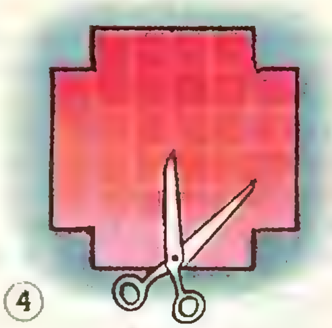
1. Расставьте числа от 1 до 12 в пустые кружочки так, чтобы вдоль трех окружностей и шести прямых сосчитывалась одинаковая сумма. Как найти эту сумму, не расставляя чисел?

2. Решите числовой ребус (разным буквам отвечают разные цифры, одинаковым — одинаковые).

3. Четыре одинаковые игральные кости поставлены так, как показано на рисунке. Сколько очков содержит нижняя грань нижней кости?

4. Разрежьте этот многоугольник на меньшие многоугольники и соберите из них квадрат.


3


4

ным рисунком 1, *г*, определите, каким образом получена изображенная на нем кривая из кривой рисунка 1, *г*, и задайте эту кривую уравнением, используя исходную формулу $y=f(x)$.

3. На рисунке 1, *д* изображен график некоторого уравнения $f(x, y)=0$. Сравнивая каждый из рисунков 3, *а* — 3, *и* с исходным рисунком 1, *д*, определите, каким образом получена изображенная на нем кривая из кривой рисунка 1, *д*, и выразите уравнение, графиком которого является эта кривая, через исходное уравнение $f(x, y)=0$.

4. Для каждого из рисунков 4, *а* — 4, *к* «сконструируйте» уравнение, графиком которого является изображенная на этом рисунке линия.

5. Каким из свойств симметрии (относительно осей координат, начала координат, прямых $y=x$, $y=-x$) обладают кривые, заданные следующими уравнениями:

а) $y^2=ax^3$;
б) $|x|+|y|=1$;
в) $|x|-x=|y|$;
г) $x^2+y^2-2xy-1=0$;
д) $x^2+y^2-2|x|=0$;
е) $x^2-xy-1=0$;
ж) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$;
з) $x^3+y^3-3axy=0$;
и) $x^2-y^3-3axy=0$;
к) $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$?

6. Постройте графики уравнений 5, а — 5, е.

7. Сформулируйте условия на $f(x, y)$, выполнения которых достаточно для того, чтобы график уравнения $f(x, y)=0$ был симметричным: а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy; в) относительно начала координат; г) относительно прямой $x-y=0$; д) относительно прямой $x+y=0$.

П. Г. Сатьянов

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до 1984 включительно?

2. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

3. Некоторый простейший организм размножается делением на два организма, которое происходит по истечении одной минуты. В пустую пробирку поместили один экземпляр только что возникшего организма и начали отсчет времени; через 1 час пробирка заполнилась организмами до краев. В какой момент времени было заполнено организмами полпробирки?

4. На плоскости лежат прямая и две точки A, B, расположенные по одну сторону от этой прямой. Укажите на прямой точку M, такую, что сумма расстояний $AM+MB$ является наименьшей из всех возможных.

5. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Вычислите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции имеют длину a и b.

Девятый класс

6. Докажите, что число $\log_4 18$ является иррациональным.

7. Нарисуйте график функции $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

8. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=n$, где $n\in N$, $n>1$.

9. Обязательно ли равны между собой два плоских острых угла, расположенные в пространстве так, что их стороны соответственно перпендикулярны?

10. Сколько может существовать в пространстве скрещивающихся прямых, любые две из которых взаимно перпендикулярны?

Десятый класс

11. Можно ли найти 1984 подряд идущих натуральных числа, таких, что среди них нет ни одного простого числа?

12. Вычислите, чему равна разность $2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$.

13. Решите неравенство $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

14. Четыре произвольные точки A, B, C, D, расположенные в пространстве, соединены между собой отрезками AB, BC, CD, DA; середины этих отрезков обозначим соответственно M, N, P, Q. Какая получится фигура, если провести отрезки MN, NP, PQ, QM?

15. Какую форму имеет тень куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, от пучка лучей света, параллельных этой диагонали?

Публикацию подготовил
Н. Х. Розов

квант для младших школьников

Задачи

1. Девочка заменила в своем имени каждую букву ее номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как ее звали?

2. Три школьных товарища купили 14 пирожков, причем Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый из товарищей?

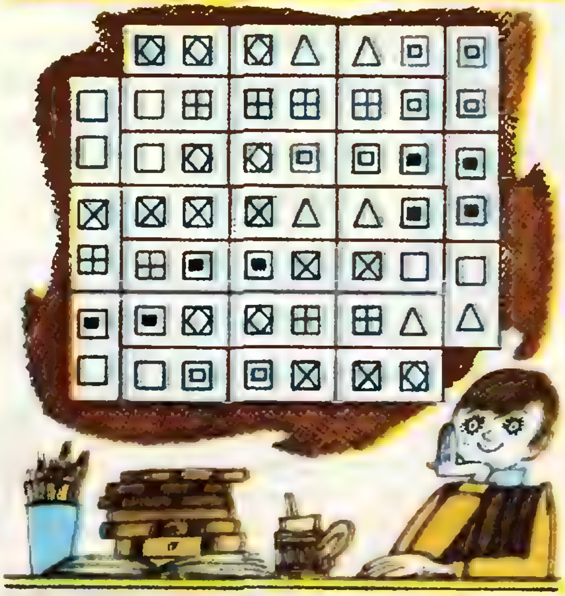
3. Однажды я раскладывал на столе косточки домино, пытаясь сложить какую-нибудь интересную фигуру. После того как получилась фигура, изображенная на рисунке, на руках у меня оставался дупель пусто-пусто. Тут я обратил внимание, что в каждом горизонтальном ряду и каждом вертикальном ряду сумма очков одна и та же. Я перерисовал картинку, поставив вместо очков условные значки. Недавно я нашел эту картинку среди бумаг, но забыл, что означает каждый значок. Помогите мне восстановить их значения.

4. Найдите все числа, которые в 13 раз больше суммы своих цифр.

5. Известно, что убывающий месяц повернут выпуклостью влево, как буква *С* — первая буква слова «старый». Прибывающий же месяц повернут выпуклостью вправо, как закругление буквы *Р* — первой буквы слова «растущий». Везде ли верно это правило?

Эти задачи нам предложили: *В. Кудряшов — ученик 10 кл., г. Пенза, В. Бялко — ученица 7 кл., г. Москва, М. В. Варга, Н. К. Антонович, А. Л. Тоом.*

ВЁЛОТФЩ
ГКМПЦЪ Э
ЗЙНХШЬЮ
СЧЯУР
АБДЕЙ
2011533



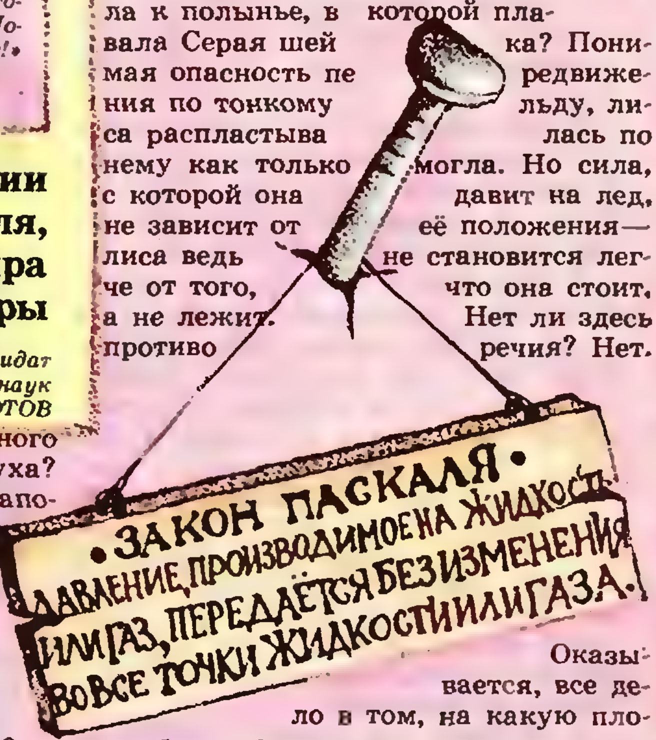
> *...На полянке рос высокий-превысокий дуб, а на самой верхушке этого дуба кто-то громко жужжал: жжж! Винни-Пух сел на траву под деревом, обхватил голову лапами и стал думать. Сначала он подумал так: «Это — жжжжж — неспроста! Зря никто жужжать не станет. Само дерево жужжать не может. Значит, тут кто-то жужжит. А зачем жужжать, если ты — не пчела? По-моему, так!». Потом он еще подумал-подумал и сказал про себя: «А зачем на свете пчелы? Для того, чтобы делать мед! По-моему, так!» Тут он поднялся и сказал: «А зачем на свете мед? Для того, чтобы я его ел! По-моему, так, а не иначе!»*

О давлении и законе Паскаля, или Почему у сыра круглые дыры

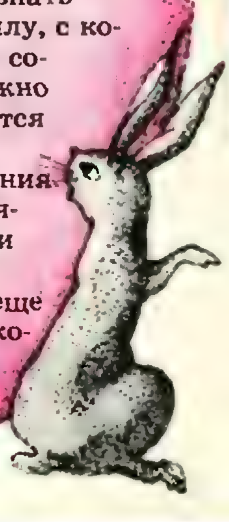
Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Почему многие любят симпатичного героя — медвежонка Винни-Пуха? Наверное, потому, что он нам напоминает нас самих, когда мы были маленькими, задавали всякие глупые (по мнению взрослых) вопросы и тут же хотели получить на них ответы. Но задавать вопросы очень полезно в любом возрасте. И конечно — при знакомстве с физикой. Давайте попробуем — может быть мне удастся вас в этом убедить.

Не приходилось ли вам в детстве читать сказку «Два жадных медвежонка»? Не знаю как вам, но мне больше всего запомнилась сама книжка, причем, незабываемое впечатление произвели красочные иллюстрации с исчезающей на глазах головкой сыра в ярко-красном «мундире» и ужасно «дырявой» внутри. Дырки были абсолютно круглые и все почти одинаковые — не так ли? С тех пор прошло много времени, и лишь недавно я понял, что за устройство дырок в сыре отвечает один из фундаментальных законов природы — закон Паскаля. Не забыли, как он звучит? Давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения в каждую точку жидкости или газа. Как видите, главным действующим лицом выступает давление. Вот и давайте прежде всего обсудим эту физическую величину.


• ЗАКОН ПАСКАЛЯ •
ДАВЛЕНИЕ, ПРОИЗВОДИМОЕ НА ЖИДКОСТЬ ИЛИ ГАЗ, ПЕРЕДАЁТСЯ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВСЕ ТОЧКИ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА.

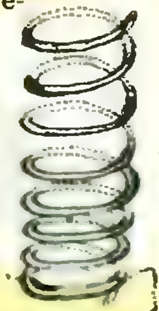
Помните, как в печальной сказке «Серая шейка» хитрая лиса подползала к полынье, в которой плавала Серая шейка? Понимая опасность передвижения по тонкому льду, лиса распластывалась по нему как только могла. Но сила, с которой она давит на лед, не зависит от её положения — лиса ведь не становится легче от того, что она стоит, а не лежит. Нет ли здесь противоречия? Нет. Оказывается, все дело в том, на какую площадь поверхности приходится эта сила давления. Чем больше поверхность соприкосновения лисы и льда, тем меньше сила, прогибающая лед в различных его участках, тем безопаснее по нему передвигаться. (Лиса была хитрая и знала об этом.) Точно так же и для описания многих других явлений мало знать общую силу давления — силу, с которой давят друг на друга соприкасающиеся тела, а важно знать, какая сила приходится на единицу площади поверхности их соприкосновения. Но сила давления, приходящаяся на единицу площади поверхности — это и есть давление. Не припомните еще какую-нибудь историю, в которой все (с точки зрения физики) определялось именно давлением?



Ну, конечно, — это сказка Андерсена «Принцесса на горошине». Почему горошина, попавшая в постель принцессы, могла вызвать у нее столь неприятные ощущения? Опять все дело в давлении. Очевидно, что как с горошиной, так и без нее общая сила, «удерживающая» принцессу на кровати, остается неизменной. Но если на кровати появится выступающая часть в виде горошины, то давление в этом месте резко возрастет, что тотчас испортит настроение принцессы, и она может потерять сон. Вы не станете возражать, что вовсе не нужно быть изнеженной принцессой, чтобы обнаружить в своей постели небольшую горошину? Я думаю, с этим справился бы и свинопас. А вот обнаружить горошину через толщу нескольких пуховых перин (в сказке их было двенадцать — не так ли?) — это требует изысканной утонченности чувств. Чуть дальше мы обсудим, почему пуховая перина, положенная поверх горошины, способна все запутать (а может быть и нет, если, конечно, принцесса настоящая).

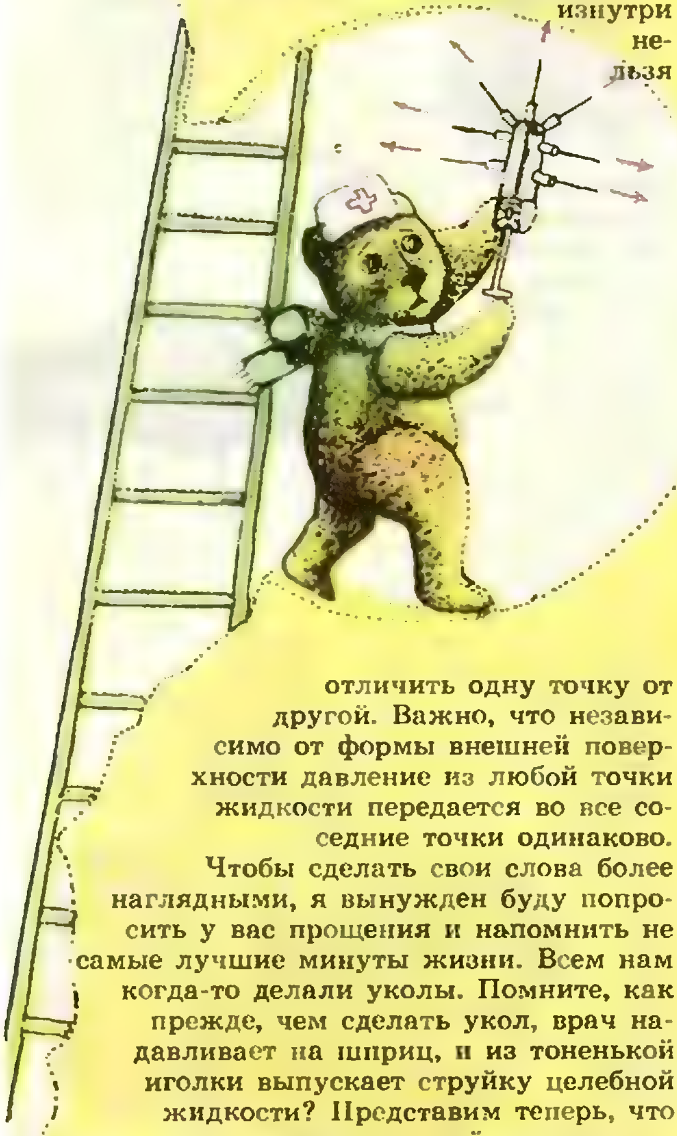
Итак, давление — это величина, равная отношению силы, действующей перпендикулярно к поверхности, к площади этой поверхности. Но в законе Паскаля неявно присутствует вроде бы еще одно давление — давление внутри жидкости или газа. Получается так, что жидкость внутри как-то «узнает» о том, что извне на нее что-то давит. То есть действующее на внешнюю поверхность жидкости давление передается самой жидкостью от точки к точке, причем, одинаково во всех направлениях. И это является неотъемлемым свойством именно жидкости. Так она «устроена».

Разберемся в этом поподробнее. Нам понадобится мягкая пружина. Например, такая, как в пневматическом пистолете. Если ее положить на стол, то расстояние между соседними витками будет одинаковым по всей длине пружины. А вот если ту же пружину поставить вертикально, то под действием силы тяжести витки начнут «падать» вниз, приближаясь друг к другу. В конце концов в разных сечениях пружина будет сжата по-разному — чем ниже витки, тем меньше будет расстояние между ними. В чем здесь дело? В результате взаимных перемещений витков в пружине возникают упругие силы, причем чем ниже витки, тем большую часть пружины они несут на себе, тем сильнее они сжаты. Итак, в различных сечениях давление в пружине разное. Чтобы увидеть картину давлений внутри тела, сожмите в руке поролоновую губку. Какие-то участки поролона сожмутся, какие-то, наоборот, растянутся. Чем сильнее сжато какое-то место, тем меньше и раз-



меры соответствующих «пор». Как видите, о внутренних давлениях мы могли судить для пружины — по изменению расстояний между соседними витками, для поролона — по изменению размеров «пор».

Жидкость или газ в отличие от твердых тел, как правило, могут быть только сжаты. Причем, если в непроницаемую оболочку налить жидкость и сильно сжать ее, то (если не учитывать силу тяжести) она будет сжата одинаково по всему объему — изнутри нельзя отличить одну точку от другой. Важно, что независимо от формы внешней поверхности давление из любой точки жидкости передается во все соседние точки одинаково.



Чтобы сделать свои слова более наглядными, я вынужден буду попросить у вас прощения и напомнить не самые лучшие минуты жизни. Всем нам когда-то делали уколы. Помните, как прежде, чем сделать укол, врач надавливает на шприц, и из тоненькой иголки выпускает струйку целебной жидкости? Представим теперь, что нам удалось по всей поверхности шприца наделать небольших отверстий, и вставить в них иголки, — у нас получилось что-то вроде ежика. Если теперь надавить на поршень шприца-ежика, то из всех иголок, находящихся на одной высоте, будут бить абсолютно одинаковые струйки. Это происходит потому, что жидкость подчиняется закону Паскаля и выдавливается из отверстий, находящихся на одной высоте, с одинаковой силой. Для отверстий, находящихся на разных высотах, необходимо учитывать силу гидростатического давления.

Для сравнения упругих свойств жидкости и твердого тела приведем еще один пример. Представим себе, что в одну узкую мензурку мы опустили пружину (такую, что диаметр ее витков совпадает с внутренним диаметром мензурки), а в другую — налили воду. Вообразим теперь, что стенки сосудов внезапно исчезли. Как будут вести себя пружина и вода? Пружина останется на месте, как ни в чем не бывало. Вода же разлетится во все стороны, как лопнувший пузырь. Как вы думаете, почему? Причина различного поведения — в различных способах передачи давления твердым телом и жидкостью. Пружина передает давление практически только по своей длине. В воде же давление передается одинаково во все стороны — и вверх, и вниз, и в бок — в соответствии с законом Паскаля. Кстати сказать, аналогичную картину наблюдал сам Паскаль, когда устанавливал свой закон. Если вы вспомните его классический опыт, то по своей идее он напоминает только что описанный мысленный эксперимент (именно мысленный — мы ведь

его себе представили).

Правда, у Паскаля стенки сосуда — бочки — не исчезали, а трескались, и по форме возникающего «фонтана» можно было судить о давлениях в разных частях жидкости.

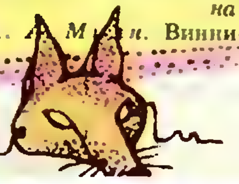
Теперь легко понять «действие» пуховой перины. Взбитая перина представляет собой как бы гору маленьких пружинок, случайным образом расположенных друг относительно друга. Каждая такая пружинка передает давление по своей длине, но из-за хаотичности расположения пружинок сила давления со стороны горошины передается... Но не будем лишать вас радости самостоятельного поиска правильного решения. Скажем лишь, что несмотря на все ваши усилия и старания интуиция принцессы позволяла безошибочно установить любой подвох — пусть он даже исходил от величественных особ, разбиравшихся в физике.

Теперь пришло время ответить на основной вопрос статьи. (Вы его еще не забыли?) В нескольких словах расскажем о том, как делают сыр, точнее — как делают дырки в сыре. Сначала готовят «тесто» для сыра. Потом полученную массу уплотняют под большим давлением и заполняют ею специальные формы. Образовавшиеся в формах головки сыра вынимают и помещают в теплые камеры для созревания. В этот период сыр «бродит». Внутри спрессованного «теста» образуется углекислый газ, который, накапливаясь, выделяется в виде пузырьков.

Чем больше углекислого газа, тем сильнее раздуваются пузырьки. (Не забудьте, что на этой стадии внутренняя часть будущего сыра представляет собой сплошную мягкую массу.)

Потом сыр затвердевает, и внутри него запечатлевается картина внутреннего «дыхания» бродящего сыра в виде вкраплений пузырьков углекислого газа. Что касается формы образуемых полостей, то вследствие выполнения закона Паскаля давление в пузырьках одинаково передается во все стороны — это во-первых, а во-вторых, «тесто» в этот момент подобно жидкости по своим упругим свойствам. Поэтому пузырьки раздуваются строго сферической формы. Отступление от этого правила будет означать, что в каком-то месте внутри имеются уплотнения или, наоборот пустоты в «тесте». Чем тверже сыр, тем меньше раздувается внутренний пузырек, тем меньше размер дырки. Некоторые сорта сыра перед созреванием не подвергаются обработке высоким давлением (например, российский сыр), и в них выделение углекислого газа при брожении происходит в уже имеющиеся в «тесте» пустоты, которые, как правило, имеют неправильную форму — это промежутки, оставшиеся между зернами полуфабриката после спекания «теста» в печке. Такие сыры в разрезе открывают не правильную картину застывших пузырей, а довольно затейливый узор, гармония которого откроется только опытному сыроделу.

Вот видите, сколько нам пришлось задать разных маленьких вопросов, чтобы ответить на один большой — почему у сыра круглые дыры.



— Здорово, Пух,
— сказал Кролик.
— Здравствуй, Кролик,
— сказал Пух сонно.
— Это ты сам додумался?
— Да,
вроде как сам,—
отвечал Пух.— Не
то чтобы я умел
думать,— продолжал он скромно,
— ты ведь сам знаешь, но иногда
на меня это находит.

А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все.

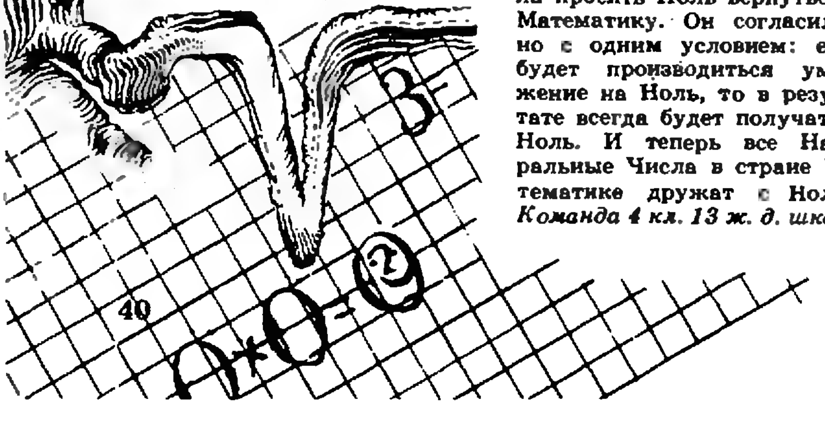
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Сказки

Математические сказки — это хорошо! Любят их слушать школьники, любят студенты, любят и преподаватели. Жаль только, что мало их, математических сказок.

А что если сами школьники и будут их писать, подумали в Омске. Студенческое научно-педагогическое общество математического факультета Омского университета несколько лет проводит разнообразные конкурсы школьного математического творчества. Сначала сказки писались для матбоев базовых школ факультета старшеклассниками, а с прошлого года сказочниками стали команды 4—7 классов, участвующие в традиционных апрельских олимпиадах. Тема сказки указывалась в олимпиадном задании. Например, четвертым классам предлагалось обыграть связь натуральных чисел и нуля, пятым — рассказать про свойства целых и дробных чисел. Каждая сказка создавалась в течение трех часов, отведенных на олимпиаду. Жюри оценивало математические свойства, используемые героями сказок, лаконичность, занимательность и поучительность.

Интересно, что у учеников старших классов сказки, в общем-то, не получились. А вот какие сказки придумали ребята из четвертых классов. (Нам их прислали члены жюри олимпиады В. Н. Сергеев и М. В. Миркина).



Ноль и Натуральные Числа

В стране Математике жили-были Натуральные Числа и Ноль. Их умножали, складывали, иногда отнимали и даже делили, но сосчитать их никто не мог. Жили Натуральные Числа дружно, ни одно не огорчалось, что оно меньше следующего, но зато каждое гордилось, что оно кого-нибудь, да больше. Один только Ноль был меньше всех. Нечем ему было гордиться, да и никто из Натуральных Чисел его не признавал. И решил Ноль покинуть Математику.

Но как только он ушел, его отсутствие сразу ощутилось: нельзя было записать числа 10, 20, 30, 40, 100 и т. д.

Решили Натуральные Числа просить Ноль вернуться в Математику. Он согласился, но с одним условием: если будет производиться умножение на Ноль, то в результате всегда будет получаться Ноль. И теперь все Натуральные Числа в стране Математике дружат с Нолем.

Команда 4 кл. 13 ж. д. школы

Сказка про Ноль

Поехал однажды Ноль к бабушке. Бабушка встретила его приветливо.

— Ах, внучек! Повзрослел-то как! А как пополнел!

И в самом деле, Ноль за последнее время стал более круглым.

— Ну, пойдем в дом, я тебя блинами угощу,— пригласила внука бабушка. Ноль сел за стол, а бабушка начала хлопотать у плиты. Вдруг заскрипела дверь, и в другую комнату мимо Ноля и бабушки проскользнуло высокое и худое существо.

— Бабушка, кто это? — спросил Ноль, проглотив кусок блина.

— Да, соседка это у меня поселилась,— сказала бабушка, поднимая со сковородки аппетитный, румяный блин. Она на минуту замолчала и посмотрела на дверь, за которой скрылась цифра.

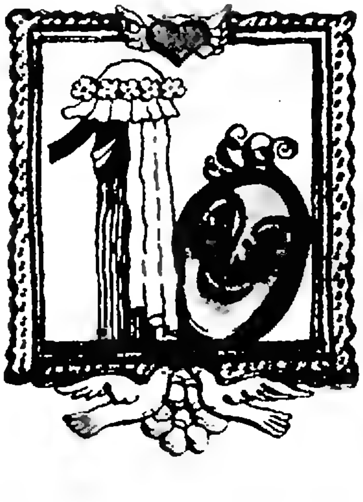
— Единицей ее зовут. Одинокая она, в обществе редко бывает. Женился бы ты на ней, внучек. И она не была бы одинокой, да и тебе было бы веселее. Сейчас ведь ты как бы пустое место, да еще и ненатуральный какой-то. А она красавица: высокая, стройная. Нос, правда, у нее длинный, но ничего, для тебя сойдет.

— А я-то к ней подойду? — расспрашивал Ноль.

— А то как же! Полный, круглолицый... Ну прямо писаный красавец!

На том разговор и кончился. На следующий день Ноль уже познакомился с Единицей и ходил около нее кругами. Вскоре они поженились и оба были счастливы. Ведь вместе они составили натуральное число 10.

Команда 4 кл. с. ш. № 88



Топ-кварк и тигренок Топ

В июле прошлого года в Лейпцигском зоопарке родился тигренок. Ему дали имя Топ, и не случайно. Как раз в это время на конференции по физике элементарных частиц, которая проходила в Лейпциге, было сообщено об открытии шестого кварка, представителя истинно элементарных частиц. Этот кварк еще до своего «рождения» был назван «верхним» («топ» — по-английски), и он, наконец, заполнил недостающее звено в таблице кварков — удивительных частиц, из которых построены нуклоны, мезоны и многие другие частицы.

Удивительны кварки потому, что они имеют дробный заряд, кратный 1/3 (если считать заряд протона за единицу). Таких частиц никто никогда не регистрировал ни в одной лаборатории. Необъясненный до сих пор закон запрещает частицам с дробным зарядом появляться в свободном состоянии; вылетать из ядер или из элементарных частиц могут только частицы с целым зарядом или же вовсе не имеющие заряда.

Сейчас известны три пары кварков. Приведем таблицу всех шести кварков с их названиями (русскими и международными) и величиной заряда (если умножить приведенное значение заряда на заряд протона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, можно получить заряд кварка в Международной системе единиц).

Такую же таблицу можно составить и для антикварков — от кварков они отличаются лишь знаком заряда.

Заметим, что в таблице нет столбца масс, и это неслучайно. Так как кварки в свободном состоянии не живут, то, строго говоря, нельзя не только сказать, какие у них массы покоя, но даже точно определить, что значит масса кварка. Однако хотя свободных кварков, скорее всего, нет в природе, тем не менее о кварках известно довольно много. Первая пара кварков — u-кварк и d-кварк — входит в состав протонов и нейтронов. Протон состоит из двух u-кварков и одного d-кварка, а нейтрон — из одного u-кварка и двух d-кварков. Радиоактивный распад нейтрона

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}$$

(n — нейтрон, p — протон, e^- — электрон, $\tilde{\nu}$ — антинейтрино) сейчас описывается как превращение d-кварка в u-кварк:

$$d \to u + e^- + \tilde{\nu}.$$

Таблица кварков

Символ	Название		Заряд
	русское	международное	
u	—	up	2/3
d	—	down	—1/3
s	странный	strange	—1/3
c	очаровательный	charm	2/3
b	нижний или красивый	bottom или beauty	—1/3
t	верхний или правдивый	top или truth	2/3

Теперь расскажем о том, как же был открыт топ-кварк.

Когда изучали столкновения протонов с энергией 270 ГэВ с антипротонами такой же энергии, в результате которых рождаются W-бозоны*), то среди последующих распадов W-бозонов обнаружили событие, которое отличалось от всех наблюдавшихся раньше. Следует, наверное, объяснить, что значит «обнаружить событие» в мире элементарных частиц. Физик говорит, что обнаружил событие, если он из своих измерений может вычислить заряды, энергии и импульсы (а следовательно, и массы) всех частиц, которые появились в результате столкновения.

Так вот, при наблюдении за взаимодействием протонов и антипротонов приборы зарегистрировали два узких пучка частиц (две струи), сопровождающиеся мю-мезонами и нейтрино. Известно, что пучки частиц образуются от кварков. Например, при распаде ипсилон-мезона с массой, соответствующей энергии 10,2 Гэв, были обнаружены две струи, отвечающие двум красивым кваркам — кварку b и антикварку $\bar{b}$.

На этот раз струи сопровождались мю-мезонами и нейтрино. О существовании последнего

(Окончание см. на с. 50)

---

*) О W-бозонах рассказывалось в статье «Открытие новой частицы» («Квант», 1983, № 5). Недавно авторам открытия этих частиц К. Руббиа и С. Ван-дер-Мейеру была присуждена Нобелевская премия.

задачник кванта

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М901, М902» или «Ф913». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем нашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М901—М905; Ф913—Ф917

М901. Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OK=OM$, то либо углы A и B треугольника равны, либо угол C равен 60°.

М902. Натуральный ряд 1, 2, 3,.... разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на ее разность.

А. В. Келарев

М903. Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с а) четным, б) нечетным числом сторон?

А. А. Дороговцев

М904. Для каждого натурального числа

$$A=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+\ldots+10a_1+a_0$$

(с десятичной записью $a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$) положим

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\ldots+2^{n-1}a_1+2^na_0.$$

Например, $D\,(1985)=1+2\cdot 9+2^2\cdot 8+2^3\cdot 5=91$, $D\,(91)=9+2\cdot 1=11$, $D\,(11)=3$.

а) Докажите, что для любого натурального $A=A_0$ в последовательности $A_1=D(A_0)$, $A_2=D(A_1)$,... встретится число $A^*=A_k<20$, для которого $D(A^*)=A^*$.

б) * Чему равно A^* для $A=19^{85}$?

Е. И. Гурвич, А. Л. Федоров

М905. Докажите, что уравнение $4x^n+(x+1)^2=y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) не имеет решений при $n=1$, б) имеет по крайней мере два решения при $n=2$, в)* имеет бесконечно много решений при $n=2$, г)* не имеет решений для натуральных $n\geqslant 3$.

М. Гараев (уч. 10 класса)

Ф913. С горизонтальной поверхности земли бросили под углом $\alpha=60°$ к горизонту со скоростью $v_1=12$ м/с комок сырой глины. Одновременно комок вдвое большей массы бросили навстречу первому под углом $\beta=30°$ к горизонту, причем начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости. В результате столкновения комки слиплись. Найти скорость (по модулю) упавшего на землю слипшегося комка.

В. И. Чивилёв

Ф914. В закрытом сосуде объема $V=33{,}6$ дм^3 находится азот и $\nu=1$ моль воды. При температуре $t=100$ °С давление в сосуде равно $p=2\cdot10^5$ Па. Определить количество азота в сосуде.

С. М. Коршунов

Ф815. Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε протекает между пластинами изолированного плоского конденсатора со скоростью v. Перпендикулярно скорости $\vec{v}$ и параллельно пластинам направлено магнитное поле с индукцией B. Определить напряжение на пластинах конденсатора. Расстояние между пластинами a.

А. И. Киркинский

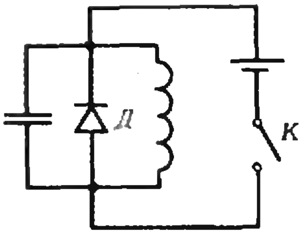


Рис. 1.

Ф916. В схеме, приведенной на рисунке 1 (*Д* — идеальный диод), ключ *К* замыкают на время τ, а затем размыкают. В момент размыкания сила тока в катушке индуктивности равна I_0. Через сколько времени после размыкания ключа ток I_L в катушке достигнет максимального значения, если оно равно $2I_0$? Построить график зависимости I_L от времени t $(0<t<\infty)$.

А. И. Киркинский, Е. А. Ромишевский

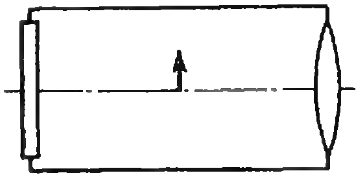


Рис. 2.

Ф917. Предмет находится между линзой и плоским зеркалом, перпендикулярным главной оптической оси линзы. Зеркало, линза и предмет заключены в кожух из светопроницаемой матовой пластмассы (рис. 2). Такая система создает два изображения предмета и изображение линзы. Оба изображения предмета имеют одинаковые размеры независимо от расстояния между линзой и предметом. С каким увеличением изображается линза?

Е. П. Кузнецов

Problems

M901—M905; P913—P917

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all

M901. The bissectors *AK* and *BM* of triangle *ABC* intersect at the point *O*. Prove that $OK=OM$ implies that either angles *A* and *B* of the triangle are congruent, or that the angle *C* is 60°.

M902. The natural numbers 1, 2, 3,... are partitioned into several arithmetical progressions. Prove that at least one of them has an initial term divisible by the progression's difference.

A. V. Kelarev

M903. Does there exist a convex polyhedron every section of which by a plane not containing any

these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

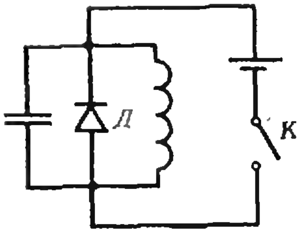


Fig. 1.

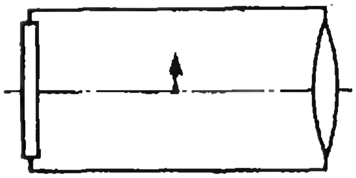


Fig. 2.

vertex is a polygon with a) an even b) an odd number af sides?

A. A. Dorogovtsev

M904. For each natural number

$$A=10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\dots+10a_1+a_0$$

with dicimal notation $a_n a_{n-1}\dots a_1 a_0$, put

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\dots+2^{n-1}a_1+2^n a_0.$$

For example, $D(1985)+1+2\cdot 9+2^2\cdot 8+2^3\cdot 5=91$, $D(91)=9+2\cdot 1=11$, $D(11)=3$.

a) Prove that for any natural $A=A_0$, the sequence $A_1=D(A_0)$, $A_2=D(A_1)$,... contains a number $A^*=$ $=A_k<20$ such that $D(A^*)=A^*$.

b)* What is the value of A^* if $A=19^{85}$?

E. I. Gurvich, A. L. Fiodorov

M905. Prove that the equation

$$4x^n+(x+1)^2=y^2$$

with respect to the natural numbers x and y a) has no solutions when $n+1$, b) has at least two solutions when $n=2$, c)* has infinitely many solutions when $n=2$, d)* has no solutions for integers $n\geqslant 3$.

M. Garaev (10th grade student)

P913. A lump of humid clay is thrown from a horizontal stretch of the earth surface at an angle of 60° to the horizon with velocity $v_1=12$ m/s. At the same time a lump (of twice the mass of the first one) is thrown at a 30° angle to the horizon, the two initial velocity vectors being in the same plane and oriented towards each other. The two lumps collide and stick together. Find the speed of the aggregate lump when in hits the ground.

V. I. Chivilіev

P914. A closed receptacle of volume $V=33.6$ dm^3 contains nitrogen and $\nu=1$ moles of water. At temperature $t=100$ °C the pressure in the receptacle equals $p=2\cdot 10^5$ Pa. Determine the amount of nitrogen in the receptacle.

S. M. Korshunov

P915. A liquid with dielectric permeability ε flows with velocity v between the plates of an isolated flat capacitor. There is a magnetic field of induction B, perpendicular to the velocity vector v and parallel to the plates of the capacitor. Determine the tension on the plates if the distance between them is a.

A. I. Kirkinski

P916. In the circuit shown on Figure 1 (where Д is an ideal diode), the switch K is turned on for the period of time τ, and then switched off. At the moment of switching off the current in the inductivity coil was I_0. How much later will the current I_L in the coil acquire its maximal value, if the latter is $2I_0$? Plot the dependence of I_L on time t $(0<t<\infty)$.

A. I. Kirkinski, E. A. Romishevski

P917. An object is placed between a lens and a plane mirror, perpendicularly to the lens' optical axic. The

mirror, the lens and the object are enclosed in a case made of translucent plastic (Fig. 2). This system generates two images of the object and an image of the lens. Both images of the object have the same size, independently of the distance betveen the lens and the object. What is the enlargement of the lens' image?

E. P. Kuznetsov

Решения задач

M884, M885; Ф894—Ф897

M884. *Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0;\ 1]$ и принимает значения также на отрезке $[0;\ 1]$. Докажите, что ее график можно покрыть n прямоугольниками площади $1/n^2$ каждый. (Стороны прямоугольников параллельны осям координат.)*

Решение основано на следующем соображении: если $A(a;\ f(a))$ и $B(b;\ f(b))$ — две точки на графике функции (рис. 1), то прямоугольник $П(A,\ B)$ с диагональю AB покрывает участок графика от A до B, а его площадь S удовлетворяет неравенству $2\sqrt{S}\leqslant l+h$, где $l=b-a$ — длина его основания, а $h=f(b)-f(a)$ — высота; это неравенство есть по существу неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\sqrt{lh}\leqslant(l+h)/2$.

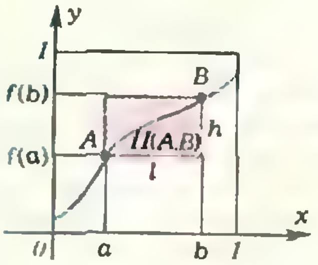


Рис. 1.

Это соображение можно использовать двумя способами. Предположим временно, что $f(0)=0$, $f(1)=1$.

1) Продолжим функцию f на всю положительную полуось так, чтобы она осталась непрерывной и монотонной (например, можно положить $f(x)=x$ при $x>1$). Пусть A_0 — начальная точка ее графика (с координатами $(0;\ 0)$). Рассмотрим на графике такие точки A_1, ..., A_n, что площадь прямоугольника $П(A_{i-1};\ A_i)$, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$, равна $1/n^2$; существование таких точек, очевидно, вытекает из непрерывности и монотонности функции f. Для каждого из этих прямоугольников сумма длины основания и высоты не меньше $2\sqrt{1/n^2}=2/n$, поэтому сумма координат точки A_n (равных, соответственно, сумме длин оснований всех прямоугольников и сумме их высот), не меньше 2. Следовательно, хотя бы одна из этих координат не меньше 1, а значит, построенные n прямоугольников покрывают график.

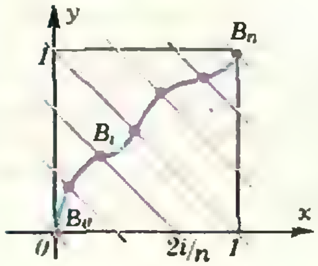


Рис. 2.

2) Выберем на графике функции f последовательно точки B_0, B_1, ..., B_n, начиная с B_0 $(0;\ 0)$, так, чтобы сумма длины основания и высоты каждого из прямоугольников $П(B_{i-1},\ B_i)$, $i=1$, ..., n, равнялась $2/n$. (Легко видеть, что B_i — это точка пересечения прямой $y=2i/n-x$ с графиком, в частности, B_n — это конец графика — точка $(1;\ 1)$; см. рис. 2.) В силу сделанной выше оценки площадь каждого из прямоугольников не превосходит $1/n^2$. Увеличив их при необходимости так, чтобы их площади стали в точности равны

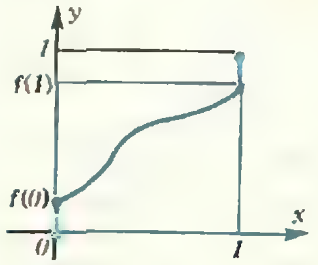


Рис. 3.

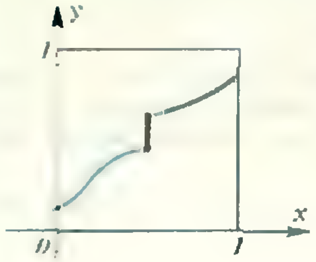


Рис. 4.

$1/n^2$, получим требуемое покрытие.

Если $f(0) > 0$ или $f(1) < 1$, дополним график вертикальными отрезками, соединяющими точку $(0;\ 0)$ с его началом $(0;\ f(0))$ и $(1;\ 1)$ — с концом $(1;\ f(1))$ (рис. 3). Получится непрерывная кривая, соединяющая точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$, к которой оба приведенных рассуждения можно применить практически без изменений.

Такой же прием позволяет доказать утверждение задачи для любой (возможно, разрывной) функции f: в точках разрыва график дополняется до непрерывной кривой отрезком (красный отрезок на рисунке 4). Однако строгое обоснование в этом случае несколько выходит за рамки школьной программы.

Н. Б. Васильев,
В. Н. Дубровский,
С. Ю. Оревков

◆

М885*. *Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом.*

а) Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1 + p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$.

б) Докажите, что эта сумма не больше $\sqrt{2n}\,p(n)$.

а) Разбиение числа n в сумму натуральных слагаемых будем называть *отмеченным*, если одно из слагаемых выделено среди остальных (подчеркнуто); отмеченные разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, мы будем считать одинаковыми. (На рисунке слева изображены все отмеченные разбиения числа 4; выделенные слагаемые показаны красным цветом.) Заметим, что если k — разброс некоторого разбиения (неотмеченного), то из этого разбиения можно получить ровно k отмеченных разбиений. Поэтому *общее количество отмеченных разбиений числа n равно $q(n)$*. С другой стороны, если из любого отмеченного разбиения, кроме разбиения, состоящего из единственного слагаемого, выкинуть подчеркнутый элемент, получится разбиение некоторого числа, меньшего чем n. И наоборот, если $m < n$, то по любому разбиению числа m можно однозначно восстановить отмеченное разбиение числа n: надо к разбиению *числа m добавить слагаемое $n-m$* и подчеркнуть его (на рисунке изображено взаимно-однозначное соответствие между отмеченными разбиениями числа 4, кроме разбиения $4 = \underline{4}$, и разбиениями чисел, меньших 4). Но количество разбиений чисел, меньших n, равно $p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$. Следовательно, $q(n) - 1 = p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$.

$4=4$

$4=3+1 \longleftrightarrow 1=1$

$4=2+2 \longleftrightarrow 2=2$

$4=2+1+1 \longleftrightarrow 2=1+1$

$4=1+3 \longleftrightarrow 3=3$

$4=1+2+1 \longleftrightarrow 3=2+1$

$4=1+1+1+1 \longleftrightarrow 3=1+1+1$

Другими словами идею этого решения можно изложить так: если к каждому из $p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$ разбиений чисел $m = 1, 2, \ldots, n-1$ добавить одно слагаемое $n - m$, то мы получим *каждое разбиение числа n* (кроме тривиального $n = n$) столько раз, какое его разброс.

б) Достаточно доказать, что разброс любого разбиения числа n в сумму натуральных слагаемых не превосходит $\sqrt{2n}$. Докажем это утверждение. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — все различные слагаемые, входящие в некоторое разбиение (с разбросом k), причем $0 < a_1 < \ldots < a_k$. Тогда, с одной стороны,

$a_1+a_2+\ldots+a_k\leqslant n$, а, с другой стороны, $a_1\geqslant 1$, $a_2\geqslant 2, \ldots, a_k\geqslant k$ (действительно, $a_1\geqslant 1$; $a_2>a_1\geqslant 1$, следовательно, $a_2\geqslant 2$; $a_3>a_2\geqslant 2$, следовательно, $a_3\geqslant 3$, и т. д.). Поэтому $n\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_k\geqslant 1+2+\ldots+k=k(k+1)/2\geqslant k^2/2$, то есть $k\leqslant\sqrt{2n}$.

С. Ю. Оревков

◆

Ф894. *В одном из проектов для перелетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой равен $R_З=1{,}5\cdot01^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па.*

1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы?

2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой равен $R_М=2{,}3\cdot10^8$ км? Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать.

Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную — $M_CG=1{,}3\cdot10^{11}$ км^3/с^2.

При раскрытии солнечного паруса на аппарат действуют сила притяжения Солнца и сила давления солнечных лучей. Результирующая этих сил —

$$F_{эф}=G\frac{M_Cm}{R_З^2}-pS=G\frac{M_Cm}{R_З^2}-\frac{GmR_З^2pS}{GmR_З^2}=$$

$$=G\frac{(M_C-pSR_З^2/Gm)m}{R_З^2}.$$

Мы видим, что давление солнечных лучей как бы уменьшает силу притяжения аппарата к Солнцу — эта сила оказывается такой, как если бы Солнце имело не массу M_C, а некую меньшую эффективную массу, равную

$$M_{эф}=M_C-\frac{pSR_З^2}{Gm}.$$

Пользуясь введенной эффективной массой, мы можем дальше решать задачу без учета давления солнечных лучей.

Полная энергия космического аппарата в гравитационном поле тела с массой $M_{эф}$ —

$$E=\frac{mv^2}{2}-G\frac{mM_{эф}}{R}.$$

Согласно закону сохранения энергии эта энергия в любой точке орбиты аппарата должна быть равна

$$E=\frac{mv_З^2}{2}-G\frac{mM_{эф}}{R_З},$$

где $v_З$ — скорость, которую имел аппарат в момент раскрытия паруса на расстоянии $R_З$ от Солнца. Эту скорость найдем из уравнения движения аппарата по земной орбите под действием силы притяжения Солнца:

$$\frac{mv_З^2}{R_З}=G\frac{mM_C}{R_З^2}\Rightarrow v_З=\sqrt{G\frac{M_C}{R_З}}.$$

Таким образом,

$$E=G\frac{m}{R_З}\left(\frac{M_C}{2}-M_{эф}\right)=G\frac{m}{R_З}\left(\frac{pSR_З^2}{Gm}-\frac{M_C}{2}\right).$$

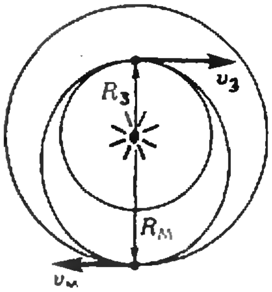
Аппарат может улететь из Солнечной системы, если $E\geqslant 0$, то есть при условии

$$\frac{pSR_З^2}{Gm}-\frac{M_C}{2}\geqslant 0.$$

Отсюда находим, при какой массе аппарата это возможно:

$$\text{м}\leqslant\frac{2\rho SR_{\text{З}}^2}{GM_{\text{С}}}\approx 3{,}46\cdot 10^3\ \text{кг}.$$

При большей массе аппарат будет двигаться по замкнутым орбитам.



Пусть при некоторой массе m_1 орбита аппарата касается орбиты Марса. (Из всех возможных масс m, при которых аппарат достигает орбиты Марса (пересекает ее), m_1 — максимальна.) В этом случае орбита аппарата — эллипс, большая ось которого равна $R_{\text{З}}+R_{\text{М}}$ (см. рисунок). В точках касания скорость аппарата перпендикулярна радиусу-вектору аппарата.

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{m_1v_{\text{З}}^2}{2}-G\frac{m_1M_{\text{эф}}}{R_{\text{З}}}=\frac{m_1v_{\text{М}}^2}{2}-G\frac{m_1M_{\text{эф}}}{R_{\text{М}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{\text{З}}^2-v_{\text{М}}^2=2GM_{\text{эф}}\left(\frac{1}{R_{\text{З}}}-\frac{1}{R_{\text{М}}}\right). \quad (*)$$

Согласно второму закону Кеплера

$$v_{\text{З}}R_{\text{З}}=v_{\text{М}}R_{\text{М}}\Rightarrow v_{\text{М}}=v_{\text{З}}\frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{М}}}.$$

Подставляя это выражение для $v_{\text{М}}$ в (*) и учитывая, что $v_{\text{З}}=\sqrt{G\frac{M_{\text{С}}}{R_{\text{З}}}}$, после несложных преобразований получим:

$$2M_{\text{эф}}R_{\text{М}}=M_{\text{С}}(R_{\text{М}}+R_{\text{З}}).$$

или

$$2\left(M_{\text{С}}-\frac{\rho SR_{\text{З}}}{Gm}\right)R_{\text{М}}=M_{\text{С}}(R_{\text{М}}+R_{\text{З}}).$$

Отсюда найдем максимальную массу m_1 аппарата, при которой аппарат может достичь орбиты Марса

$$m_1=\frac{2\rho SR_{\text{З}}^2}{GM_{\text{С}}}\frac{R_{\text{М}}}{R_{\text{М}}-R_{\text{З}}}\approx 10^4\ \text{кг}.$$

В. А. Данилин

◆

Ф895. *Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов восходит к древнегреческой легенде о сыне бога солнца Гелиоса — Фаэтоне, пораженном Зевсом (Юпитером). Согласно этой гипотезе рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться планета Фаэтон, слишком близко подошел к Юпитеру. Под влиянием гравитационного поля Юпитера рой распался на отдельные глыбы — астероиды. Радиус роя по оценкам составлял примерно 10^4 км; масса роя (суммарная масса астероидов) в 10^5 раз меньше массы Юпитера.*

На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

Рассмотрим ближайшую к Юпитеру глыбу. Распад роя означает, что расстояние между этой глыбой и центром роя увеличивается.

Рой как целое падает на Юпитер с ускорением, которое ему сообщает сила притяжения Юпитера:

$$ma_1=G\frac{mM}{R^2}\Rightarrow a_1=G\frac{M}{R^2},$$

где m — масса роя, M — масса Юпитера, R — расстояние между центрами роя и Юпитера. Глыба движется под действием силы притяжения Юпитера и силы притяжения, действующей на нее со стороны роя как целого. Ускорение, с которым глыба движется к Юпитеру, —

$$a_2=G\frac{M}{(R-r)^2}-G\frac{m}{r^2};$$

где r — радиус роя. Если $a_2>a_1$, то расстояние между глыбой и центром роя увеличивается со временем — рой распадается. Из этого условия получаем:

$$\frac{M}{(R-r)^2}-\frac{m}{r^2}>\frac{M}{R^2}.$$

Полагая $r \ll R$, находим:

$$\frac{2rM}{R^3}>\frac{m}{r^2} \Rightarrow R<r\sqrt[3]{\frac{2M}{m}}\approx 1{,}26\cdot 10^6 \text{ км.}$$

В. Е. Белонучкин

Ф896. *В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре 100 °С и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество тепла для этого потребуется? Давление насыщенного водяного пара возрастает на 3,7 кПа при повышении температуры на 1 °С. Удельная теплота испарения воды $r=2{,}25\cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара $c_V=1{,}38\cdot 10^3$ Дж/(кг·К).*

◆

Определим сначала, до какой температуры надо нагреть сосуд, чтобы вся вода испарилась.

Запишем уравнения состояния пара при начальных условиях (давление насыщенного пара при температуре $t_1=100$ °С равно, $p_1=10^5$ Па):

$$p_1V=\frac{M}{\mu}RT_1. \qquad (1)$$

Когда температура сосуда станет $T_2=T_1+\Delta T$ и вся вода испарится, давление насыщенного пара в сосуде будет $p_2+\Delta p$. По условию задачи $\Delta p=\alpha\cdot\Delta T$, где $\alpha=3{,}7$ кПа/К. Воспользовавшись этим, запишем уравнение состояния пара при температуре T_2:

$$p_2V=\frac{M+m}{\mu}RT_2,$$

или

$$(p_1+\alpha\cdot\Delta T)V=\frac{M+m}{\mu}R(T_1+\Delta T). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим ΔT:

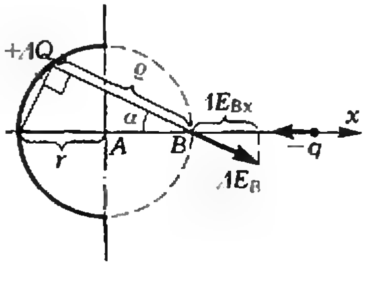
$$\Delta T=\frac{mTp}{MT\alpha-Mp-mp}\approx 0{,}29 \text{ К}.$$

Таким образом, для испарения всей воды сусуд необходимо нагреть до температуры 100,29 °С. Количество тепла, которое необходимо для этого, найдем из уравнения теплового баланса:

$$Q=rm+c_V(M+m)\cdot\Delta T\approx 2290 \text{ Дж}.$$

А. И. Буздин

Ф897. *Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (см. рисунок). Отношение скоростей частицы в точках A и B равно $v_A/v_B=n$. Найти отношение ускорений частицы в этих точках.*



◆

Запишем уравнения движения частицы в точках A и B:

$$ma_A=qE_A, \qquad ma_B=qE_B.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{E_A}{E_B},$$

то есть отношение ускорений частицы в точках A и B равно отношению напряженностей поля, создаваемого полукольцом, в этих точках. С другой стороны, из условия задачи нам фактически известно отношение потенциалов поля в точках A и B. Действительно, согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_A^2}{2}=q\varphi_A, \qquad \frac{mv_B^2}{2}=q\varphi_B$$

(поскольку на бесконечности энергия частицы равна нулю), и

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B}=\frac{v_A^2}{v_B^2}=n^2.$$

Попытаемся выразить отношение E_A/E_B через известное отношение φ_A/φ_B.

Разобьем мысленно полукольцо на множество элементарных участков с зарядом ΔQ каждый (Q — заряд всего полукольца). Пусть $\Delta\varphi_B$ и ΔE_B — соответственно потенциал и напряженность поля, создаваемого в точке B участком, который находится на расстоянии ρ от этой точки (см. рисунок). Тогда

$$\Delta\varphi_B=k\frac{\Delta Q}{\rho}=k\frac{\Delta Q}{2r\cos\alpha},\quad \Delta E_B=k\frac{\Delta Q}{\rho^2}=k\frac{\Delta Q}{4r^2\cos^2\alpha}.$$

Проекция вектора $\Delta\vec{E}_B$ на горизонтальную ось x равна

$$\Delta E_{Bx}=\Delta E_B\cos\alpha=k\frac{\Delta Q}{4r^2\cos\alpha}=\frac{\Delta\varphi_B}{2r}.$$

Из соображений симметрии ясно, что напряженность поля $\vec{E}_B$ в точке B направлена вдоль оси x. Следовательно, значение E_B равно сумме проекций ΔE_{Bx} напряженностей полей, создаваемых всеми элементарными участками, то есть

$$E_B=\Sigma\Delta E_{Bx}=\Sigma\frac{\Delta\varphi_B}{2r}=\frac{\varphi_B}{2r}.$$

Что касается значений φ_A и E_A, то

$$\varphi_A=\frac{Q}{r},\quad E_A=\frac{2Q}{\pi r^2}=\frac{2\varphi_A}{\pi r}$$

(получите эти соотношения самостоятельно).

Итак, $E_A/E_B=4\varphi_A/\pi\varphi_B$, и отношение ускорений частицы в точках A и B равно

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{4}{\pi}\frac{\varphi_A}{\varphi_B}=\frac{4}{\pi}n^2.$$

В. Т. Карапетян

Топ-кварк и тигренок Топ

(Начало см. на с. 41)

можно было догадаться по результатам измерений импульсов всех заряженных частиц. Поскольку зарегистрированное событие связано с распадом практически покоящегося W-бозона, суммарный импульс всех частиц в распаде должен быть равен нулю. Однако измеренный импульс заряженных частиц оказался ненулевым, откуда и был сделан вывод о присутствии нейтрино.

Наиболее вероятная расшифровка события, о котором идет речь, состоит в том, что при столкновении протона с антипротоном родилась частица, состоящая из двух кварков — топ-кварка t и красивого антикварка $\bar{b}$. Топ-кварк распался по схеме

$$t\to b+\mu^++\nu$$

(здесь μ^+ — положительный мю-мезон), а $\bar{b}$ и b дали два пучка частиц. Теперь надо ждать результатов дальнейших опытов.

Масса топ-кварка по оценкам оказалась соответствующей энергии около 40 Гэв (масса ядра кальция!).*) Это, конечно, меньше массы тигренка, даже новорожденного, но в «зоопарке частиц» топ-кварк — рекордсмен.

Я. С.

---

*) Такая оценка массы топ-кварка получается, если считать, что масса ипсилон-мезона равна массе двух b-кварков (5 ГэВ+ +5 ГэВ=10 ГэВ), а масса новой частицы ($\approx$50 ГэВ) равна сумме масс b-кварка и топ-кварка.

Братиславская летняя школа юных программистов

С 1 по 8 июля 1984 года в столице Словацкой социалистической республики Братиславе прошла первая Летняя школа юных программистов Словакии. Школа проходила в братиславской гимназии им. Ю. Гронца, где уже в течение двадцати лет ведется обучение программированию старших школьников. Организаторы Летней школы — директор гимназии М. Ганула, преподаватели программирования О. Демачек, Е. Ганулова и др.— горячие энтузиасты школьной информатики. Летом 1983 года делегация школьников из гимназии им. Ю. Гронца, возглавляемая О. Демачеком, впервые участвовала во Всесоюзной летней школе юных программистов. По результатам этой поездки и было принято решение о проведении в Братиславе летней школы с приглашением юных программистов из Советского Союза.

В Братиславу съехались полсотни словацких старшеклассников. На первой встрече все ребята рассказали о том, как в их школах изучают программирование, с какими машинами они знакомы, какие программы пишут. А те из словацких девочек и мальчиков, которые привезли на Школу результаты своих программ, сделали краткие сообщения. Школьники из Банской Быстрицы Р. Немец и И. Мелихерчик показали свою программу, работающую с большими числами. Ребятам удалось вычислить некоторые иррациональные числа с высокой точностью (до 256 знаков) на машинах весьма ограниченных возможностей. В сообщении Р. Ласицы из гимназии словацкого города Сенице предложены программные средства для анализа взаимного расположения прямых. И. Кудла из политехникума в г. Левице продемонстрировал выполненные на Бэйсике расчеты зубчатых сцеплений.

С интересом были заслушаны выступления советских школьников. П. Земцов (Новосибирск, с. ш. № 25) рассказал о системе программирования на языке Рапира для советских персональных микро-ЭВМ, А. Петров (Новосибирск, с. ш. № 166) — о применении ЭВМ на уроках по разным школьным предметам путем использования учебных пакетов прикладных программ.

Учебная программа Школы была насыщенной. В первые дни были прочитаны лекции по языку Паскаль. Они оказались весьма актуальными, поскольку в большинстве чехословацких школ, где ведется обучение программированию, учебным языком является Бэйсик — сравнительно простой, но спорный в методическом отношении язык программирования. В лекциях на Летней школе были отражены многие важнейшие проблемы современного программирования — операционные системы, параллельные алгоритмы, программные средства отладки, машинная графика, программное обеспечение искусственного интеллекта.

Обсуждались также вопросы теории и методологии программирования — доказательства правильности программ, основы взаимоотношений математики и программирования. Эти лекции читали преподаватели гимназии, студенты братиславских вузов, научные сотрудники исследовательских институтов Словацкой Академии наук, а также руководитель советской делегации Ю. А. Первин.

Несомненно, наиболее увлекательной частью Школы была работа учащихся за пультами вычислительных машин. Гимназия предоставила с этой целью свою вычислительную технику: две чехословацкие мини-ЭВМ — АДТ-4316 с 8 терминалами и системой программирования на Бэйсике и СМ-3-20 с 6 терминалами и языком Паскаль, а также две персональных микро-ЭВМ с графическими возможностями — новую машину чехословацкого производства ПМД-85 и небольшой английский компьютер Синклер-ZX81. Участники Школы быстро освоились с новой для них техникой и с первых же дней приступили к решению задач, предложенных на выбор в самом начале работы Школы.

Диапазон задач по уровню сложности был достаточно широк и мог удовлетворить любой вкус. Достаточно назвать классические программы из инструментария машинной математики — пакет обработки матриц, арифметика разреженных матриц, построение графиков функций. Тем, кто готовится стать системным программистом, были более близки темы по сортировке, построению таблиц перекрестных ссылок, графическому редактору, автоматизации информационного поиска, модели компилятора. Был предложен целый ряд прикладных и игровых задач — программные средства ведения домашнего бюджета, лабиринтные задачи, программирование шашек, решение шахматных задач, простые диалоговые программы, контролирующие знания по истории, географии, литературе. В большинстве задач активно использовалась графика.

Каждая из таких задач предлагалась команде из 2—3 человек, которые в свободное от лекционных занятий время отлаживали программу на одной из машин. Команда советских школьников составила на Бэйсике программную модель робота-муравья (описанную в журнале «Наука и жизнь», 1984, № 5), которая служит удобным методическим средством при обучении основам программирования младших школьников. Весь диалог с машиной авторы программы сделали на словацком языке (разумеется, не без помощи новых друзей, с которыми советские школьники познакомились в Братиславе).

Интересным был предпоследний день Школы. Бóльшую его половину заняла удивительная экскурсия. По далекой лесной горной дороге все школьники добрались до расположенного высоко в живописных Малых Карпатах Государственного метеорологического центра Словакии. Для программистов представила интерес вычислительная техника, которой оснащен этот центр, например, цветные графические дисплеи с растром 512×512 точек. На экране такого дисплея прекрасно видны получаемые со спутника и обрабатываемые на ЭВМ изображения как всего земного шара, так и ближайшего региона. После такой прогулки, казалось, можно было бы и отдохнуть. Но сразу же после возвращения в классы гимназии началось еще одно мероприятие — соревнование юных программистов, ни-

Участники Школы за пультами ЭВМ в гимназии им. Ю. Гронца.

тересное, серьезное, увлекательное и даже немного азартное.

Каждый участник соревнований получил две задачи. В одной из них, которую следовало запрограммировать на Бэйсике, надо было выдать на экран заданный стилизованный, составленный из символов рисунок, затратив на это минимальное количество предписаний. Вторая задача состояла в программировании на языке Паскаль вычисления факториала так, чтобы на экран выводились все цифры результата. Критерий этой задачи — быстродействие программы. Победили школьники из Поважской Бистрицы В. Белл и новосибирский девятиклассник П. Земцов.

А на другой день состоялась заключительная конференция, где школьники рассказали (и показали на экранах машин!) то, что было сделано за эту необычную в их жизни неделю.

Закрытие было торжественным. Никто из участников не остался без подарка — книг по программированию на словацком и чешском языках, а активным участникам Школы были вручены дипломы и памятные подарки. На этой же заключительной встрече прозвучали соответствующие торжеству момента прелюдии и фуги Баха, мелодии Моцарта в исполнении... вычислительной машины АДТ-4316.

Советским юным программистам, впервые выезжавшим за рубеж, эта Школа доставила много ярких впечатлений. Новых друзей сблизили Паскаль, Бэйсик, Рапира...

Ю. А. Первин

Братислава — Москва — Новосибирск

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и ПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Для поступления в школу нужно выполнить первое задание.

Задание 1. Изучите статью «Пары чисел и действия с ними» в этом номере журнала (см. с.   ) и решите задачи 1—20 из этой статьи (не обязательно все; учитываются решения отдельных пунктов задач).

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1971*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3,* *мать — медсестра*
Полный почтовый адрес	*123456 г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

Срок отправки задания № 1 — не позднее 5 апреля 1985 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1985 г. вы будете получать все дальнейшие задания. Предполагается, что часть заданий будет даваться в журнале «Квант», поэтому советуем вам на него подписаться (журнал распространяется только по подписке; подписка принимается во всех отделениях связи с любого месяца без ограничений). Первое задание надо выслать по адресу: «119823 Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в г. Дубна при Объединенном институте ядерных исследований, в г. Могилеве при областном дворце пионеров и школьников, а также отделение ВЗМШ при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), должны присылать работы по адресу: «193130 Ленинград, 8-я Советская ул., 3, С-3 ЗМШ. На прием».

Школьники, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится до 20 сентября 1985 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1985 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе. В группы «Коллективный ученик ВЗМШ» прием без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться с сентября 1985 г. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителя группы «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вне конкурса принимаются также участники Всесоюзных олимпиад по математике для школьников и учащихся ПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре месяце. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 или 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу — интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 апреля 1985 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы, при этом не обязательно должны быть решены все задачи. Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя и отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 14×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и свою фамилию и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 г. Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ.

277003 г. Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1985 году

1. Разложить многочлен x^4+2x^2+9 в произведение двух квадратных трехчленов.

2. Точка D находится внутри треугольника ABC. Доказать, что $AD+BD$ меньше, чем $AC+BC$.

3. Из вершины прямого угла треугольника проведены медиана, биссектриса и высота. Доказать, что угол между медианой и биссектрисой равен углу между биссектрисой и высотой.

4. Встретились 6 школьников. Доказать, что среди них есть либо трое, каждый из которых знаком с двумя другими, либо трое, каждый из которых не знаком с двумя другими (считается, что для двух школьников есть только две возможности: или они знакомы, или не знакомы друг с другом).

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$x^2+y^2+1=xy+x+y.$$

6. Сколько чисел, не делящихся ни на 3, ни на 7, имеется среди первого миллиона натуральных чисел?

7. Доказать, что у квадрата любого нечетного числа, большего 3, предпоследняя цифра четная.

8. При каких значениях x выражение

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$$

принимает наименьшее значение?

9. Из пункта A выехал первый велосипедист. Одновременно из пункта B навстречу ему выехали второй и третий велосипедисты. Через час второй велосипедист находился между первым и третьим, на одинаковом расстоянии от каждого из них. Еще через полчаса уже первый велосипедист оказался на равном расстоянии от двух других. Через сколько времени после начала движения третий велосипедист будет на одинаковом расстоянии от первого и второго велосипедистов?

10. Доказать, что число

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{78}}+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$$

больше 4.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1985/86 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует требованиям на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1985 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$x+3>\log_3(26+3^{-x}).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x}=\frac{\text{[illegible]}}{6\sqrt{x}+\sqrt{6x-3}}.$$

3. Через точку $A\,(3;\ -4)$ проведена касательная l к гиперболе $y=-\frac{12}{x}$. Найдите радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс. Найдите все решения.

4. Найдите все значения x и y, такие, что числа

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x,\ 2\cos(x+y),\ 4\sin 2x,\ 16\sin(x-y)$$

являются последовательными членами геометрической прогрессии.

5. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $|AC|=4$, $|BD|=2$. Точки M и N лежат на ребрах AD и B_1C_1 соответственно, причем $|AM|:|MD|=|C_1N|:|NB_1|=3:2$, $|MN|=\sqrt{5}$. Найдите объем призмы.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую (MN), выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка AA_1 имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок AC?

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\leqslant\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\cos 2x=2\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x\geqslant\cos x$.

3. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

4. Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на стороне KM равнобедренной трапеции $ABKM$ ($(BK)\parallel(AM)$), P — точка пересечения отрезков AM и CD. Найдите углы трапеции и отношение площадей прямоугольника и трапеции, если $|AB|=2|BC|$, $|AP|=3|BK|$.

5. Сфера касается плоскости основания и всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (S — вершина). Найдите объем пирамиды, если радиус сферы равен R, а угол $\widehat{SAB}$ равен α.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые (BE) и (AD) соответственно в точках M и N ($|EM|>|BM|$, $|AN|>|DN|$).
Найдите

а) отношение $|DN|:|AD|$, если $|BM|=|DN|$,

б) отношение $|DN|:|AD|$, если $|BM|:|BE|=3:22$.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\frac{5}{2-x}>1+\frac{3}{x+2}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3\sin 2x}=4\sqrt{-\sin x\cdot\operatorname{tg}x}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}5+\log_y x^2=-\log_{\sqrt{x}}y,\\ \dfrac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x}=6-3^{x:y}-\log_{25}y.\end{cases}$$

4. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC ($|AB|=|BC|$). Прямая (AO) пересекает отрезок BC в точке M. Найдите углы и площадь треугольника ABC, если $|AO|=3$, $|OM|=\frac{27}{11}$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $|SA|=4$) точка D лежит на ребре SC, $|CD|=3$, а расстояние от точки A до прямой (BD) равно 2. Найдите объем пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке A. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$, такие, что точки M и N лежат на прямой (BD), а прямая (PQ) касается сферы в одной из точек отрезка PQ. Найдите наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Составной стержень представляет собой два соосных цилиндра, прижатых друг к другу торцами (рис. 1). Оказалось, что центр масс C такого стержня находится в стыковочном сечении. Цилиндры имеют одинаковые площади сечения, но изготовлены из различных материалов с плотностями ρ и 2ρ. Определите отношение масс цилиндров.

2. На рисунке 2 изображена изотерма влажного воздуха. Давление воздуха в точках *1*, *2* и *3* равно p_1, p_2 и p_3 соответственно. Определите относительную влажность воздуха в этих точках.

3. В схеме, изображенной на рисунке 3 (величины C, R, $\mathscr{E}$ известны), при разомкнутом ключе K заряд левой пластины плоского конденсатора равен нулю. Определите начальный

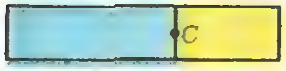


Рис. 1.

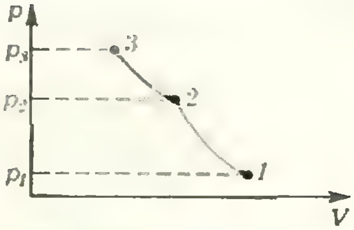


Рис. 2.

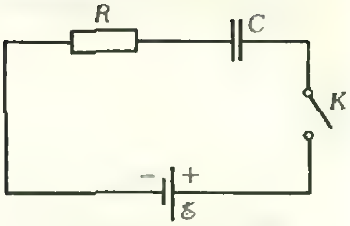


Рис. 3.

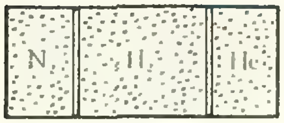


Рис. 4.

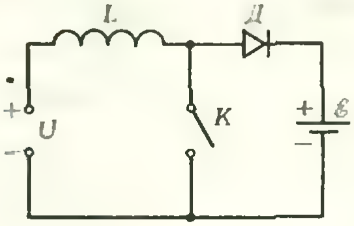


Рис. 5.

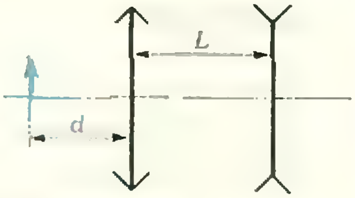


Рис. 6.

заряд правой пластины конденсатора, если после замыкания ключа на резисторе с сопротивлением R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.

4. Тонкая линза создает изображение небольшого предмета, находящегося в ее фокальной плоскости. Определите высоту предмета, если высота изображения $H=0{,}7$ см.

Вариант 2

1. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема составляла 25 % от его кинетической энергии в точке бросания?

2. В сосуде длиной L, разделенном на три части легкими поршнями, находится азот, водород и гелий (рис. 4). Материал, из которого изготовлен правый поршень, оказался проницаемым для водорода и гелия. Левый поршень проницаем только для водорода. Найдите смещения поршней после установления равновесия в системе. Первоначальные давления и температуры газов одинаковы, объем, занимаемый водородом, больше объемов азота и гелия в два раза.

3. Для подзарядки автомобильного аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В от сети с постоянным напряжением $U=5$ В собрана схема (рис. 5), содержащая катушку с индуктивностью $L=0{,}1$ Гн, идеальный диод $Д$ и прерыватель K, который периодически замыкается и размыкается на одинаковое время $\tau_1=\tau_2=0{,}1$ с. За сколько времени можно таким образом осуществить подзарядку аккумулятора на 20 А·ч (ампер-часов)? Сопротивлением всех узлов схемы и диода в прямом направлении пренебречь.

4. Оптическая система, показанная на рисунке 6, состоит из положительной линзы с фокусным расстоянием $F_1=9$ см и отрицательной линзы с фокусным расстоянием (по модулю) $F_2=5$ см. Расстояние между линзами $L=22$ см. При каких расстояниях d от положительной линзы до предмета эта система будет давать перевернутое мнимое увеличенное изображение предмета?

Публикацию подготовили
П. Б. Гусятников, А. В. Шелагин

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x.$$

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a; боковое ребро равно b. Определите ее объем и площадь сечения, проходящего через сторону основания перпендикулярно к боковому ребру, противолежащему этой стороне.

3. Что значит $a\geqslant b$? Докажите, что если $a>b$ и $b\geqslant c$, то $a>c$.

4. Расположите в порядке возрастания следующие числа:

$$1;\ 0{,}37;\ \frac{65}{63};\ \frac{61}{59};\ \mathrm{tg}\,33°;\ \mathrm{tg}(-314°).$$

5. Докажите, что если $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$, то

$$2f(x+2)+f(-x-1)=x^2+4x+4.$$

Верно ли обратное утверждение?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$|\sin x+\sin 2x|\,(2x-5)=\sin x+\sin 2x.$$

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины a последовательно соединены середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Докажите, что полученная фигура — правильный шестиугольник и вычислите его площадь.

3. а) При $a=b=2$ решите уравнение

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{2-b}{x-1}=0.$$

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек $M\,(a;\,b)$, для которых это уравнение имеет единственное решение.

4. Расположите в порядке возрастания следующие числа:

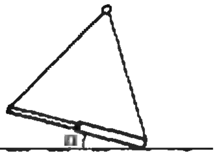


Рис. 1.

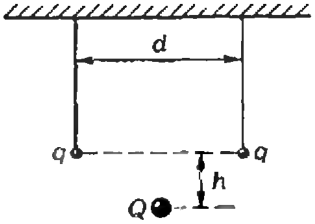


Рис. 2.

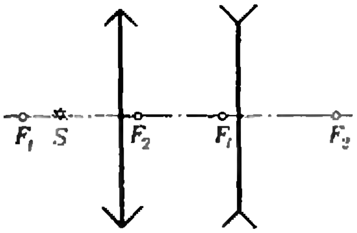


Рис. 3.

$$0{,}02;\ 1;\ 0{,}85;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{0{,}762};\ -\cos 571^\circ.$$

5. Докажите, что при $a=-12$ и $b=17$ наибольшее значение выражения $|2x^2+ax+b|$ на отрезке $[2;\ 4]$ равно 1. Верно ли обратное утверждение?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Стержень, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины, является основанием равностороннего треугольника (рис. 1). Масса одного куска стержня вдвое больше массы другого куска. Стержень подвешен за концы на двух невесомых нитях, которые служат боковыми сторонами этого треугольника. Какой угол α с горизонтом образует стержень в положении равновесия?

2. Математический маятник состоит из шарика массой $m=50$ г, подвешенного на нити, длина которой $l=1$ м. Определите наименьшую силу натяжения нити, если шарик проходит через положение равновесия со скоростью $v=1{,}4$ м/с.

3. Тело соскальзывает с наклонной плоскости, длина основания которой $l=2$ м. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}2$. Определите, на сколько градусов повысится температура тела, если $\alpha=30\ \%$ выделившегося количества теплоты пошло на нагревание тела. Удельная теплоемкость материала, из которого сделано тело, $c=0{,}84$ кДж/(кг·К).

4. При нормальном атмосферном давлении некоторую массу воды нагревают до температуры кипения, пропуская через нее пар при температуре $t_n=100$ °С. Во сколько раз увеличится масса воды, когда она достигнет температуры кипения? Начальная температура воды $t=20$ °С, ее удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг.

5. Два сосуда, в которых находятся одинаковые массы воздуха при одинаковой температуре, соединяют тонкой короткой трубкой. Какое давление воздуха будет в системе после соединения? Первоначальное давление в первом сосуде $p=6{,}6\cdot10^4$ Па, объем первого сосуда в три раза больше объема второго сосуда.

6. Два шарика, имеющих одинаковые заряды $q=3{,}3\cdot10^{-6}$ Кл, подвешены на одной высоте на тонких невесомых нитях равной длины (рис. 2). На одинаковом расстоянии от этих шариков и на $h=20$ см ниже них расположен заряд Q. Определите величину этого заряда, если известно, что нити висят вертикально, а расстояние между ними $d=30$ см.

7. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение $U=300$ В каждый, но имеющие различные емкости $C_1=500$ пФ и $C_2=300$ пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?

8. Рассчитайте величину добавочного сопротивления, которое нужно присоединить к миллиамперметру с внутренним сопротивлением $R_0=1$ кОм и током полного отклонения $I_0=1$ мА, чтобы получить вольтметр с пределом измерения $U=600$ В. Вычислите также наибольшую мощность, которая будет выделяться в этом сопротивлении и в рамке прибора.

9. С помощью построения найдите изображение светящейся точки (рис. 3).

10. Определите расстояние наилучшего зрения для человека, которому нужны очки с оптической силой $D=-3$ дптр.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 12, сумма цифр его сотен и десятков кратна 9. Если от искомого числа отнять 99, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите первоначальное число.

2. Решите уравнение: $\cos\frac{3\pi+x}{3}\cdot\cos\frac{9\pi+2x}{6}=\frac{1}{4}$.

3. В правильном тетраэдре $SABC$ через его вершину S проведена плоскость Π, перпендикулярная к плоскости (ABC) и параллельная (AB). Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, если ребро тетраэдра имеет длину a.

4. Решите уравнение $4^x-10\cdot2^{x-1}-24=0$.

5. Вычислите $5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}+3\frac{29}{30}:(55{,}65:5{,}3-9{,}48)$.

Вариант 2
(физический факультет)

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Объем параллелепипеда равен v. Найдите длину стороны основания, при которой полная поверхность параллелепипеда будет наименьшей, и вычислите величину угла между диагональю параллелепипеда с наименьшей площадью поверхности и плоскостью его основания.

2. Решите неравенство $\log_4(x-4)+\log_4(x-10)>2$.

3. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной 6 см и острым углом с величиной в 30°, если боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha=45°$.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+6x\right)}{4}.$$

Вариант 3

(индустриально-педагогический факультет)

1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 6 дней. Если каждый из них выполнял бы эту работу один, то первый из них потратил бы на 5 дней больше второго. Определите за сколько дней каждый из них в отдельности может выполнить эту работу?

2. Решите уравнение

$$\sin 5x-\sin x=\sin 2x.$$

3. В цилиндрическом колодце, внутренний диаметр которого 2,5 м, прибыло воды на 30 см. Сколько кубометров воды прибавилось?

4. Решите уравнение

$$2^{3x}=\sqrt[3x]{512}.$$

5. Укажите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=x^3-27x+15.$$

Вариант 4

(географический факультет)

1. Население города за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

2. Решите уравнение

$$(\sin 2x+\cos 2x)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. На одной из параллельных сторон трапеции взята точка A, на другой — точка B. Докажите, что отрезок AB делится средней линией трапеции пополам.

4. Постройте график функции $y=x^3-6x^2+9x-4$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два бруска массой $m_1=0{,}4$ кг и $m_2=0{,}6$ кг движутся без трения равноускоренно под действием силы ($F=2$ Н), приложенной ко второму бруску. С каким ускорением движутся бруски? Какова сила натяжения связывающей их нити?

2. Шарик массой $m=100$ г подвешен к нити. В натянутом положении нить расположили горизонтально, и отпустили шарик. Чему равна сила натяжения нити, если она в данный момент образует с горизонтальным направлением угол $\alpha=30°$? Какой прочностью на разрыв должна обладать нить, чтобы она не оборвалась в данном опыте?

3. Тело весит в воздухе $P=3$ Н, в воде $P_в=1{,}8$ Н и в жидкости с неизвестной плотностью — $P_ж=2{,}04$ Н. Какова плотность жидкости?

4. Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брус, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, и пробивает его. Определите, какая часть энергии пули перешла в тепло. Масса пули $m=10$ г, масса бруса $M=1$ кг, начальная скорость пули $v_0=500$ м/с, скорость пули после вылета $v=300$ м/с.

5. При изготовлении льда в бытовом холодильнике потребовалось $\tau_1=16$ мин для охлаждения воды от $T_1=289$ К до $T_2=273$ К и еще $\tau_2=1$ ч 20 мин, чтобы превратить ее в лед. На основании этих данных определите удельную теплоту отвердевания воды. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

6. В комнате затопили печь, и температура поднялась с $t_1=16$ °С до $t_2=21$ °С. Давление воздуха в комнате при этом не изменилось. Какая часть воздуха ушла из комнаты?

7. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, если при силе тока $I_1=2$ А во внешней цепи выделяется мощность $P_1=3$ Вт, а при силе тока $I_2=4$ А — мощность $P_2=4$ Вт.

8. Электрическая плитка имеет в нагревателе две секции. При включении одной секции вода в кастрюле закипает через $\tau=8$ мин, а при включении второй (без первой) — через $\tau_2=20$ мин. Через сколько минут закипит вода в кастрюле, если обе секции включить: а) параллельно? б) последовательно? Условия нагревания во всех случаях одинаковы.

9. На дне сосуда, наполненного водой до высоты $H=2$ м, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч света не выйдет через поверхность воды? Коэффициент преломления воды $n=4/3$.

10. На каком расстоянии от линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см надо поставить предмет, чтобы его действительное изображение было в $\Gamma=4$ раза больше самого предмета?

Публикацию подготовили
А. В. Жмулева,
О. Ю. Овчинников

Отражение кривых и преобразования формул

(см. с. 29)

1. $M(y;\ x)$ и $M(-y;\ -x)$.

2. а) $y=f(-x)$; б) $y=-f(x)$; в) $y=|f(x)|$; г) $y=f(|x|)$; д) $y=|f(x)-2|+2$; е) $y=f(-|x|)$; ж) $y=f(1-|x-1|)$; з) $y=f(1+|x-1|)$; и) $y=-f(-x)$; см. также рис. 1.

3. а) $f(-x,y)=0$; б) $f(-|x|,y)=0$; в) $f(x,-y)=0$; г) $f(|x|,y)=0$; д) $f(-|x|,|y|)=0$; е) $f(|x|,|y|)=0$; ж) $f(|x|,-|y|)=0$; з) $f(-2|x|,2|y|)=0$; и) $f(-|x|,|y|)\,f(-2|x|,2|y|)=0$; см. также рис. 2.

4. а) $y=||x|-1|$; б) $y=|||x|-2|-1|$; в) $|y|=||x|-2|$; г) $|y|=2-||x|-2|$; д) $|y|=2-|||x|-1|-2|$; е) $|y|=3-|||x|-1|-2|$; ж) $2|y|=||x|-2|-|x|+4$. Указание. Обратитесь к графику функции $y=|x|-x$ и используйте его для получения изображенной фигуры и «конструирования» подходящей формулы.
з) $2|y|=|||x|-4|-|x|+2|$. Указание. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче 4, ж.
и) $|y|=|x|-|x-2|-x+2$. Указание. Рассмотрите график функции $y=f(x)-|x|$, где $f(x)$ — функция с «зигзагообразным» графиком, часть которого, лежащая в верхней полуплоскости, совпадает с ломаной, изображенной на рис. 4, и (в статье).
к) $|x|=||y-1|-1|-|y-3|-y+3$. Указание. Воспользуйтесь приемом, предложенным в указании к задаче 4, и. Рассмотрите в данном случае x как функцию от y, графиком которой является часть ломаной, изображенной на рис. 4, к (в статье), лежащей в правой полуплоскости $x>0$*).

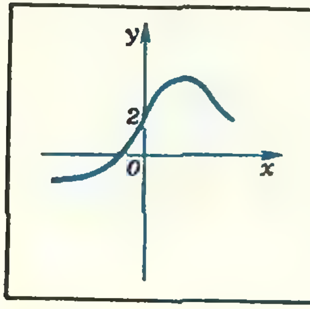


Рис. 1.

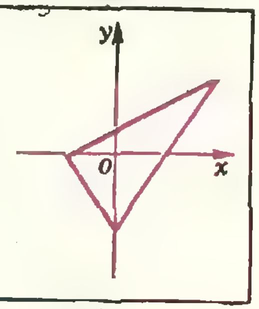


Рис. 2.

5. а) 1; б) 1—5; в) 1; г) 3—5; д) 1—3; е) 3; ж) 1—3; з) 4; и) 5; к) 1—5.
Здесь цифрами 1, 2, 3, 4, 5 обозначены симметрии относительно оси Ox, оси Oy, начала координат, прямой $y=x$ и прямой $y=-x$ соответственно.

6. Графики изображены на рисунке 3.

7. Достаточными (но не необходимыми) будут, например, следующие условия: а) $f(x,y)=f(x,-y)$; б) $f(x,y)=f(-x,y)$; в) $f(x,y)=f(-x,-y)$; г) $f(x,y)=f(y,x)$; д) $f(x,y)=f(-y,-x)$.

Избранные школьные задачи

1. Ответ: 493 нуля. Указание. Количество нулей, которым оканчивается число $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1984$, равно количеству пар множителей 2 и 5, которые можно образовать после разложения числа N на простые множители. Поэтому нужно подсчитать, сколько раз множитель 5 входит в такое разложение (оказывается, что $\left[\frac{1984}{5}\right]+\left[\frac{1984}{25}\right]+\left[\frac{1984}{125}\right]+\left[\frac{1984}{625}\right]$ раз), и убедиться, что множителей 2 будет больше. ($[x]$ — целая часть числа x.)

2. Указание. Справедливо следующее полезное тождество:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

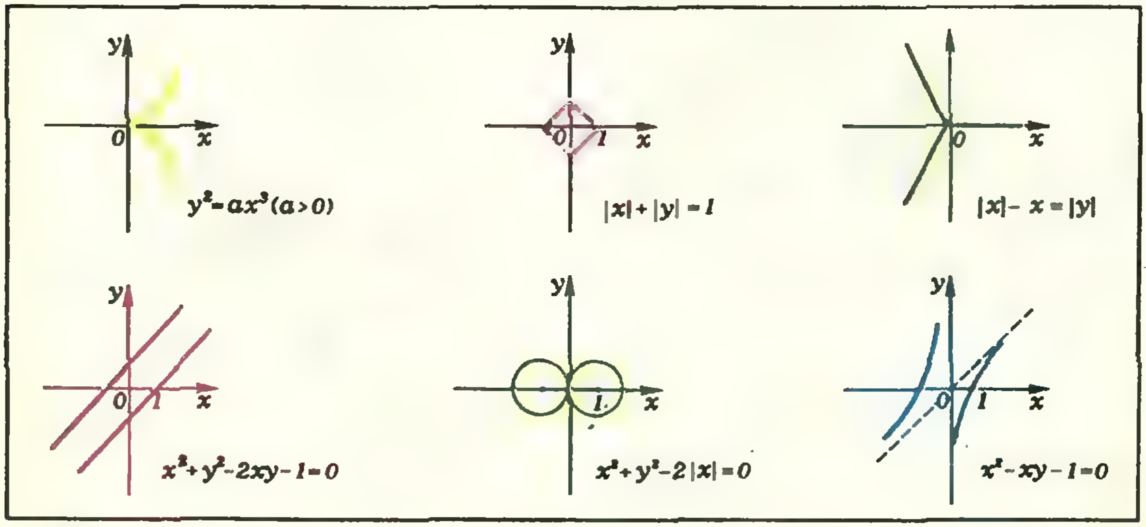


Рис. 3.

---

*) Для решения подобных задач можно воспользоваться общим методом конструирования уравнений ломаных, содержащимся в решении задачи М348 (см. «Квант», 1984, № 5, с. 47).

3. Ответ: полпробирки было заполнено через 59 минут.

4. Ответ: пусть B^* — точка плоскости, симметричная точке B относительно данной прямой; тогда точкой M является точка пересечения данной прямой и прямой AB^*. Замечание. Если A^* — точка, симметричная точке A относительно данной прямой, то данная прямая и прямая A^*B пересекаются в той же точке M.

5. Ответ: $2ab/(a+b)$. Указание. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, и MN — отрезок, о котором идет речь в условии (причем точка M лежит на боковой стороне AB). Для вычисления длины MO можно воспользоваться тем, что

$$\triangle ABD \backsim \triangle MBO,\ \triangle BAC \backsim \triangle MAO.$$

6. Указание. От противного: если бы оказалось, что $\log_4 18=\frac{p}{q}$, то имело бы место равенство $2^{2p-q}=3^{2q}$, а оно невозможно (почему?).

7. Ответ: прямая $y=1$, из которой выколоты все точки $(\pi k/2;\ 1)$, $k\in Z$.

8. Ответ: уравнение не имеет корней ни при каком натуральном $n>1$. Указание. Необходимо воспользоваться неравенством $\sin\alpha\leqslant 1$.

9. Ответ: не обязательно.

10. Ответ: три прямые. Указание. Для доказательства нужно привести пример трех прямых, удовлетворяющих условию задачи, и объяснить, почему большее число таких прямых существовать не может.

11. Ответ: можно. Указание. Рассмотрите 1984 натуральных числа, следующих подряд за числом

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1985+1.$$

12. Ответ: 0. Указание. Справедливо следующее полезное равенство:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a},\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ b\neq 1.$$

13. Ответ: $2\pi k<x<(\pi/2)+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$. Указание. Докажите предварительно следующий полезный факт: если значение x таково, что $0<\sin x<1$, то для этого значения x выполнено неравенство $\sqrt{\sin x}>\sin^2 x$ (аналогичное утверждение верно и для косинуса).

14. Ответ: параллелограмм. Указание. Достаточно убедиться, что

$$[MN]\parallel[AC]\parallel[QP],\ [MQ]\parallel[BD]\parallel[NP].$$

Таким образом: если последовательно соединить отрезками середины сторон произвольного пространственного четырехугольника, то получится плоская фигура — параллелограмм.

15. Ответ: правильный шестиугольник. Указание. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб ($ABCD$ — нижнее основание, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра), и пучок лучей света параллелен диагонали куба BD_1, то тень является шестиугольником с вершинами в серединах тех ребер куба, которые не примыкают к вершинам куба B и D.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $]\,0;\ +\infty\,[$.

2. $\frac{1}{2}$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $6x-3+\sqrt{x}\,\sqrt{6x-3}=0$. При $x=\frac{1}{2}$ левая часть этого уравнения равна нулю, а при $x>\frac{1}{2}$ положительна.

3. $r_1=3$, $r_2=12$. Решение. Касательная l, имеющая уравнение $y=\frac{4}{3}(x-6)$, пересекает оси Ox и Oy в точках B (6; 0) и C (0; −8). На оси Oy существуют ровно две точки Q_1 и Q_2 (рис. 4), являющиеся центрами окружностей, касающихся оси Ox и прямой l. Прямые (Q_1B) и (Q_2B) перпендикулярны и являются биссектрисами внутреннего угла B и внешнего угла B треугольника OBC соответственно. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{|OQ|}{|Q_1C|}=\frac{|OB|}{|BC|}=\frac{3}{5}$. Кроме того, $|OQ_1|+|Q_1C|=8$. Поэтому $r_1=|OQ_1|=3$. Из подобия прямоугольных треугольников Q_1OB и Q_2OB следует, что $r_2=|OQ_2|=\frac{|OB|^2}{|OQ_1|}=12$.

4. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi k\right),\ \left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+\pi m\right),\ (-\operatorname{arctg}3+\pi n;\ 2\operatorname{arctg}3+\pi m)\right\}$ $(k,\ m,\ n\in Z)$. Указание. Числа $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$, $2\cos(x+y)$, $4\sin 2x$, $16\sin(x-y)$ образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда эти числа отличны от нуля:

$\operatorname{ctg}x\neq 0$, $\cos(x+y)\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$, $\sin(x-y)\neq 0$,

и выполнены равенства

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x\cdot 4\sin 2x=(2\cos(x+y))^2,$$
$$2\cos(x+y)\cdot 16\sin(x-y)=(4\sin 2x)^2.$$

Решая полученную систему, получаем ответ.

5. $V=4$; плоскость P делит отрезок AC в отношении 3:13. Решение. Опустим из точки N перпендикуляр (NN_1) на плоскость $ABCD$. Поскольку $(BB_1C_1C)\perp(ABCD)$, и $N\in(BB_1C_1C)$, основание N_1 перпендикуляра (NN_1) лежит на прямой BC (рис. 5). При этом $(NN_1)\parallel(BB_1)$, $N_1\in[BC]$, $|BN_1|:|N_1C|=2:3$. Высота призмы равна длине отрезка NN_1. Следовательно, ее

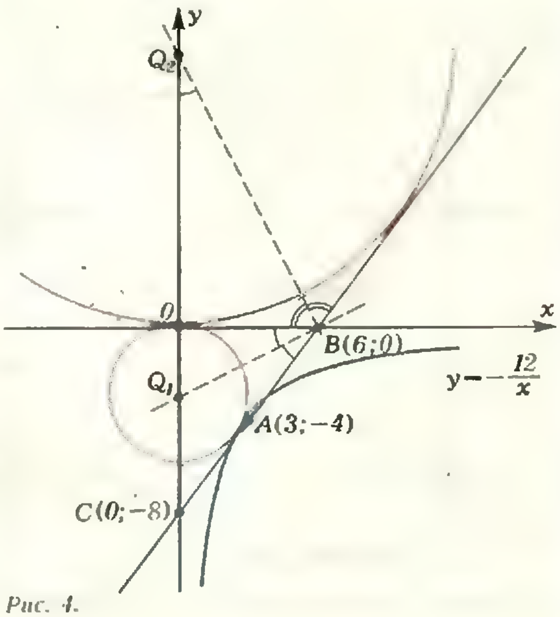


Рис. 4.

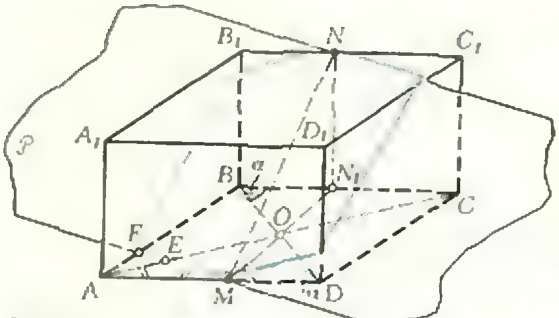


Рис. 5.

объем $V = S_{ABCD} \cdot |NN_1| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot |NN_1|$. Треугольник MNN_1 прямоугольный: $|NN_1| = \sqrt{|MN|^2 - |MN_1|^2}$. Учитывая, что по условию $|AC|=4$, $|BD|=2$, $|MN|=\sqrt{5}$, получим

$$V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{5 - |MN_1|^2} = 4\sqrt{5-|MN_1|^2}.$$

Остается найти длину отрезка MN_1.

Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Точка, симметричная точке M относительно O, лежит на отрезке BC, делит его в отношении 2:3, считая от точки B, и, значит, совпадает с точкой N_1. Таким образом, O — середина отрезка MN_1: $|MN_1|=2|ON_1|$. В ромбе $ABCD$ $|BO|=1$, $|OC|=2$, $(BO)\perp(OC)$. Следовательно, $|BC|=\sqrt{5}$, $|BN_1|=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, где $\alpha=\widehat{OBC}$. По теореме косинусов для треугольника OBN_1 имеем

$$|ON_1|^2 = |BO|^2+|BN_1|^2 - 2|BO|\cdot|BN_1|\cos\alpha = 1.$$

Отсюда $|ON_1|=|MO|=1$, $|MN_1|=2$ $V=4$.

Для ответа на второй вопрос задачи докажем лемму.

Лемма. Пусть $A \neq A_1$ и $M \neq N$ — точки пространства, расположенные на непараллельных прямых (AA_1) и (MN). Пусть из всех плоскостей, проходящих через прямую (MN), выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка AA_1 *имеет минимальную длину. Тогда плоскость* P перпендикулярна плоскости MNN_1, где N_1 — такая точка пространства, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{N_1N}$.

Доказательство. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на (MN), а P_* — плоскость, проходящая через прямую (MN) и перпендикулярная прямой (N_1K) (плоскость P_* перпендикулярна плоскости MNN_1). Докажем, что P_* и есть P, что завершит доказательство утверждения.

Возьмем произвольную плоскость Q, проходящую через прямую (MN) и отличную от плоскости P_*. Обозначим через L основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на плоскость P_* (рис. 6). Проверим, что длина $|LN|$ проекций отрезка N_1N на плоскость Q больше длины $|KN|$ проекции этого отрезка на плоскость P_* (поскольку проекции отрезков AA_1 и N_1N на любую плоскость одинаковы, это и будет означать, что $P_*=P$). По построению, $(N_1K)\perp(KN)$. Применяя теорему о трех перпендикулярах, получаем, что и $(LK)\perp(KN)$. Но это означает, что треугольник LKN прямоугольный, а отрезок LN — его гипотенуза. Следовательно, $|LN|>|KN|$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к решению задачи. По построению $\overrightarrow{N_1N}=\overrightarrow{AA_1}$. Следовательно, в силу доказанного утверждения, плоскость P перпендикулярна (MNN_1). Поскольку и $(ABCD)\perp(MNN_1)$, линия пересечения (MF) плоскостей P и $(ABCD)$ перпендикулярна плоскости MNN_1. В частности, $(MF)\perp(MN_1)$. Обозначим через E точку пересечения прямых (MF) и AC (E — точка пересечения плоскости P с прямой (AC)). В треугольнике OMD $|MO|=1=|DO|$. Поэтому $\widehat{OMD}=\widehat{ODM}=\widehat{OBC}=\alpha$. *Угол* EMN_1 *— прямой.* Следовательно, $\widehat{EMA}=180°-\widehat{OMD}-\widehat{EMN_1}=90°-\alpha=\widehat{EAD}$. Таким образом, треугольник AEM — равнобедренный и

$$|AE|=|EM|=\frac{|AM|}{2\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{4}.$$

Поэтому точка E делит отрезок AC в отношении

$$|AE|:|EC|=\frac{3}{4}:\left(4-\frac{3}{4}\right)=3:13.$$

Вариант 2

1. $]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
2. $x=\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+(2n+1)\pi \quad (n\in\mathbf{Z})$.
3. 24 $м^3$.
4. $\widehat{MAB}=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; $S_{ABKM}:S_{ABCD}=(2\sqrt{2}+1)/3$.
5. $V=\frac{R^3\sqrt{3}(1+2\cos\alpha)^2}{4(1-2\cos\alpha)\cos\alpha}$; а) 1:2; б) 3:1.

Вариант 3

1. $]-8; -2[\cup]0; 2[$.
2. $x_1=\pi k$; $x_2=\arcsin\frac{1}{3}+\pi(2l+1) \quad (k,\ l\in\mathbf{Z})$.
3. $\left\{\left(5; \frac{1}{25}\right), \left((\log_3 6)^{\frac{2}{3}}; (\log_6 3)^{\frac{1}{3}}\right)\right\}$.
4. $\widehat{BAC}=\arccos\frac{1}{9}$; $S=20\sqrt{5}$.
5. $V=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{87}{2}}$; $a_{\min}=\frac{2}{3}(\sqrt{11}-\sqrt{2})$.

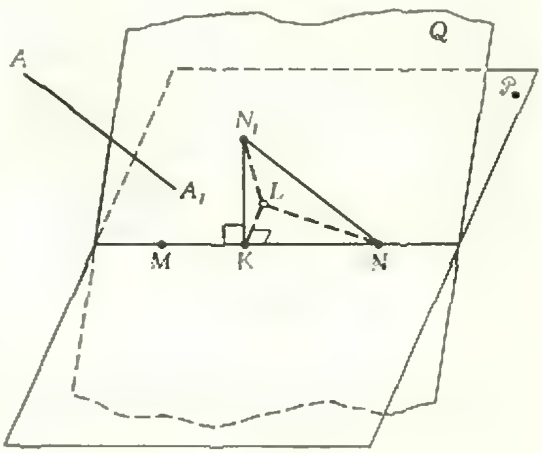


Рис. 6.

Физика

Вариант 1

1. Из того, что центр масс стержня находится в стыковочном сечении, и составляющие стержень цилиндры имеют одинаковые сечения (S), но изготовлены из различных материалов, следует, что длины цилиндров различны. Обозначим их через l_1 и l_2. Тогда массы цилиндров равны соответственно

$$m_1=\rho l_1S \text{ и } m_2=2\rho l_2S.$$

Запишем условие равенства моментов сил тяжести относительно центра масс системы:

$$m_1g\frac{l_1}{2}=m_2g\frac{l_2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$m_2/m_1=\sqrt{2}.$$

2. Из данной изотермы ясно, что сначала водяной пар, содержащийся в воздухе, ненасыщенный. В точке *2* он становится насыщенным и остается таким на всем участке *2—3*. Таким образом, относительная влажность в точках *2* и *3* равна 100 %:

$$\varphi_2=\varphi_3=100\ \%.$$

Для точки *1* имеем

$$\varphi_1=\frac{\rho_{п1}}{\rho_{нп}}100\ \%=\frac{\rho_{п1}}{\rho_{п2}}100\ \%=\frac{V_2}{V_1}100\ \%=$$

$$=\frac{p_1}{p_2}100\ \%.$$

3. Если конденсатор вначале не был заряжен, после замыкания ключа по цепи проходит заряд $C\mathcal{E}$, источник тока совершает работу $C\mathcal{E}^2$, и конденсатор приобретает энергию $C\mathcal{E}^2/2$. Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, выделившееся на резисторе, равно разности работы источника и энергии конденсатора:

$$Q=C\mathcal{E}^2-C\mathcal{E}^2/2=C\mathcal{E}^2/2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда вначале правая пластина конденсатора была заряжена. Обозначим этот заряд через q. В этом случае еще до замыкания ключа в конденсаторе есть электрическое поле с напряженностью $E=q/(2\varepsilon_0S)$, и это поле обладает запасом электрической энергии $W=\varepsilon_0E^2Sd/2=q^2/(8C)$ (здесь S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между пластинами, $C=\varepsilon_0S/d$ — емкость конденсатора). Что произойдет после замыкания ключа, когда разность потенциалов между пластинами станет равной $\mathcal{E}$? Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, имеющийся заряд q не изменится: включение батареи приводит только к его перераспределению. Следовательно, можно использовать закон сохранения заряда. Во-вторых, даже при замкнутом ключе две пластины не представляют собой конденсатор в обычном смысле этого слова, так как полный заряд не равен нулю и электрическое поле имеется не только между пластинами, но и снаружи. Однако в данном случае энергия электрического поля вне пластин, в силу неизменности общего заряда, остается одной и той же. Меняется только энергия поля в пространстве между пластинами:

$$\Delta W=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}-\frac{q^2}{8C}.$$

Пусть на левой пластине теперь будет заряд q_1, а на правой q_2. Из закона сохранения заряда

$$q_1+q_2=q. \qquad (1)$$

Заряд q_1 создает поле с напряженностью $E_1=q_1/(2\varepsilon_0S)$, а заряд q_2 — поле с напряженностью $E_2=q_2/(2\varepsilon_0S)$. Результирующая напряженность равна $E_2-E_1=(q_2-q_1)/(2\varepsilon_0S)$. С другой стороны, $(E_2-E_1)d=\mathcal{E}$. Поэтому

$$q_2-q_1=2\mathcal{E}\varepsilon_0S/d=2C\mathcal{E}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$q_1=\frac{q}{2}-C\mathcal{E},\ q_2=\frac{q}{2}+C\mathcal{E},$$

$$\Delta q=q_2-q=C\mathcal{E}-q/2.$$

Этот заряд Δq и протек через источник, поэтому работа источника равна

$$A=\Delta q\mathcal{E}=(C\mathcal{E}-q/2)\mathcal{E}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$A=\Delta W+Q,$$

или

$$\left(C\mathcal{E}-\frac{q}{2}\right)\mathcal{E}=\left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2}-\frac{q^2}{8C}\right)+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$q=4C\mathcal{E}.$$

4. Из условия задачи видно, что линза — рассеивающая. Тогда из формулы линзы (записанной для данного случая)

$$\frac{1}{F}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$$

найдем

$$f=F/2.$$

Увеличение предмета

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d},$$

откуда размер предмета

$$h=H\frac{d}{f}=2H=2\cdot0{,}7\text{ см}=1{,}4\text{ см}.$$

Вариант 2

1. $\alpha=\arccos\sqrt{0{,}25}=60°$.

2. $\Delta l_1=L/4$ (левый поршень расположится посередине сосуда), $\Delta l_2=0$ (при достаточно большой скорости диффузии правый поршень практически не сдвинется с места).

3. $T\approx22{,}4$ ч.

4. $d<F_1\dfrac{2F_2+L}{F_2+L-F_1}=16$ см.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x_1=k\pi,\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi\quad(k,l\in Z)$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$2\sin x=3\,\mathrm{tg}^2x,\ \mathrm{tg}\,x\leqslant0.$$

2. $V=\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$, $S=\dfrac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$. Указание. При вычислении площади сечения S воспользуйтесь равенством $V=\dfrac{1}{3}bS$.

3. Неравенство $x\geqslant y$ означает, что $x-y\geqslant0$. Утверждение задачи следует из очевидного равенства $a-c=(a-b)+(b-c)$.

4. $0{,}37<\mathrm{tg}\,33°<1<\dfrac{65}{63}<\dfrac{61}{59}<\mathrm{tg}(-314°)$.

Указание. $\mathrm{tg}(-314°)=\mathrm{tg}\,46°=\dfrac{1+\mathrm{tg}\,1°}{1-\mathrm{tg}\,1°}$, но $\mathrm{tg}\,1°=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}>\dfrac{\pi}{180}>\dfrac{1}{60}$. Поэтому $\dfrac{1+\mathrm{tg}\,1°}{1-\mathrm{tg}\,1°}=$

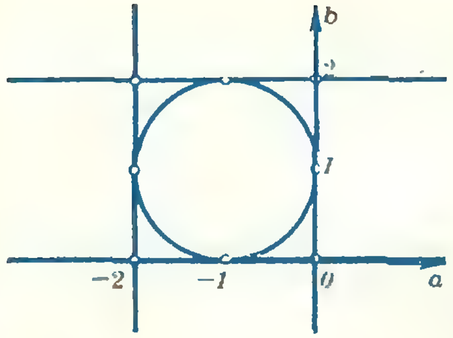


Рис. 7.

$$=\frac{2}{1-\operatorname{tg}1^\circ}-1>\frac{2}{1-\frac{1}{60}}-1=\frac{61}{59}.$$

5. Верно. Решение. Требуемое равенство легко проверяется. Докажем обратное утверждение. Пусть некоторая функция при любом x удовлетворяет условию $2f(x+2)+f(-x-1)=x^2+4x+4$. Подставляя в это равенство вместо x выражение $-x-3$, получим $2f(-x-1)+f(x+2)=(x+3)^2-4(x+3)+4$. Вычитая из первого равенства, умноженного на 2, второе, получим $2f(x+2)=x^2+6x+7$. Заменив здесь x на $x-2$, получим

$$f(x)=\frac{1}{3}\left((x-2)^2+6(x-2)+7\right)=\frac{x^2+2x-1}{3}.$$

Вариант 2

1. $x_1=\frac{2k\pi}{3}$, $x_2=\pi(2l+1)$ $(k, l\in Z)$. Указание. При $\sin x+\sin 2x>0$ уравнение принимает вид $2x-5=1$, откуда $x=3$, но $\sin 3+\sin 6<0$. При $\sin x+\sin 2x<0$ получим $x=2$, но $\sin 2+\sin 4>0$. Остается случай $\sin x+\sin 2x=0$.

2. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Указание. Отрезки, соединяющие середины перечисленных ребер с центром куба, перпендикулярны диагонали BD_1 и потому лежат в одной плоскости. Кроме того, длины этих отрезков равны. Отсюда легко следует, что шестиугольник правильный с длиной стороны $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. а) $x=-\frac{1}{2}$; б) см. рисунок 7.

Указание. Уравнение равносильно системе $(a+2)x^2+(2-2b)x-a=0^*$, $x\neq0$, $x\neq1$, $x\neq-1$. Квадратное уравнение $(a\neq-2)$ имеет единственный корень при $\frac{D}{4}=(1-b)^2+a^2+2a=0$, или, иначе, при $(b-1)^2+(a+1)^2=1$. При $a=-2$ приходим к уравнению $(2-2b)x=-2$, которое имеет единственный корень при $b\neq1$. Уравнение (*) имеет корень $x_1=0$ при $a=0$. При этом $x_2=b-1$. Поэтому у исходного уравнения будет в этом случае единственный корень, если $b\neq2$, $b\neq1$, $b\neq0$. Аналогично рассматриваются случаи $x_1=1$, $x_1=-1$.

4. $0{,}02<0{,}85<-\cos(-571^\circ)<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{0{,}762}<1$.

Решение. Все неравенства, кроме $-\cos(-571^\circ)=\cos 31^\circ>0{,}85$, проверяются без труда. Докажем, что $\cos 31^\circ>0{,}85$.

$$\cos 31^\circ=\cos(30^\circ+1^\circ)=$$
$$=\cos 30^\circ\cdot\cos 1^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 1^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{180}-\sin\frac{\pi}{180}\right)>$$
$$>\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(1-\frac{\pi^2}{2\cdot180^2}\right)-\frac{\pi}{180}\right)>$$
$$>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi^2}{180^2}-\frac{\pi}{360}>$$
$$>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi^2}{2\cdot80^2}-\frac{\pi}{360}>$$
$$>0{,}86-\frac{\pi}{360}\left(1+\frac{\pi}{180}\right)>0{,}86-0{,}01>0{,}85$$

(мы воспользовались неравенством $\sin x<x$ при $x>0$ и вытекающим из него неравенством $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ при $x>0$, а также тем, что $\pi<3{,}2$).

5. $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant4} f(x)=1$. Обратное утверждение (если $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant4}|2x^2+ax+b|=1$, то $a=-12$ и $b=17$) справедливо.

Указание. Функция $f(x)=|2x^2-12x+17|$ принимает наибольшее значение в одной из точек $x=2$, $x=3$ или $x=4$.

Для доказательства обратного утверждения следует заметить, что при выполнении условий задачи справедливы неравенства $f(2)\leqslant1$, $f(3)\leqslant1$ и $f(4)\leqslant1$ или

$|8+2a+b|\leqslant1$, $|18+3a+b|\leqslant1$ и $|32+4a+b|\leqslant1$.

Из первых двух неравенств с использованием неравенства $|u-v|\leqslant|u|+|v|$, получаем $|a+10|\leqslant2$, а из второго и третьего — $|a+14|\leqslant2$, откуда $a=-12$.

Физика

1. $\alpha=\operatorname{arctg}(1/6\sqrt{3})\approx6^\circ$.
2. $F=mg(1-v^2/(2gl))\approx0{,}44$ Н.
3. $\Delta t=\alpha\mu gl/c\approx1{,}4\cdot10^{-3}$ К.
4. $\alpha=1+c(t_к-t)/r=1{,}15$.
5. $p'=3/2p\approx10^5$ Па.
6. $Q=-\frac{(4h^2+d^2)^{3/2}q}{4d^3}\approx-3{,}8\cdot10^{-6}$ Кл.
7. $U_{\max}=U(1+C_1/C_2)=350$ В.
8. $R_д=U_0/I_0-R_0=599$ Ом; $P_д=I_0^2R_д=0{,}599$ Вт; $P_0=I_0^2R_0=1$ мВт.
9. См. рисунок 8.
10. $d=d_0/(1-d_0D)=14{,}3$ см (здесь $d_0=25$ см — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 453.

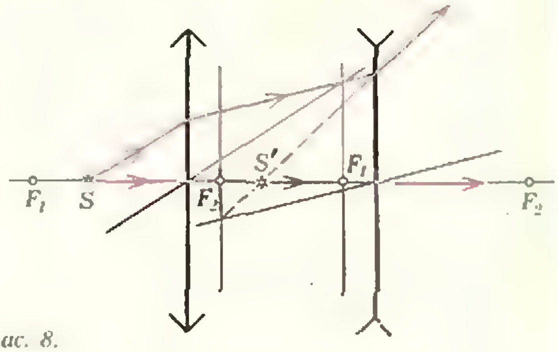


Рис. 8.

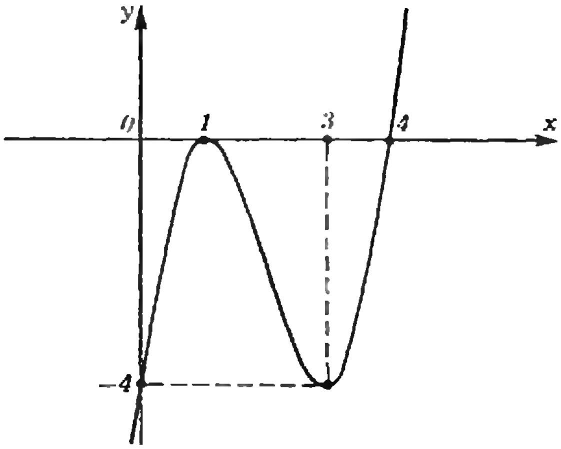


Рис. 9.

2. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}$ $(n\in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$.

4. $\{3\}$.

5. $4\frac{41}{45}$.

Вариант 2

1. $\sqrt[3]{v}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $]12;+\infty[$.

3. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см³.

4. $x=\frac{\pi}{10}(2l+1)$ $(l\in \mathbf{Z})$.

Вариант 3

1. 15 дней; 10 дней.

2. $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2l\pi}{3}$ $(k,\ l\in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{15}{32}\pi$ м³.

4. $\{1\}$.

5. Возрастает при $x\in\,]-\infty;\ -3[$ и при $x\in\,]3;\ +\infty[$. Убывает при $x\in[-3,\ 3]$.

Вариант 4

1. 5 %.

2. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$.

4. См. рисунок 9.

Физика

1. $a=F/(m_1+m_2)=2$ м/с²; $T=m_1a=0{,}8$ Н.

2. $T=3mg\sin\alpha=1{,}5$ Н; $T_{\max}=3mg=3$ Н.

3. $\varrho_ж=\varrho_в\frac{P-P_ж}{P-P_в}=800$ кг/м³ (здесь $\varrho_в=1000$ кг/м³ — плотность воды).

4. $\alpha=1-\frac{v^2}{v_0^2}-\frac{m}{M}\frac{(v_0-v)^2}{v_0^2}\approx 0{,}64$.

5. $\lambda=c(T_1-T_2)\tau_2/\tau_1=3{,}36\cdot 10^5$ Дж/кг.

6. $\alpha=1-T_1/T_2\approx 0{,}02$.

7. $\mathcal{E}=\frac{P_1I_2^2-P_2I_1^2}{I_1I_2(I_2-I_1)}=2$ В; $r=\frac{\mathcal{E}I_1-P_1}{I_1^2}=0{,}25$ Ом.

8. $\tau_3=\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)\approx 5{,}7$ мин; $\tau_4=\tau_1+\tau_2=28$ мин.

9. $r=H/\sqrt{n^2-1}\approx 2{,}3$ м.

10. $d=F(1+1/\Gamma)=25$ см.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. В. Дубах, В. К. Егоров, В. С. Коваль, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, В. И. Савела, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

Фото представили:
Ю. Белозеров (фотохроника ТАСС), Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. В. Румянцева

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

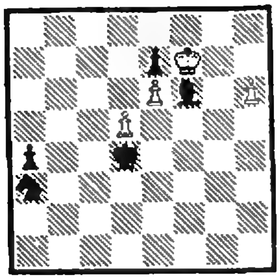
Сдано в набор 21.11.84.
Подписано к печати 27.12.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,46. Т-23648
Цена 40 коп. Заказ 3109. Тираж 175628 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

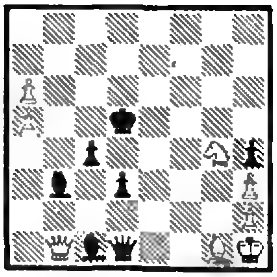
ФАНТАСТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Мы уже познакомились с творчеством всех четырех советских гроссмейстеров по шахматной композиции. В нашей стране есть также несколько международных мастеров по композиции. Старейший из них — Александр Казанцев. Возможно, кто-то из читателей знает его совсем по другой линии, ведь он известный писатель-фантаст, автор популярного романа «Пылающий остров». Фантастические сюжеты использует писатель и в своем этюдном творчестве.



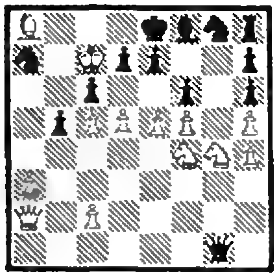
А. Казанцев, 1947—1948 гг. Ничья.

1. d6 Кb5. В случае 1... Кc4 к ничьей ведет 2. de Крe5 3. e8К! Сh8 4. h7 a3 5. Крg8 Кр:e6 6. Кр:h8 Крf7 7. Кd6+ Крf8 8. К:c4 a2 9. Кe5! a1Л 10. Кd7+. **2. de Крe5 3. e8К! Сh8 4. h7 a3 5. Крg8 Кр:e6! 6. Кр:h8 Крf7 7. Кd6+ Крf8 8. К:b5 a2 9. Кd4! a1Л! 10. Кe6+ Крf7 11. Кd8+ Крg6 12. Крg8 Лa8 13. h8К+!** Третье чудесное превращение. **13... Крf6 14. Кf7,** и белые спасаются. В процессе решения на доске произошло невероятное событие — почти полностью сменился состав фигур!



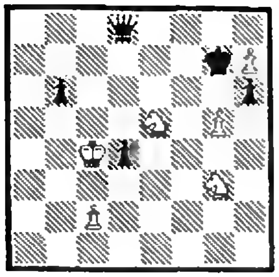
А. Казанцев, 1954 г. Ничья.

1. Крg2 Фd2+ 2. Сf2 Крc6 3. a7 Крb7 4. a6+ Крa8 5. Фa1 Сb2 6. Фh1! Фd1 7. Сg1 Фe2+ 8. Кf2! Удивительное, почти фантастическое положение. За восемь ходов не разменено ни одной пешки, а все белые фигуры оказались запатованными. У черных выбор между матом собственному королю (если ферзь покинет вторую горизонталь) и патом неприятельскому. Второй вариант предпочтительнее, и потому — ничья. Автор этюда признался, что это одно из любимых его произведений, в нем впервые так ярко удалось воплотить невероятное.



А. Казанцев, 1979 г. Выигрыш.

1. Кe6! Ф:g4 (Матом заканчивается дело после 1... de 2. d6 ed 3. Ф:e6+ Сe7 4. cd Крf8 5. de+ К:e7 6. Ф:f6+ Крg8 7. К:h6×) **2. С:c6! dc 3. d6 Фd1 4. Кg7+ С:g7 5. Фf7+! Кр:f7.** Белый король сражается один против целого черного воинства: короля, ферзя, ладьи, слона и двух коней! К счастью, пешки оказываются верными слугами своего предводителя. **6. e6+ Крf8 7. d7 b4 8. a4 b3! 9. cb Кb5+ 10. ab cb 11. d8Ф+ Ф:d8 12. Кр:d8 b4! 13. Крc7!** Черный король распатован и получает мат от белой пешки. Композитор очень гордится этим фантастическим замыслом,— ведь ему удалось решить самую невероятную задачу, какую может поставить перед собой этюдист: показать, что король, один гордый король, опираясь лишь на свои пешки, в состоянии одолеть вооруженную до зубов неприятельскую рать!

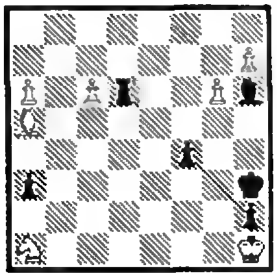


А. Казанцев, 1935 г. Выигрыш.

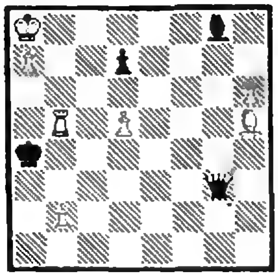
1. Кf5+ (не годится 1. Кh5+? из-за 1... Кр:h7 2. g6+ Крg8) **1... Кр:h7 2. g6+ Крg8 3. Кc6 Фc7 4. Крb5 Фd7** (ввиду угрозы Кce7+ ферзь должен все время связывать коня c6) **4... Фd7 5. Кр:b6 Фe6 6. Крc7 Фc4 7. Крd6 Фa6 8. Крc5 Фa3+ 9. Крd5 Фa2+ 10. Крe5 Ф:c2 11. Кce7+ Крf8 12. g7+,** и белые выигрывают.

Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем очередной шахматный конкурс. Его победители будут награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова и дипломом журнала «Квант». Решившим 20 заданий из 24 будет присвоен II разряд, 15 заданий — III разряд.

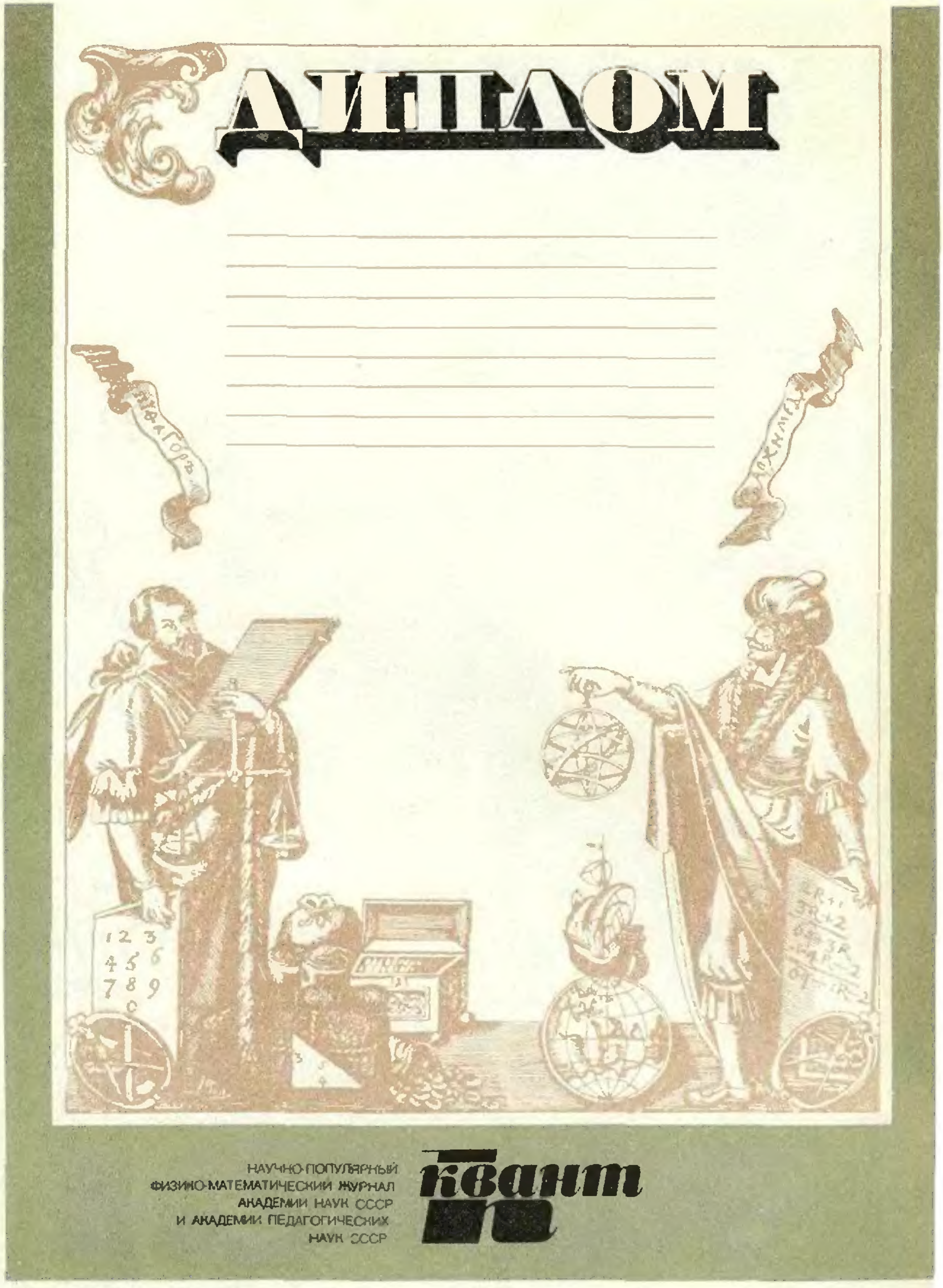


1. Ничья.



2. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 марта 1985 г. по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».



ДИПЛОМ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
НАУК СССР

квант

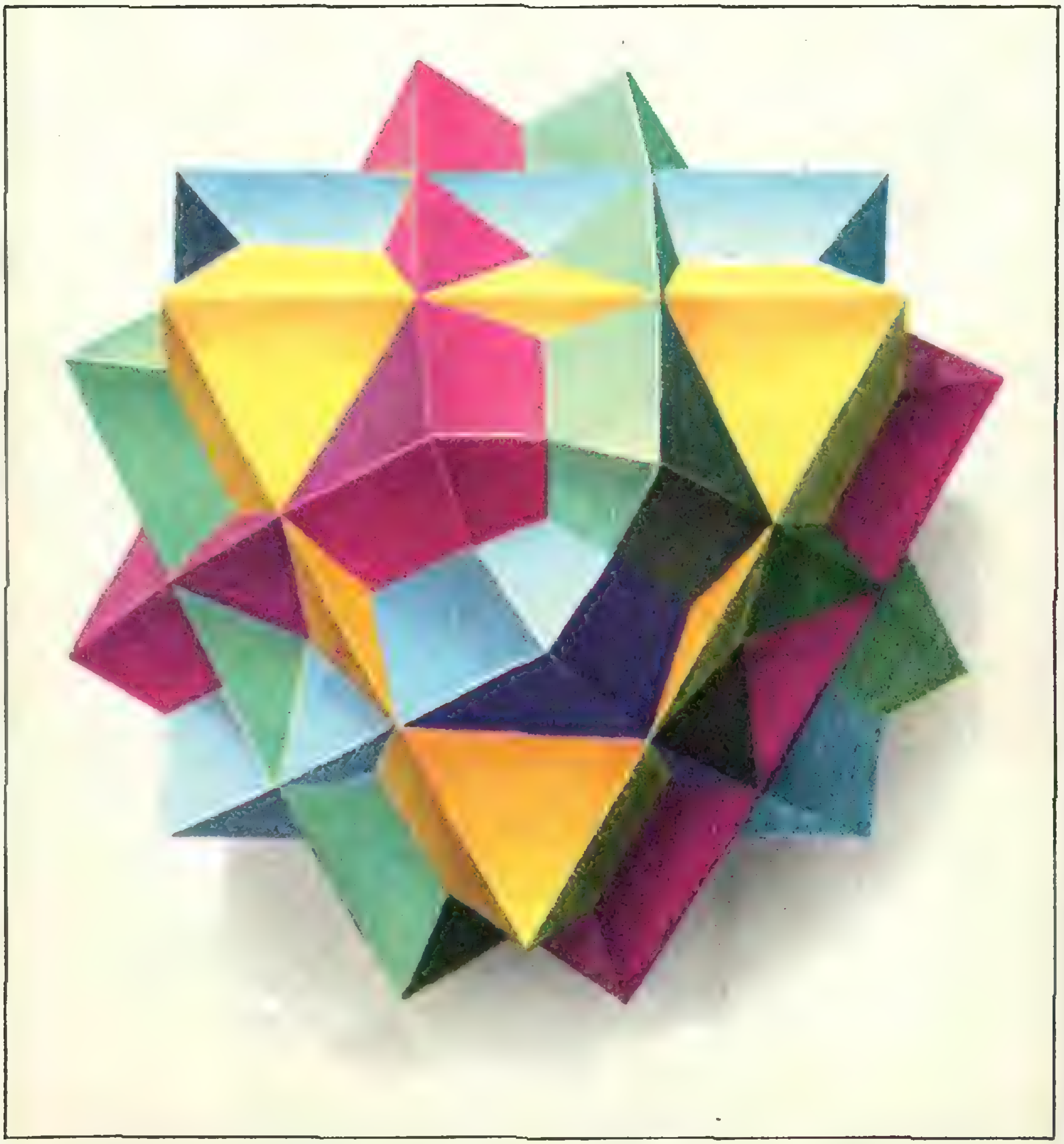
Пифагоръ
Архимедъ
1 2 3
4 5 6
7 8 9
0

Здесь воспроизведен Диплом, которым с 1985 года награждаются победители конкурсов, проводимых нашим журналом (Задачник «Кванта», шахматный конкурс и др.). На нем изображены аллегорические фигуры Пифагора и Архимеда, заимствованные из первого русского учебника математики, написанного Леонтием Магницким и изданного в Москве в 1703 году.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Многие наши читатели увлекаются моделированием и поиском новых форм звездчатых многогранников. Показанный на этом рисунке многогранник придумал наш читатель А. П. Трофименко, рабочий из г. Геленджик. Этот многогранник — объединение четырех октаэдров (их видимые части показаны разными цветами), которые расположены в некотором смысле «максимально симметрично». При таком расположении у полученной фигуры много элементов симметрии. В частности, оси симметрии четвертого и третьего порядка, то есть такие прямые, что многогранник совмещается сам с собой при повороте вокруг этих прямых на углы, кратные 90° и 120°. Найдите эти оси. Попробуйте перечислить все элементы симметрии этого звездчатого многогранника.



НОМЕР
2

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **2** 1985

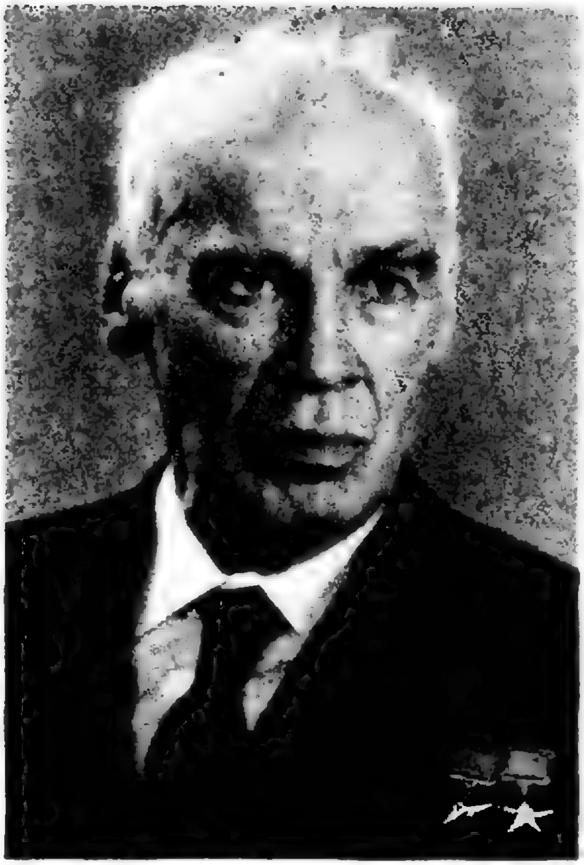
Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Памяти И. К. Кикоина	In memory of I. K. Kikoin
3	*А. В. Бушмелев, С. А. Лавренченко.* Многогранники-торы	*A. V. Bushmelev, S. A. Lavrenchenko.* Polyhedral tori
6	*Л. С. Понтрягин.* Обобщение чисел	*L. S. Pontryagin.* Generalization of numbers
13	*А. А. Варламов, А. И. Маляровский.* Переговорная трубка длиной в экватор?	*A. A. Varlamov, A. I. Malyarovski.* An equator-long speaking tube?
	Новости науки	**Science news**
12	*В. А. Бронштэн.* Миллисекундные пульсары	*V. A. Bronshten.* Millisecond pulsars
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
19	*А. А. Боровой.* Пузырьки в жидкости	*A. A. Borovoy.* Bubbles in liquids
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
23	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
29	Математика 8, 9	Mathematics 8, 9
36	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
31	Задачи	Problems
32	*Л. Кэрролл.* Бег по кругу и длинный рассказ	*L. Carroll.* A caucus-race and a long tale
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
37	Задачи М906—М910; Ф918—Ф922	Problems M906—M910; P918—P922
40	Решения задач М886—М890; Ф898—Ф902	Solutions M886—M890; P898—P902
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
48	*А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Повторим гидростатику	*A. I. Buzdin, S. S. Krotov.* Reviewing hydrostatics
	Информация *(18)*	**Information** *(18)*
54	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
	Наша обложка *(58)*	**Our cover page** *(58)*
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Парадоксы пешечного эндшпиля *(3-я с. обложки)*	Paradoxes of pawn endgames *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985



28 декабря 1984 г. на 77 году жизни скончался выдающийся советский ученый-физик, дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР, академик Исаак Кушелевич Кикоин.

Огромное внимание уделял И. К. Кикоин воспитанию молодого поколения. По его инициативе был создан журнал «Квант», главным редактором которого он был в течение 15 лет. Он возглавлял оргкомитет Всесоюзных школьных олимпиад, был автором ряда школьных учебников.

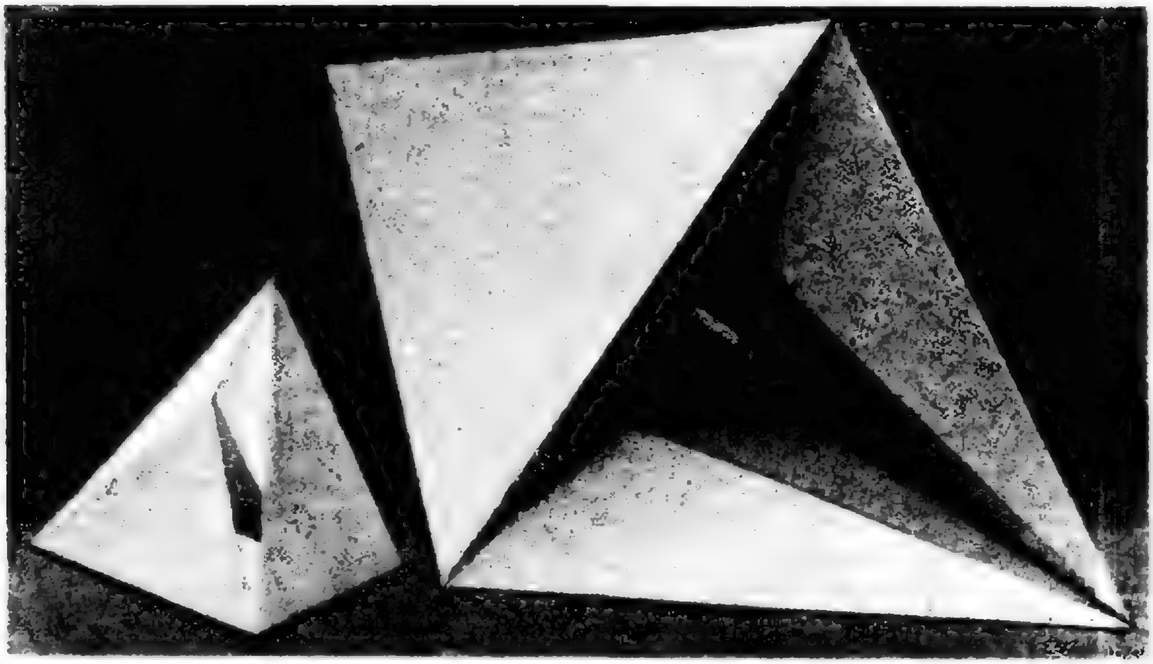
И. К. Кикоин часто встречался со школьниками. Последний раз он выступил перед ними во время вручения Школе естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова премии Ленинского комсомола. Его выступление — своеобразное завещание молодежи.

«Я хочу рассказать вам, о чем я думал, принимая эту награду, — обратился к собравшимся И. К. Кикоин. — Я думал о том, что вот я — академик, руководитель большого коллектива, у меня много наград, но без всяких сомнений все это — положение, степени, звания — обменял бы я на вашу молодость, на ваши 15, пусть 17, лет.

А поменяться мне надо потому, что за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь — не хватило. А ведь не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике. И все равно времени не хватило. Вы сами узнаете, как это бывает, когда проживете жизнь.

Поэтому сейчас не упускайте времени. Все равно его не хватит, но хоть будет не так обидно. Знаете, ученый — это не название должности и не место работы. Вот он вошел в лабораторию — и стал думать о науке, и стал ученым. Это не так. Ученый — это постоянное и часто мучительное, иногда прекрасное состояние. Вот примерно об этом я думал, когда мне передавали эту награду».

Пусть это напутствие И. К. Кикоина навсегда останется с вами, как и светлая память о выдающемся ученом.



Многогранники-торы

А. В. БУШМЕЛЕВ, С. А. ЛАВРЕНЧЕНКО

В этой заметке рассказывается о том, как найти многогранник с наименьшим числом вершин, имеющий форму тора (бублика). Картонные модели таких «рекордных» многогранников-торов (с 7 и 8 вершинами) показаны на фотографии выше. В заметке рассказывается не только о теории вопроса, но даются рецепты изготовления подобных моделей.

Многогранником называют поверхность, ограничивающую некоторый объем и состоящую из конечного числа плоских многоугольников — *граней* многогранника. Стороны граней называются *ребрами*. К каждому ребру примыкают ровно 2 грани. От всякой грани можно перейти к другой, переходя через ребра. Грани могут пересекаться либо в одной вершине, либо по одному целому ребру.

Предположим, что наши многогранники — резиновые, а потому, после «раздувания» их как воздушных шариков, одни из них будут походить на сферу, другие — на тор, третьи — на крендель и т. д. (рис. 1). В дальнейшем под многогранниками будут подразумеваться исключительно многогранники с треугольными гранями.

Треугольные сети на поверхностях

При «раздувании» данного многогранника ребра и грани искривляются, и на «раздутом» многограннике образуется сеть из криволинейных треугольников. Таким образом, каждому многограннику соответствует *треугольная сеть* на сфере (если многогранник типа сферы) или на торе (если многогранник типа тора).

Такую треугольную сеть можно начертить непосредственно на поверхности сферы или тора. Для этого нужно отметить на поверхности определенное число точек (*узлы*), соединить их непересекающимися линиями без самопересечений (*дуги*) так, чтобы поверхность оказалась разбитой на части (*области*), каждая из которых ограничена тремя дугами и тремя узлами, а пересечение двух областей либо пусто, либо состоит из одного узла, либо состоит из одного ребра.

Реализация сетей многогранниками

Теперь естественно поставить такой вопрос: всякая ли треугольная сеть, начерченная указанным выше образом на поверхности сферы или тора, получается из вершин, ребер и граней некоторого многогранника его «раздуванием»? Другими словами, *можно ли всякую треугольную сеть на сфере или на торе реализовать в виде настоящего многогранника* так, чтобы узлы

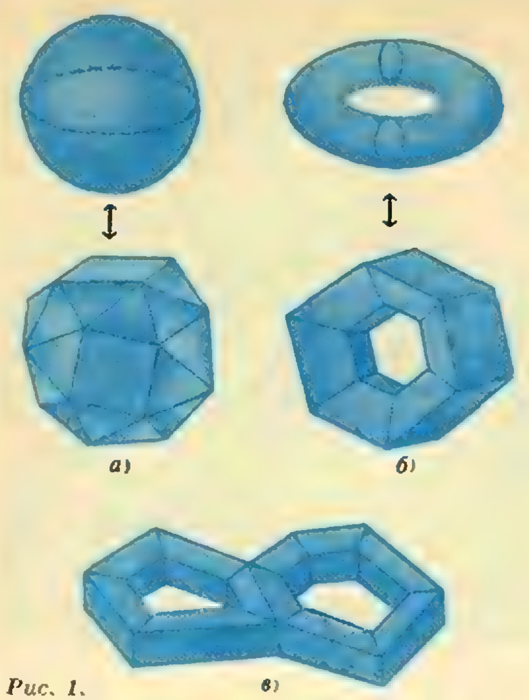


Рис. 1.

и вершины, дуги и ребра, области и грани взаимно-однозначно соответствовали бы друг другу с сохранением примыкания (то есть так, чтобы узлы, соединенные дугой, отвечали бы вершинам, соединенным соответствующим ребром, и дуги, ограничивающие область, отвечали бы ребрам, ограничивающим соответствующую грань)?

Для сферы положительный ответ был установлен еще давно немецким математиком Штейницем, который доказал к тому же, что многогранник, реализующий сеть, всегда можно выбрать выпуклым. В настоящее время доказано и обобщение теоремы Штейница на случай тора: *всякая треугольная сеть на торе реализуется многогранником.*

Примеры треугольных сетей на торе

Для того чтобы привести такие примеры, можно взять резиновую камеру в форме тора, отметить на ней узлы и нарисовать дуги сети. Однако, то, что при этом получится, затруднительно будет изобразить на листе бумаги, поэтому будем пользоваться следующей *разверткой* тора на плоскости. Проведем на нашей камере две замкнутые линии — C_1 и C_2 (рис. 2а)). Затем разрежем камеру вдоль линии C_1 (рис. 2б)), после чего камеру можно продеформировать в цилиндр (рис. 2в)). Разрезаем этот цилиндр по линии C_2, и то, что получилось (рис. 2г)), растягиваем на плоскости в виде квадрата (рис. 2д)). Итак, тор можно изображать на плоскости в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами.

Без доказательства сообщаем, что список треугольных сетей на торе с 7 и 8 узлами исчерпывается рисунком 3.

Задача. Докажите, что многогранников типа тора с числом вершин меньше 7 не существует.

Указание. Воспользуйтесь формулой Эйлера $Г - Р + В = 0$ и соотношением $3Г = 2Р$ (вытекающим из того, что для треугольных сетей к каждому ребру примыкают ровно 2 грани, а каждая грань ограничена 3 ребрами), где Г, В, Р число граней, вершин и ребер, соответственно.

Методика реализации сетей с малым числом узлов

Начнем с реализации сети б) (рис. 3) (модель изображена на с. 3 справа). Шесть вершин располагаются в некоторой плоскости $\alpha = (v_2 v_5 v_7)$ (рис. 4). В этой же плоскости α лежат 4 грани — $v_7 v_2 v_3$, $v_7 v_3 v_8$, $v_8 v_4 v_5$, $v_2 v_4 v_5$. Расположим вершину v_1 где-нибудь над α, а v_6 — где-нибудь под ней. Для каждой грани, исходящей из v_1 (из v), ребро, противолежащее вершине v_1 (вершине v_6), лежит в плоскости α; все такие ребра помечены синим (красным) цветом на рисунке 4.

Переходим к реализации остальных сетей. Нам потребуется преобразование *перестройки* многогранников (рис. 5), которое можно применить к паре граней, дающих в объединении плоский выпуклый четырехугольник. В изложенном выше построении расположим v_1 над ребром $v_7 v_5$, а v_6 — под ним. Перестройка, примененная к граням $v_1 v_7 v_3$ и $v_6 v_7 v_5$, приводит

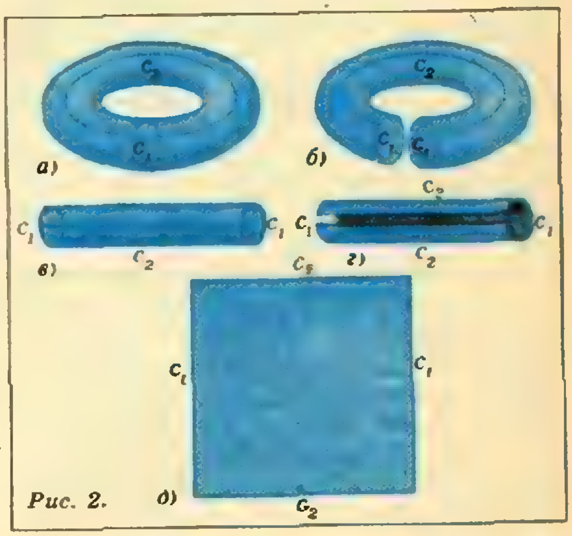


Рис. 2.

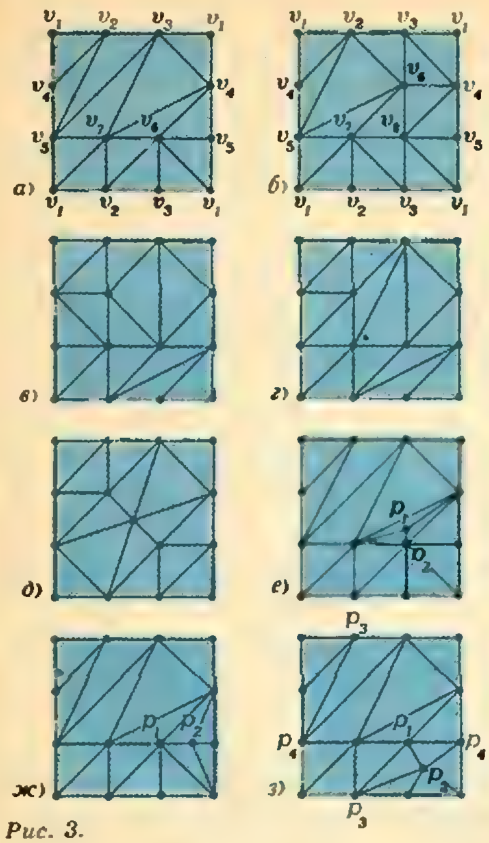


Рис. 3.

к реализации сети в). Если в получившемся при этом многограннике применить перестройку к $v_8v_4v_5$ и $v_2v_4v_5$, то получим реализацию сети д). После этого достаточно мало сместить вершину v_8 по плоскости $(v_1v_3v_5)$ в направлении от v_1, применить перестройку к $v_1v_8v_3$, $v_1v_8v_5$ и получить реализацию сети г).

Для реализации оставшихся сетей с рисунка 3 введем еще преобразование *раскалывания* по ребрам v_0v_1 и v_0v_2 (рис. 6), при котором возникает новая вершина v_0', расположенная достаточно близко к v_0. Сети е), ж) и з) реализуются раскалыванием многогранника, реализующего сеть а) (его модель изображена на с. 3 слева), соответственно, по ребрам (указывается по рисунку 3а)) v_6v_7 и v_5v_4, v_6v_1 и v_6v_4, v_6v_5 и v_6v_2.

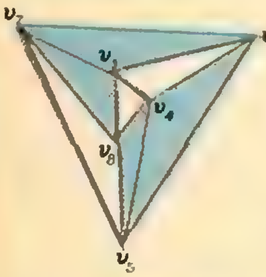


Рис. 4.

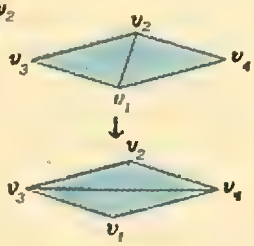


Рис. 5.

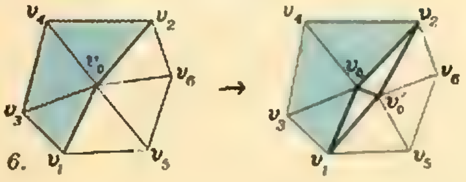


Рис. 6.

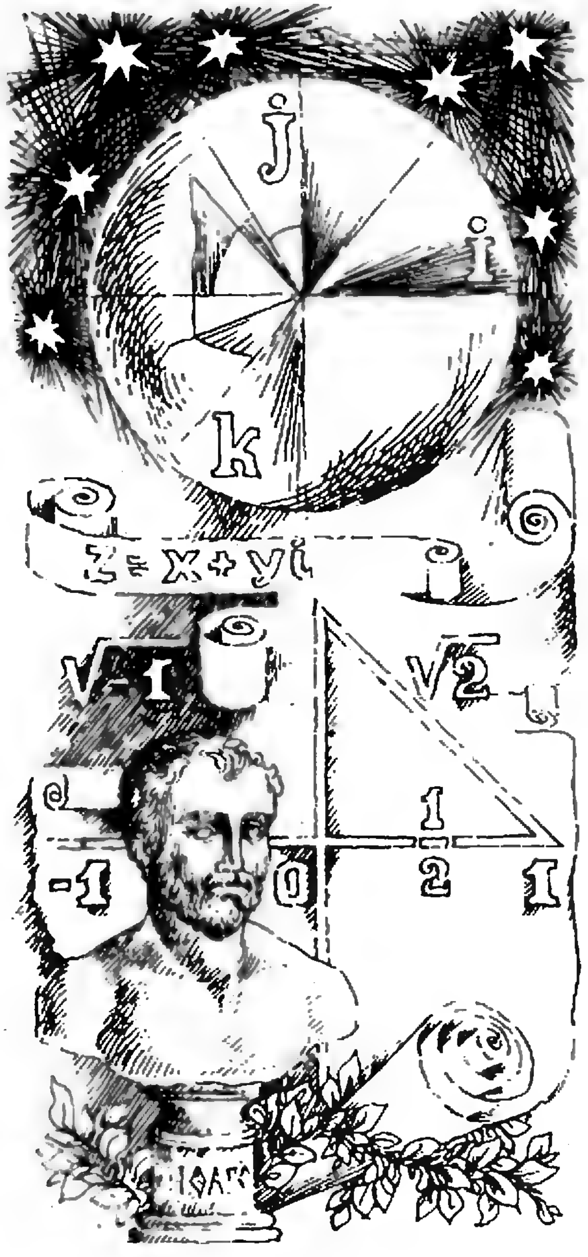
О доказательстве обобщения теоремы Штейница для тора

У нас нет возможности изложить здесь доказательство детально. Основная идея состоит в том, что сети сперва упрощаются последовательным применением преобразования *стягивания*, которое определяется как обратное к раскалыванию. Например, стягивание сетей е), ж), з) (рис. 3) по дуге p_1p_2 приводит к сети а). Затем остающиеся простейшие сети (их оказалось конечное число: 1 с 7 узлами, 4 с 8 узлами — это сети а), б), в), г) и д); 16 с 9 узлами и, наконец, 1 с 10 узлами) реализуются в виде явно построенных многогранников при помощи методики, приведенной выше. Все простейшие сети находятся путем выполнения некоторого перебора. Простейшие сети удается реализовать в виде многогранников по методике, описанной выше. Более сложные сети получаются из реализаций простейших сетей выполнением раскалываний (обратных к стягиваниям, проделанным при упрощении соответствующей сети) в тех случаях, когда эти раскалывания возможны. Остальные случаи мы здесь не обсуждаем.

Построение моделей многогранников-торов с семью и восемью вершинами

Модель многогранника-тора с семью вершинами можно изготовить, вырезав из тонкого картона треугольные грани с размерами ребер, указанными ниже, а затем склеив эти грани по схеме рисунка 3а). Размеры ребер (в сантиметрах): $|v_1v_4|=|v_2v_3|\approx 10{,}3$; $|v_4v_7|=|v_3v_7|\approx 7{,}8$; $|v_4v_3|\approx 10{,}0$; $|v_2v_4|=|v_1v_3|\approx 8{,}7$; $|v_4v_5|=|v_3v_6|\approx 7{,}0$; $|v_1v_6|=|v_2v_6|=|v_1v_5|=|v_2v_5|\approx 7{,}0$; $|v_1v_2|\approx 6{,}0$; $|v_5v_6|\approx 4{,}1$; $|v_1v_7|=|v_2v_7|\approx 3{,}4$; $|v_6v_7|=|v_5v_7|\approx 4{,}9$; $|v_4v_6|=|v_3v_5|\approx 3{,}8$.

Размеры ребер многогранника-тора с восемью вершинами (рис. 3 б), показанного на фотографии в начале статьи (бо́льший многогранник), следующие: $|v_iv_j|\approx 15{,}0$ см; $|v_iv_k|\approx 18{,}1$ см; $|v_7v_2|=|v_2v_5|=|v_5v_7|\approx 18{,}5$ см; $|v_8v_3|=|v_3v_4|=|v_4v_8|\approx 6{,}3$ см; $|v_7v_8|=|v_2v_3|=|v_4v_5|\approx 7{,}0$ см; $|v_7v_3|=|v_2v_4|=|v_5v_8|\approx 12{,}9$ см; ($i=1,6$; $j=3, 4, 8$; $k=2, 5, 7$).



Обобщение чисел

Академик Л. С. ПОНТРЯГИН

В этой статье рассказано о развитии понятия числа — от счета предметов в глубокой древности до создания действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. Во второй части статьи (в следующем номере «Кванта»), на основании совсем элементарных свойств чисел, векторов и многочленов, будет объяснено, почему дальнейшее обобщение понятия числа невозможно.

По мере того как проявлялись новые практические применения чисел и в результате развития теоретической математики понятие числа развивалось, появлялись новые числа. Первым практическим применением чисел был счет предметов. Для этого использовались целые положительные числа, которые принято называть *натуральными*. При измерении длин и при торговых расчетах приходилось делить целые числа друг на друга. При этом результат деления не всегда был целым числом. Поэтому возникла потребность в дробных или, что то же самое, рациональных числах. Для того чтобы вычитание рационального числа из другого рационального числа всегда было возможно, пришлось ввести *отрицательные* рациональные числа. Так образовался запас, или множество, всех *рациональных* чисел.

Еще в глубокой древности, задолго до появления отрицательных чисел, которые стали рассматриваться в середине нашего тысячелетия, было установлено, что отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не является рациональным числом. Стало необходимым ввести новые числа, которые назвали *иррациональными*. Так возник запас, или множество, всех *действительных* чисел.

§ 1. Комплексные числа

В процессе развития алгебры математики стали рассматривать квадратные корни из отрицательных чисел. Квадратные корни из отрицательных чисел встречались в промежуточных вычислениях, результаты которых оказывались обычными действительными числами. Так возникла потребность в присоединении новых чисел — квадратных корней из отрицательных чисел. В действительности, достаточно добавить только одно «новое» число, так называемую *мнимую единицу* i, которая определяется условием

$$i^2 = -1. \qquad (1)$$

Это новое число i и было присоединено к множеству всех действительных чисел. С так возникшими числами приходилось производить всевозможные алгебраические вычисления, так что пришлось рассматривать многочлены относительно i. При учете условия (1), многочлен любой степени относительно i превращался в многочлен первой степени, то есть записывался в виде

$$z=x+iy=x+yi, \qquad (2)$$

где x и y были обычными действительными числами. Числа вида (2) были названы *комплексными* числами. Операции сложения и умножения комплексных чисел были определены как операции над многочленами относительно i с учетом условия (1) следующим образом. Если

$$z_1=x_1+y_1i; \quad z_2=x_2+y_2i \qquad (3)$$

суть два комплексных числа, то *сумма* их определяется формулой

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)= \\ =(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i. \qquad (4)$$

Особую роль среди всех комплексных чисел играет число *нуль*, определяемое формулой

$$0=0+0i. \qquad (5)$$

Оно обладает тем замечательным свойством, что

$$0+z=z+0=z. \qquad (6)$$

Каждому комплексному числу соответствует *противоположное* ему число $-z$, определяемое условием

$$z+(-z)=0. \qquad (7)$$

Существование противоположного числа обеспечивает возможность вычитания. Именно

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2). \qquad (8)$$

Произведение чисел z_1 и z_2 как многочленов относительно i с учетом соотношения (1) дает следующий результат:

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=x_1x_2+x_1y_2i+ \\ +y_1x_2i+y_1y_2i^2=x_1x_2-y_1y_2+ \\ +(x_1y_2+x_2y_1)\,i. \qquad (9)$$

Среди всех комплексных чисел для умножения играет особую роль *единица*, определяемая формулой

$$1=1+0i. \qquad (10)$$

Она обладает следующим свойством:

$$1z=z1=z. \qquad (11)$$

Для того чтобы осуществить деление комплексного числа z_1 на комплексное число z_2, достаточно определить величину $1/z_2=z_2^{-1}$. Число z_2^{-1} называется *обратным* к числу z_2. Для комплексного числа $z=x+yi$ обратное число определяется формулой

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i. \qquad (12)$$

Из этой формулы видно, что число z^{-1} всегда существует, когда $z\neq 0$. Легко проверяется, что если число z^{-1} определено формулой (12), то мы имеем

$$z\cdot z^{-1}=z^{-1}z=1. \qquad (13)$$

Теперь *деление* комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2\neq 0$ определяется формулой

$$z_1/z_2=z_1\,(z_2^{-1}). \qquad (14)$$

Таким образом возник запас или множество всех комплексных чисел, среди которых содержится множество всех действительных чисел. Именно, это комплексные числа вида

$$z=x+0i. \qquad (15)$$

В самом деле, при сложении и умножении двух комплексных чисел вида (15) $z_1=x_1+0i$, $z_2=x_2+0i$ по формулам (4) и (9), соответственно, мы получаем (проверьте!) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+0i$ и $z_1z_2=x_1x_2+0i$, то есть просто происходит сложение и умножение действительных чисел x_1 и x_2. Таким образом, нет нужды различать комплексное число $z=x+0i$ и действительное число x, можно считать действительные числа частью комплексных. Поэтому множество комплексных чисел называется *расширением* множества действительных чисел.

Упражнения

1. Найдите a^2, $a+b^2$, ab^{-1}, если $a=2+3i$, $b=5-i$.

2. Решите уравнения $az+b=0$, $az^2=b$, если $a=3+i$, $b=2-3i$.

§ 2. Основная теорема алгебры

Для того чтобы получить все комплексные числа, мы начали с присоединения к действительным числам только одного числа i, являющегося корнем алгебраического уравнения

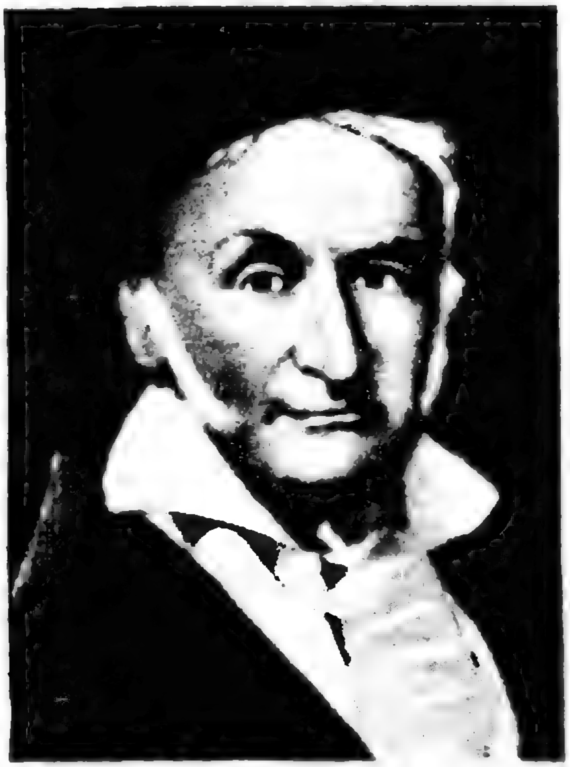
$$z^2+1=0. \qquad (16)$$

Однако оказывается, что мы тем самым пришли к такому запасу чисел, для которого любое алгебраическое уравнение уже имеет хотя бы один корень. Это есть *основная теорема алгебры*, доказанная великим немецким математиком К. Ф. Гауссом на рубеже XVIII и XIX веков. Сформулируем эту теорему точнее.

Пусть

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n, \qquad (17)$$

где $a_0\neq 0$, произвольный многочлен степени $n\geqslant 1$ относительно z с действительными коэффициентами. Тогда



Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), великий немецкий математик, а также астроном, физик и геодезист. Выдающиеся математические способности Гаусса проявились еще в раннем детстве. К моменту защиты докторской диссертации, в 22 года, он был автором многих ярких открытий, в том числе первого строгого доказательства основной теоремы алгебры. К этой теореме он относился с особым пристрастием, и впоследствии нашел не менее шести других ее доказательств! Трудно назвать такую отрасль теоретической и прикладной математики, в которую Гаусс не внес существенного вклада. Из вопросов, затронутых в этой статье, отметим еще придуманную им геометрическую интерпретацию комплексных чисел, в результате которой исчезли последние возражения против использования комплексных чисел в математике.

$f(z)$ имеет хотя бы один корень, то есть существует такое комплексное число α, что

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0. \qquad (18)$$

Эта теорема была доказана Гауссом для действительных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Позже эта теорема была доказана и для того случая, когда коэффициенты многочлена $f(z)$ являются комплексными числами.

Заметим, что для комплексных чисел имеет место коммутативность умножения, то есть множители можно менять местами:

$$z_1z_2=z_2z_1. \qquad (19)$$

После того как комплексные числа были построены и изучены, возник вопрос, нельзя ли пойти в обобщении дальше. Именно нельзя ли построить величины с несколькими мнимыми единицами, $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то есть совокупность величин — «обобщенных чисел» — вида

$$x=x_0+x_1i_1+x_2i_2+\ldots+x_ki_k, \qquad (20)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_k$ суть действительные числа, и для этих величин определить сложение и умножение, обладающие обычными свойствами сложения и умножения чисел. Оказывается, что такие величины можно построить с тремя единицами i_1, i_2, i_3. Они называются *кватернионами*. Для них выполнены обычные свойства сложения и умножения чисел, кроме закона коммутативности умножения (см. (19)). В конце прошлого века выдающийся немецкий математик Ф. Г. Фробениус доказал, что дальше пойти по этому пути уже невозможно. Доказательство этой теоремы Фробениуса, составляющее главное содержание настоящей статьи, будет изложено в следующем номере.

Для доказательства теоремы Фробениуса мне придется воспользоваться некоторыми результатами из алгебры, не входящими в ныне действующую программу средней школы, касающимися деления и разложения многочленов на множители.

§ 3. Деление многочленов

При делении целого положительного числа a на целое положительное число b, мы приходим к равенству

$$a=bh+k, \qquad (21)$$

где h и k — целые неотрицательные числа, $k<b$. Число h называется *частным*, а k — *остатком* при делении числа a на число b.

Способ деления целых чисел хорошо известен из арифметики. Но так же, как и целые числа, можно делить друг на друга многочлены. Будем исходить из двух многочленов:

$$\begin{aligned} a(z)&=a_0z^p+a_1z^{p-1}+\ldots+a_p,\\ b(z)&=b_0z^q+b_1z^{q-1}+\ldots+b_q. \end{aligned} \qquad (22)$$

Будем предполагать здесь, что числа a_0 и b_0 не равны нулю, так что многочлен $a(z)$ имеет степень p, а многочлен $b(z)$ имеет степень q. В результате деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ мы придем к следующему тождеству, аналогичному равенству (21):

$$\boxed{a(z) \equiv b(z)\,h(z) + k(z),} \qquad (23)$$

где степень многочлена $k(z)$ меньше q. Многочлены $h(z)$ и $k(z)$ называются соответственно *частным* и *остатком* при делении многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$.

Если $k(z)$ — тождественный нуль, то говорят, что многочлен $a(z)$ *делится* на многочлен $b(z)$, а $h(z)$ является частным от их деления.

Равенство (21) доказано в арифметике, а тождество (23) должно доказываться в алгебре. Но деление многочленов не входит в ныне действующую школьную программу. Чтобы доказать (23), мы должны построить такие многочлены $h(z)$ и $k(z)$, которые удовлетворяют этому тождеству. Процесс этого построения представляет собой очень важный алгоритм. Этот алгоритм очень похож на обычный алгоритм деления чисел «уголком». Поэтому, прежде чем разбирать его в общем виде, советую посмотреть практический пример деления двух многочленов, показанный на рисунке 1.

Опишем теперь алгоритм деления многочлена $a(z)$ степени p на многочлен $b(z)$ степени q в общем случае. Если $p < q$, то тогда $h(z) \equiv 0$, $k(z) \equiv a(z)$ и тождество (23) выполнено.

Теперь мы можем строить многочлены $h(z)$ и $k(z)$ в предположении, что $p \geqslant q$. Сперва построим тождество

$$a(z) \equiv b(z)\,h_1(z) + a_1(z), \qquad (24)$$

в котором степень многочлена $a_1(z)$ меньше p. Для этого положим

$$h_1(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{p-q}.$$

Тогда разность

$$a(z) - b(z)\,h_1(z) \equiv a_1(z)$$

имеет степень меньше, чем p, так как в этом многочлене коэффициент при z^p равен нулю. Остальные степени z, входящие в этот многочлен, очевидно, меньше p. Таким образом, тождество (24) построено.

Если многочлен $a_1(z)$ имеет степень, меньшую, чем q, то тождество (24) уже является тождеством (23). В противном случае к многочлену $a_1(z)$ применим ту же процедуру, которая применена к многочлену $a(z)$ при построении тождества (24). Тогда мы получим для него тождество

$$a_1(z) \equiv b(z)\,h_2(z) + a_2(z),$$

причем степень многочлена $a_2(z)$ уже меньше, чем степень многочлена $a_1(z)$. Если многочлен $a_2(z)$ уже имеет степень, меньшую чем q, то, подставляя $a_1(z)$ из последнего тождества в тождество (24), мы получим тождество

$$a(z) \equiv b(z)(h_1(z) + h_2(z)) + a_2(z),$$

которое уже является тождеством (23). Если многочлен $a_2(z)$ тоже имеет степень, большую или равную, чем q, то мы продолжим наше построение дальше и в конце концов докажем нужное тождество (23).

Здесь мы описали процесс деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$, то есть нахождение многочленов $h(z)$ и $k(z)$, входящих в тождество (23). Докажем теперь, что эти многочлены однозначно определены многочленами $a(z)$ и $b(z)$. Допустим, что наряду с тождеством (23) имеет место тождество

$$a(z) \equiv b(z)\,h_0(z) + k_0(z), \qquad (25)$$

причем степень многочлена $k_0(z)$ меньше q. Вычитая тождество (25) из (23), получим

$$b(z)(h(z) - h_0(z)) = k_0(z) - k(z).$$

Так как степень многочлена $b(z)$ равна q, а степень многочлена $k_0(z) - k(z)$ меньше q, последнее тождество может иметь место лишь при условии $h(z) - h_0(z) \equiv 0$, так что и $k_0(z) - k(z) \equiv 0$.

Заметим в заключение, что в процессе деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ не могут появиться комплексные числа, так что если многочлены $a(z)$ и $b(z)$ имеют действительные коэффициенты, то многочлены $h(z)$ и $k(z)$, входящие в тождество (23), также имеют действительные коэффициенты.

Упражнение 3. Разделите многочлен $x^8 + 2x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x$ на многочлен $x^3 + 1$.

§ 4. Разложение многочленов на неприводимые множители

Пусть

$$f_0(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (26)$$

— многочлен произвольной положительной степени n с произвольными действительными или комплексными коэффициентами. Как было отмечено ранее, этот многочлен имеет хотя бы один комплексный корень α. Докажем теперь, что если $f_0(z)$ имеет α своим корнем, то есть

$$f_0(\alpha) = 0,$$

то многочлен $f_0(z)$ делится на двучлен $z - \alpha$, так что имеет место равенство

$$\boxed{f_0(z) \equiv (z - \alpha)\,f_1(z),} \qquad (27)$$

где, очевидно, $f_1(z)$ имеет степень $n-1$.

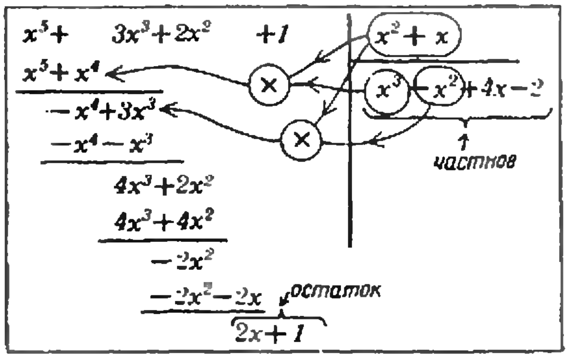


Рис. 1.

Фердинанд Георг Фробениус (1849—1917), выдающийся немецкий алгебраист, работавший в Берлине и Цюрихе. Наряду с У. Гамильтоном и А. Кейли он считается одним из творцов алгебры гиперкомплексных чисел (в частности, кватернионов). Но он пошел и дальше — ему принадлежит важная теорема, обсуждаемая в этой статье, утверждающая, по существу, что разумных обобщений понятия числа, после комплексных чисел и кватернионов, не существует.

Для доказательства формулы (27) разделим многочлен $f_0(z)$ на многочлен $z-\alpha$. Тогда в силу формулы (23) мы получим

$$f_0(z) \equiv (z-\alpha)\, f_1(z)+k(z), \qquad (28)$$

где $k(z)$ есть многочлен нулевой степени, то есть число. Подставляя в это тождество вместо z число α, получаем равенство $0=f_0(\alpha)=(\alpha-\alpha)\times\times f_1(\alpha)+k$. Таким образом, $k=0$ и формула (27) доказана. Доказанное утверждение называется *теоремой Безу*.

Сосредоточим теперь свое внимание на том случае, когда многочлен $f_0(z)$ имеет действительные коэффициенты. Если корень α является действительным корнем, то многочлен $f_1(z)$ также имеет действительные коэффициенты, так как он получается в результате деления многочлена $f_0(z)$ с действительными коэффициентами на двучлен $z-\alpha=r_1(z)$ также с действительными коэффициентами. Для рассмотрения случая, когда α есть комплексное число, введем понятие комплексно-сопряженных чисел.

Если

$$z=x+yi \qquad (29)$$

есть произвольное комплексное число, то комплексное число, определяемое формулой

$$\bar z=x-yi, \qquad (30)$$

называется *комплексно-сопряженным* z. Ясно, что равенство $z=\bar z$ имеет место тогда и только тогда, когда число z действительное.

Из правила сложения и умножения комплексных чисел вытекают следующие формулы:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2, \qquad (31)$$

$$\overline{z_1 z_2}=\bar z_1 \bar z_2. \qquad (32)$$

Из последних трех формул вытекает, что если $f_0(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами, то имеет место тождество

$$\overline{f_0(z)} \equiv f_0(\bar z). \qquad (33)$$

Таким образом, если α есть комплексный корень многочлена $f_0(z)$, то $\bar\alpha$ также есть комплексный корень многочлена $f_0(z)$. Из формул (27) и (33) следует, что если α не есть действительное число, то многочлен $f_1(z)$ имеет корень $\bar\alpha$, отличный от α, и потому разлагается в произведение:

$$f_1(z) \equiv (z-\bar\alpha)\, f_2(z). \qquad (34)$$

Из формул (27) и (34) вытекает, что

$$f_0(z) \equiv (z-\alpha)(z-\bar\alpha)\, f_2(z). \qquad (35)$$

Мы имеем,

$$r_2(z) \equiv (z-\alpha)(z-\bar\alpha) \equiv$$
$$\equiv z^2-(\alpha+\bar\alpha)\,z+\alpha\bar\alpha, \qquad (36)$$

где $r_2(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами степени 2. Его коэффициенты действительны, так как действительны числа $\alpha+\bar\alpha$ и $\alpha\bar\alpha$. Многочлен $r_2(z)$ не разлагается на действительные множители, так как он не имеет действительных корней. Многочлен с действительными коэффициентами, не разложимый на множители степени $n\geqslant 1$ с действительными коэффициентами, называется *неприводимым*. Таким образом, в случае действительного корня α мы имеем разложение

$$f_0(z) \equiv r_1(z)\, f_1(z).$$

В случае комплексного корня мы имеем разложение

$$f_0(z) \equiv r_2(z)\, f_2(z).$$

Итак, в обоих случаях $f_0(z)$ делит-

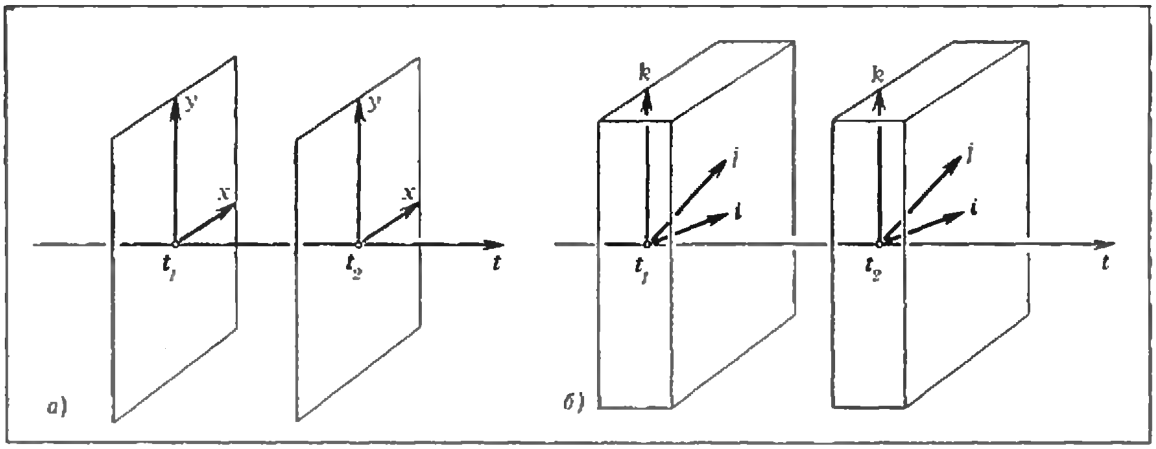


Рис. 2.

ся на неприводимый многочлен первой или второй степени с действительными коэффициентами, так что частное $f_2(z)$ от деления вновь есть многочлен с действительными коэффициентами. Значит, многочлен $f_0(z)$ разлагается на действительные неприводимые множители степени 1 или 2. Из этого вытекает важный вывод:

Произвольный корень u *многочлена* $f_0(z)$ *является корнем неприводимого многочлена первой или второй степени.*

Упражнение 4. Разложите многочлен $2x^4-3x^3+2x^2-8x$ на неприводимые множители степени 1 и 2.

§ 5. Кватернионы

Как уже упоминалось, кватернионы имеют три мнимые единицы. Эти единицы принято обозначать через

$$i,\ j,\ k. \tag{37}$$

Таким образом, каждый кватернион записывается в виде

$$x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k, \tag{38}$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 — действительные числа, называемые *координатами* кватерниона x.

Пусть

$$y=y_0+y_1i+y_2j+y_3k \tag{39}$$

— второй кватернион. Кватернионы x и y считаются *равными* тогда и только тогда, когда их координаты равны, то есть когда имеет место равенство

$$x_0=y_0,\ x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3. \tag{40}$$

Сложение кватернионов x и y происходит по правилу

$$x+y=x_0+y_0+(x_1+y_1)\,i+(x_2+y_2)\,j+(x_3+y_3)\,k. \tag{41}$$

Можно сказать, что кватернионы складываются покоординатно, то есть так, как складываются векторы 3-мерного векторного пространства при помощи сложения их координат. (Только координат у кватерниона не три, а четыре.) В этом смысле можно рассматривать кватернионы как векторы «четырехмерного пространства». Представить себе четырехмерное пространство, конечно, трудно. Здесь вам может помочь аналогия с трехмерным пространством (рис. 2).

При умножении кватернионов действительные числа можно переставлять с единицами i, j, k. Поэтому для задания правила перемножения кватернионов следует задать правило перемножения единиц (37). Оно следующее:

$$i^2=j^2=k^2=-1; \tag{42}$$

$$ij=-ji=k;\quad jk=-kj=i;\quad ki=-ik=j. \tag{43}$$

В общем виде формулы сложения и умножения кватернионов можно посмотреть в «Кванте», 1983, № 9, с. 13. Для того чтобы задать кватернион, обратный к кватерниону x, введем понятие *сопряженного* кватерниона $\bar{x}$. Мы определим его по формуле

$$\bar{x}=x_0-x_1i-x_2j-x_3k. \tag{44}$$

Простые вычисления дают

$$x\bar{x}=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=|x|^2. \tag{45}$$

Кватернион x^{-1}, *обратный* к x, определяется формулой

$$x^{-1}=\frac{\bar{x}}{|x|^2}. \tag{46}$$

Для него имеет место соотношение $x^{-1}x=xx^{-1}=1$.

(Окончание см. на с. 22)

Миллисекундные пульсары

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

Как уже сообщалось в «Кванте» (1983, № 12, с. 12), сравнительно недавно ученые обнаружили два самых быстрых (на сегодняшний день) пульсара. Один из них — он находится в созвездии Лисички — имеет период приблизительно 1,6 миллисекунды, другой, видимый в направлении созвездия Лебедя, вращается с периодом около 6,1 миллисекунды.

Чем интересны эти пульсары, и почему они сразу же привлекли к себе внимание ученых?

По современным представлениям пульсары — это нейтронные звезды, обладающие мощным магнитным полем. При вращении звезды наблюдатель, периодически попадающий в область направленного пучка радиоволн, фиксирует излучение в виде отдельных импульсов с периодом вращения звезды.

Нейтронные звезды образуются в результате выгорания термоядерного горючего (водорода, гелия, углерода и т. п.) в недрах звезд с массой, превышающей массу Солнца. Сначала выгорает водород, превращаясь в гелий (этот процесс происходит в недрах Солнца и большинства звезд), затем начинает выгорать гелий, затем углерод и т. д. Лишившись источников энергии, поддерживающих равновесное состояние, звезда испытывает катастрофическое сжатие (до размеров порядка 10 км) и, соответственно, резко увеличивается скорость ее вращения.

Но так можно было объяснить существование пульсаров с периодами вращения около одной секунды. Факт образования миллисекундных пульсаров требовал особого объяснения.

Такое объяснение предложили практически одновременно две группы исследователей — четверо американских ученых во главе с М. Альпаром и, независимо от них, индийский астрофизик Дж. Сринивасан и голландский астрофизик Э. ван ден Хейвель. Вот какой гипотезой они руководствовались.

Допустим, что когда-то образовалась система двойной звезды, в которой одна звезда (назовем ее A) превосходила по массе другую (компонент B). Несколько миллионов лет назад звезда A, как более массивная, первой исчерпала запасы водорода и начала сжиматься. При этом часть вещества стала перетекать на звезду B. Когда звезда A полностью лишилась источников термоядерной энергии, она взорвалась как сверхновая, а ее остаток образовал пульсар.

Между тем подошли к концу запасы ядерного горючего и в звезде B. Теперь вещество начинает перетекать с нее на пульсар (остаток звезды A), при этом вращение пульсара может заметно ускориться. Возможно, что после этого звезду B постигнет та же судьба, что и звезду A,— она взорвется и образует молодой пульсар.

Разрабатывая свою гипотезу, указанные ученые еще не знали о существовании миллисекундных пульсаров. Они хотели объяснить свойства других пульсаров, входящих в двойные системы и обладавших довольно быстрым вращением — с периодом порядка десятков миллисекунд. Открытие же самых быстрых пульсаров надежно подтвердило эту гипотезу.

Оказалось, что пульсар в созвездии Лебедя действительно входит в двойную систему. Установлено, что период обращения этого пульсара вокруг центра масс системы равен 120 суткам, а его орбита близка к круговой. Второй компонент системы — это белый карлик с массой, примерно втрое меньшей солнечной.

А как же объяснить существование первого миллисекундного пульсара (в созвездии Лисички), который не входит в двойную систему?

По мнению Сринивасана и ван ден Хейвеля такая система могла разрушиться при взрыве звезды B, так что оба пульсара — остатки звезд A и B — разлетелись в разные стороны. Есть и другие объяснения. Несомненно то, что дальнейшие исследования принесут много интересного в понимании природы этих замечательных небесных тел.

Наблюдения миллисекундных пульсаров могут дать неожиданные и очень важные результаты для изучения нашей планетной системы. Дело в том, что из-за движения Земли вокруг Солнца частоты излучения пульсаров изменяются с годовым периодом. Исследования этих годовых флуктуаций позволят точнее, чем классические методы небесной механики, определять малейшие отклонения в движении Земли под действием притяжения других планет (планетные возмущения), а значит, и массы возмущающих планет.

И наконец, что не менее важно для науки, миллисекундные пульсары могут стать новым эталоном времени.

Переговорная трубка длиной в экватор?

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ,
кандидат физико-математических наук
А. И. МАЛЯРОВСКИЙ

Сидя на кухне за завтраком, часто можно услышать не слишком приятное дребезжание, которое какой-то шутник прозвал «пением водопроводных труб». Прекратить это «коммунальное музицирование» иногда удается, открыв водопроводный кран в своей квартире. Большинство людей после этого облегченно возвращается к прерванному завтраку, не особенно задумываясь над физической сущностью происшедшего явления. А задуматься стоит. Почему звук, возбуждаемый струей воды в неисправном кране в одной из квартир, не дает покоя обитателям всего подъезда, связанного одним водопроводным стояком? Ведь если в той же квартире свистнуть в свисток, то это услышат разве что соседи в ближайших квартирах, да и то, если дом новый. «Пение» же водопроводной трубы слышно везде, с первого по последний этаж.

Такое различие обусловлено двумя причинами. Первая — это звукоизолирующее действие стен и перекрытий, которые отражают и поглощают звуки свистка. А звуковая волна, распространяющаяся по водопроводной трубе, с ними не взаимодействует и проходит с этажа на этаж беспрепятственно. Теперь — о второй причине. При звучании свистка возникающая акустическая волна распространяется в пространстве по всем направлениям, и ее волновая поверхность (см. «Физика 10», § 31), или волновой фронт, имеет форму сферы. Площадь этой сферы растет по мере удаления от источника звука, и интенсивность звуковой волны — то есть энергия, проходящая через единицу площади волнового фронта в единицу времени, — по мере удаления от источника падает (найдите сами, по какому закону).

А звуковая волна, возникающая внутри водопроводной трубы, «одномерна»: отражаясь от стенок трубы, она не расходится во все стороны в пространстве, а распространяется в одном направлении — вдоль самой трубы — без расширения волнового фронта, так что интенсивность звука по мере удаления от источника практически не изменяется. В этом смысле водопроводная труба представляет собой акустический волновод — канал, в котором звуковые волны распространяются в определенном направлении практически без ослабления.

Другим примером акустического волновода служат переговорные трубы, с помощью которых с давних времен и по сей день на судах передаются команды с капитанского мостика в машинное отделение. Заметим, что затухание звука в воздухе при распространении по волноводу оказывается настолько малым, что если бы удалось сделать такую трубку длиной в 700 км, то она смогла бы служить своеобразным «телефоном» для передачи разговора из Москвы в Ленинград и обратно. Однако вести разговор по такому «телефону» было бы крайне затруднительно, поскольку собеседник слышал бы сказанное вами примерно через полчаса.

Подчеркнем, что отражение распространяющейся в волноводе волны от его границ является определяющим свойством волновода — именно благодаря ему энергия волны распространяется не во все стороны в пространстве, а передается в заданном направлении.

Сравнительно недавно, около тридцати лет назад, ученые СССР и США обнаружили, что природа сама создала гигантские акустические волноводы, которые по своим размерам значительно превосходят даже выдуманную нами переговорную трубку между Москвой и Ленинградом. Такие волноводы при определенных условиях возникают в океанах. Ученые назвали их подводными звуковыми каналами, или, сокращенно, ПЗК. Распространяющиеся по таким каналам звуковые волны могут быть приняты за тысячи километров от их источника. Так, в одном из наиболее удачных экспериментов звук от подводного взрыва, произведенного учеными у берегов Австралии, обошел под водой половину земного шара и был зарегистрирован другой группой исследователей у Бермудских островов, на расстоянии 19 600 км от Австралии (до сих пор это — рекорд дальности распространения импульсных звуковых сигналов.

Каков же механизм образования такого волновода? Что в нем служит отражающими границами, заставляющими звуковые волны распространяться на столь огромные расстояния? В качестве верхней границы сразу же напрашивается поверхность океана, которая достаточно хорошо отражает звук (см. Приложение). Однако она редко бывает ровной из-за постоянного волнения; а это приводит к хаотическому рассеянию на ней звуковых волн. Дно же отражает звук слабо и служить нижней отражающей границей волновода никак не может. Поэтому границы волновода в океане следует искать где-то между дном и поверхностью. И они были найдены. Этими границами оказались слои воды на определенных глубинах океана.

Как же происходит отражение звуковых волн от «стенок» ПЗК? Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется рассмотреть, как вообще происходит распространение звука в океане.

До сих пор мы говорили о волноводах, молчаливо предполагая, что скорость распространения звука в них постоянна. Между тем хорошо известно, что скорость звука в океане колеблется от 1450 м/с до 1540 м/с. Она связана с температурой воды, ее соленостью, с величиной гидростатического давления и с другими факторами. Рост гидростатического давления приводит к тому, что при погружении на каждые 100 м скорость звука увеличивается на 1,6 м/с. С ростом температуры скорость звука также возрастает. Однако в океане температура воды, как правило, довольно резко убывает по мере удаления из верхних, хорошо прогретых, слоев воды в глубину, где она выходит практически на постоянное значение. Действие этих двух механизмов приводит к такой зависимости скорости звука от глубины, как это показано на рисунке 1. Вблизи поверхности преобладающее влияние оказывает быстрое падение температуры — в этих слоях скорость звука уменьшается с ростом глубины. По мере погружения температура меняется все медленнее, а гидростатическое давление продолжает возрастать. На некоторой глубине z_m влияние этих двух факторов «уравновешивается» — на этой глубине скорость звука минимальна; а дальше она начинает возрастать с увеличением глубины за счет роста гидростатического давления.

Итак, скорость распространения звука в океане зависит от глубины. И это сказывается на характере распространения звука. Для того чтобы понять, чем определяется ход звуко-

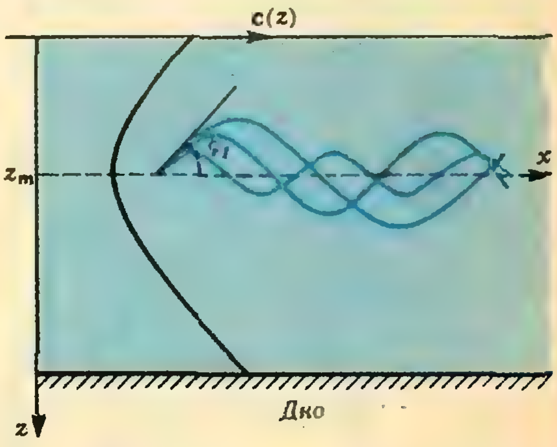


Рис. 1.

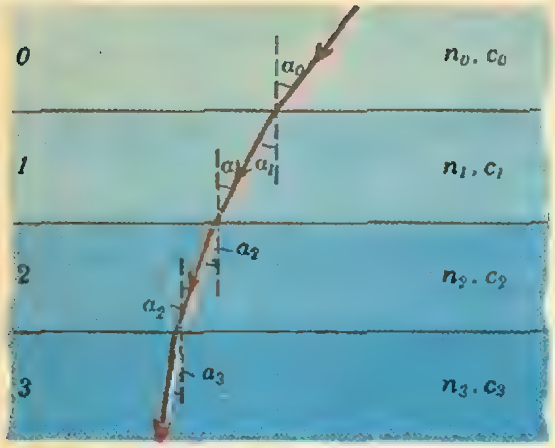


Рис. 2.

вых лучей в океане, мы обратимся к оптической аналогии: посмотрим, как распространяются световые лучи в стопке из плоскопараллельных пластинок с различными показателями преломления, а затем обобщим наш результат на случай среды с плавно меняющимся показателем преломления.

Рассмотрим стопку из плоскопараллельных пластин с разными показателями преломления n_0, n_1, n_2, ..., ..., n_k, ..., причем $n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ (рисунок 2). Луч, падающий из самой верхней пластинки на пластинку 1 под углом α_0, после преломления на границе 0—1 составит угол α_1 с нормалью к этой границе; под таким углом он упадет на границу 1—2; после преломления на этой границе луч, пройдя пластину 2, упадет на границу 2—3 под углом α_2, вновь преломится и т. д. Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad ..., \quad \frac{\sin\alpha_{k-1}}{\sin\alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}, \quad ...$$

Вспоминая, что отношение коэффициентов преломления двух сред обратно отношению скоростей распространения света в этих средах, перепишем все соотношения в виде

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} = \frac{c_0}{c_1}, \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{c_2}{c_3}, \quad ..., \quad \frac{\sin\alpha_{k-1}}{\sin\alpha_k} = \frac{c_{k-1}}{c_k}, \quad ...$$

$(c_0 > c_1 > c_2 > ... > c_k > ...)$. Перемножив последовательно эти равенства друг на друга, мы получим соотношение

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_k} = \frac{c_0}{c_k}.$$

Устремляя толщину каждой пластинки к нулю, а число пластинок к бесконечности, мы придем к обобщенному закону преломления, который описывает ход светового луча в среде с плавно меняющимся показателем преломления (этот закон называют обобщенным законом Снеллиуса):

$$c(z) \cdot \sin\alpha(0) = c(0) \cdot \sin\alpha(z), \qquad (*)$$

где $c(0)$ — скорость света в месте входа луча в среду, а $c(z)$ — скорость света на расстоянии z от границы среды. При таком предельном переходе ломаная линия, показывающая ход луча, превращается в плавную кривую. Явление искривления световых лучей при распространении света в среде с непрерывно меняющимся показателем преломления называют рефракцией.

Зная, как меняется скорость света в среде, мы можем, пользуясь соотношением (*), указать, каким будет ход того или иного луча, попавшего в среду. Точно так же, по тому же закону (*), происходит искривление звуковых лучей при распространении звука в неоднородной среде, где скорость звука плавно изменяется. Частный случай такой среды и представляет собой океан.

Теперь вернемся к вопросу о том, как распространяется звук в ПЗК. Представим себе, что источник звука находится на глубине z_m (рисунок 3). Каков будет ход звуковых лучей, выходящих из источника? Луч, идущий вдоль горизонтали $z = z_m$, будет прямолинейным. А те лучи, которые выходят под некоторыми углами к этой горизонтали, будут искривляться. По аналогии это явление называют рефракцией звука. Поскольку и выше, и ниже уровня z_m скорость звука возрастает, звуковые лучи будут искривляться в направлении горизонтали $z = z_m$; в какой-то момент луч станет «параллельным» этой горизонтали и, «отразившись», повернет к ней (см. рисунок 3).

Итак, рефракция звука в океане приводит к тому, что часть звуковой энергии, излучаемой источником, может распространяться, не выходя на

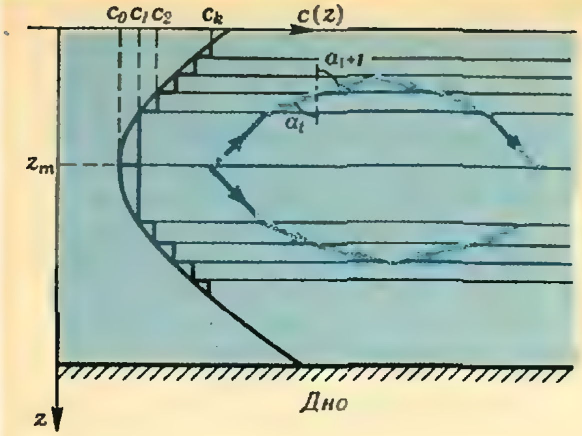


Рис. 3.

поверхность воды и не доходя до дна. А это и означает, что в такой среде реализуется волноводный механизм распространения звука — подводный звуковой канал. Роль «стенок» этого волновода выполняют слои воды на тех глубинах, где происходит «поворот» звукового луча.

Уровень глубины z_m, на которой скорость звука минимальна, называют осью ПЗК. Обычно величины z_m лежат в диапазоне 1000—1200 м; однако в тропических широтах, где вода прогревается на большие глубины, ось ПЗК может опускаться и до глубин в 2000 м. Наоборот, в высоких широтах влияние температуры на распределение скорости звука сказывается только в приповерхностном слое, и ось ПЗК поднимается до глубин 200—500 м, а в полярных широтах — еще ближе к поверхности.

В океане могут существовать два принципиально различных типа ПЗК. Канал первого типа образуется в том случае, когда скорость звука у поверхности воды (c_0) меньше, чем у дна ($c_{д}$). Этот случай обычно имеет место в глубоководных районах, где давление у дна достигает сотен атмосфер. Звук, идущий из воды в воздух, хорошо отражается от поверхности их раздела (см. Приложение), и если поверхность океана гладкая (штиль), то она служит резкой верхней границей волновода и канал занимает весь слой воды от поверхности до дна (рисунок 4).

Посмотрим, какая часть звуковых лучей «захватывается» в ПЗК. Для этого перепишем полученное нами ранее соотношение (*) в таком виде:

$$c(z)\cdot\cos\varphi_1=c_1\cdot\cos\varphi(z),$$

где φ_1 и $\varphi(z)$ — углы, образуемые звуковым лучом с горизонтальной плоскостью на глубинах z_1 и z соответственно. Эти углы называют углами скольжения. (Понятно, что $\varphi_1=\pi/2-\alpha_1$, $\varphi(z)=\pi/2-\alpha(z)$.) Если источник звука находится на оси ПЗК, то $c_1=c_m$; канал захватывает лучи, для которых угол скольжения у дна равен $\varphi(z)=0$. Так что все лучи, которые выходят из источника под углами скольжения φ_1, удовлетворяющими условию (см. рисунок 4)

$$\cos\varphi_1\geqslant\frac{c_m}{c_x},$$

попадают в ПЗК.

При неровной поверхности воды звуковые лучи будут рассеиваться на ней; те лучи, которые уйдут от поверхности под достаточно большими углами скольжения, дойдут до дна и там поглотятся. Однако и в этом случае канал может захватывать все те лучи, которые благодаря рефракции чуть-чуть не доходят до волнующейся поверхности (рисунок 5). Канал

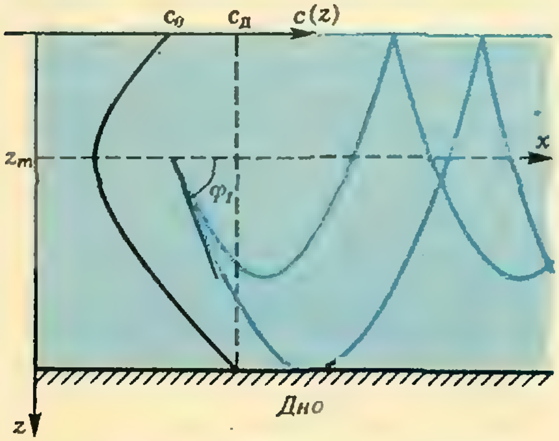


Рис. 4.

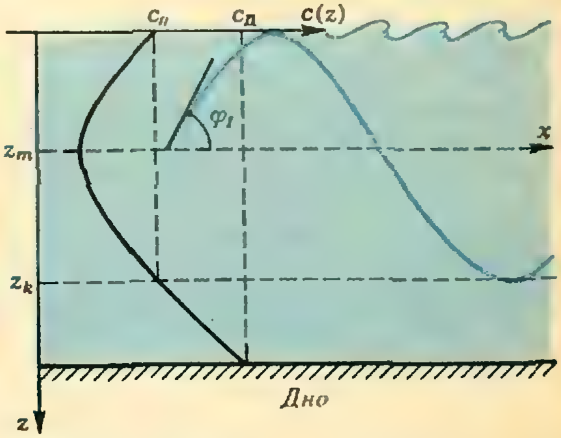


Рис. 5.

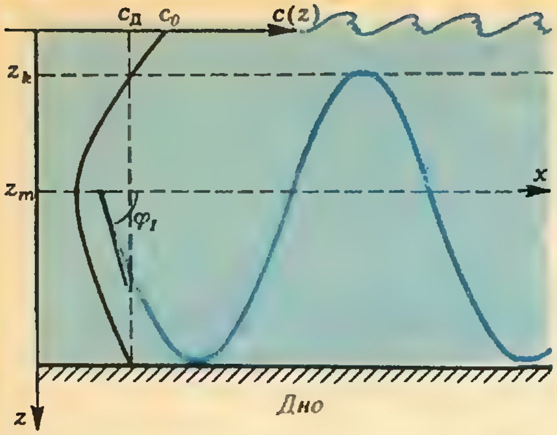


Рис. 6.

при этом простирается от поверхности до глубины z_k, которая определяется из условия $c(z_k)=c_0$. Понятно, что такой канал захватывает все звуковые лучи с углами скольжения $\varphi_1 \leqslant \arccos\frac{c_m}{c_0}$.

Канал второго типа характерен для мелководных районов и образуется в случае, когда скорость звука вблизи поверхности оказывается большей, чем у дна (рисунок 6). Он занимает слой воды от дна до глубины z_k такой, что $c(z_k)=c_д$. Это как бы перевернутый канал первого типа в случае волнующейся поверхности.

Если источник звука расположен вблизи оси ПЗК, то в точку приема сигнала приходит, как правило, множество звуковых лучей, причем время прохождения звука по ним различно и оказывается максимальным для осевого луча (скорость распространения звука на этой глубине минимальна). Интенсивность короткого импульсного сигнала, регистрируемого в точке приема, растет от начала приема к концу, поскольку разность между временами прихода импульсов по разным лучам к концу приема сигнала уменьшается, и они начинают накладываться один на другой, что и приводит к увеличению интенсивности. Последним приходит звуковой луч, распространяющийся вдоль оси ПЗК (с нулевым углом скольжения), после чего сигнал резко обрывается.

Для определенных типов зависимости скорости звука от глубины ПЗК действует на звуковые лучи подобно фокусирующей линзе: если излучатель расположен на оси ПЗК, то лучи, вышедшие под различными углами скольжения, будут периодически одновременно сходиться на оси канала в точках, называемых фокусами ПЗК. Так, для канала, в котором скорость звука меняется с глубиной по закону, близкому к параболическому — $c(z)=c_m(1+\frac{1}{2}b^2z^2)$, — фокусы для лучей, вышедших под малыми углами скольжения, будут находиться в точках $x_n=x_0+\pi n/b$, где $n=1, 2, \dots$ (рисунок 7). Такой профиль кривой $c(z)$ близок к реальному распределению скорости звука в глубинных ПЗК. Отклонения от точной параболической зависимости в $c(z)$ приводят к размытию фокусов на оси ПЗК.

Ну, а можно ли заставить звук, распространяясь по ПЗК, совершить кругосветное путешествие — обогнуть под водой весь земной шар и вернуться к своему источнику? Нет, нельзя. Первой, и самой непреодолимой, преградой служат материки и значительные перепады в глубинах Мирового океана. Поэтому нельзя выбрать такой путь, вдоль которого существовал бы единый ПЗК вокруг всего земного шара. Но это не единственная причина. Звуковая волна, распространяющаяся в ПЗК, отличается от звуковых волн в водопроводной трубе и переговорной трубке. Как уже говорилось, при распространении в этих волноводах звуковая волна одномерна, площадь ее волнового фронта постоянна на любом расстоянии от источника звука, и, следовательно, интенсивность звука (без учета тепловых потерь) также будет постоянна в любом сечении трубы. В подводном звуковом канале звуковая волна распространяется не вдоль прямой, а по всем направлениям

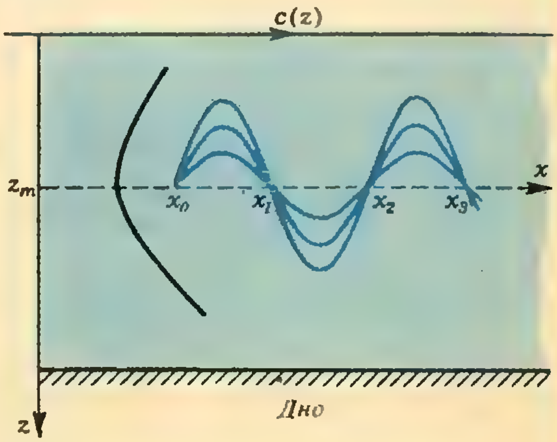


Рис. 7.

в плоскости $z=z_m$. Поэтому волновым фронтом является цилиндрическая поверхность, и уже из-за этого интенсивность звука падает по мере удаления от источника пропорционально $1/R$, где R — расстояние от источника звука до места наблюдения (сравните эту зависимость с полученным вами ранее законом убывания интенсивности для сферической звуковой волны в трехмерном пространстве, а также со случаем одномерной звуковой волны, для которой интенсивность не меняется с расстоянием вообще).

Другой причиной ослабления звука служит затухание звуковой волны при ее распространении в морской воде. Энергия волны переходит в тепло из-за трения в воде. Кроме того, звуковая волна рассеивается в океане на различных неоднородностях, которыми могут служить взвешенные в воде частицы, пузырьки воздуха, планктон и даже газовые пузыри рыб. Это явление используют, в частности, для обнаружения с помощью ультразвуковой локации косяков рыб.

В заключение заметим, что описанный подводный звуковой канал — отнюдь не единственный пример волновода, существующего в природе. Так, дальнее радиовещание с наземных радиостанций возможно только благодаря распространению радиоволн в атмосфере по гигантским волноводам. В определенных условиях в атмосфере могут образовываться волноводные каналы и для электромагнитных волн с частотами светового диапазона. Тогда, в результате сверхдальних миражей, в центре пустыни можно увидеть величаво плывущий морской корабль, а среди океана вдруг поднимется город.

Приложение

Рассмотрим вопрос об отражении и прохождении звуковой волны на границе раздела двух сред.

Пусть плоская звуковая волна какой-либо определенной частоты и с амплитудой звукового давления p падает на границу раздела «вода — воздух» со стороны воды (со стороны более плотной среды) перпендикулярно этой границе. Часть ее (волна с амплитудой p') отразится от границы и пойдет в обратном направлении, другая часть (волна с амплитудой p_1) проникает сквозь границу раздела и будет распространяться в воздухе в первоначальном направлении. Чтобы определить соотношение между амплитудами падающей, прошедшей и отраженной волн, воспользуемся условием равновесия границы раздела и законом сохранения энергии. Условие равновесия границы раздела заключается в равенстве давлений по разные стороны от границы раздела. Учитывая, что отраженная волна распространяется в направлении, противоположном падающей, равенство давлений на границе можно записать в виде

$$p-p'=p_1.$$

Закон сохранения энергии, в данном случае, сводится к равенству интенсивности падающей волны сумме интенсивностей прошедшей и отраженной волн. Можно показать, что интенсивность звуковой волны определяется выражением $I=p^2/2\varrho c$, где ϱ — плотность среды. Поэтому второе уравнение записываем в виде

$$\frac{p^2}{2\varrho c}=\frac{p'^2}{2\varrho c}+\frac{p_1^2}{2\varrho_1 c_1}.$$

Здесь ϱ и ϱ_1 — плотности, а c и c_1 — скорости распространения звука соответственно для воды и для воздуха.

Решая совместно эти уравнения, находим коэффициент прохождения звука через границу раздела, который определяется отношением амплитуд звукового давления прошедшей и падающей волн:

$$k=\frac{p_1}{p}=\frac{2\varrho_1 c_1}{\varrho_1 c_1+\varrho c}.$$

Плотность воздуха составляет лишь 0,0013 от плотности воды, а скорость звука в воздухе примерно в 4,5 раза меньше, чем в воде. Поэтому для границы раздела «вода — воздух» коэффициент прохождения составляет $k=p_1/p=4\cdot10^{-4}$. При наклонном падении волны на границу раздела это отношение оказывается еще меньшим. Таким образом, мы видим, что звук практически не выходит из воды в воздух.

Иная картина наблюдается при отражении звуковой волны от дна. Плотность верхнего слоя донных осадков обычно лежит в пределах 1,24—2,0 г/см^3, а скорость распространения звука в них всего на 2—3 % меньше, чем в воде. Поэтому значительная часть падающей из воды на дно звуковой волны переходит в грунт и поглощается в нем.

Информация

Вечерняя математическая школа при факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет весенний набор учащихся 7—9 классов. Основная цель ВМШ — углубить в объеме школьной программы и расширить знания по математике, научить основам программирования и работы на ЭВМ. Занятия в школе проводятся в виде лекций и семинарских занятий. Для учащихся ВМШ организуются встречи с учеными факультета. Успешно закончившие школу получают свидетельство об окончании ВМШ. Прием производится по результатам собеседования, которое состоится 3 марта в 10 часов по адресу: 119889, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет ВМК; телефон для справок 139-53-74.

Пузырьки в жидкости

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Как устроена пузырьковая камера?

В начале пятидесятых годов нынешнего столетия молодой сотрудник Мичиганского университета (США) Дональд Глейзер придумал новый тип прибора, регистрирующего элементарные частицы. Он получил название пузырьковой камеры.*)

На рисунке 1 изображена современная пузырьковая камера. Это сооружение, занимающее большой зал высотой в несколько этажей, оснащенное сложной техникой и управляемое быстродействующими электронно-вычислительными машинами. Многие из установок имеют даже собственные имена: «Людмила», «Мирабель», «Гаргамель» и т. п.

Однако первые модели камер, изготовленные Глейзером, никак нельзя было назвать впечатляющими (рис. 2). Их главная часть представляла собой стеклянную ампулу с эфиром объемом несколько кубических сантиметров. Жидкость была нагрета и находилась под давлением около 20 атмосфер (1 атм $\approx 10^5$ Па). Специальное устройство (тоже несложное) позволяло быстро сбросить давление, но при этом эфир закипал не сразу. Если во время такого «ожидания» через жидкость пролетала заряженная частица, оставляя за собой след из ионов, то вдоль следа появлялись пузырьки пара. Сфотографировав след, можно было снова повысить давление, пузырьки исчезали (раздавливались), и прибор был опять готов к работе.

Так пузырьки в жидкости оказались необыкновенно полезными для физики элементарных частиц. На рисунке 3 представлен один из снимков, сделанных с помощью пузырьковой камеры.

Почему же пузырьки появлялись именно на пути частицы?

Сначала вспомним, что такое кипение

Кипение — это образование по всему объему жидкости пузырьков пара, которые растут и всплывают на поверхность. Очевидно, что для этого давление пара в пузырьках должно быть больше, чем давление в жидкости (иначе последняя их раздавит). Все знают, что при нормальном ат-

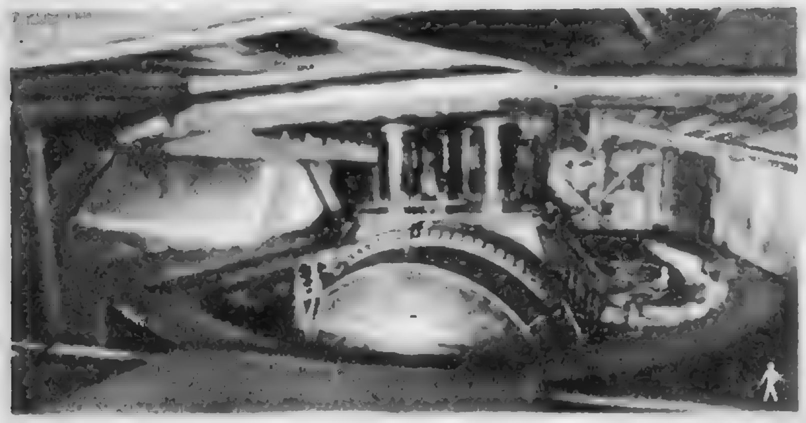


Рис. 1. Пузырьковая водородная камера «Мирабель», используемая для исследований в Институте физики высоких энергий.

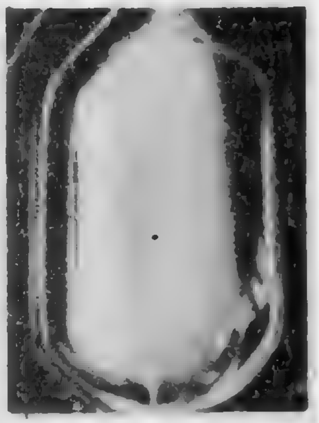


Рис. 2. Трек заряженной элементарной частицы, полученный в первой пузырьковой камере Глейзера.

---

*) Об этом и других детекторах элементарных частиц можно прочитать, например, в книге А. А. Борового «Как регистрируют частицы» (М.: Наука, 1981, серия «Библиотечка «Квант»). (*Примеч. ред.*)

мосферном давлении вода кипит при 100 °С. Именно при такой температуре давление насыщенного пара становится достаточным, и жидкость закипает. Но всегда ли закипает?

Возьмем две пробирки. Одну из них вымоем особенно тщательно, проследим, чтобы на стенках не было царапин или посторонних частиц, и наполним ее дистиллированной водой (приблизительно 10 см^3). Во вторую пробирку нальем такое же количество, но водопроводной воды и еще бросим кусочек мела. Будем подогревать пробирки в одинаковых условиях и в отсутствие прямого соприкосновения с огнем. Оказывается, вода в них будет кипеть по-разному (рис. 4).

В пробирке с водопроводной водой кипение начнется раньше, и процесс этот будет происходить достаточно спокойно и непрерывно. Пузырьки пара образуются, в основном, на кусочке мела. Что касается пробирки с дистиллированной водой, то процесс кипения в ней начнется позже (при большей температуре) и будет происходить неравномерно. В жидкости образуются большие пузыри, их появление и схлопывание сопровождаются громким треском.

В лаборатории удается очистить сосуд и воду (используется дважды дистиллированная вода) так хорошо, что кипение не наступает вплоть до температуры 140 °С. Если в такую воду, ее называют перегретой, бросить крупинку, произойдет взрыв — так быстро образуются пузыри с паром. Химики хорошо знают это свойство жидкости. Для того чтобы процесс кипения происходил равномерно, без взрыва, в сосуд помещают так называемые «кипелки» — обломки стеклянных или фарфоровых трубок, кусочки мрамора и т. п.

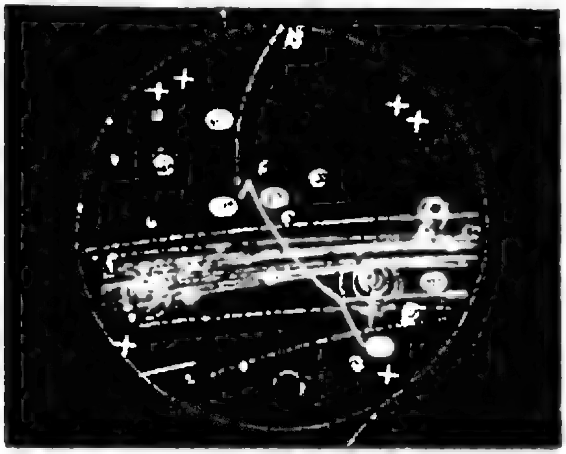


Рис. 3. Фотография процессов взаимодействия и превращения элементарных частиц в жидководородной пузырьковой камере.

Объяснение описанных выше свойств связано с наличием у жидкости поверхностного натяжения. Поверхность жидкости можно представить себе как растянутую упругую пленку. Пленка стремится сжаться — силы поверхностного натяжения стремятся раздавить образовавшийся пузырек. Дополнительное давление *), обусловленное этими силами, тем больше, чем меньше радиус пузырька, так что процесс кипения подавляется в самом зародыше. Именно поэтому однородную жидкость удается перегревать. В то же время, любые неоднородности как в самой жидкости, так и связанные с посторонними включениями, облегчают кипение. Такие неоднородности образуются, в частности, на пути заряженной частицы, вот почему он становится местом образования первых пузырьков. Теперь понятно, что важнейшее условие работы камеры Глейзера — это однородность эфира и чистота ампулы.

Несколько любопытных наблюдений над пузырьками в жидкости

Такие наблюдения можно провести, используя газированную воду. Ее поведение иногда аналогично поведению перегретой жидкости. Сразу же возникает вопрос: *почему и когда газированная вода может служить моделью перегретой жидкости?*

Для опытов понадобится бутылка лимонада, стакан, ложка, сахар и долька шоколада (перечисленные материалы в любом случае гарантируют приятный результат экспериментов). Начнем с того, что быстро откроем бутылку с водой, тогда над горлышком в первый момент появится дымок. *С чем это связано?*

Теперь нальем воду в стакан и подождем, пока опадет пена и в воде будут подниматься только отдельные пузырьки. Закроем стакан плотно

---

*) Дополнительное давление на пузырек можно оценить по формуле $p=2\sigma/r$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус пузырька. Такое же давление испытывает жидкость в капилляре непосредственно под выпуклой (полусферической) поверхностью (см. «Физика 9», с. 94).

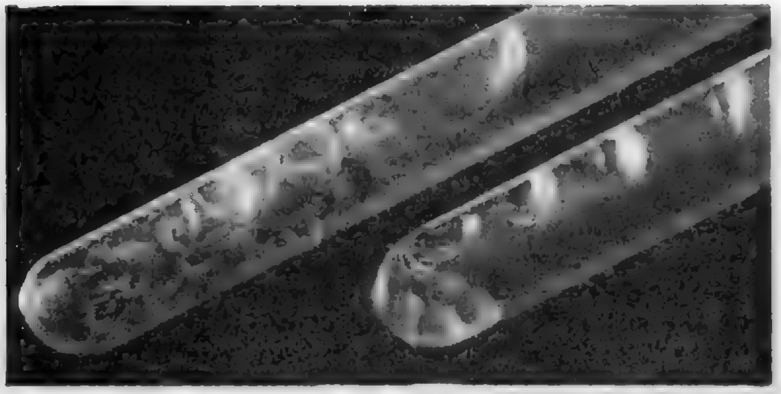


Рис. 4. Так, по-разному, происходит процесс кипения воды в пробирке с дистиллированной водой и в пробирке с водопроводной водой.

прилегающей крышкой — через некоторое время выделение газа совсем прекратится. Откроем стакан, и пузырьки появятся вновь. *Почему?*

Бросим в стакан щепотку сахара. «Кипение» воды усилится, и на ее поверхности снова появится пена. Очевидно, в воде еще содержалось достаточно много углекислого газа. *Что же мешало его выходу, и какую роль сыграл здесь сахарный песок?* Бурного выхода газа и появления пены можно добиться и другими путями, например перемешиванием жидкости или переливанием ее из одного стакана в другой.

Наконец, возьмем маленький кусочек шоколада (можно ягоду) и бросим его в стакан. Шоколад тяжелее воды и поэтому пойдет ко дну. Здесь он начнет обрастать пузырьками газа, и они, как поплавки, поднимут шоколад на поверхность. Пузырьки выйдут в воздух, кусочек шоколада вновь опустится на дно и т. д. Иногда такое всплытие и погружение может повторяться до десяти раз.

Как ответить на поставленные вопросы?

По существу, все объяснение сводится к ответу на первый вопрос — почему газированная вода напоминает перегретую жидкость.

Наверное, многие из вас знают, как можно приготовить газированную воду. Нет, не промышленным способом, а обычным домашним — с помощью сифона и баллончиков с углекислым газом (CO_2). Газ из баллончика под давлением поступает в пространство над жидкостью. Для того чтобы он быстрее растворялся в воде, сифон встряхивают. Растворение газа происходит до наступления равновесия. Если он химически не реагирует с жидкостью, то равновесное содержание (плотность, концентрация) газа в жидкости пропорционально его давлению над поверхностью.*)

(Известны и другие домашние способы приготовления «шипучки» — добавлением в воду лимонного сока, питьевой соды и т. п.)

Когда мы быстро открываем бутылку с газированной водой, газ, находящийся над поверхностью под давлением, быстро расширяется и одновременно охлаждается. Пары воды, выходящие вместе с ним, конденсируются, образуя туманное облачко (дымок). После того как давление над поверхностью жидкости значительно уменьшится, растворенный в воде улекислый газ начнет выходить из нее, причем как через поверхность газ — жидкость, так и путем образования пузырьков в объеме жидкости. Сначала, после открытия бутылки, когда равновесие нарушено особенно сильно и в воде имеется большой избыток углекислого газа, пузырьки образуются легко и их много. Поэтому жидкость начинает пениться. Постепенно пена спадает, хотя в воде все еще остается «лишний» газ. Но теперь образование пузырьков затруднено — концентрация газовых молекул стала меньше и случайным образом собраться им вместе и образовать сразу большой пузырек, который бы не раздавили силы поверхностного натяжения, трудно. Пузырьки начинают расти только на неоднородностях в воде, и это действительно похоже на поведение перегретой жидкости.

---

*)В случае с углекислым газом и водой положение несколько сложнее, так как они реагируют друг с другом. Но получающаяся кислота — соединение нестойкое и легко распадается.

Объяснить все последующие опыты, наверное, не составит для читателей большого труда.

Совершенно неожиданное применение газированной воды

Эту заметку мы начали с рассказа о пузырьковой камере. Кончить ее нам хочется рассказом еще об одном применении пузырьков, причем тоже в физике элементарных частиц.

Несколько лет тому назад перед советскими физиками, исследующими свойства нейтрино, встала следующая задача. Необходимо было из большого объема жидкости (сотни литров) извлечь несколько атомов газа, которые образовались в этом объеме под действием нейтринного излучения. Газ был радиоактивный (неон-19), и его атомы распадались за время, меньшее одной минуты. Поэтому буквально за секунды надо было среди 10^{28} атомов жидкости разыскать 5—10 атомов газа, извлечь их, транспортировать в счетчик и сосчитать! На первый взгляд, задача казалась нерешаемой.

На помощь пришла идея газированной воды. Жидкость перед облучением насыщалась углекислым газом. Сразу после облучения объем открывался, и жидкость энергично перемешивалась специальными лопастями. Происходило бурное кипение, тем самым поверхность, через которую могли выйти атомы неона, увеличивалась в десятки тысяч раз. Выходящий углекислый газ выносил их, а сам поглощался в другом сосуде (в растворе щелочи). Неон собирался в специальной пробирке и в ней быстро перемещался в счетчик. Вся процедура занимала меньше двадцати секунд.

Обобщение чисел

(Начало см. на с. 6)

Так как для кватернионов не имеет места коммутативность, то есть не всегда имеет место равенство $xy=yx$, деление кватерниона x на кватернион y может происходить «слева» или «справа». *Частное* z от деления кватерниона x на кватернион y *слева* задается формулой

$$z=y^{-1}x. \tag{47}$$

Частное от деления кватерниона x на кватернион y *справа* задается формулой

$$z'=xy^{-1}. \tag{48}$$

Для этих частных мы имеем формулы

$$yz=x; \quad z'y=x. \tag{49}$$

Заметим, что среди всех кватернионов выделяется множество действительных чисел. Это все кватернионы x, для которых x_0 — произвольное действительное число, а остальные координаты равны нулю. Таким образом, множество всех кватернионов является расширением множества действительных чисел.

Как уже было сказано, при перемножении кватернионов не имеет место коммутативность. Все остальные естественные правила, имеющие место для действительных и комплексных чисел, сохраняются.

Упражнение 5. Для кватернионов $q_1=2+i+j$ и $q_2=1+2i-k$ выполните действия q_1+q_2, q_1q_2, $q_1^{-1}q_2$ и решите уравнение $q_1z=q_2$.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Когда к телу приложены параллельные силы» предназначена восьмиклассникам, «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» — девятиклассникам, «Абсолютно черное тело» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Когда к телу приложены параллельные силы

Хорошо известно, как найти равнодействующую двух сил, приложенных к материальной *точке* (рис. 1). На векторах, изображающих эти силы, как на сторонах строят параллелограмм; диагональ со стрелкой на конце, проведенная из точки, к которой приложены силы, и есть вектор равнодействующей.

Когда две силы приложены не к материальной точке, а *к телу*, но так, как показано на рисунке 2, то равнодействующая определяется таким же образом. Пользуясь тем, что точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия («Физика 8», § 46), находят точку *C*, в которой пересекаются линии действия обеих сил. Полагая, что силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены именно к этой точке, строят параллелограмм и проводят диагональ. Правда, точка *C* может оказаться и вне тела, но тогда точку приложения равнодействующей можно выбрать в любом месте на линии ее действия. Действительно, какую бы точку мы не выбрали, равнодействующая сила $\vec{F}$ сообщит телу такое же ускорение или вызовет такой же вращающий момент, как и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, вместе взятые.

Если силы параллельны и направлены в одну сторону. Пусть к телу приложены две параллельные сонаправленные силы (рис. 3). Линии действия таких сил нигде не пересекаются, и параллелограмм на них построить нельзя. Тем не менее сложить эти силы и найти их равнодействующую можно.

Нетрудно понять, что равнодействующая направлена параллельно обеим силам и ее модуль равен арифметической сумме модулей складываемых сил. А в какой точке она приложена? Или, другими словами, к какой точке тела надо приложить силу, равную по модулю, но противоположную по направлению равнодействующей, чтобы тело находилось в равновесии?

Чтобы найти точку приложения равнодействующей двух параллельных и одинаково направленных сил, можно воспользоваться правилом моментов («Физика 8», § 48). Проведем прямую, соединяющую точки *A* и *B* (см. рис. 3). Где-то на этой прямой должна, очевидно, находиться и точка приложения равнодействующей. Пусть это будет точка *O*. Допустим, что через эту точку проходит закрепленная ось, перпендикулярная плоскости, содержащей обе складываемые силы (то есть перпендикулярная плоскости рисунка). Если *O* действительно есть точка приложения равнодейст-

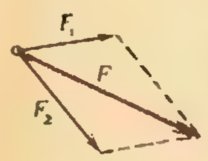


Рис. 1.

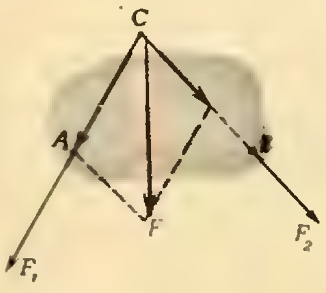


Рис. 2.

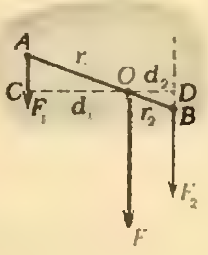


Рис. 3.

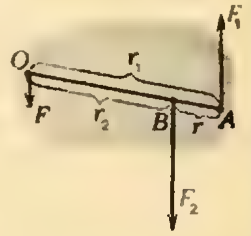


Рис. 4.

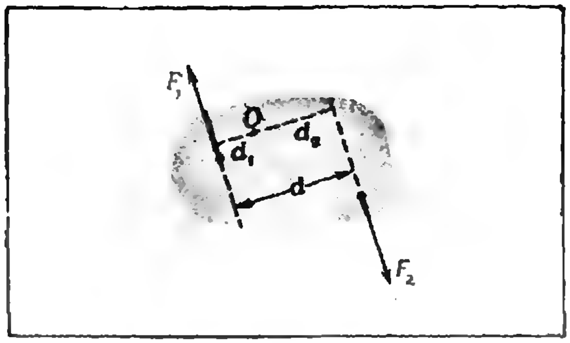


Рис. 5.

вующей, то тело будет находиться в равновесии — равнодействующая уравновешивается силой реакции со стороны оси. С другой стороны, если тело с закрепленной осью находится в равновесии, то алгебраическая сумма моментов сил относительно этой оси должна быть равна нулю. Из рисунка 3 видно, что сила $\vec{F}_2$, будь она единственной, поворачивала бы тело вокруг O по часовой стрелке, то есть ее момент F_2d_2 положительный, а сила $\vec{F}_1$, если бы она была единственной, поворачивала бы тело против часовой стрелки — ее моменту F_1d_1 надо приписать отрицательный знак (здесь d_1 и d_2 — плечи сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$).

Следовательно,

$$F_2d_2 - F_1d_1 = 0, \text{ или } \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Из подобия треугольников AOC и BOD находим, что $d_1/d_2 = r_1/r_2$. Поэтому окончательно получаем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Это значит, что *равнодействующая двух параллельных, одинаково направленных сил приложена к точке, делящей отрезок, соединяющий точки приложения складываемых сил, в отношении, обратном отношению модулей сил.* Ясно, что эта точка лежит ближе к большей из сил.

Если направления параллельных сил противоположны. Приложенные к телу параллельные силы могут быть направлены и в противоположные стороны (рис. 4). Теперь точка приложения равнодействующей $\vec{F}$ не может находиться где-то между точками приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Ведь вокруг любой точки, лежащей между ними, каждая сила поворачивает тело против часовой стрелки, знаки моментов этих сил одинаковы, и их сумма не может быть равна нулю, как это требуется для равновесия.

Легко догадаться, что точка приложения равнодействующей лежит *за* точкой приложения большей силы, как это и показано на рисунке 4. Модуль же равнодействующей равен модулю разности модулей сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

В какой же именно точке приложена равнодействующая? На каком расстоянии r_2 от точки приложения большей силы? Воспользуемся опять правилом моментов:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}, \text{ или } F_2 = F_1\frac{r_1}{r_2}.$$

Вычтем из правой и левой частей последнего равенства величину F_1:

$$F_2 - F_1 = F_1\frac{r_1}{r_2} - F_1 = F_1\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right) = F_1\frac{r_1 - r_2}{r_2},$$

откуда

$$r_2 = \frac{F_1(r_1 - r_2)}{F_2 - F_1} = \frac{F_1 r}{F_2 - F_1}. \qquad (*)$$

Таким образом, *точка приложения равнодействующей двух противоположно направленных параллельных сил расположена тем дальше от точки приложения большей из них, чем меньше разность модулей этих сил.*

Пара сил. Мы видели, что если к телу приложены параллельные силы, одинаково или противоположно направленные, то всегда можно найти модуль и направление равнодействующей этих сил и определить точку ее приложения. Если к этой точке приложить силу, равную равнодействующей по модулю, но противоположную ей по направлению, то тело будет находиться в равновесии — оно не будет двигаться поступательно и не будет вращаться.

Но, оказывается, есть один случай, когда равнодействующую найти нельзя. Так бывает, если к телу приложены *две параллельные, противоположно направленные силы, по модулю равные друг другу.* Про такие силы говорят, что они образуют *пару сил.* Модуль их равнодействующей равен, конечно, нулю, а из формулы (*) видно, что при $F_2 - F_1 = 0$ расстояние r_2 до точки приложения равнодействующей равно бесконечности, то есть что такой точки попросту не существует. И в самом деле, какая же может быть точка приложения равнодействующей, которой нет?

Достаточно, однако, взглянуть на рисунок 5, чтобы понять, что под действием пары сил тело не будет находиться в равновесии — оно будет вращаться. Значит, у пары сил есть некоторый вращающий момент. Но относительно какой оси? Нетрудно показать, что суммарный момент сил, составляющих пару, одинаков для любой оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат обе эти силы (перпендикулярной плоскости рисунка). Действительно, возьмем любую точку O и проведем через нее ось вращения. Момент M_1 силы $\vec{F}_1$ относительно этой оси равен F_1d_1, момент M_2 силы $\vec{F}_2$ относительно этой же оси равен F_2d_2. Суммарный момент M обеих сил равен M_1+M_2:

$$M=F_1d_1+F_2d_2.$$

Так как $F_1=F_2=F$, то

$$M=F(d_1+d_2)=Fd,$$

где d — расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называемое *плечом пары сил*. Значит, *момент пары сил равен произведению модуля одной из сил на плечо пары*. Так и говорят — момент пары сил — и не указывают относительно какой оси.

Как же все-таки «ведет» себя тело, к которому приложена пара сил? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что центр масс тела (о нем говорится в § 44 «Физики 8») движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса тела и к нему приложены все действующие на тело силы (это утверждение называется в физике теоремой о движении центра масс). Но если сумма сил равна нулю, то центр масс не может тронуться с места (если, конечно, он покоился до приложения сил). Когда на тело действует пара сил, сумма сил как раз и равна нулю, и она не может привести в движение центр масс. Тело, однако, вращается. Значит, вращается оно вокруг оси, проходящей через центр масс (ведь все точки на оси вращения находятся в покое). Оси вращения, проходящие через центры масс тел, тем и замечательны, что на них не действуют никакие силы.

О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы

Явление электролиза, известное с конца XVIII — начала XIX веков, особенно подробно было изучено выдающимся английским физиком М. Фарадеем. В 1834 году была опубликована статья Фарадея, в которой рассказывалось о результатах опытов, приведших к установлению закона электролиза. В этой же статье впервые появились термины, предложенные Фарадеем и ставшие теперь общепринятыми. Это — электрод (а также катод и анод), ион (катион и анион), электролит и название самого процесса — электролиз.

Закон электролиза теперь (но не во времена Фарадея) записывается так («Физика 9», § 69):

$$m=\frac{1}{F}\frac{\mathrm{M}}{n}I\Delta t.$$

Здесь m — масса выделившегося на электроде вещества, F — число (постоянная) Фарадея, М — молярная (или атомная) масса вещества, n — его валентность, $I\Delta t$ — заряд, прошедший через электролит.

Заметим, что величина, численно равная отношению M/n, в химии называется *химическим эквивалентом* (так она называлась и при Фарадее, хотя понятия валентности тогда еще не было). Величина эта показывает, какая масса данного вещества вступает в соединение с массой водорода, равной его атомной массе (или замещает эту массу в химических реакциях). Например, для атомарного кислорода относительная атомная масса равна 16, а валентность — 2, так что его химический эквивалент равен 8. Чтобы из кислорода и водорода получилась вода, на каждую единицу массы водорода должно приходиться восемь единиц массы кислорода: 1 кг водорода соединяется с 8 кг кислорода, и в результате получается 9 кг воды.

Физический смысл числа Фарадея. Допустим, что электролиз проводится так, что на электроде выделяется масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту. Тогда из закона электролиза следует, что число Фарадея F численно равно электрическому заряду, переносимому ионами, суммарная масса которых численно равна химическому эквиваленту. Из опытов $F=96500$ Кл/моль.

Если выделившееся вещество одновалентное, его химический эквивалент численно равен массе одного моля, а число ионов, перенесших эту массу, равно числу Авогадро N_A. Если же на электроде выделилось двухвалентное вещество, 96 500 кулонов переносится числом ионов, вдвое меньшим числа Авогадро, и т. д.

Удельный заряд протона и других заряженных частиц. Представим себе, что опыт с прохождением тока через электролит проводится так, что на катоде выделяется водород, причем его масса численно равна химическому эквиваленту. Поскольку водород одновалентен, через электролит пройдет один моль ионов водорода. Число этих ионов равно, конечно, числу Авогадро, а перенесенный ими заряд численно равен постоянной Фарадея. Таким образом, мы можем сказать, что масса иона водорода численно равна отношению химического эквивалента к числу Авогадро, а заряд этого иона численно равен отношению постоянной Фарадея к числу Авогадро. Отсюда, согласно закону электролиза, получаем, что отношение заряда иона водорода к его массе, называемое *удельным зарядом* иона, численно равно числу Фарадея, деленному на атомную массу.

Но ион водорода — это ядро атома водорода. Оно имеет особое название — протон (ядра водорода входят в состав атомных ядер всех остальных химических элементов). В единицах СИ удельный заряд протона равен

$$\frac{q_p}{m_p}=\frac{F/N_A}{M/N_A}=\frac{9{,}65\cdot 10^4\ \text{Кл/моль}}{10^{-3}\ \text{кг/моль}}=$$
$$=9{,}65\cdot 10^7\ \text{Кл/кг}.$$

Почему мы здесь обращаем специальное внимание на удельный заряд протона? Дело в том, что удельный заряд всякой электрически заряженной частицы — одна из ее важнейших характеристик. От нее зависит, например, скорость и ускорение частицы, движущейся в электрическом поле. Приведем два примера.

Пусть некоторая частица с зарядом q и массой m движется в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$, так что на нее действует сила $q\vec{E}$. Напишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}=q\vec{E},$$

откуда для ускорения $\vec{a}$ частицы получаем

$$\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{E}.$$

Мы видим, что ускорение частицы определяется не ее зарядом и не ее массой по отдельности, а отношением q/m, то есть удельным зарядом частицы.

Предположим, что частица, имеющая заряд q и массу m, переместилась в электрическом поле от одной точки к другой, напряжение между которыми равно U. Тогда работа, совершенная полем над частицей, будет равна qU. Если вначале частица покоилась, то за счет этой работы она приобретет кинетическую энергию $mv^2/2$:

$$qU=\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда для скорости частицы получаем

$$v=\sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

— скорость частицы определяется опять-таки ее удельным зарядом.

Абсолютно черное тело

Свет и цвет. Когда мы при дневном (солнечном) свете смотрим на различные тела, окружающие нас, мы видим их окрашенными в различные цвета. Так, трава и листья деревьев — зеленые, цветы — красные или синие, желтые или фиолетовые. Есть также черные, белые, серые тела. Все это не может не вызвать удивления. Казалось бы, все тела освещены одним и тем же светом — светом Солнца. Почему же различны их цвета? Постараемся ответить на этот вопрос.

Будем исходить из того, что свет — это электромагнитная волна, то есть распространяющееся переменное электромагнитное поле. В солнечном свете содержатся волны, в которых электрическое и магнитное поля колеблются с различными частотами.

Всякое же вещество состоит из атомов и молекул, содержащих заряженные частицы, которые взаимодействуют друг с другом. Поскольку частицы заряжены, под действием электрического поля они могут двигаться, а если поле переменное — то они могут совершать колебания, причем каждая частица в теле имеет определенную собственную частоту колебаний.

Эта простая, хотя и не слишком точная, картина позволит нам понять, что происходит при взаимодействии света с веществом.

Когда на тело падает свет, электрическое поле, «принесенное» им, заставляет заряженные частицы в теле совершать вынужденные колебания (поле световой волны переменное!). При этом у некоторых частиц их собственная частота колебаний может совпасть с какой-то частотой колебаний поля световой волны. Тогда, как известно, произойдет явление резонанса — резкого увеличения амплитуды колебаний (о нем говорится в § 9 и 20 «Физики 10»). При резонансе энергия, принесенная волной, передается атомам тела, что в конечном счете, вызывает его нагревание. О свете, частота которого попала в резонанс, говорят, что он поглотился телом.

Но какие-то волны из падающего света не попадают в резонанс. Однако они тоже заставляют колебаться частицы в теле, но колебаться с малой амплитудой. Эти частицы сами становятся источниками так называемых вторичных электромагнитных волн той же частоты. Вторичные волны, складываясь с падающей волной, составляют отраженный или проходящий свет.

Если тело непрозрачное, то поглощение и отражение — вот все, что может произойти с падающим на тело светом: не попавший в резонанс свет отражается, попавший — поглощается. В этом и состоит «секрет» цветности тел. Если, например, из состава падающего солнечного света в резонанс попали колебания, соответствующие красному цвету, то в отраженном свете их не будет. А наш глаз устроен так, что солнечный свет, лишенный своей красной части, вызывает ощущение зеленого цвета. Окраска непрозрачных тел зависит, таким образом, от того, какие частоты падающего света отсутствуют в свете, отраженном телом.

Существуют тела, в которых заряженные частицы имеют так много различных собственных частот колебаний, что каждая или почти каждая частота в падающем свете попадает в резонанс. Тогда весь падающий свет поглощается, и отражаться просто нечему. Такие тела называют черными, то есть телами черного цвета. В действительности черный цвет — это не цвет, а отсутствие всякого цвета.

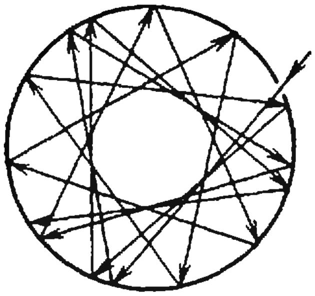
Есть и такие тела, в которых ни одна частота в падающем свете не попадает в резонанс, тогда поглощения нет вовсе, а весь падающий свет отражается. Такие тела называют белыми. Белый цвет — тоже не цвет, это смесь всех цветов.

Излучение света. Известно, что всякое тело может само стать источником света. Это и понятно — ведь во всяком теле есть колеблющиеся заряженные частицы, способные стать источниками испускаемых волн. Но при обычных условиях — при небольших температурах — частоты этих колебаний сравнительно малы, и испускаемые длины волн существенно превосходят длины волн видимого света (инфракрасный свет). При высокой же температуре в теле «включаются» колебания и более высоких частот, и оно начинает испускать световые волны, видимые глазом.

Какой же свет излучает тело, колебания каких частот могут быть «включены» при нагревании? Очевидно, что возникнуть могут только колебания с собственными частотами. При низких температурах число заряженных частиц, имеющих высокие собственные частоты колебаний, мало́, и их излучение незаметно. С повышением температуры число таких частиц возрастает, и становится возможным излучение видимого света.

Связь между излучением и поглощением света. Поглощение и излучение — это противоположные друг другу явления. Однако между ними есть нечто общее.

Поглощать — это значит «брать», излучать — значит «давать». А что «берет» тело, поглощая свет? Очевидно, то, что может взять, то есть свет тех частот, которые равны собственным частотам колебаний его частиц. Что



«дает» тело, излучая свет? То, что оно имеет, то есть свет, соответствующий собственным частотам колебаний. Поэтому между способностью тела излучать свет и способностью его поглощать должна существовать тесная связь. И связь эта простая: тело излучает тем больше, чем сильнее оно поглощает. При этом, естественно, самым ярким излучателем должно быть черное тело, которое поглощает колебания всех частот. Математически эта связь была установлена в 1859 году немецким физиком Густавом Кирхгофом.

Назовем испускательной способностью тела энергию, излучаемую единицей площади его поверхности в единицу времени, и обозначим ее через $E_{\lambda,T}$. Она различна для разных длин волн (λ) и разных температур (T), отсюда индексы λ и T. Поглощательной способностью тела назовем отношение поглощенной телом световой энергии в единицу времени к падающей. Обозначим ее через $A_{\lambda,T}$ — она тоже различна для разных λ и T.

Закон Кирхгофа гласит, что отношение испускательной и поглощательной способностей одинаково для всех тел:

$$\frac{E_{\lambda,T}}{A_{\lambda,T}} = C.$$

Величина C не зависит от природы тел, но зависит от длины волны света и от температуры: $C=f(\lambda, T)$. Согласно закону Кирхгофа, тело, которое при данной температуре лучше поглощает, должно интенсивнее излучать.

Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа справедлив для всех тел. Это значит, что его можно применить и к такому телу, которое поглощает все без исключения длины волн. Такое тело называют абсолютно черным. Для него поглощательная способность равна единице, так что закон Кирхгофа принимает вид

$$E_{\lambda,T} = C = f(\lambda, T).$$

Таким образом, становится ясным смысл функции $f(\lambda, T)$: она равна испускательной способности абсолютно черного тела. Задача нахождения функции $C=f(\lambda, T)$ превратилась в задачу найти зависимость энергии излучения абсолютно черного тела от температуры и длины волны. В конце концов, после двух десятилетий тщетных попыток она была решена. Ее решение, данное немецким физиком-теоретиком Максом Планком, стало началом новой физики — квантовой физики.

Заметим, что абсолютно черных тел в природе не существует. Даже самое черное из всех известных веществ — сажа — поглощает не 100, а 98 % падающего на него света. Поэтому для экспериментального исследования излучения абсолютно черного тела использовалось искусственное устройство.

Оказалось, что свойствами абсолютно черного тела обладает... замкнутая полость с малым отверстием (см. рисунок). В самом деле, когда в отверстие попадает луч света, внутри полости он испытывает множество последовательных отражений, так что шансов выйти из отверстия наружу у него очень мало. (По этой же причине открытое окно в доме кажется темным даже в яркий солнечный день.) Если такое тело нагреть, то излучение, исходящее из отверстия, практически ничем не отличается от излучения абсолютно черного тела.

Хорошей имитацией абсолютно черного тела может служить и труба, один конец которой закрыт. Если трубу нагреть, ее открытый конец светит как абсолютно черное тело. При обычной же температуре он выглядит совершенно черным, как и отверстие в полости.

Математика 8, 9

Публикуемая ниже заметка «Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе» адресована восьмиклассникам. Заметка «О теореме Лагранжа» предназначена для девятиклассников. Естественно, каждая из этих заметок может быть полезной и интересной не только учащимся указанных классов.

Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе

В журнале «Квант» № 8 за 1983 год была помещена заметка С. Р. Сефибекова «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе». Редакция получила ряд писем от читателей, в которых приводятся новые доказательства этой теоремы. Основой настоящей заметки послужили материалы, которые прислал С. Г. Губа. Кроме того, были использованы доказательства, указанные А. В. Аляевым, А. Г. Гольдбергом, В. Н. Дубовым, А. И. Мостовым.

Напомним условие теоремы.

Во всяком треугольнике биссектриса внутреннего угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Иными словами, если в треугольнике ABC проведена биссектриса CD, то $AD:BD=AC:BC$.

Приведем еще семь доказательств этой теоремы, шесть из которых вполне доступны семиклассникам после прохождения темы «Преобразования фигур».

Очевидно, если $AC=BC$, то теорема верна. Поэтому будем считать, что $AC\neq BC$. Пусть, например, $AC>BC$. Тогда биссектриса CD не может быть перпендикулярна к стороне AB, так как в противном случае прямоугольные треугольники CAD и CBD были бы равны по катету и прилежащему острому углу, откуда следовало бы, что $AC=BC$.

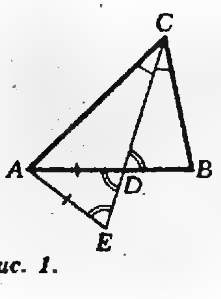


Рис. 1.

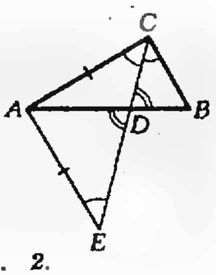


Рис. 2.

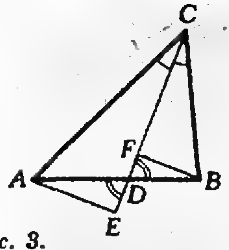


Рис. 3.

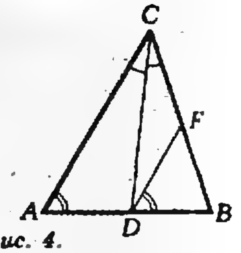


Рис. 4.

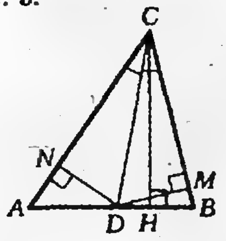


Рис. 5.

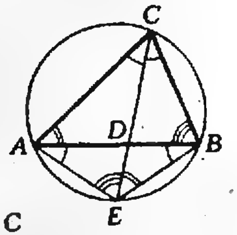


Рис. 6.

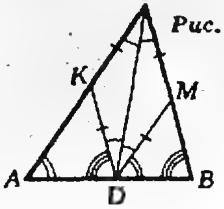


Рис. 7

Первое доказательство. Построим на луче CD точку E, такую, что $AE=AD$ (рис. 1). Тогда $\angle AEC=\angle ADE=\angle CDB$. Следовательно, треугольники ACE и BCD подобны (по двум углам). Это значит, что $AE:BD=AC:BC$. Приняв во внимание, что $AE=AD$, получим $AD:BD=AC:BC$.

Второе доказательство. Построим на луче CD точку E, такую, что $AE=AC$ (рис. 2). Тогда $\angle AED=\angle ACD$, то есть треугольники AED и BCD подобны. Из их подобия имеем $AD:BD=AE:BC$. Поскольку $AE=AC$, то теорема доказана. Вариант построения — провести через точку A прямую, параллельную CB, до пересечения с прямой CD в точке E.

Третье доказательство. Из вершин A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую CD (рис. 3). Из подобия прямоугольных треугольников ADE и BDF получим $AD:BD=AE:BF$. В то же время из подобия прямоугольных треугольников ACE и BCF будем иметь $AC:BC=AE:BF$. В полученных пропорциях правые отношения равны, поэтому равны и левые, то есть $AD:BD=AC:BC$.

Четвертое доказательство. Проведем через точку D прямую, параллельную стороне AC (рис. 4). Тогда по обобщенной теореме Фалеса

Рис. 8.

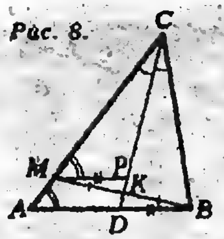


Рис. 9.

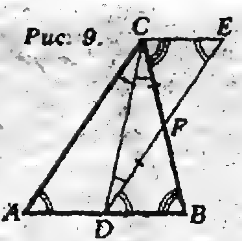


Рис. 10.

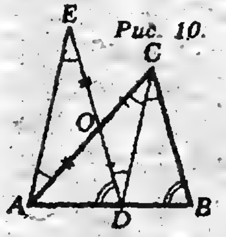
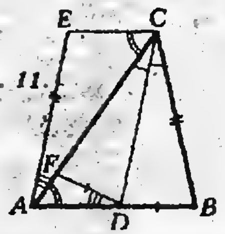


Рис. 11.



$AD:BD=CF:FB$. Из подобия треугольников ABC и DBF имеем $AC:CB=FD:FB$, и так как $CF=FD$, то $AC:BC=CF:FB$. Следовательно, $AD:BD=AC:BC$ (оба отношения равны $CF:FB$).

Пятое доказательство. Площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как соответствующие им основания. Поэтому $S_{CDA}:S_{CDB}=AD:DB$ (рис. 5). С другой стороны, по свойству биссектрисы, высóты в треугольниках CDA и CDB, опущенные из вершины D, равны. Следовательно, $S_{CDA}:S_{CDB}=AC:BC$. Итак, $AD:BD=AC:BC=S_{CDA}:S_{CDB}$.

Шестое доказательство. Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продолжим CD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 6). Из подобия треугольников ACE и DCB получаем $AC:AE=CD:DB$, то есть $AC \cdot DB=AE \cdot CD$. Из подобия треугольников BCE и DCA имеем $BC:BE=CD:AD$, то есть $BC\times AD=BE \cdot CD$. Заметив, что $AE=BE$, получим $AC \cdot DB=BC \cdot AD$, откуда $AD:BD=AC:BC$.

Седьмое доказательство. Проведем через точку D две прямые, одна из которых параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке M, а другая — параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K (рис. 7). Легко доказать, что четырехугольник $KCMD$ — ромб. Из подобия треугольников AKD и DMB имеем $AD:BD=DK:BM$. Так как $DK=DM$, то $AD:BD=DM:BM$. Заменив в полученной пропорции отношение $DM:BM$ равным ему отношением $AC:BC$ (на основании подобия треугольников ABC и DBM), получим требуемую пропорцию.

С помощью построений, изображенных на рисунках 8—11, читателю предоставляется возможность получить еще четыре доказательства этой теоремы.

В заключение наметим еще два доказательства теоремы, предназначенные для читателей, знакомых с векторами и геометрическими преобразованиями.

1. Для любой точки D отрезка AB $\vec{CD}=\lambda\vec{CA}+(1-\lambda)\vec{CB}$, где $\lambda=DB:AB$; $1-\lambda=AD:AB$. Действительно, $\vec{CD}=\vec{CB}+\vec{BD}=\vec{CB}+\lambda\vec{BA}=\vec{CB}+\lambda(\vec{CA}-\vec{CB})=\lambda\vec{CA}+(1-\lambda)\vec{CB}$.

В нашем случае вектор $\vec{CD}$ параллелен вектору $(1/CA)\cdot\vec{CA}+(1/CB)\vec{CB}$ (см. рис. 7) и поэтому $(1/CA):(1/CB)=\lambda:(1-\lambda)$, откуда $AD:DB=CA:CB$.

2. Выполним последовательно симметрию относительно точки D, гомотетии $H_D^{BD/AD}$ и $H_C^{AC/BC}$, а затем симметрию относительно биссектрисы CD (через H_O^k обозначена гомотетия с центром O и коэффициентом k). В результате точка A останется на месте, а прямая CD перейдет в себя, в частности, расстояние между ними сохранится. Следовательно, коэффициент итогового преобразования подобия равен 1, то есть $AC/BC\cdot BD/AD=1$.

Б. И.

О теореме Лагранжа

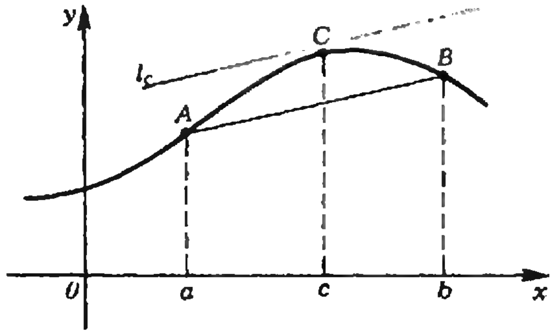
Прежде всего напомним формулировку теоремы Лагранжа.

Пусть функция f дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда между любыми двумя точками a и b этого промежутка найдется такая точка c, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (1)$$

Эта теорема допускает простую геометрическую интерпретацию. Возьмем на графике функции f две точки $A=M(a;\ f(a))$ и $B=M(b;\ f(b))$ (см. рисунок). Угловой коэффициент прямой AB равен $(f(b)-f(a))/(b-a)$, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x=c$ равен $f'(c)$. Поэтому, записав

(Окончание см. на с. 36)



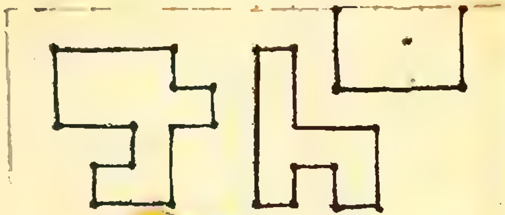
Квант для младших школьников

Задачи

1. «Николай Иванович,— спросил Вадик у знакомого продавца магазина,— сколько стоит блокнот?» «16 блокнотов стоят столько же рублей, сколько блокнотов можно купить на 1 рубль»,— с улыбкой ответил продавец. Сколько же стоит один блокнот?

2. В последнее время я много хожу на лыжах. Правда, позавчера я прошел на 3 км больше, чем вчера, а вчера на 40 км меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько километров я прошел на лыжах сегодня?

3. «Нарисуйте в тетрадях какой-нибудь многоугольник, стороны которого проходят по линиям сетки,— сказал учитель.— Так. Теперь найдите число его сторон». «12» — сказал Вова. «4» — сказал Петя. «10» — сказал Андрей. У них были нарисованы многоугольники, изображенные на рисунке. Интересно, что у остальных школьников тоже оказались многоугольники с четным числом сторон. Почему?



4. Какая физическая ошибка допущена в следующем стихотворении:

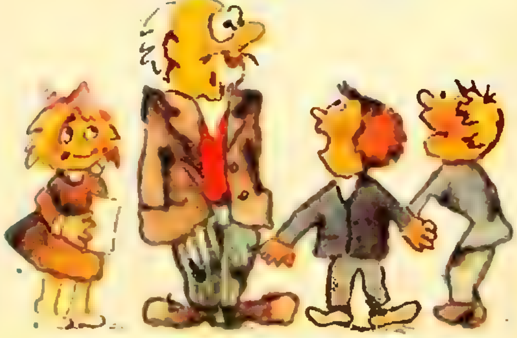
«Она жила и по стеклу текла,
Но вдруг ее морозом оковало,
И неподвижной льдинкой капля
стала,
А в мире поубавилось тепла.»?

Эти задачи нам предложили *С. Р. Сефибеков, А. А. Панов, Н. К. Антонович, А. П. Савин.*

Бег по кругу и длинный рассказ

Л. КЭРРОЛЛ

В 7-м и 8-м номерах «Кванта» прошлого года были опубликованы первые две главы книги Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес», снабженные вопросами и задачами, придуманными в редакции. Судя по многочисленным письмам читателей, этот материал понравился. Поэтому мы продолжаем публикацию этой замечательной книги с новыми вопросами и задачами (см. следующий разворот журнала). Читателей, у которых есть эта книга, мы просим присылать задачи и вопросы к последующим главам, начиная с шестой.



БЕГ ПО КРУГУ И ДЛИННЫЙ РАССКАЗ

Общество, собравшееся на берегу, имело весьма неприглядный вид: перья у птиц были взъерошены, шерстка у зверьков промокла насквозь. Вода текла с них ручьями, всем было холодно и неуютно.

Прежде всего, конечно, нужно было решать, как поскорее высохнуть. Стали держать совет. Не прошло и нескольких минут, как Алиса уже чувствовала себя так, словно знала их всех целую жизнь. Она даже поспорила с Попугайчиком Лори, который надулся и только твердил:

— Я старше, чем ты, и лучше знаю, что к чему!

Алиса потребовала, чтобы он сказал, сколько ему лет, но Попугайчик решительно отказался. На том спор и кончился.

Наконец, Мышь, к которой все относились с почтением, закричала:

— Садитесь, все садитесь и слушайте. Вы у меня вмиг высохнете!

Алиса не отры-

высушит! Тишина! «Вильгельм Завоеватель с благословения папы римского быстро добился полного подчинения англосаксов, которые нуждались в твердой власти и видели на своем веку немало несправедливых захватов трона и земель. Эдвин, граф Мерсии, и Моркар, граф Нортумбрии...» — Д-да! — сказал Попугайчик и содрогнулся.

— Простите,— спросила, нахмурясь, Мышь с чрезмерной учтивостью, — вы, кажется, что-то сказали?

— Нет-нет,— поспешно ответил Попугайчик.— Значит, мне показалось,— заметила Мышь.— Итак, я продолжаю. «Эдвин, граф Мерсии, и Моркар, граф Нортумбрии, поддержали Вильгельма Завоевателя, и даже Стиганд, архиепископ Кентерберийский, нашел это благоразумным...»

— Что он нашел? — спросил Робин Гусь.— ...нашел это,— отвечала Мышь.— Ты что, не знаешь, что такое «это?» — Еще бы мне не знать, — отвечал Робин Гусь.— Когда я что-нибудь нахожу, это обычно бывает лягушка или червяк. Вопрос в том, что же нашел архиепископ? Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — «...нашел

— Я хотел сказать, — обиженно проговорил Додо, — что нужно устроить Бег по кругу. Тогда мы вмиг высохнем! — А что это такое? — спросила Алиса. Сказать по правде, ее это не очень интересовало, но Додо многозначительно молчал, видно, ждал вопроса. И так как все тоже молчали, пришлось спрашивать Алисе.— Чем объяснять,— сказал Додо,— лучше показать! (Может, и ты захочешь как-нибудь зимой сыграть в эту игру? В таком случае я расскажу тебе, что делал Додо.) Сначала он нарисовал на земле круг. Правда, круг вышел не очень-то ровный, но Додо сказал:

“ПРАВИЛ
ЬНОСТЬФ
ОРМЫ-
НЕСУЩ

Задача 1. Сколько лет попугайчику, если в этом году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения?

Задача 3. Как видите, это старая и мудрая Мышь. Сколько ей лет, если она моложе Додо во столько же раз, во сколько она старше орленка Эда, причем Додо и Мыши вместе 84 года, а Эду меньше 7?

Задача 2. Сумма возрастов семи людей 100 лет. Возрасты любых двух из них различны. Найдутся ли среди них трое, сумма возрастов которых не меньше 50 лет?

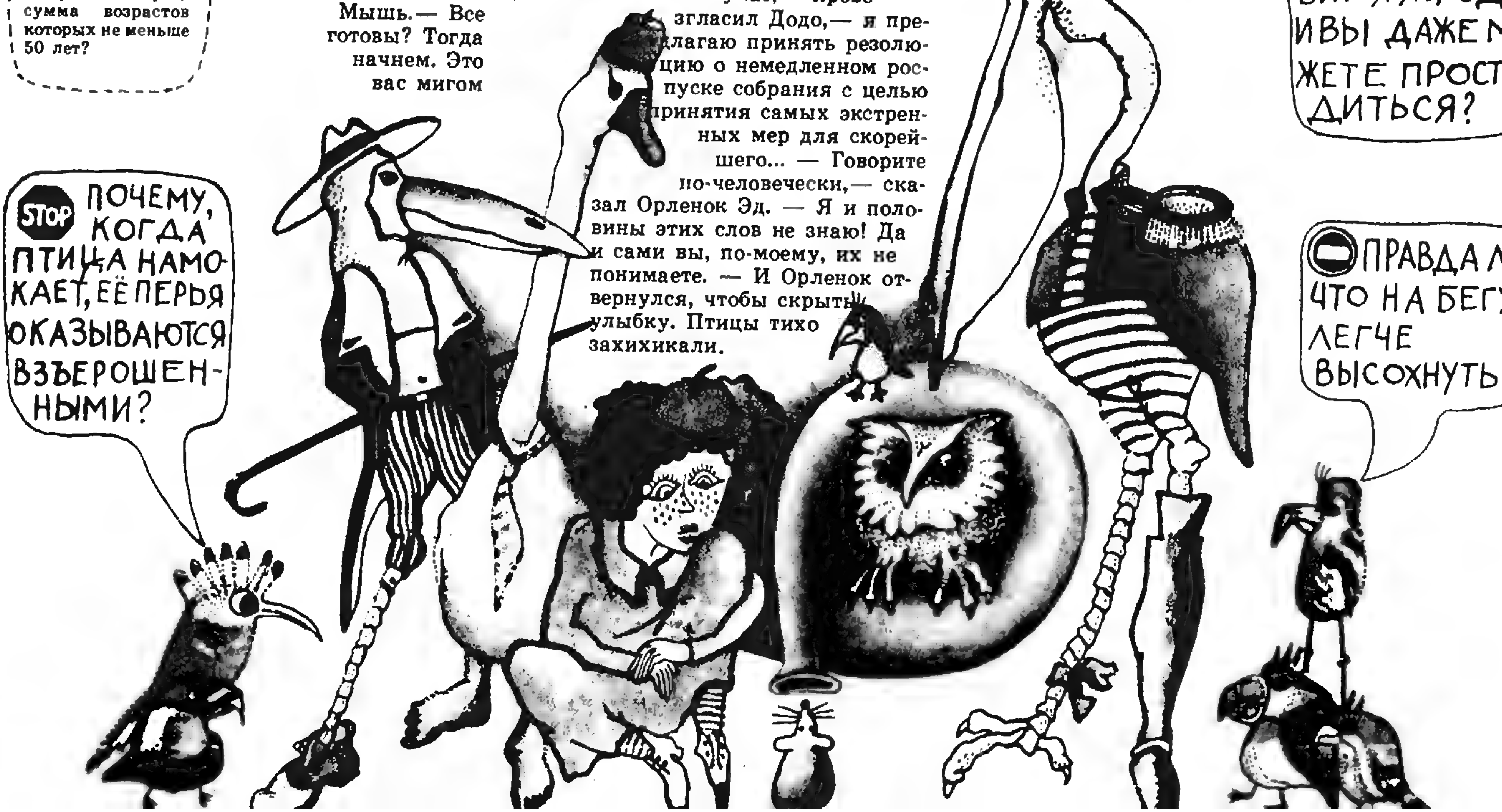
вала от нее глаз, она знала, что если тут же не высохнет, ей грозит сильная простуда.

— Гхе-гхе! — откашлялась с важным видом Мышь.— Все готовы? Тогда начнем. Это вас мигом

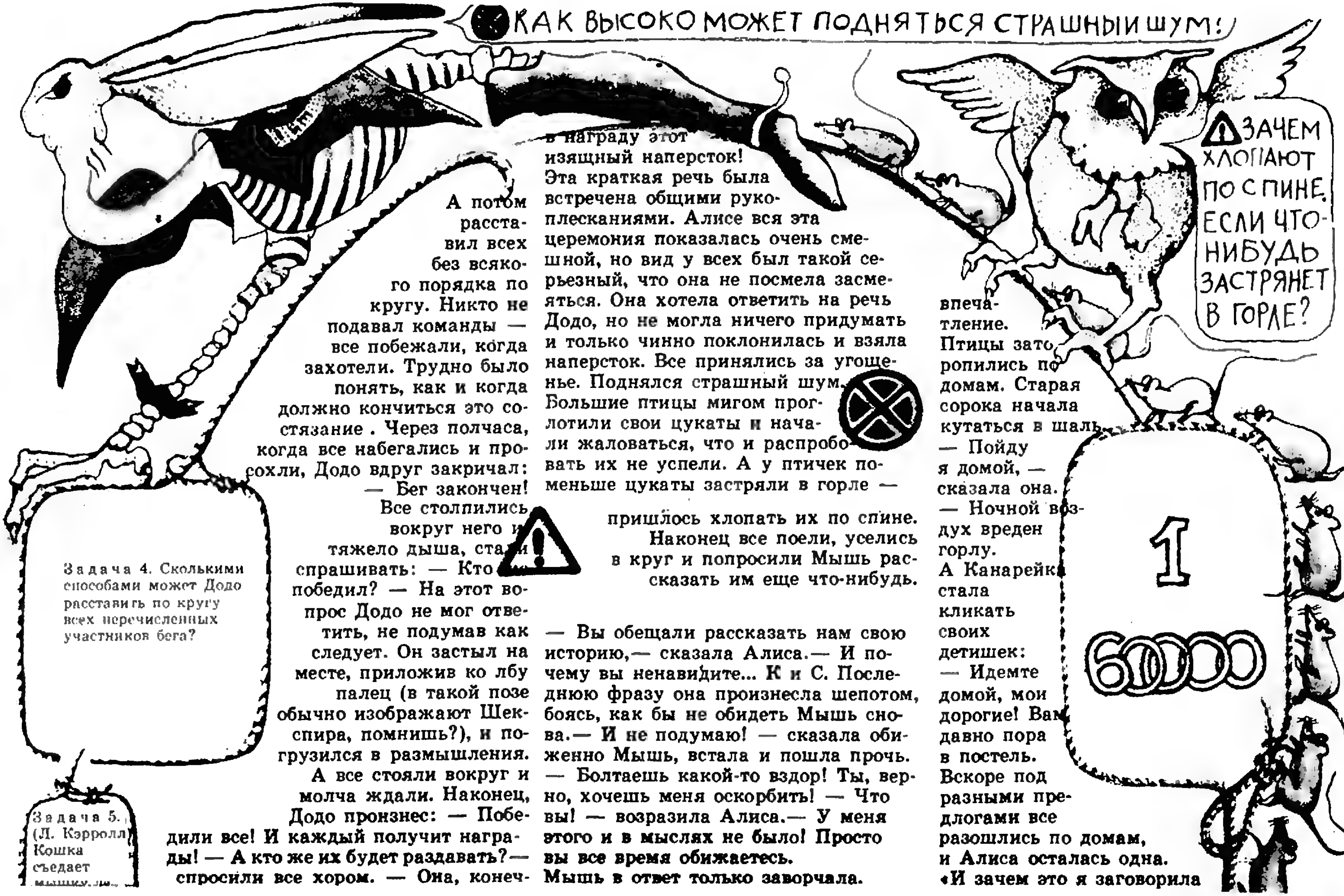
это благоразумным и решил вместе с Эдгаром Этиленгом отправиться к Вильгельму и предложить ему корону. Ну как, милочка, подсыхаешь? — спросила она Алису.

— С меня так и льет,— ответила Алиса печально.— Я и не думаю сохнуть! — В таком случае,— провозгласил Додо,— я предлагаю принять резолюцию о немедленном роспуске собрания с целью принятия самых экстренных мер для скорейшего... — Говорите по-человечески,— сказал Орленок Эд. — Я и половины этих слов не знаю! Да и сами вы, по-моему, их не понимаете. — И Орленок отвернулся, чтобы скрыть улыбку. Птицы тихо захихикали.

ЕСТВ
ЕННА ”


STOP ПОЧЕМУ, КОГДА ПТИЦА НАМОКАЕТ, ЕЁ ПЕРЬЯ ОКАЗЫВАЮТСЯ ВЗЪЕРОШЕННЫМИ?
А ПОЧЕМУ КОГДА ВА ОДЕЖДА НА КАЕТ, СТАНО ВИТСЯ ХОЛОД И ВЫ ДАЖЕ Н ЖЕТЕ ПРОСТ ДИТЬСЯ?
ПРАВДА Л ЧТО НА БЕГ ЛЕГЧЕ ВЫСОХНУТЬ

КАК ВЫСОКО МОЖЕТ ПОДНЯТЬСЯ СТРАШНЫЙ ШУМ!


ЗАЧЕМ ХЛОПАЮТ ПО СПИНЕ, ЕСЛИ ЧТО-НИБУДЬ ЗАСТРЯНЕТ В ГОРЛЕ?
1
60000

А потом расставил всех без всякого порядка по кругу. Никто не подавал команды — все побежали, когда захотели. Трудно было понять, как и когда должно кончиться это состязание. Через полчаса, когда все набегались и просохли, Додо вдруг закричал:

— Бег закончен!

Все столпились вокруг него и, тяжело дыша, стали спрашивать: — Кто победил? — На этот вопрос Додо не мог ответить, не подумав как следует. Он застыл на месте, приложив ко лбу палец (в такой позе обычно изображают Шекспира, помнишь?), и погрузился в размышления.

А все стояли вокруг и молча ждали. Наконец, Додо произнес: — Победили все! И каждый получит награды! — А кто же их будет раздавать? — спросили все хором. — Она, конеч- в награду этот изящный наперсток!

Эта краткая речь была встречена общими рукоплесканиями. Алисе вся эта церемония показалась очень смешной, но вид у всех был такой серьезный, что она не посмела засмеяться. Она хотела ответить на речь Додо, но не могла ничего придумать и только чинно поклонилась и взяла наперсток. Все принялись за угощенье. Поднялся страшный шум. Большие птицы мигом проглотили свои цукаты и начали жаловаться, что и распробовать их не успели. А у птичек поменьше цукаты застряли в горле — пришлось хлопать их по спине.

Наконец все поели, уселись в круг и попросили Мышь рассказать им еще что-нибудь.

— Вы обещали рассказать нам свою историю,— сказала Алиса.— И почему вы ненавидите... К и С. Последнюю фразу она произнесла шепотом, боясь, как бы не обидеть Мышь снова.— И не подумаю! — сказала обиженно Мышь, встала и пошла прочь. — Болтаешь какой-то вздор! Ты, верно, хочешь меня оскорбить! — Что вы! — возразила Алиса.— У меня этого и в мыслях не было! Просто вы все время обижаетесь. Мышь в ответ только заворчала.

впечатление. Птицы заторопились по домам. Старая сорока начала кутаться в шаль. — Пойду я домой, — сказала она. — Ночной воздух вреден горлу. А Канарейка стала кликать своих детишек: — Идемте домой, мои дорогие! Вам давно пора в постель. Вскоре под разными предлогами все разошлись по домам, и Алиса осталась одна. «И зачем это я заговорила

Задача 4. Сколькими способами может Додо расставить по кругу всех перечисленных участников бега?

Задача 5. (Л. Кэррол) Кошка съедает

мышку за

1 минуту. За сколько времени она съест 60 000 мышей?

но,— ответил Додо, ткнув пальцем в Алису. Все окружили Алису и наперебой закричали: — Награды! Награды! Раздавай награды! — Алиса растерялась. В замешательстве она сунула руку в карман и вытащила оттуда пакетик цукатов. (К счастью, слезы их не размочили.) Она раздала их собравшимся — каждому по цукату, только-только хватило.

— Но она ведь тоже заслужила награду,— сказала Мышь.— Конечно, — подхватил важно Додо. И, повернувшись к Алисе, спросил:

— У тебя осталось что-нибудь в кармане? — Нет,— отвечала Алиса грустно.— Только наперсток.— Давай его сюда! — приказал Додо. — Мы просим тебя принять

— Прошу вас, не уходите! — крикнула ей вслед Алиса. — Доскажите нам вашу историю! — И все хором поддержали ее: — Да-да, не уходите! Но Мышь только мотнула нетерпеливо головой и побежала быстрее.

— Как жаль, что она не пожелала остаться,— вздохнул Попугайчик Лори, как только она скрылась из виду. А старая Медуза сказала своей дочери: — Ах, дорогая, пусть это послужит тебе уроком. Нужно всегда держать себя в руках!

— Попридержите-ка лучше язык, маменька,— отвечала юная Медуза с легким раздражением. — Не вам об этом говорить. Вы даже устрицу выведете из терпения! — Вот бы сюда нашу Дину!

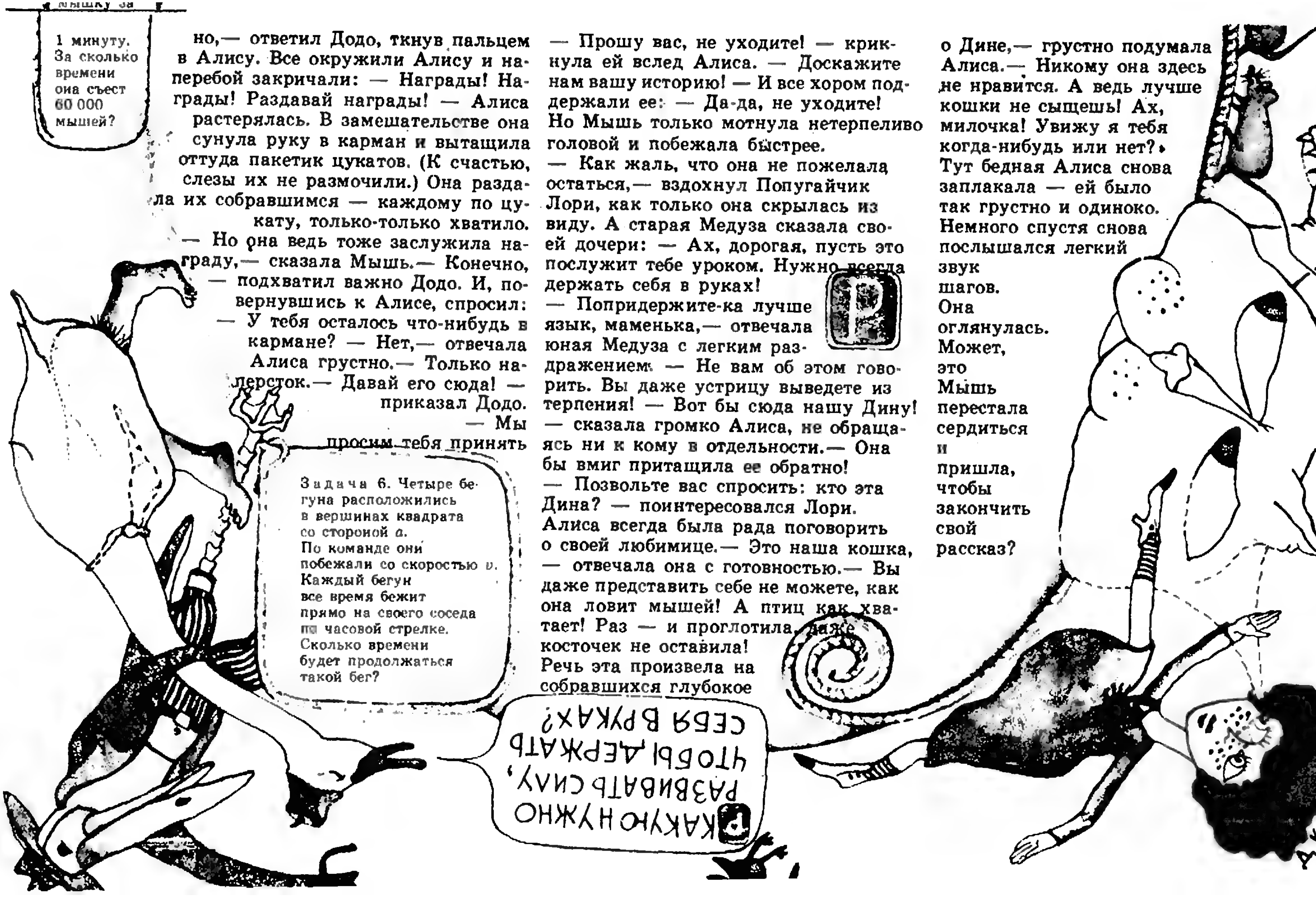
— сказала громко Алиса, не обращаясь ни к кому в отдельности.— Она бы вмиг притащила ее обратно!

— Позвольте вас спросить: кто эта Дина? — поинтересовался Лори. Алиса всегда была рада поговорить о своей любимице.— Это наша кошка, — отвечала она с готовностью.— Вы даже представить себе не можете, как она ловит мышей! А птиц как хватает! Раз — и проглотила, даже косточек не оставила!

Речь эта произвела на собравшихся глубокое

о Дине,— грустно подумала Алиса.— Никому она здесь не нравится. А ведь лучше кошки не сыщешь! Ах, милочка! Увижу я тебя когда-нибудь или нет?» Тут бедная Алиса снова заплакала — ей было так грустно и одиноко. Немного спустя снова послышался легкий звук шагов. Она оглянулась. Может, это Мышь перестала сердиться и пришла, чтобы закончить свой рассказ?

Задача 6. Четыре бегуна расположились в вершинах квадрата со стороной a. По команде они побежали со скоростью v. Каждый бегун все время бежит прямо на своего соседа по часовой стрелке. Сколько времени будет продолжаться такой бег?


Р КАКУЮ НУЖНО РАЗВИВАТЬ СИЛУ, ЧТОБЫ ДЕРЖАТЬ СЕБЯ В РУКАХ?

О теореме Лагранжа

(Начало см. на с. 30)

равенство (1) в виде $(f(b)-f(a))/(b-a)=f'(c)$, мы получим геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа: существует такая точка c промежутка $]a;\ b[$, что касательная к графику функции f в точке с абсциссой $x=c$ параллельна прямой AB.

Точек $x=c$, для которых выполнено равенство (1), может быть и более одной. В этом вы можете убедиться, выполнив следующее упражнение.

1. Найдите все значения $x=c$, при которых для функции $f(x)=(x-1)^3$, $a=0$, $b=2$, выполняется равенство (1). (Ответ: $c=1-1/\sqrt{3}$ и $c=1+1/\sqrt{3}$.)

Мы хотим познакомить вас с механической интерпретацией теоремы Лагранжа. Пусть материальная точка движется по прямой и в момент t имеет координату $s(t)$. Тогда ее средняя скорость на промежутке времени от t_1 до t_2 будет равна $(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1)$. Хорошо известно, что мгновенная скорость в момент времени t равна $s'(t)$. Вполне понятно, что в некоторые моменты времени мгновенная скорость будет больше средней скорости, в другие — меньше. Однако обязательно найдется такой момент времени (и может быть не один!), что средняя скорость будет равна мгновенной. Следовательно, для некоторого $t_0\in\ ]t_1;\ t_2[$

$$(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1)=s'(t_0),$$

то есть $s(t_2)-s(t_1)=s'(t_0)(t_2-t_1)$. (Сравните эту формулу с формулой (1).)

Отметим также, что в случае, когда f не имеет производной в какой-либо точке, лежащей между a и b, применять теорему Лагранжа нельзя: рассмотрите в качестве примера функцию $f(x)=|x^2-1|$, $a=1/2$, $b=\sqrt{7}/2$.

Упражнения

2. Для каких промежутков можно применять теорему Лагранжа к функции f, если: а) $f(x)=x$; б) $f(x)=[x]$; в) $f(x)=|x|$?

3. Материальная точка движется по прямой по закону $s(t)=t^3$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени ее мгновенная скорость равна средней скорости на промежутке от $t_1=13$ с до $t_2=46$ с?

4. В каких точках для функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=px^2+qx+r$ для промежутка $[a;\ b]$ выполнено равенство (1)?

Как объяснить геометрически совпадение результатов для обеих функций?

Л. Н. Смоляков

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. В драмкружке число мальчиков составляет 80 % от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек в этом кружке от числа мальчиков?

2. Какое из чисел больше: $\sqrt{1986}+\sqrt{1984}$ или $2\sqrt{1985}$?

3. Разложите x^5+x+1 на множители.

4. Длина боковой стороны трапеции равна a, а расстояние до нее от середины противоположной стороны равно b. Найдите площадь трапеции.

5. Докажите, что в любом треугольнике $R\geqslant 2r$, где R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.

Девятый класс

6. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{1986}+\sqrt[3]{1984}$ или $2\sqrt[3]{1985}$?

7. Каким является треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным), если:

а) его высоты равны 3, 4 и 5;

б) его медианы равны 3, 4 и 5?

8. Найдите множество значений функции (без использования математического анализа):

а) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

9. Найдите $f'(2)$, если

а) $f(x)=(x-2)^2g(x)$, где $g(x)$ — произвольная дифференцируемая при $x=2$ функция;

б) $f(x)=(x-2)^2g(x)$, где $g(x)$ — произвольная непрерывная при $x=2$ функция;

в) $f(x)=(x-2)\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x}-2}+(x-2)^2\times\right.$ $\left.\times\sqrt[7]{x^5+\sqrt[3]{x}}\right)$.

10. Докажите, что любой треугольник можно спроектировать в правильный при помощи: а) параллельной проекции; б)* ортогональной проекции.

Десятый класс

11. Площадь основания пирамиды равна 1. Проведена плоскость, параллельная основанию пирамиды и делящая ее на две части равного объема. Найдите площадь сечения.

12. Сравните числа: $2^{\sqrt{\log_2 x}}$ и $x^{\sqrt{\log_x 2}}$ $(x>1)$.

13. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

14. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполняется неравенство $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

15. а) В тетраэдре проведены 4 отрезка, каждый из которых соединяет вершину с точкой пересечения медиан противолежащей грани. Докажите, что все 4 отрезка пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершины.

б) Докажите, что в любом тетраэдре $R\geqslant 3r$, где R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной сфер

Публикацию подготовил Б. М. Ивлев

задачник кванта

Задачи

M906—M910; Ф918—Ф922

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M906, M907» или «Ф918». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M906. а) Докажите, что при любом натуральном a уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y.

б) Найдите число натуральных решений этого уравнения при $a=1985$.

М. В. Славинский

M907. Про треугольник ABC с длинами сторон $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ известно, что $3\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ$. Докажите, что $a^2+bc-c^2=0$.

Т. А. Джортменадзе

M908. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P, и через нее проводятся прямые, параллельные BC и AC, до пересечения со сторонами AC и BC соответственно в точках M и N. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?

Решите эту задачу а) для треугольника с прямым углом C; б)* для произвольного треугольника ABC.

Э. Г. Готман

M909. а) Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 4 различных членов, содержащая только степени натуральных чисел n^k ($k\geqslant 2$).

Существует ли такая прогрессия из

б) любого конечного числа,

в) бесконечного числа членов?

Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая

г) ни одной степени натурального числа,

д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

Р. Н. Азизян, В. Толстых, А. В. Аляев

M910. На сторонах правильного шестиугольника взяты точки $A_1, A_2, \ldots, A_6$ (рис. 1). Известно, что три попарно не смежные стороны шестиугольника $A_1\ldots A_6$ (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6) определяют треугольник KLM, вершины которого лежат на продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трех других сторон шестиугольника $A_1\ldots A_6$.

С. Ю. Оревков

Ф918. Пара одинаковых грузиков A и B, связанных невесомой нитью длины l, начинает соскальзывать с гладкого стола высоты l, причем в начальный момент грузик B находится на высоте $h=2l/3$ от пола (рис. 2). Достигнув пола, грузик B прилипает к нему; грузик A в этот момент слетает со стола. На какой высоте над уровнем пола будет грузик A, когда нить вновь окажется натянутой?

Г. Л. Коткин

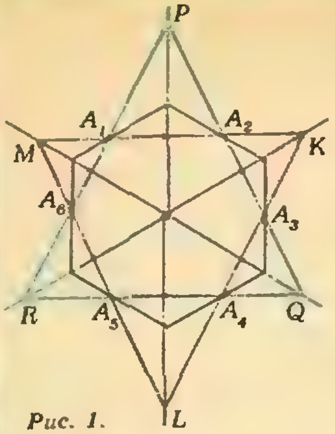


Рис. 1.

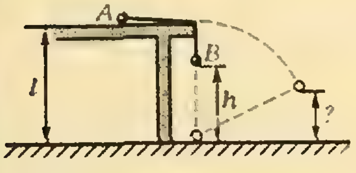


Рис. 2.

Ф919. На рисунке 3 показано долевое сечение прибора, используемого в качестве эталона длины. Центральный стержень C и внешняя оболочка A прибора сделаны из материала с коэффициентом теплового расширения α_1; их длины при $t_1=20$ °C одинаковы и равны l. Внутренняя труба B сделана из материала с коэффициентом теплового расширения α_2. Какой должна быть длина внутренней трубы при $t_1=20$ °C, чтобы при изменении температуры полная длина эталона $|CD|$ не менялась?

А. П. Ершов

Ф920. Через трубку переменного сечения продувают воздух. Входное отверстие трубки имеет площадь S_1, выходное — S_2. На входе скорость воздуха v_1, температура — T_1, давление — p_1; на выходе температура воздуха T_2, давление — p_2. Какова скорость воздуха на выходе?

Г. Л. Коткин

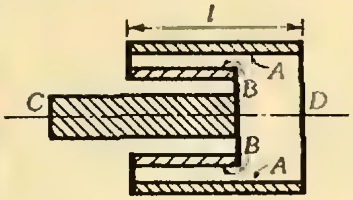


Рис. 3.

Ф921. Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U. Пластины конденсатора имеют площадь S каждая, расстояние между пластинами равно d_1. К одной пластине прижата металлическая пластинка площади S и толщины d_2 (рис. 4), имеющая массу m. Пластинку отпускают. С какой скоростью она ударится о другую пластину конденсатора? Влиянием силы тяжести пренебречь.

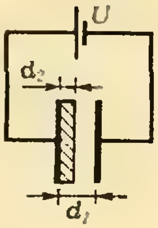


Рис. 4.

Ф922. Фотографируя муравья с близкого расстояния, экспериментатор использовал удлинительное кольцо, которое увеличило расстояние от пленки до объектива на $\Delta l=7{,}5$ мм. Резкое изображение муравья получилось в том случае, когда на шкале объектива было установлено расстояние $b=1{,}05$ м (на шкале указываются значения расстояний от предмета до объектива без использования удлинительных колец). Фокусное расстояние объектива $F=50$ мм. На каком расстоянии от объектива находился муравей? Считать объектив тонкой линзой.

А. П. Ершов

Problems

M906—M910; P918—P922

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement

M906. a) Prove that for any positive integer a the equation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

has at least three positive integer solutions (x, y).
b) Find the number of positive integer solutions for $a=1985$.

M. V. Slavinski

of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M907. In triangle ABC we know the sides $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ and the relation $3\hat{A}+2\hat{B}=180°$. Prove that $a^2+bc-c^2=0$.

T. A. Djortmenadze

M908. Lines parallel to the sides BC and AC of triangle ABC passing through the point P on side AB intersect the sides AC and BC respectively at points M and N. For what choice of P will MN be of least length?
Solve this problem a) for triangles with right angle C; b)* for arbitrary triangles ABC.

E. G. Gotman

M909. a) Prove that there axists a (non-constant) four term arithmetical progression consisting of powers of positive integers $n^k (k \geqslant 2)$.
Does such a progression b) of arbitrary finite length, c) of infinite length exist?
Does there exist an infinite arithmetical progression not containing d) any power of a positive integer, e) any number all of whose digits are the same?

R. N. Azizian, V. Tolstykh, A. V. Aliaev

M910. The points $A_1, A_2, ..., A_6$ are chosen on the six sides of a regular hexagon (Fig. 1). It is known that three non-adjacent sides A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 of the hexagon $A_1A_2...A_6$ determine the triangle KLM, whose vertices lie on the extensions of the diagonals of the regular hexagon. Prove that the same is true of the three other sides of the hexagon $A_1 A_2...A_6$.

S. Yu. Orevkov

P918. A pair of identical weights A and B, tied together by a weightless string of length l, begin sliding off a smooth table of height l; at the initial moment the altitude of the weight B above floor level is $h=2l/3$ (Fig. 2). Having reached the floor, the weight B stays stuck to it; at that moment the weight A flies off the table. At what altitude of the weight A above floor level will the string become stretched again?

G. L. Kotkin

P919. Figure 3 shows a lengthwise section of a device used as an etalon of length. The central rod C and the outer envelope A of the device are made out of material whose heat expansion index is α_1; their lengths at $t_1=20$ °C are the same, equalling l. The inner pipe B is made out of material whose heat expansion index is α_2. What must the length of the inner pipe at 20 °C be in order that the etalon's total length remain the same when the temperature changes?

A. P. Ershov

P920. Air is blown through a pipe of variable section from left to right. The section area at the left extremity is S_1, at the right it is S_2. At the left extremity the air velocity is v_1, its temperature is T_1 and its pressure is p_1; at the right extremity the air temperature is T_2, the pressure is p_2. What is the air velocity at the right extremity?

G. L. Kotkin

P921. A flat capicitor is connected to a source of tension U. The capacitor's plates are of area S each, the distance between them is d_1. A metal plate of area S, mass m and thickness d_2 is pressed against one of the capacitor's plates (Fig. 4). Then the metal plate is released. With what velocity will it hit the capacitor's other plate?

P922. In order to getaclose up of an ant, a photographer added a cylindrical extension to his camera, increasing the distance between the film and the lens by $\Delta l=7.5$ mm. *A well focused picture of the ant* was obtained when the distance reading on the camera was $b=1.05$ m (the distance reading does not take the extension into account). The focal distance of the lens is $F=50$ mm. What was the actual distance between the lens and the ant? The lens may be assumed thin.

A. P. Ershov

Решения задач

M886 — M890; Ф898 — Ф902

M886. *Можно ли в $4n-4$ клеток, расположенных по периметру квадрата $n\times n$ клеток, расставить $4n-4$ последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали, равнялись одному и тому же числу s? Решите задачу для n, равного а) 3, б) 4, в) 5, г) 1985. Если можно, найдите допустимые значения s.*

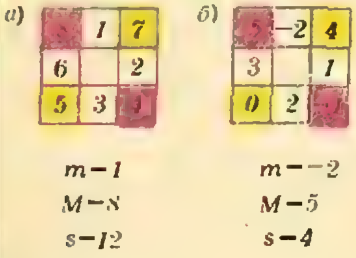


Рис. 1.

Ответ: а) можно (рис. 1); s может равняться ±41, ±12; б) нельзя; в) можно (рис. 2); $s=\pm8$, ±24; г) можно; $s=\pm3968$, ±11904.

Задача сводится к тому, чтобы разбить некоторый набор из $4n-4$ последовательных целых чисел на $n-2$ четверки и еще 2 пары чисел так, чтобы суммы чисел во всех четверках и парах были одинаковы и равны s. Обозначим через c сумму двух крайних из $4n-4$ таких чисел — наименьшего m и наибольшего M. (Для дальнейшего заметим, что $M=m+4n-5$, то есть $c=2m+4n-5$ и $m=(c+5)/2-2n$, $M=(c-5)/2+2n$.) Разумеется, c всегда нечетно. Сумма всех $4n-4$ чисел равна $(2n-2)c$, поэтому, если требуемое разбиение возможно, должно выполняться равенство

$$ns=2(n-1)c. \qquad (1)$$

Это необходимое условие позволяет сразу исключить случай, когда n делится на 4, в частности, $n=4$ (пункт б) задачи): при таких n разбиения не существует, поскольку правая часть (1) не делится на 4, а левая — делится.

Для нечетного n, к которому относится все дальнейшее, условие (1) также дает сильные ограничения: поскольку n и $n-1$ взаимно просты, а n и c нечетны, c делится на n, так что при некотором нечетном r должны выполняться равенства

$$c=nr, \quad s=2(n-1)r. \qquad (2)$$

На рисунке 3 показано, как можно построить нужные разбиения для $r=1$ и $r=3$. Две пары чисел — «красная» и «желтая» — имеют одинаковые суммы s (то есть общий центр симметрии в точке $s/2$), а остальные $4n-8$ чисел образуют четыре «голубые» последовательности по $n-2$

числа (идущих подряд), две из которых мы считаем восходящими, а две другие — нисходящими. Тогда сумма первых чисел этих последовательностей равна сумме вторых, сумме третьих и т. д., так что мы получаем $n-2$ четверки с одинаковыми суммами; если при этом выполнено соотношение (1) между s и c, то все эти суммы также равны s. Показанные на рисунке 3, *а* и *б* примеры соответствуют $r=3$ и $r=1$ в формулах (2), для любого нечетного n. (На рисунках 1 и 2 приведены соответствующие заполнения границы квадратов для $n=3$ и $n=5$.) Заменой знаков у всех $4n-4$ чисел (что приведет к изменению знаков у s и c) получим примеры с $r=-3$ и $r=-1$.

Итак, мы указали расстановки чисел со значениями s а) ±4, ±12 для $n=3$; в) ±8, ±24 для $n=5$; г) ±3968, ±11904 для $n=1985$ (и вообще, $\pm2(n-1)$, $\pm6(n-1)$ для нечетного n). Докажем, что этими значениями исчерпывается ответ к задачам а), в) и г). Сумма $2s$ двух пар красных и желтых чисел вместе не меньше чем сумма $4m+6$ четырех наименьших m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ и не больше чем сумма $4M-6$ четырех наибольших M, $M-1$, $M-2$, $M-3$ из целых чисел от m до M. Выражая m и M через c и n и пользуясь формулами (2), получим

$$2(c+8-4n)=4m+6\leqslant 2s\leqslant 4M-6=2(c-8+4n),$$
$$nr-4n+8\leqslant 2r(n-1)\leqslant nr+4n-8,$$

откуда

$$-4(n-2)\leqslant (n-2)r\leqslant 4(n-2),$$

то есть $|r|\leqslant 4$. Осталось вспомнить, что r нечетно.

Если кому-либо из читателей удастся разобраться в этой задаче также для $n=6$ и, вообще, для $n=4k+2$, мы будем рады познакомиться с решением и сообщить о нем в журнале.

В. Г. Болтянский, Н. Б. Васильев

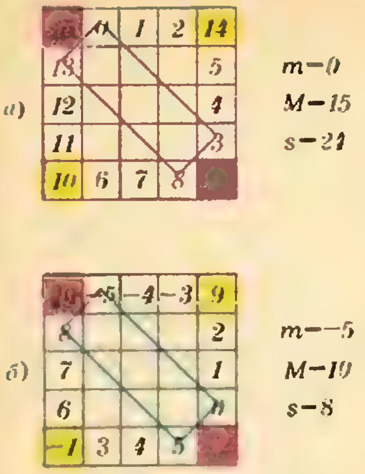
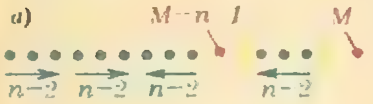


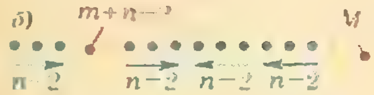
Рис. 2.



$s=2M-n-1=c+3n-6,$

$r=3,\quad c=3n,\quad s=6n-6,$

$m=\dfrac{-n+5}{2},\quad M=\dfrac{7n-5}{2}$



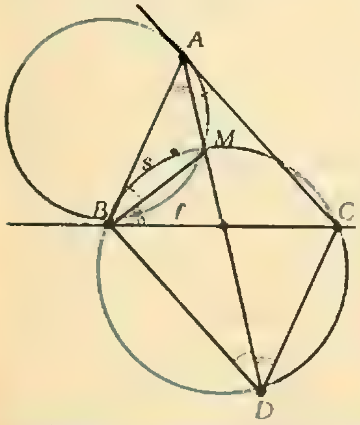
$s=c+n-2,$

$r=1,\quad c=n,\quad s=2n-2,$

$m=\dfrac{-3n+5}{2},\quad M=\dfrac{5n-5}{2}$

Рис. 3.

M887. *Две касательные к окружности, CA и CB, пересекаются в точке C (A и B — точки касания). Вторая окружность проходит через точку C, касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.*



◆

Пусть прямая AM пересекается со второй окружностью в точке D (см. рисунок). Очевидно, достаточно доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Пользуясь тем, что величина угла с вершиной на окружности, образованного двумя хордами или хордой и касательной, равна половине величины дуги, заключенной внутри угла, можно записать две цепочки равенств:

$$\angle ADB=\frac{1}{2}\smile BsM=\angle ABM=\frac{1}{2}\smile AM=\angle CAD,$$
$$\angle ADC=\frac{1}{2}\smile MC=\angle MBC=\frac{1}{2}\smile BfM=\angle BAM$$

($\smile BfM$ и $\smile BsM$ — это величины дуг BM для первой и второй окружностей). Равенство углов ADB и CAD означает, что параллельны прямые AC и BD, равенство углов ADC и BAM — что параллельны прямые AB и CD; это и требовалось доказать.

И. Ф. Шарыгин

М888. *Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют равенству ab=cd. Докажите, что число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ составное.*

Докажем, что если $ab=cd$, то $a=uv$, $b=wt$, $c=uw$, $d=wt$, где u, v, w, t — некоторые натуральные числа.

Поскольку ab делится на c, число c можно записать в виде $c=uw$, где u — делитель a, а w — делитель b (например, можно взять в качестве u наибольший общий делитель a и c). Тогда $a=uv$, $b=wt$ и потому $d=vt$. Остальное просто:

$$a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}=$$
$$=(uv)^{1984}+(wt)^{1984}+(uw)^{1984}+(vt)^{1984}=$$
$$=(u^{1984}+t^{1984})(v^{1984}+w^{1984}),$$

а число в правой части, очевидно, составное.

А. В. Анджанс

◆

М889. *Существуют ли на плоскости такие три точки A, B, C, что для любой точки плоскости P хотя бы один из отрезков PA, PB и PC имеет иррациональную длину?*

Ответ: такие точки существуют.

Пусть A и B — две точки плоскости, расстояние между которыми равно $\sqrt[4]{2}$, C — середина отрезка AB, P — произвольная точка плоскости. Тогда $2\vec{PC}=\vec{PA}+\vec{PB}$, $\vec{AB}=\vec{PB}-\vec{PA}$, то есть

$$4PC^2=PA^2+PB^2+2\vec{PA}\cdot\vec{PB},$$
$$AB^2=PA^2+PB^2-2\vec{PA}\cdot\vec{PB}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$4PC^2+AB^2=2PA^2+2PB^2,$$

и, поскольку число $AB^2=\sqrt{2}$ иррационально, числа PA, PB и PC одновременно не могут быть рациональными.

А. М. Слинько

◆

М890. *На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сетью шоссейных дорог все свои города?*

Ответ: да, сможет. Укажем один из возможных способов прокладки дорог. Проложим шоссе длиной 1000 км через один из городов страны параллельно стороне квадрата от границы до границы (рис. 1). Отступив от концов этого шоссе на 100 км, отметим на шоссе две точки. Между ними на равном расстоянии 200 км друг от друга расположим еще 3 точки. Через эти 5 точек проложим 5 дорог, перпендикулярных ранее построенному шоссе и простирающихся от одной границы до другой. Теперь из каждого города проложим шоссе, соединяющее по кратчайшему пути этот город с одной из уже проложенных дорог. Длина каждого такого дополнительного шоссе не более 100 км, а всего таких шоссе не более 50. Следовательно, общая длина всех шоссейных дорог не превосходит $6\cdot 1000+50\cdot 100=11\,000$ км.

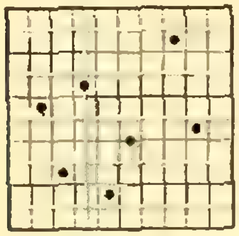


Рис. 1.

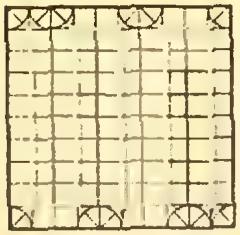


Рис. 2.

Указанная сеть шоссейных дорог не является кратчайшей. На рисунке 2 приведен пример более рационального расположения шоссейных дорог. Ломаная общей протяженностью $5\cdot 800+4\cdot 200=4800$ км дополняется 12 «усиками» длиной $(100\sqrt{2}-100)$ км каждый. Получающаяся при этом сеть шоссейных дорог длиной $4800+12\cdot(100\sqrt{2}-100)=3600+1200\sqrt{2}$ км такова, что, как легко убедиться, расстояние от любой точки квадрата до ближайшего шоссе не превосходит 100 км. Поэтому для того, чтобы соединить 51 город с уже построенной сетью шоссейных дорог, потребуется продолжить большее $51 \cdot 100 = 5100$ км дорог. Следовательно, действуя указанным образом, мы должны будем проложить не более $8700+1200\sqrt{2}<8700+1800=10\,500$ км дорог.

Л. Д. Курляндчик, С. В. Резниченко

◆

Ф898. *Однородная палочка длины l связана невесомой нитью длины l с неподвижной точкой A (рис. 1). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H $(l<H<2l)$. Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке 1. Найти максимальную скорость центра палочки при последующем движении.*

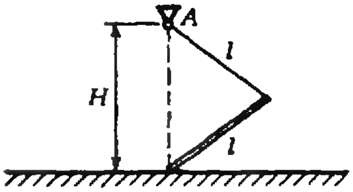


Рис. 1.

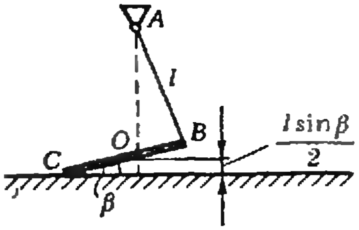


Рис. 2.

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент палочка образует с горизонтом угол α такой, что $\sin\alpha = H/2l$. Полная энергия палочки в начальный момент равна ее потенциальной энергии и равна

$$U_0 = mg\,\frac{H}{4}\ .$$

При движении палочки ее полная энергия в любой момент времени складывается из потенциальной энергии

$$U_t = mg\,\frac{l\sin\beta}{2}$$

(β — угол, который палочка образует с горизонтом в данный момент (рис. 2)), кинетической энергии поступательного движения

$$E_{t1} = m\,\frac{v_t^2}{2}$$

(v_t — скорость центра масс палочки) и энергии E_{t2} вращательного движения. Согласно закону сохранения энергии

$$U_t + E_{t1} + E_{t2} = U_0,$$

откуда
$$E_{t1} = \frac{mv_t^2}{2} = U_0 - U_t - E_{t2}\ , \quad \text{и}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2}{m}(U_0 - U_t - E_{t2})}\ .$$

Очевидно, скорость v_t центра масс палочки будет максимальной, когда значения U_t и E_{t2} будут минимальны.

Потенциальная энергия минимальна в тот момент, когда верхний конец палочки занимает наинизшее возможное положение, то есть когда нить вертикальна. При этом

$$U_{t\,\min} = mg\,\frac{H-l}{2}.$$

Нетрудно понять, что в этот момент времени палочка движется только поступательно. Действительно, поскольку палочка нерастяжима, проекции скоростей любых ее точек на направление самой палочки должны быть одинаковы. Скорость нижней точки (точка C на рисунке 2) всегда направлена горизонтально, а в тот момент, когда нить вертикальна, скорость верхней точки (точка B на рисунке 2) также горизонтальна (так как нить нерастяжима). Из условия нерастяжимости палочки следует, что эти скорости должны быть одинаковы и все точки палочки должны в этот момент двигаться с такими же скоростями. Это означает, что вращательное движение отсутствует, то есть $E_{t2}=0$.

Итак, в тот момент, когда нить вертикальна, скорость центра масс палочки имеет максимальное значение

$$v_{l\,\max}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(mg\frac{H}{4}-mg\frac{H-l}{2}\right)}=\sqrt{\frac{g}{2}(2l-H)}$$

и направлена горизонтально.

С. С. Кротов

Ф899. *На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m. Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 1). Полость заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать.*

1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев.

2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду.

Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ϱ и плотность ртути ϱ_1 считать известными.

Примечание: объем шарового сегмента высоты H и радиуса R (рис. 2) равен $\pi H^2\times\left(R-\frac{H}{3}\right)$.

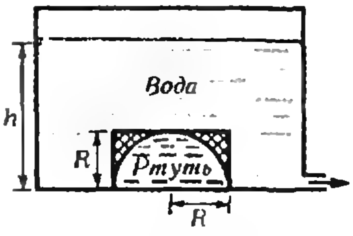


Рис. 1.

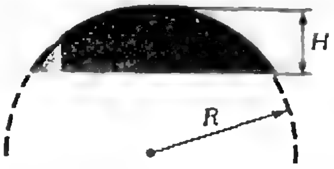


Рис. 2.

◆

Запишем условие равновесия чашки. На нее действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции дна сосуда $\vec{N}$, а также силы давления воды $\vec{F}_в$ и ртути $\vec{F}_р$ (рис. 3). Чашка находится в равновесии при условии

$$F_р+N=mg+F_в. \qquad (1)$$

Сила $F_в$ есть сила давления столба воды на верхнее основание чашки, то есть

$$F_в=\begin{cases}\varrho g(h-R)\pi R^2 & \text{при } h\geqslant R;\\ & \text{при } h<R.\end{cases} \qquad (2)$$

Из условия равновесия (1) с учетом (2) следует, что с понижением уровня воды в сосуде модуль силы реакции N убывает. При некоторой высоте h столба воды N обратится в нуль. Условие $N=0$ и определяет момент отрыва чашки. Сразу после отрыва давление ртути в верхней точке чашки также обратится в нуль. Для расчёта силы $F_р$ в момент отрыва чашки представим себе полусферическую поверхность в слое ртути толщины R. В силу гидростатического равновесия, силы, действующие на эту поверхность снизу и сверху, одинаковы, то есть $F_р$ равна весу «ртутной» чашки:

$$F_р=\varrho_1 g\left(\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3\right)=\frac{1}{3}\varrho_1 g\pi R^3. \qquad (3)$$

Решая уравнение (1) с учетом (2), (3) и условия отрыва чашки $N=0$, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$h=R\left(1+\frac{\varrho_1}{3\varrho}\right)-\frac{m}{\varrho\pi R^2}.$$

Начиная с момента отрыва чашки во всем последующем процессе откачки воды квазиравновесие чашки обеспечивается уменьшением силы давления ртути $F_р$. Эта сила уменьшается за счет вытекания ртути из-под краев чашки. Ртуть перестанет вытекать, когда уровень воды достигнет верхнего основания чашки ($h=R$). Дальнейшая откачка воды не приведет к изменению количества ртути в чашке. Условие равновесия чашки при этом примет вид (давлением насыщенных паров воды и ртути пренебрегаем)

$$mg=F_{р1}, \qquad (4)$$

где $F_{р1}$ — сила, с которой давит на чашку остав-

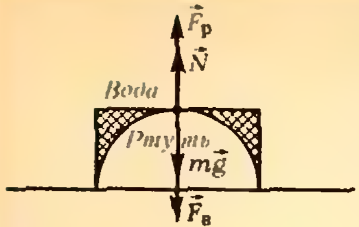


Рис. 3.

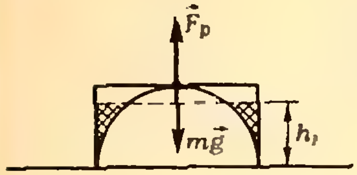


Рис. 4.

шийся в ней слой ртути высоты h_1 (рис. 4). Эта сила численно равна весу ртути в объеме той части чашки, которая заштрихована на рисунке 4:

$$F_{p1}=\varrho_1 g(\pi R^2 h_1-V_1), \qquad (5)$$

где V_1 — объем оставшейся в чашке ртути, равный

$$V_1=\frac{2}{3}\pi R^3-\pi(R-h_1)^2\left(R-\frac{R-h_1}{3}\right). \qquad (6)$$

Подставляя (5) с учетом (6) в условие равновесия (4) и решая получающееся уравнение относительно h_1, получим ответ на второй вопрос задачи:

$$h_1=\sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\varrho_1}}.$$

М. Г. Абрамян

◆

Ф900. *Часть графика, изображающего процесс, происходивший с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 1). Масштабы по обеим осям известны (они указаны на рисунке 1). В течение всего процесса перехода из состояния 1 в состояние 2 газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найти работу, совершенную газом в этом процессе.*

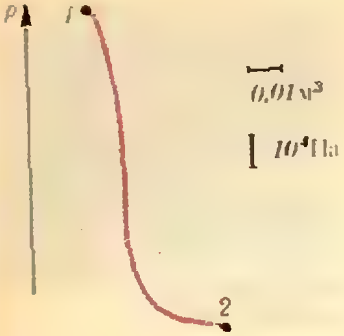


Рис. 1.

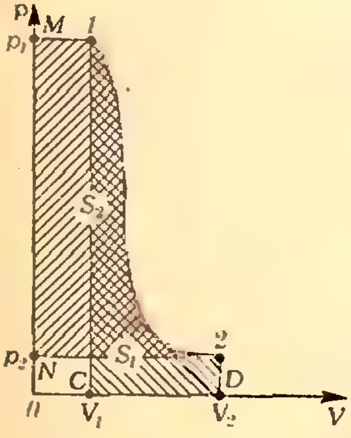


Рис. 2.

Если бы график процесса был задан полностью (рис. 2), то для определения работы, совершенной газом, нужно было бы просто определить площадь S_1 фигуры $C12D$. Покажем, что площадь S_1 можно выразить через площадь S_2 фигуры $M12N$, которую можно определить из заданного «неполного» графика.

Как видно из рисунка 2,

$$|p_1V_1|+S_1=|p_2V_2|+S_2 \Rightarrow S_2=S_1+|p_1V_1|-|p_2V_2|$$

($|p_1V_1|$, $|p_2V_2|$ — соответственно площади прямоугольников $M1CO$ и $N2DO$). Так как в течение всего процесса газ отдал столько же тепла, сколько получил, из первого начала термодинамики можно заключить, что

$$A=-\Delta U,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа за время процесса.

Для идеального одноатомного газа $U=\frac{3}{2}\nu RT$, так что

$$A=\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2),$$

где T_1 и T_2 — температуры газа в точках *1* и *2* соответственно.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что

$$p_1V_1-p_2V_2=\nu R(T_1-T_2)=\frac{2}{3}A,$$

так что $|p_1V_1|-|p_2V_2|=\frac{2}{3}S_1$ и

$$S_1+\frac{2}{3}S_1=S_2,$$

откуда

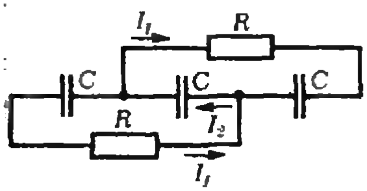
$$S_1=\frac{3}{5}S_2.$$

Значение площади S_2 можно определить по графику, заданному в условии задачи; используя заданные на графике масштабы, находим $S_2\approx 3$ кДж; следовательно,

$$A\approx 1{,}8 \text{ кДж}.$$

В. Т. Карапетян

Ф901. *Три одинаковых конденсатора, каждый емкости С, соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС ℰ. После того как они полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке. Какое количество тепла выделится на каждом из резисторов? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?*



Самое главное — конденсаторы в этой схеме не разряжаются полностью. После того как токи в цепи прекратятся, конденсаторы окажутся соединенными параллельно, то есть напряжения на них окажутся одинаковыми.

Ток, разряжающий средний конденсатор, равен сумме токов крайних конденсаторов, а так как в силу симметрии те равны между собой (см. рисунок),

$$I_2=2I_1.$$

Обозначим напряжение на конденсаторах в конце разряда U_x. Поскольку начальное напряжение на каждом из них было $\mathcal{E}/3$, за время разряда через крайние конденсаторы протекут заряды $q_1=C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}-U_x\right)$, а через средний — заряд $q_2=C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}+U_x\right)$ (средний конденсатор перезарядится до противоположной полярности). Ясно, что $q_2=2q_1$, то есть

$$2C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}-U_x\right)=C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}+U_x\right),$$

откуда

$$U_x=\frac{1}{9}\mathcal{E}.$$

Тепло, которое выделится на каждом из резисторов, найдем из закона сохранения энергии:

$$Q_1=Q_2=\frac{1}{2}(W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}})=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{9}\right)^2=\frac{2}{27}C\mathcal{E}^2.$$

Поскольку средний конденсатор перезарядится до противоположной полярности, напряжение $\mathcal{E}/10$ будет на нем дважды — во время разряда от $\mathcal{E}/3$ до 0 и во время зарядки от 0 до $\mathcal{E}/9$. Для первого случая, согласно закону Ома,

$$U_{t1}+\frac{\mathcal{E}}{10}=RI_{t1} \qquad (1)$$

(U_{t1} — напряжение на крайних конденсаторах в этот момент); заряды, которые протекут к этому моменту через крайние конденсаторы и через средний, связаны соотношением

$$C\left(\frac{}{3}-U_{t1}\right)=\frac{1}{2}C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}-\frac{\mathcal{E}}{10}\right). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим ток I_{t1}, текущий в первом случае через резисторы:

$$I_{t1}=\frac{19}{60}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Составляя аналогичные уравнения для второго случая —

$$U_{t2}-\frac{\mathcal{E}}{10}=RI_{t2},\quad C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}-U_{t2}\right)=\frac{1}{2}C\left(\frac{\mathcal{E}}{3}+\frac{\mathcal{E}}{10}\right),$$

— находим:

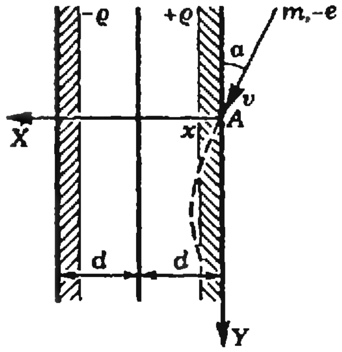
$$I_{t2}=\frac{1}{60}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

А. Р. Зильберман

Ф802. *Два плоских слоя толщины d каждый равномерно заряжены по объему с плотностями зарядов $-\varrho$ и $+\varrho$. Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью v, направленной под углом α к поверхности слоя (см. рисунок).*

1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой?

2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?



Выберем систему координат XY, как показано на рисунке. Сразу же можно отметить, что движение частицы вдоль оси Y будет равномерным со скоростью $v\cos\alpha$ (действием силы тяжести мы пренебрегаем). Сила, действующая на частицу со стороны заряженных слоев, направлена вдоль оси X и в точке с координатой x определяется зарядами, находящимися в заштрихованных на рисунке областях (симметричных относительно плоскости раздела слоев). Действительно, действие незаштрихованных областей с разноименными зарядами компенсируется, поскольку область объемного заряда можно представить себе как набор плоскостей с поверхностным зарядом, а поле, создаваемое заряженной плоскостью, не зависит от расстояния до нее. По той же причине можно считать, что поле в точке с координатой x определяется заряженными плоскостями с поверхностной плотностью заряда $-\varrho x$ и $+\varrho x$, расположенными слева и справа от этой точки. Напряженность такого поля равна

$$E=2\,\frac{\varrho x}{2\varepsilon_0}=\frac{\varrho x}{\varepsilon_0}.$$

Значит сила, действующая на частицу в тот момент, когда она находится в точке с координатой x, равна

$$F_x=-e\,\frac{\varrho x}{\varepsilon_0},$$

и уравнение движения частицы в направлении оси X —

$$x''=-\frac{e\varrho}{m\varepsilon_0}\,x$$

— это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0=\sqrt{e\varrho/m\varepsilon_0}$. Понятно, что частица не проникнет в область отрицательного заряда, если амплитуда этих колебаний будет меньше d. Предельная скорость $v_{\text{пр}}$ частицы, при которой выполняется это условие, определяется равенством

$$v_{\text{пр}}\sin\alpha=\omega_0 d=d\sqrt{\frac{e\varrho}{m\varepsilon_0}};\qquad \text{отсюда}$$

$$v_{\text{пр}}=\frac{d}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{e\varrho}{m\varepsilon_0}}.$$

При скоростях $v<v_{\text{пр}}$ частица проникает в положительно заряженный слой на некоторую глубину, а затем «выталкивается» из него. Время t, которое частица проводит внутри слоя, — это половина периода колебаний с частотой ω_0, то есть

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{e\varrho}};$$

За это время частица смещается по вертикали на расстояние

$$y=tv\cos\alpha=\pi v\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{e\varrho}}\cos\alpha.$$

На таком расстоянии от точки A частица вылетит из положительно заряженного слоя.

А. И. Буздин

Повторим гидростатику

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Школьная программа по физике построена так, что, познакомившись с темой «Гидростатика» в шестом классе, учащиеся больше к ней не возвращаются. По-видимому, принято считать, что эта тема нетрудная. Но, как показывает опыт вступительных экзаменов, задачи и вопросы по гидростатике часто ставят абитуриентов в тупик.

В чем здесь дело? С нашей точки зрения это связано с тем, что в шестом классе школьники еще не готовы к восприятию всех тонкостей физики, они лишь знакомятся с ней. Однако при составлении вопросов и задач для вступительных экзаменов подразумевается, что абитуриент переосмыслил многие темы, в том числе и гидростатику, с более общих позиций, с учетом знания всего курса физики.

В данной статье нам хотелось напомнить основные законы гидростатики и рассмотреть несколько конкретных задач и вопросов, которые в разные годы включались в экзаменационные билеты или задавались абитуриентам в процессе устного экзамена.

Жидкости и газы при движении как целое представляют собой механическую систему, части которой взаимодействуют друг с другом посредством только сил давления. Действительно, когда жидкость (здесь и далее, говоря о жидкости, мы подразумеваем и газ тоже) находится в покое, вязкость не проявляется — жидкое трение возникает лишь при движении слоев жидкости друг относительно друга или относительно твердого тела.

Для жидкости, как известно, выполняется закон Паскаля: *давление, производимое на жидкость, передается без изменения в каждую точку жидкости.* Если жидкость находится под действием только силы тяжести, давление p увеличивается с глубиной погружения h по закону $p=\rho gh$, где ρ — плотность жидкости. Поэтому различные участки тела, погруженного в жидкость, испытывают разные силы давления. В результате их суммарного действия возникает выталкивающая сила (архимедова сила). Согласно закону Архимеда, *тело, целиком погруженное в жидкость, выталкивается кверху с силой, равной весу вытесненной им жидкости (то есть весу жидкости в объеме этого тела).*

Сразу же обратим внимание на тот факт, что закон Архимеда неприменим, когда погруженное тело плотно прижато к стенкам или дну сосуда. Например, известно, что подводная лодка, опустившаяся на илистое дно, под действием силы гидростатического давления прижимается ко дну, а вовсе не выталкивается кверху.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач и вопросов.

Вопрос 1. *На одной из чашек уравновешенных весов находится стакан с водой и штатив с подвешенным к нему грузом (рис. 1). Что произойдет с равновесием весов, если нить удлинить настолько, чтобы груз оказался в воде?*

Многие абитуриенты считают, что равновесие нарушится. В качестве причины одни называют выталкивающую силу, действующую на груз по закону Архимеда и уменьшающую натяжение нити, а значит, и силу давления штатива на чашку весов. Другие считают, что после погружения в воду груз будет давить на нее с добавочной силой или, что эквивалентно, повысит уровень воды в стакане и тем самым увеличит давление на дно стакана, в результате чего левая чашка перевесит.

Чтобы получить правильный ответ, достаточно понять, что содержимое чашки не меняется в зависимости от положения груза — вне воды или в воде, и поэтому равновесие весов сохраняется. Но что же было неверного в предыдущих рассуждениях?

При опускании груза в воду натяжение нити действительно уменьшит-

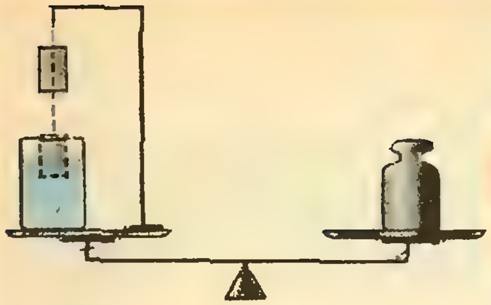


Рис. 1.

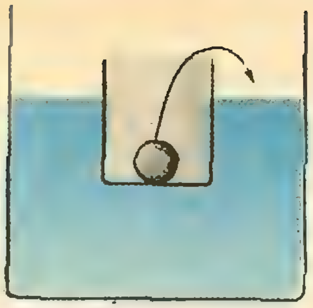


Рис. 2.

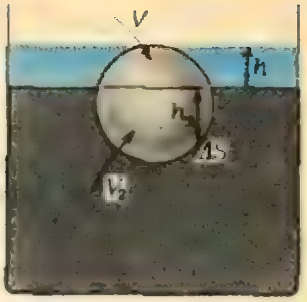


Рис. 3.

ся на величину выталкивающей силы, действующей на груз, и поэтому уменьшится сила давления штатива на чашку. Однако, согласно третьему закону Ньютона, на величину выталкивающей силы возрастет сила, действующая со стороны груза на воду и на дно сосуда. Таким образом, давление стакана на чашку увеличится. Причем уменьшение силы давления штатива будет в точности скомпенсировано увеличением силы давления стакана на чашку весов. Ответ, как видим, остается единственным — равновесие не нарушится.

Подумайте, что произошло бы с весами, если бы в чашку с водой опустили палец, не касаясь стенок и дна стакана, или если бы штатив находился на другой чашке уравновешенных весов?

Вопрос 2. *В сосуде с водой плавает стакан, в котором находится небольшой шарик (рис. 2). Как изменится уровень воды, если шарик — один раз деревянный, а другой стальной — переложить из стакана в сосуд?*

Сила давления на дно сосуда равна, очевидно, весу воды, стакана и шарика. Если поставить сосуд (который для простоты можно считать невесомым) на весы, то они покажут вес содержимого, причем их показания не изменятся от того, будет ли шарик находиться в стакане или в сосуде с водой. С другой стороны, весы должны показывать силу, действующую на дно сосуда, которая в начальной ситуации определяется только уровнем воды в сосуде.

В случае, когда из стакана перекладывают деревянный шарик, он будет плавать на поверхности воды, и действующая на дно сосуда сила будет, по-прежнему, определяться лишь уровнем воды. А поскольку эта сила не меняется, уровень воды тоже должен остаться прежним.

Иным будет результат в случае, когда шарик стальной. Такой шарик опустится на дно сосуда, и полная сила давления на дно будет складываться из силы давления воды и силы давления шарика. Полная сила опять-таки не должна измениться, значит, должна уменьшиться сила давления воды. Следовательно, уровень воды в этом случае понизится.

Попробуйте ответить на вопрос: как изменится уровень воды в стакане, где плавает кусок льда с вмороженными в него а) пробкой, б) дробинкой, в) пузырьком воздуха, после того как лед растает?

Вопрос 3. *Стальной шарик плавает в ртути. Поверх ртути наливают слой воды, покрывающий шарик (рис. 3). Как изменится глубина погружения шарика в ртуть?*

Очевидно, возникает желание воспользоваться непосредственно законом Архимеда. Однако трудность состоит в том, что разные части шарика находятся в разных жидкостях, поэтому шарик в целом рассматривать нельзя.

Выберем произвольно малый участок поверхности шарика, находящийся в ртути, и найдем действующую на него силу давления. Ясно, что она будет равна

$$f=(\varrho_1 g h_1+\varrho_2 g h_2)\Delta S,$$

где ϱ_1 — плотность воды, ϱ_2 — плотность ртути, ΔS — площадь выбранного участка. Представим эту силу в виде

$$f=(\varrho_1 g(h_1+h_2)+(\varrho_2-\varrho_1)gh_2)\Delta S=$$
$$=f_1+f_2.$$

Теперь просуммируем силы давления, действующие на все участки поверхности шарика, соприкасающиеся как со ртутью, так и с водой, и получим две силы: F_1 и F_2. Сила $F_1=\varrho_1 g(V_1+V_2)$ есть выталкивающая сила, действующая на шарик при условии, что он погружен только в воду. Вторая сила $F_2=(\varrho_2-\varrho_1)gV_2$ представляет собой силу выталкивания шарика, как если бы он был погружен до уровня ртути в жидкость плотности $(\varrho_2-\varrho_1)$.

Таким образом, равнодействующая выталкивающая сила равна

$$F=F_1+F_2=\varrho_1 gV_1+\varrho_2 gV_2.$$

Мы видим, что она складывается из двух частей: вода выталкивает часть шарика, плавающую в ней, а ртуть, сама по себе, выталкивает часть шарика, погруженную в нее. Имеет место как бы принцип независимости сил выталкивания — каждая жидкость вносит в общую силу свой независимый вклад. Хотя интуитивно (и такие ответы действительно встречаются!) могло бы показаться, что ртуть выталкивает шарик, а вода наоборот прижимает его к ртути.

Итак, вода как бы помогает ртути удерживать шарик, он несколько «вылезает» из ртути, и глубина погружения шарика в ртуть уменьшается.

Задача 1. *В стакане с водой плавает цилиндрическая деревянная шайба с цилиндрической дыркой. Оси шайбы и дырки параллельны. Площадь дна стакана S, площадь сечения дырки s. Удерживая шайбу на месте, дырку осторожно заполняют маслом, после чего шайбу отпускают. На какую высоту поднимется шайба, если вначале она выступала из воды на величину H? Плотность масла ϱ, плотность воды ϱ_0.*

Прежде всего найдем, на какую высоту поднимется уровень воды в стакане после того как шайбу отпустят. Для этого определим изменение силы давления $\Delta F_{\text{д}}$ на дно сосуда. С одной стороны,

$$\Delta F_{\text{д}}=\varrho_0 g\Delta hS,$$

если Δh — изменение уровня воды; с другой стороны, изменение силы давления равно силе тяжести налитого масла:

$$\Delta F_{\text{д}}=\varrho gHs.$$

Отсюда получаем

$$\Delta h=\frac{\varrho Hs}{\varrho_0 S}.$$

Выталкивающая сила, действующая на шайбу и уравновешивающая ее силу тяжести, определяется давлением воды на ее нижнее основание. Поскольку шайба продолжает плавать, положение ее относительно нового уровня воды в стакане должно остаться неизменным. Следовательно, шайба всплывет как раз на величину Δh.

Подумайте, на сколько поднялась бы шайба, если масло налить вне шайбы, ничего не наливая в дырку?

Задача 2. *На камень, выступающий над поверхностью воды на высоту H, опирается верхним концом тонкая доска длиной l, частично погруженная в воду (рис. 4). При каком минимальном коэффициенте трения между камнем и доской доска будет находиться в равновесии? Плотность воды ϱ_0, дерева ϱ.*

На доску действуют четыре силы. Это сила тяжести $M\vec g$, приложенная к центру доски, сила реакции опоры $\vec N$, приложенная к точке касания с камнем и перпендикулярная к доске, сила трения $\vec F_{\text{тр}}$, действующая в той же точке, но направленная по касательной к доске, и выталкивающая сила $\vec F$.

До сих пор нам было достаточно знать лишь модуль архимедовой силы. Теперь же оказывается необходимым знать, где приложена эта сила. Выделим мысленно в жидкости объем произвольной формы. В равновесии действующая на жидкость в этом объеме сила тяжести уравновешивается силами гидростатического давления, то есть выталкивающей силой. Момент силы тяжести относительно центра масс выделенного участка жидкости равен, очевидно, нулю. Значит, должна быть равна нулю и сумма моментов сил давления. Заменяя выделенный объем жидкости твердым телом такой же формы, убеждаемся, что действующие на него со стороны окружающей жидкости силы не изменятся. Отсюда можно заключить, что суммарное действие сил давления эквивалентно действию силы, направленной по вертикали и проходящей через центр масс вытесненного объема жидкости. Подчеркнем, что таким образом мы находим лишь линию действия выталкивающей силы, но ничего не можем сказать о конкретной точке ее приложения.

Итак, в данном случае выталкивающая сила направлена вертикально вверх и проходит через середину погруженной части доски (через центр масс вытесненного объема воды).

Пусть площадь сечения доски S, длина погруженной части доски $2x$,

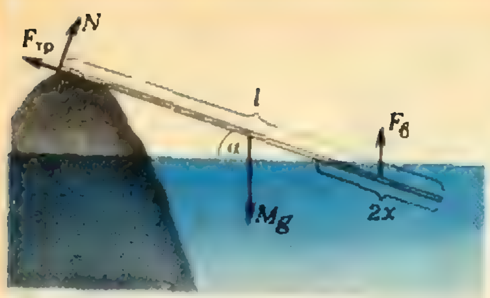


Рис. 4.

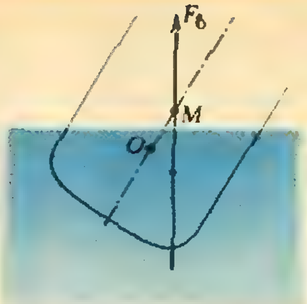


Рис. 5.

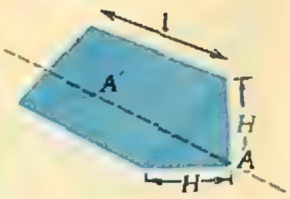


Рис. 6

а угол, который доска составляет с горизонтом (с поверхностью воды), α. Тогда $F_в=2x\varrho_0Sg$ и $Mg=\varrho Slg$. Поскольку нас интересует минимальное значение коэффициента трения доски о камень, можно считать, что $F_{тр}=\mu N$.

Так как доска находится в равновесии, сумма всех действующих на доску сил равна нулю. Запишем это условие, спроектировав все силы на направления касательной к доске и нормали к ней:

$$2x\varrho_0Sg\sin\alpha-\varrho lSg\sin\alpha+\mu N=0,$$
$$2x\varrho_0Sg\cos\alpha-\varrho lSg\cos\alpha+N=0.$$

Поделив почленно эти уравнения друг на друга, найдем, что

$$\mu=\operatorname{tg}\alpha.$$

С другой стороны, как это видно из рисунка 4,

$$\operatorname{tg}\alpha=H/\sqrt{(l-2x)^2-H^2}.$$

Величину x можно найти из условия равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на доску. Удобнее всего рассмотреть моменты сил относительно точки касания доски и камня (точки O), поскольку при этом моменты сил трения и реакции опоры будут равны нулю.

Линия действия архимедовой силы проходит через центр масс погруженной части доски, значит, ее плечо относительно точки O равно $(l-x)\times\times\cos\alpha$. Плечо силы тяжести равно $(l/2)\cos\alpha$. Условие равенства нулю суммарного момента сил имеет вид

$$\varrho lS(l/2)\cos\alpha-\varrho_0 2xS(l-x)\cos\alpha=0,$$

или

$$x^2-lx+\varrho l^2/(4\varrho_0)=0.$$

Отсюда находим

$$x=(l/2)(1-\sqrt{1-(\varrho/\varrho_0)}$$

(второй корень следует отбросить, так как он не удовлетворяет условию $2x<l$).

Тогда окончательно получаем

$$\mu=H/\sqrt{l^2(1-\varrho/\varrho_0)-H^2}.$$

В условии задачи было сказано, что доска тонкая. Как это использовалось при решении?

Отметим, что вопрос о моменте выталкивающей силы исключительно важен при рассмотрении устойчивости плавания тел. В кораблестроении вводится специальное понятие о метацентре — точке пересечения линии действия выталкивающей силы в наклонном положении корабля с плоскостью его симметрии (рис. 5). Метацентр (точка M) не должен опускаться ниже центра тяжести корабля (точка O), иначе вращательный момент архимедовой силы не сможет вернуть корабль в вертикальное положение.

Задача 3. *В аквариум прямоугольного сечения налита вода (плотность воды $\varrho=10^3$ кг/м³) до высоты $H=0{,}5$ м. Определите силу, действующую на стенку аквариума длиной $l=1$ м, и момент сил давления на эту стенку относительно ее нижнего ребра.*

В данном случае давление меняется с глубиной погружения h, причем меняется по линейному закону $p=\varrho gh$. Не вызывает сомнения, что равнодействующая всех сил давления направлена горизонтально. А чему равен ее модуль? Обычно при ответе на этот вопрос используют формулу $F=p_{ср}S$, где $S=lH$ — площадь соприкосновения воды со стенкой, а $p_{ср}=\varrho gH/2$ — среднее давление, равное давлению на середине глубины. И такой ответ, безусловно, верный. Однако не каждый абитуриент может объяснить, почему используется именно это давление в качестве среднего. Попробуем это сделать.

Рассмотрим прямоугольную призму (из материала плотности ϱ) высотой l, в основании которой лежит прямоугольный равнобедренный треугольник со стороной H. Поставим эту призму на горизонтальную поверхность

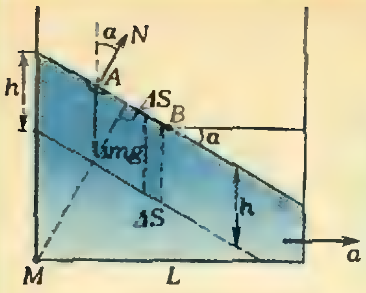


Рис. 7.

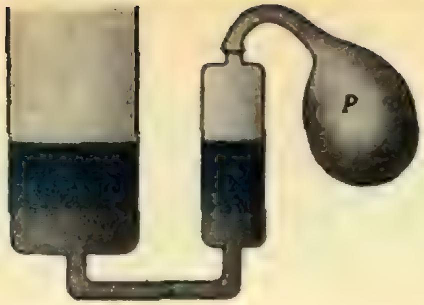


Рис. 8.

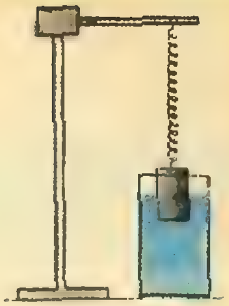


Рис. 9.

(рис. 6). Нетрудно видеть, что сила давления призмы на поверхность по модулю совпадает с силой давления воды на боковую поверхность аквариума (вследствие одинаковости распределения давлений по поверхности соприкосновения). Но сила давления призмы — это ее вес, поэтому

$$F_д=\varrho gH\frac{H}{2}\,l=(\varrho g\frac{H}{2})(lH)=1250\text{ Н}.$$

Итак, действительно в качестве среднего давления воды следует взять давление на середине глубины.

Второй вопрос задачи — более сложный, поскольку и давление меняется с глубиной, и плечи соответствующих сил давления также зависят от глубины. Ссылаясь на аналогию с предыдущим результатом, иногда предлагают для нахождения момента сил давления использовать среднюю силу давления и «среднее» плечо, равное $H/2$. Но это совершенно неправильно. Чтобы получить верный ответ, действительно следует воспользоваться аналогией, но аналогией с призмой, упоминавшейся выше. Для нее искомый момент есть произведение силы тяжести призмы на плечо относительно прямой AA' (см. рис. 6). Линия действия силы тяжести находится на расстоянии $H/3$ от ребра AA' (в однородном треугольнике центр масс находится в точке пересечения медиан), поэтому

$$M_д=\varrho g\frac{H}{2}lH\frac{H}{3}\approx 208{,}3\text{ Н}\cdot\text{м}.$$

При решении задачи мы нигде не учитывали атмосферное давление. Подумайте, может ли оно изменить ответ? И еще: как изменится сила давления на стенку, если эту стенку сделать резиновой?

Вопрос 4. *Что произойдет с глубиной погружения шарика, плавающего в стакане с водой, если стакан начнет с ускорением двигаться вверх?*

Рассмотрим систему вода плюс плавающий в ней шарик. Пусть она движется вверх с ускорением a. Это ускорение создается за счет разности сил давления N_a со стороны дна стакана и силы тяжести системы $(M+m)g$, где M — масса воды, а m — масса шарика:

$$N_a-(M+m)g=(M+m)a.$$

Пока система покоилась, сила давления N_0 на дно стакана определялась соотношением

$$N_0-(M+m)g=0.$$

Сравнивая силы N_a и N_0, видим, что

$$\frac{N_a}{N_0}=\frac{a+g}{g}.$$

Покажем, что давление в любой точке жидкости увеличилось в такое же число раз. Выделим «водяной» цилиндр сечением ΔS, одно из оснований которого совпадает с поверхностью воды, а другое находится на глубине h. Запишем уравнение движения этого цилиндра в вертикальном направлении:

$$p_h\Delta S-\varrho\Delta Shg=\varrho\Delta Sha,$$

где p_h — давление воды на глубине h, ϱ — плотность воды. Мы видим, что

$$p_h=\varrho(g+a)h,$$

то есть по сравнению со статическим случаем оно возросло в $(g+a)/g$ раз. Следовательно, во столько же раз увеличилась выталкивающая сила.

Запишем теперь уравнение движения шарика по вертикали:

$$\varrho V_a g\frac{a+g}{g}-mg=ma.$$

Отсюда получаем, что объем V_a погруженной части шарика при ускоренном движении стакана вверх не зависит от ускорения системы и равен $V_a=m/\varrho$.

Следовательно, глубина погружения шарика в воду не изменится.

Задача 4. *Аквариум, имеющий форму куба с ребром L, до половины* *наполнен водой и приведен в движение с горизонтальным ускорением $\vec{a}$ ($a<g$). Считая, что к моменту начала движения системы аквариум — вода как целого вода не расплескалась, определите форму поверхности воды и давление в точке M (рис. 7).*

Сразу же скажем, что поверхность воды будет представлять собой часть плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Теперь обоснуем это и найдем угол α.

Выделим небольшой объем жидкости массой Δm вблизи произвольной точки A поверхности воды. Равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды будет перпендикулярна поверхности в данном месте. Пусть она равна $\vec{N}$ и образует угол α с вертикалью. Тогда выделенный участок поверхности (поскольку он мал, его можно считать плоским) образует тот же угол α с горизонтом (почему?).

Запишем уравнения движения нашего объема воды, спроектировав все силы и ускорения на вертикальную и горизонтальную оси:

$$N\cos\alpha-\Delta mg=0,$$
$$N\sin\alpha=\Delta ma.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=a/g$$

— угол наклона поверхности не зависит от выбора точки A и определяется только отношением a/g.

Выберем теперь в воде плоскость, параллельную поверхности воды и отстоящую от нее по вертикали на расстояние h. Покажем, что во всех ее точках давление воды p_h будет определяться по формуле $p_h=\varrho gh$. Действительно, выделим в воде наклонный цилиндр с образующей длины h и основаниями ΔS. По вертикали этот объем не движется, поэтому сумма проекций всех действующих на него сил на вертикальное направление равна нулю:

$$\varrho gh\Delta S\cos\alpha-p_h\Delta S\cos\alpha=0,$$

где первое слагаемое — это сила тяжести цилиндра, а второе — вертикальная проекция силы давления на нижнее основание цилиндра. Отсюда получаем

$$p_h=\varrho gh.$$

Таким образом, поверхностями постоянного давления будут плоскости, параллельные свободной поверхности воды.

Для нахождения давления в точке M заметим, что из-за несжимаемости воды точка B (середина) остается на месте. Следовательно,

$$p_M=\varrho g\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)=\varrho\frac{l}{2}(a+g).$$

Было ли нами где-нибудь использовано условие $a<g$? Найдите, каковы будут силы давления воды на стенки и дно аквариума при его ускоренном движении?

* * *

Расставаясь с читателем, мы надеемся, что при подготовке к вступительным экзаменам он внимательно отнесется к теме «Гидростатика» и не захочет разделить участь «плавающих тел, подверженных действию выталкивающих сил».

Упражнения

1. Ртутный манометр (рис. 8) состоит из двух трубок с площадью сечения S_1 и S_2, причем $S_1/S_2=2$. На сколько изменилось измеряемое давление, если уровень ртути в левом колене поднялся на $\Delta h=10$ мм?

2. В бочку с водой упал стеклянный диск. Его диаметр $D=30$ см, толщина $h=5$ мм, плотность стекла $\varrho=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3. Чтобы его достать, в бочку опустили трубку диаметром $d=10$ см, плотно прижали ее к диску, выкачали воду и стали медленно поднимать вверх. Определите, до какого расстояния до поверхности воды можно таким способом поднять диск.

3. Воронка массой M, имеющая форму усеченного конуса с радиусом основания R, стоит на столе. Края воронки плотно прижаты к поверхности стола. Сколько воды будет налито в воронку к моменту ее отрыва от стола, если высота уровня воды в воронке в этот момент равна h?

4. Цилиндрическую гирю, подвешенную к динамометру, опускают в воду, пока уровень воды в сосуде не изменится на $\Delta h=8$ см (рис. 9). Показание динамометра при этом изменилось на $\Delta F=0{,}5$ Н. Определите сечение сосуда.

5. В сосуде с водой плавает кусок льда, в середину которого вмерзла свинцовая дробинка. Масса льда M, масса дробинки m. Температура воды в сосуде 0 °C. Какое наименьшее количество теплоты надо сообщить системе, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца ϱ_2, льда ϱ_1, удельная теплота плавления льда λ.

6. Плотность раствора соли меняется с глубиной по закону $\varrho=\varrho_0+Ah$, где $\varrho_0=1$ г/см^3, $A=0{,}02$ г/см^4. В раствор опущены два шарика, связанные нитью. Объемы шариков $V_1=0{,}1$ см^3 и $V_2=0{,}2$ см^3, их массы $m_1=0{,}13$ г и $m_2=0{,}34$ г. Глубина погружения первого шарика в состоянии равновесия оказалась равной $h_1=20$ см. При этом нить натянута. Определите длину нити.

7. Где сильнее горит газ — на первом или на последнем этаже четырнадцатиэтажного жилого дома?

8. В стакане, доверху наполненном водой и закрытом сверху, плавает деревянный шарик. Как изменится сила давления шарика на крышку, если сосуд привести в движение с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$x^2+3x+|x+3|=0.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\pi x}=0$$

найдите тот, расстояние от которого до числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой будет наименьшим.

3. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нем отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найдите площадь треугольника ABC. Представьте в виде десятичной дроби приближенное значение этой площади с точностью до 0,01.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3\cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1}. \end{cases}$$

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC, длина которой равна 9, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что длина отрезка AE меньше длины отрезка EC. Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D'. Получившийся многогранник $ABCDA'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, длина стороны которого равна 2. Найдите площадь треугольника ABD, если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD'.

Вариант 2

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_3^2(1-x)}{x^2-3}>0.$$

2. Экскаватор роет котлован с постоянной производительностью. После того как он закончил работу, второй экскаватор стал рыть такой же котлован также с постоянной производительностью. Время, которое затратили оба экскаватора на рытье двух котлованов, в $4\frac{1}{12}$ раза превышает время, которое затратили бы оба экскаватора, вырыв совместно один котлован. Первый экскаватор работает с большей производительностью, а суммарная производительность обоих экскаваторов составляет 70 м^3/ч. Чему равна производительность каждого экскаватора?

3. Определите, при каких значениях x функция

$$f(x)=x^2(18\sin 3x-45\cos 3x)+ \\ +x(12\cos 3x+30\sin 3x)+ \\ +68\sin 3x-170\cos 3x$$

имеет минимумы.

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S, у которой длина ребра основания равна 2, а длина бокового ребра равна $\sqrt{3}$, вписана правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S', у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$, а вершины A', B', C', D' лежат на четырех апофемах пирамиды $SABCD$. Докажите, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, и найдите объем пирамиды $S'A'B'C'D'$.

5. Найдите все a, при которых неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+2|\cdot|x+a+4|+ \\ +\left(|a+2|-\frac{a^2+4a+3}{|a+2|}\right)\times \\ \times|x+2|-\frac{1}{2}|a+2|\cdot|x-a|>-2$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Вариант 3

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x}{1-x}<x-6.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 2x+2\cos x+7=2\sin\left(\frac{7}{2}\pi+x\right)+4\sin^2\frac{x}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4+2\log_2\left(1-\frac{8x}{(2x+1)^2}\right)}= \\ =\log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)+2\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной длины a. Длина диагонали AC ромба в 1,5 раза больше длины его стороны. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, и ее длина в 1,5 раза больше $|AC|$. Через точку A и середину ребра CS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 45°. Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью? Сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^4-4y^3-16y^2-8xy-4x^2+32y+64=0, \\ \sin(5\pi x)-\sqrt{x(x-6)+13}\times \\ \times\cos\left(\pi\left(y^2+2x+\frac{1}{2}\right)\right)+\sin(\pi(2y^2-x))=0. \end{cases}$$

Вариант 4

(факультет почвоведения)

1. Производительности трех насосов относятся как 5:4:2. За 7 часов первый насос перекачал на 6 м^3 воды больше, чем третий. Определите производительность каждого из трех насосов.

2. Решите уравнение

$$2\cos^2 x=1+\sqrt{2}-\cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left|1+\frac{9}{x^2}\right|<1.$$

4. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 45°, длина стороны AB равна c, длина стороны AC равна b, причем $b>c$. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка M так, что угол BAM равен 75°. Прямая AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точке N, расположенной между A и M. Определите длину AN.

5. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$$

имеет решение.

Вариант 5
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\sin\frac{x}{4}\cos 3x=\cos 3x.$$

2. В правильном треугольнике со стороной, равной 6, на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найдите расстояние от этой точки до центра треугольника.

3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=6x+e^{-6x}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\frac{\pi}{3}$. Через точку, лежащую на одном из боковых ребер, проведена прямая, перпендикулярная этому ребру и пересекающая высоту пирамиды в середине. Известно, что длина отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, равна 6. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

5. Найдите все действительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(ax-1)=2|x+1|+2xy, \\ yx+1=x-y \end{cases}$$

имеет действительные решения.

Вариант 6
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$27^x+9^x=3^{x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x=0{,}5.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^2-5|x+1|-2$$

на отрезке $[-3;\ 3]$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC с острым углом при вершине B взяты точки P и Q, причем P — середина стороны AB. Известно, что $|AB|=4$, $|BC|=5$, $|BQ|=3$. Найдите длину отрезка PQ, если площадь треугольника ABC на $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ больше, чем площадь треугольника PBQ.

5. При каком значении параметра b система неравенств

$$\begin{cases} y\geq(x-b)^2, \\ x\geq(y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 7
(факультет психологии)

1. Вычислите, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0{,}8}-0{,}6\right):\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}+3{,}3:0{,}03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8\right):0{,}03}\right)^{-1}.$$

2. Два насоса за 4 часа совместной работы подают 96 кубометров воды. Если бы второй насос подавал в час на 6 кубометров больше, чем он подает сейчас, то тогда на накачивание каждого кубометра второй насос расходовал бы на 3 минуты больше, чем расходует на накачивание каждого кубометра первый насос. Сколько кубометров воды в час подает первый насос?

3. Решите уравнение

$$2\sin x\,(5+\cos 2x)=5\sqrt{2}\sin 2x.$$

4. Две окружности радиусов 4 и 5 пересекаются в точках B и C. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; A_1 и A_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка A_2 лежит на окружности с центром O_2, а длина отрезка A_1A_2 равна 15. Найдите площадь выпуклого четырехугольника A_2BA_1C.

5. Первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой — натуральное число, равен 5, а разность между утроенным вторым ее членом и половиной третьего ее члена больше 20. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

— вторая цифра числа в 2 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой первой и третьей его цифр, делится на 10 без остатка.

7. Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1}+4\cdot 3^{2x-1}<2, \\ 4x+y>2-\log_3 4. \end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Поезд при подходе к платформе начинает тормозить и останавливается, пройдя путь $s=75$ м. Найдите начальную скорость поезда, если за предпоследнюю секунду он прошел расстояние $l=2{,}25$ м. Движение поезда равнозамедленное.

2. Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную перпендикулярно направлению его движения. Удар абсолютно упругий. Определите коэффициент трения при движении тела, если после удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

3. Брус массой m поднимается вдоль наклонной плоскости при помощи веревки, наматываемой на вал электромотора (рис. 1). Движение бруса равноускоренное, в начальный момент $t_0=0$ скорость бруса была равна v_0,

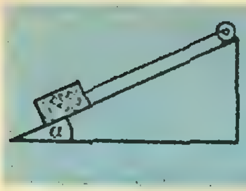


Рис. 1.

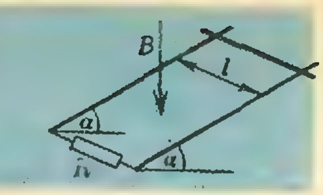


Рис. 2.

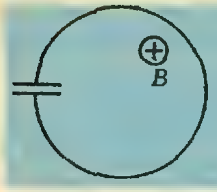


Рис. 3.

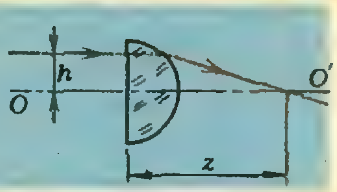


Рис. 4.

в момент t стала равна v. Определите развиваемую электромотором мощность в момент t, если угол наклона наклонной плоскости α, а коэффициент трения между брусом и плоскостью μ.

4. Температура газов, образующихся при сгорании топлива в цилиндрах двигателя автомобиля, равна $t_1=827$ °C, температура выхлопных газов равна $t_2=97$ °C. Сколько километров проедет автомобиль, имеющий в баке $V=40$ л топлива, если теплота сгорания топлива $q=3{,}2\cdot10^{10}$ Дж/м³, а сила сопротивления движению остается постоянной и по модулю равной $F=1{,}7\cdot10^3$ Н? Двигатель считать идеальной тепловой машиной, работающей с максимально возможным коэффициентом полезного действия.

5. Калорифер подает в помещение $V=50\,000$ м³ воздуха при температуре t_1 и относительной влажности $\varphi_1=60$ %, забирая его с улицы при температуре t_2 и относительной влажности $\varphi_2=80$ %. Сколько воды дополнительно испаряет калорифер в подаваемый воздух? Плотность насыщенных водяных паров при t_1 равна $\rho_1=15{,}4\cdot10^{-3}$ кг/м³, а при t_2 — $\rho_2=9{,}4\cdot10^{-3}$ кг/м³.

6. Источник какого напряжения надо подключить с помощью нихромового провода длиной $l=19{,}2$ м и диаметром $d=3\cdot10^{-4}$ м к лампочке, рассчитанной на напряжение $U_1=120$ В и мощностью $P=40$ Вт, чтобы она горела нормально? Удельное сопротивление нихрома $\rho=1{,}1\cdot10^{-6}$ Ом · м.

7. По двум параллельным шинам в однородном магнитном поле скользит перемычка (рис. 2). Плоскость шин образует угол α с горизонтальной плоскостью. В нижней части шины соединены через резистор с сопротивлением R. Линии индукции магнитного поля направлены вертикально. Коэффициент трения между перемычкой и шинами μ. Масса перемычки m, длина перемычки l. Чему равна индукция магнитного поля, если перемычка скользит с постоянной скоростью v? Сопротивление шин и перемычки не учитывать.

8. Проволочный виток, замыкающий обкладки конденсатора, помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны к плоскости витка (рис. 3). Индукция магнитного поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t=5\cdot10^{-2}$ Тл/с. Емкость конденсатора $C=100$ мкФ. Площадь, охваченная витком, $S=200$ см². Определите заряд конденсатора.

9. Половинка шара изготовлена из прозрачного вещества с показателем преломления $n=4/3$. Радиус шара $R=5$ см. На расстоянии $h=3$ см от оси OO' параллельно оси на полушар со стороны плоской поверхности падает луч света (рис. 4). На каком расстоянии z от плоской поверхности полушара этот луч пересечет ось?

10. В некотором фотоаппарате максимальное расстояние от объектива (в виде тонкой линзы) до фотопленки в полтора раза больше фокусного расстояния объектива. С помощью этого фотоаппарата нужно сфотографировать мелкий плоский предмет. Каково при этом минимально возможное отношение размеров предмета к размерам его изображения на фотопленке?

Механико-математический факультет

1. Двигатель ракеты, запущенной с поверхности Земли вертикально вверх, сообщает ей постоянное ускорение $a=10$ м/с². С какой скоростью ракета упадет на Землю, если двигатель проработал $t=22$ с? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с².

2. Шарик массой $m=10$ г, падая без начальной скорости с некоторой высоты, ударился о горизонтальную плиту и подпрыгнул на высоту $H=0{,}8$ м. При ударе изменение импульса шарика составило $\Delta P=0{,}17$ кг · м/с. Найдите, на какую высоту подпрыгнет шарик после следующего удара, если при каждом ударе шарик теряет одну и ту же часть энергии. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. На невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Период малых колебаний такого маятника $T=1{,}3$ с. На какой максимальный угол будет отклоняться нить от вертикали, если при колебаниях, проходя положение равновесия, шарик будет двигаться со скоростью $v=2{,}1$ м/с? Принять $g=10$ м/с².

4. В вертикальном цилиндре объемом $V=2$ л под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T=300$ К. Масса поршня $m=50$ кг, его площадь $S=50$ см². Температуру газа повысили на $\Delta T=100$ К. Найдите изменение внутренней энергии газа, если его теплоемкость $C=5$ Дж/К. Атмосферное давление

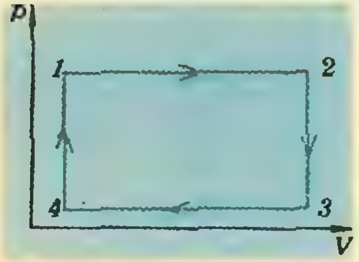


Рис. 5.

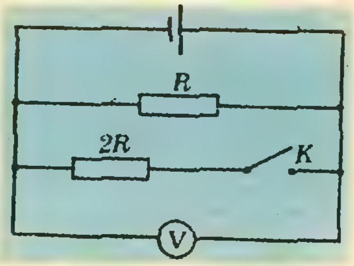


Рис. 6.

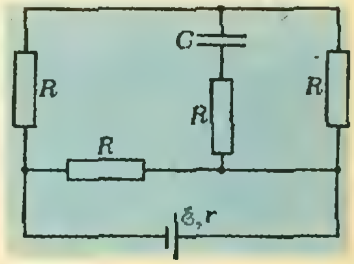


Рис. 7.

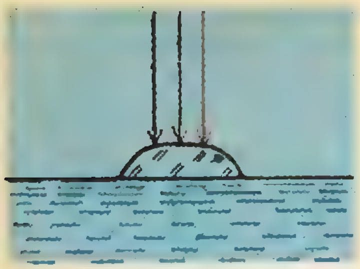


Рис. 8.

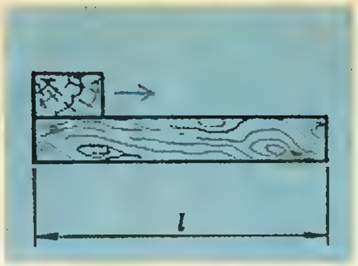


Рис. 9.

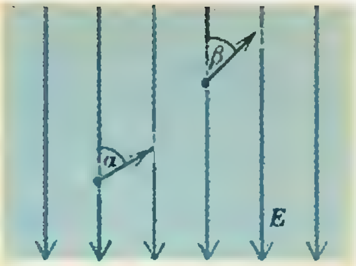


Рис. 10.

$p_0=10^5$ Па. Трение поршня о стенки цилиндра не учитывать. Принять $g=10$ м/с^2.

5. Процессы, происходящие в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображены на диаграмме $p-V$ (рис. 5). Известно, что $T_4=300$ К, $T_2=500$ К, $T_3=450$ К. Найдите, на сколько градусов температура в точке *1* отличается от температуры в точке *3*.

6. Резистор сопротивлением $R=45$ Ом и конденсатор соединены последовательно с аккумулятором; при этом заряд на обкладках конденсатора равен $q_1=6\cdot10^{-5}$ Кл. Если же резистор и конденсатор подключить к аккумулятору параллельно, то заряд на обкладках конденсатора будет $q_2=4\cdot10^{-5}$ Кл. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора.

7. Два резистора, источник постоянного тока и вольтметр соединены, как показано на рисунке 6. При замкнутом ключе вольтметр показывает напряжение $U_1=16$ В. Если ключ разомкнуть, вольтметр показывает $U_2=20$ В. Найдите электродвижущую силу источника, пренебрегая ответвлением тока в вольтметр.

8. Обмотка мощного электромагнита питается постоянным током и потребляет мощность $P=5$ кВт. Для предотвращения перегрева обмотки магнит снабжен охлаждающим устройством, по которому течет вода, поглощающая $\eta=84$ % выделяющегося в обмотке количества теплоты. Определите необходимый расход воды (в кубических метрах за секунду), если температура воды не должна повышаться более чем на $\Delta T=25$ К. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг · К).

9. С помощью кинокамеры сняли колебания тяжелого груза, подвешенного на проволоке. Съемка велась при помощи объектива с фокусным расстоянием $F=5$ см. Изображение маятника на пленке имеет длину $l=20$ мм. За время съемки $t=1$ мин маятник совершил $n=24$ полных колебания. С какого расстояния (от объектива до маятника) велась съемка? Маятник считать математическим; принять $g=10$ м/с^2.

10. Светящаяся точка движется с постоянной скоростью $v_1=0{,}2$ м/с вокруг главной оптической оси собирающей линзы. Плоскость окружности параллельна линзе и находится на расстоянии $d=60$ см от нее. Определите скорость v_2, с которой движется изображение точки, даваемое линзой. Учесть, что если расстояние между линзой и светящейся точкой увеличить на $l=40$ см, то скорости движения точки и ее изображения будут одинаковыми.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Два тела с массами $m_1=1$ кг и $m_2=3$ кг, связанные невесомой и нерастяжимой нитью длиной $l=40$ см, свободно вращаются на гладкой горизонтальной поверхности с одинаковой угловой скоростью $\omega=10$ с$^{-1}$. Нить все время натянута, и одна ее точка неподвижна. Найдите полную кинетическую энергию этой системы.

2. Лифт массой $M=1000$ кг поднимается лебедкой с постоянным ускорением. На некотором участке пути длиной $l=1$ м лифт двигался со средней скоростью $v=5$ м/с, и скорость его возросла на $\Delta v=0{,}5$ м/с. Какая работа совершена по перемещению лифта на указанном отрезке пути? Трением пренебречь.

3. Из резервуара большой емкости с помощью насоса откачивают воду. Наконечник гладкого шланга, из которого вытекает вода, имеет площадь поперечного сечения $S=10$ см^2 и находится на уровне поверхности воды в резервуаре. Мотор насоса потребляет мощность $P=0{,}5$ кВт. Коэффициент полезного действия установки $\eta=0{,}26$. С какой скоростью вытекает вода из шланга?

4. В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения $S=2\cdot10^{-3}$ м^2, закрытом сверху поршнем, находится газ. На поршень положили гирю массой $m=5$ кг и повысили температуру на $\Delta T=kT$ $(k=0{,}1)$. При этом объем газа уменьшился на $\Delta V=kV$ от первоначальной величины. Какова масса поршня, если внешнее давление $p_0=10^5$ Па? Трением пренебречь.

5. Положительные точечные заряды $q_1=2\times10^{-6}$ Кл и $q_2=5\cdot10^{-6}$ Кл, находящиеся в вакууме, действуют друг на друга с силой $F=0{,}25$ Н. Определите напряженность поля в точке, расположенной посередине между зарядами.

6. В схеме, изображенной на рисунке 7, емкость конденсатора $C=23$ мкФ, резисторы имеют одинаковые сопротивления $R=20$ Ом. Электродвижущая сила батареи $\mathcal{E}=12$ В, ее внутреннее сопротивление $r=2$ Ом. Определите заряд на конденсаторе.

7. Какова минимальная масса медного провода, предназначенного для передачи потребителю мощности $P=12$ кВт на расстояние $l=100$ м от генератора с напряжением $U=220$ В, если допустимые потери мощности составляют $k=2$ % от P — мощности, дошедшей до потребителя? Плотность меди $d=8{,}9$ г/см^3, удельное сопротивление $\rho=1{,}75\cdot10^{-6}$ Ом · см.

8. Над столом подвешена маленькая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура, у которого угол между осью и образующей $\alpha=30°$. На какую величину уменьшится радиус светлого круга на поверхности стола, если на пути лучей параллельно поверхности стола поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=5$ см с показателем преломления $n=1{,}5$?

9. Тонкий стержень расположен вдоль главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см. Изображение стержня находится по другую сторону линзы, причем изображение ближайшего к линзе конца — на расстоянии $f_1=24$ см, а дальнего — на расстоянии

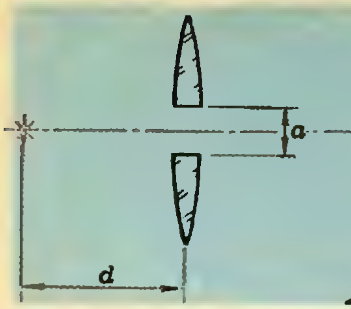


Рис. 11.

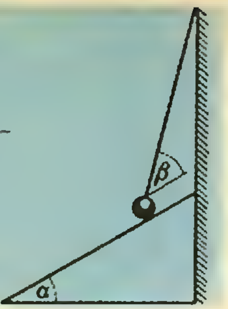


Рис. 12.

$f_2=20$ см от линзы. Определите продольное увеличение изображения.

10. Тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см погружена плоской стороной в воду (рис. 8). На каком расстоянии от линзы сфокусируется параллельный пучок световых лучей? Показатель преломления воды $n=1,33$. Диаметр линзы много меньше фокусного расстояния.

Химический факультет

1. Мотоциклист за время $t=2$ с прошел первую половину тормозного пути. Считая силу торможения постоянной, найдите время, необходимое мотоциклисту для полной остановки.

2. Доска с покоящимся на ее краю бруском двигается со скоростью $v_0=3$ м/с (рис. 9). При внезапной остановке доски брусок начинает скользить по ее поверхности. Найдите коэффициент трения между бруском и доской, если в момент соскальзывания бруска его кинетическая энергия уменьшилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Длина доски $l=0,45$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

3. На легкой нерастяжимой нити длиной $l=0,5$ м подвешен шарик массой $m_1=0,1$ кг. Летевшая горизонтально со скоростью $v=10$ м/с пуля массой $m_2=0,01$ кг попадает в шарик и застревает в нем. Найдите натяжение нити сразу после соударения. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2. Размер шарика мал по сравнению с длиной нити.

4. Электрон влетает в однородное электрическое поле с напряженностью $E=148$ В/м (рис. 10). В некоторый момент времени скорость электрона $\vec{v}$ ($v=2\cdot10^6$ м/с) направлена под углом $\alpha=60°$ к силовым линиям поля. Найдите угол β, под которым будет направлена скорость электрона через промежуток времени $\Delta t=3\cdot10^{-8}$ с. Заряд электрона $e=1,6\times\times10^{-19}$ Кл. Масса электрона $m=9\cdot10^{-31}$ кг. Силой тяжести электрона пренебречь.

5. Тонкая собирающая линза разрезана на две половины, которые раздвинуты на расстояние $a=2$ мм (рис. 11). Найдите расстояние от точечного источника до линзы, если расстояние между действительными изображениями источника $l=6$ мм. Фокусное расстояние линзы $F=40$ см.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Однородный шар массой $m=10$ кг удерживается на гладкой наклонной плоскости веревкой, укрепленной над плоскостью (рис. 12). Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$, угол между веревкой и наклонной плоскостью $\beta=45°$. Определите силу, с которой шар давит на наклонную плоскость.

2. Один моль газа находится при температуре $T_1=400$ К. Газ охлаждается изохорически, вследствие чего его давление уменьшается в $n=3$ раза. Затем газ изобарически расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Изобразите процесс на диаграмме $p-V$ и вычислите произведенную газом работу. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль · К).

3. Амперметр сопротивлением $R_A=2$ Ом рассчитан на токи до $I_A=0,1$ А. Его требуется использовать для измерения токов до $I=10$ А. Сколько метров медной проволоки сечением $S=1,7\cdot10^{-6}$ м^2 необходимо для этого присоединить параллельно амперметру? Удельное сопротивление меди $\rho=1,7\cdot10^{-8}$ Ом · м.

4. Проволочное кольцо радиусом $a=10$ см имеет сопротивление $R=10$ Ом. Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,5$ Тл. При этом вектор индукции поля направлен под углом $\alpha=30°$ к плоскости кольца. Найдите величину среднего тока, протекающего по кольцу при выключении магнитного поля в течение промежутка времени $\Delta t=1$ с.

5. Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны $\lambda=6\times\times10^{-7}$ м. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию $W=10^{-5}$ Дж. Найдите число поглощенных фотонов. Постоянная Планка $h=6,6\cdot10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
И. Н. Сергеев, А. А. Склянкин,
В. М. Чубариков

Наша обложка

Казалось бы, глобус и карта — привычные и хорошо знакомые с детства предметы. Но задумывались ли вы о том, что создание карты и глобуса — исследовательская и техническая задача не только для географов и путешественников?

Оказывается, получение плоского изображения сферической поверхности Земного шара — это интересная и трудная (в известном смысле — даже неразрешимая!) математическая задача. Как ни изощрялись геометры — а среди них были такие выдающиеся ученые, как Меркатор, Эйлер, Гаусс, Чебышев, Ламберт, — придумать теоретически совершенный способ построения плоской карты сферической поверхности они не сумели. Это и не удивительно.

Возьмите обыкновенный лист бумаги и попробуйте им обернуть поверхность глобуса — или сразу появляются складки, или бумага рвется. Почему? Наложению плоскости на сферу (в отличие, скажем, от цилиндра или конуса) препятствует... математическая теорема, утверждающая что *полная кривизна* поверхности не меняется при изгибании; у сферы она положительная, у плоскости (а также у цилиндра и конуса) — нулевая. Вот почему сферу развернуть на плоскость и сделать карту Земли без искажений нельзя.

О теореме Лагранжа

(см. с. 30)

2. а) Для любых; б) для промежутков, содержащихся в промежутках вида $[n;\ n+1[$, где $n\in\mathbf{Z}$; в) для промежутков, не содержащих точку 0 в качестве внутренней точки.

3. 31 с.

4. $c=(b+a)/2$; любые две параболы подобны.

Избранные школьные задачи

1. **Ответ:** 125 %. **Решение.** Пусть m — число мальчиков в кружке, d — число девочек. По условию задачи $m=0{,}8d$, откуда $d=1{,}25m$, поэтому d составляет 125 % от m.

2. **Ответ:** второе больше. *Указание.* Сравните квадраты данных чисел, при этом воспользуйтесь неравенством $\sqrt{1986\cdot1984}=\sqrt{1985^2-1}<1985$.

3. $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1=x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$.

4. **Ответ:** ab. **Решение.** Пусть в трапеции $ABCD$ известны $AB=a$ и $MN=b$ (M — середина CD, прямые AB и MN перпендикулярны, рис. 1). Проведем через M прямую PQ, параллельную A и пересекающую прямые AD и BC в точках P и Q (см. рис. 1). Треугольники CMQ и PMQ равны, поэтому параллелограмм $ABQP$ равновелик исходной трапеции. В этом параллелограмме известны основание $AB=a$ и высота $MN=b$, проведенная к этому основанию.

5. *Указание.* 1) Докажите сначала, что радиус окружности, имеющей общую точку с каждой из сторон треугольника, не меньше радиуса вписанной окружности (при этом равенство достигается только в том случае, когда рассматриваемая окружность является вписанной).

2) Известно, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке G и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины (см. задачу 67 со с. 78 учебника А. В. Погорелова, М.: Просвещение, 1983). Поэтому при гомотетии с коэффициентом $-0{,}5$*) относительно центра G описанная окружность перейдет в окружность радиуса $R/2$, имеющую общую точку с каждой из сторон треугольника (а именно — середину стороны). Следоввтельно, $R/2\geqslant r$. Равенство $R=2r$ достигается только для правильного треугольника.

6. **Ответ:** второе больше. **Решение.** Достаточно проверить, что $\sqrt[3]{1986}-\sqrt[3]{1985}<\sqrt[3]{1985}-\sqrt[3]{1984}$, то есть неравенство

$$\frac{1986-1985}{\sqrt[3]{1986^2}+\sqrt[3]{1986\cdot1985}+\sqrt[3]{1985^2}}<\frac{1985-1984}{\sqrt[3]{1985^2}+\sqrt[3]{1985\cdot1984}+\sqrt[3]{1984^2}}.$$

Справедливость последнего неравенства сразу вытекает из того, что знаменатель первой дроби больше: $\sqrt[3]{1986^2}+\sqrt[3]{1986\cdot1985}+\sqrt[3]{1985^2}>\sqrt[3]{1985^2}+\sqrt[3]{1985\cdot1984}+\sqrt[3]{1984^2}$.

7. **Ответ:** а) тупоугольный; б) остроугольный. **Решение.** Пусть $a\geqslant b\geqslant c$ — длины сторон треугольника. Тогдв при $a^2>b^2+c^2$ треугольник тупоугольный, при $a^2=b^2+c^2$ — прямоугольный, при $a<b^2+c^2$ — остроугольный (это следует, например, из теоремы косинусов).

а) Длины сторон треугольника равны: $\frac{2S}{3}$, $\frac{2S}{4}$, $\frac{2S}{5}$, где S — его площадь, и так как $1/9>1/16+1/25$, то $a^2>b^2+c^2$. б) Пусть медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке G (рис. 2), причем $|AA_1|=3$, $|BB_1|=4$, $|CC_1|=5$. Отложим на продолжении медианы CC_1 за точку C_1 отрезок C_1K, конгруэнтный отрезку GC_1. Четырехугольник $AGBK$ — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Длины сторон треугольника GBK равны 2/3 длин соответствующих медиан, поэтому он прямоугольный (так как $5^2=3^2+4^2$). Отсюда вытекает, что медианы AA_1 и BB_1 перпендикулярны. Из прямоугольных треугольников AB_1G, B_1A_1G и A_1BG легко найти, что $b/2=|AB_1|=\sqrt{52}/3$; $c/2=|A_1B_1|=\sqrt{25}/3$ и $a/2=|A_1B|=\sqrt{73}/3$. Треугольник ABC остроугольный, так как $a^2<b^2+c^2$ $(73<25+52)$. Отметим, что длины сторон треугольника ABC можно найти и из формул, выражающих длины медиан через длины сторон треугольника ABC: $m_a^2=(b^2+c^2)/2-a^2/4$ и т. д.

8. **Ответ:** а) $]-\infty;\ -\sqrt{24}]\cup[\sqrt{24};\ +\infty[$; б) $[-2;\ 2]$.

Указание. Множество значений функций f совпадает с множеством значений параметра a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение. а) Уравнение $2x+\frac{3}{x}=a$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение квадратное уравнение $2x^2-ax+3=0$, то есть когда дискриминант этого квадратного уравнения неотрицателен: $a^2-24\geqslant0$.

б) Уравнение $f(x)=a$ равносильно уравнению

$$(a-1)x^2-(a+2)x+a+2=0 \qquad (1)$$

(так как x^2-x+1 не обращается в 0 ни при каком x). При $a\neq1$ уравнение (1) квадратное и имеет хотя бы один корень при $(a+2)^2-4(a-1)(a+2)\geqslant0$. При $a=1$ уравнение (1) линейное и имеет корень $x=1$.

9. **Ответ:** а) 0; б) 0; в) $\sqrt[12]{2}$.

Указание. а) Воспользуйтесь формулой для производной произведения. б) В этом случае пользоваться формулой для производной произведения нельзя:

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2g(2+h)}{h}=\lim_{h\to0}h\cdot g(2+h)=\lim_{h\to0}h\cdot\lim_{h\to0}g(2+h)=0\cdot g(2)=0.$$

в) Функция $y=f(x)$ имеет вид $f(x)=(x-2)g(x)$. Поэтому $((x-2)g(x))'=g(x)+(x-2)g'(x)$. При $x=2$ получаем $f'(2)=g(2)=\sqrt[12]{2}$.

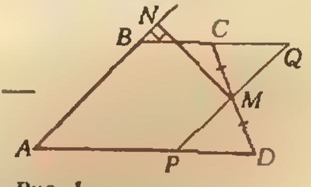


Рис. 1.

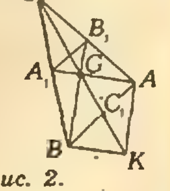


Рис. 2.

---

*) *Гомотетией с коэффициентом $k<0$ называют* преобразование, заключающееся в последовательном выполнении гомотетии с коэффициентом $|k|$ и симметрии относительно одной и той же точки G.

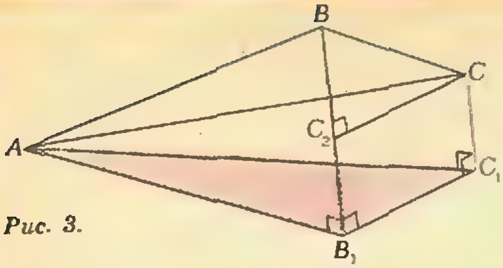


Рис. 3.

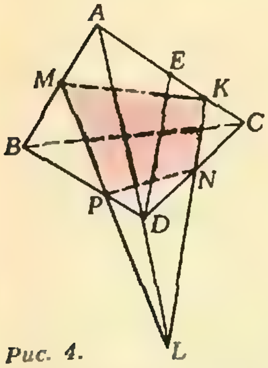


Рис. 4.

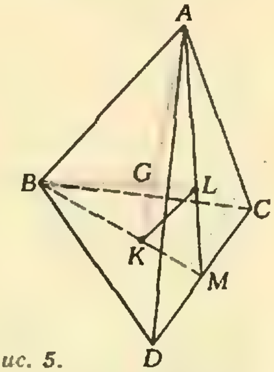


Рис. 5.

10. а) Проведем через сторону AB данного треугольника ABC любую плоскость α, не содержащую вершину C. В плоскости α возьмем такую точку C_1, что треугольник ABC_1 — правильный. При проекции на плоскость α параллельно прямой CC_1 точки A и B перейдут в себя, а точка C — в точку C_1. Таким образом, треугольник ABC спроектируется в правильный треугольник ABC_1. б) Пусть $|BC|=a$, $|AC|=b$ и $|AB|=c$ — длины сторон данного треугольника, при этом $c \geqslant b \geqslant a$. Будем проектировать треугольник ABC на плоскость, проходящую через вершину A (рис. 3). Пусть B_1 — проекция точки B, C_1 — проекция точки C, $|BB_1|=y$, $|CC_1|=x$. Из прямоугольных треугольников ABB_1, ACC_1 и BCC_2, где C_2 — проекция точки C на прямую BB_1, находим длины сторон треугольника AB_1C_1 : $|AB_1|^2=c^2-y^2$, $|AC_1|^2=b^2-x^2$, $|B_1C_1|^2=|CC_2|=a^2-(x-y)^2$. Для того чтобы треугольник AB_1C_1 был правильным, достаточно, чтобы $|AB_1|=|AC_1|$, $|AB_1|=|B_1C_1|$, то есть достаточно, чтобы имела неотрицательные решения система

$$\begin{cases} c^2-y^2=b^2-x^2>0, \\ c^2-y^2=a^2-(x-y)^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x^2+c^2-b^2}, \\ c^2=a^2+2x\sqrt{x^2+c^2-b^2}-x^2, \\ b^2>x^2. \end{cases}$$

Далее, $x^2+c^2-b^2 \geqslant 0$, поэтому достаточно показать, что на промежутке $[0;\,b]$ имеет решение уравнение $c^2-2x\sqrt{x^2+c^2-b^2}+x^2=a^2$. Для этого проще всего убедиться в том, что при $x=0$ левая часть не меньше правой ($c^2 \geqslant a^2$), а при $x=b$ — правая часть не меньше левой ($c^2-2bc+b^2 \leqslant a^2$), в силу неравенства треугольника. Строго говоря, при этом мы пользуемся непрерывностью функции $f(x)=c^2-2x\times \times\sqrt{x^2+c^2-b^2}+x^2$.

11. Ответ: $\sqrt[3]{1/4}$. Указание. Одна из частей — пирамида, подобная данной с коэффициентом подобия $k=\sqrt[3]{1/2}$.

12. Ответ: числа равны. Указание. Логарифмы рассматриваемых чисел по основанию 2 равны: $\sqrt{\log_2 x}=\sqrt{\log_x 2}\cdot\log_2 x$ (поскольку $\log_x 2=1/\log_2 x$).

13. Пусть M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ (рис. 4). Если рассматриваемая плоскость проходит через вершину тетраэдра, то доказываемое утверждение очевидно. Если плоскость не проходит через вершину, то она пересекает одну из сторон AC или BC треугольника ABC (для определенности сторону AC в точке K). Пусть P — точка пересечения этой плоскости с ребром BD. Тетраэдр $ABCD$ разбивается плоскостью α на два многогранника $ADPMKN$ и $CBPMNK$. Разобьем каждый из них на две пирамиды: первый на пирамиды $BMKNP$ и $BKNC$, второй на пирамиды $AMKNP$ и $APND$. У пирамид $BMKNP$ и $AMKNP$ общее основание $MKNP$ и равны высоты, проведенные к этому основанию, поскольку M — середина отрезка AB. Покажем теперь, что объемы тетраэдров $BKNC$ и $APND$ равны. У тетраэдров $ABCD$ и $BKNC$ общая высота, опущенная из вершины B, поэтому отношение их объемов равно отношению площадей оснований:

$$\frac{V_{BKNC}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{KNC}}{S_{ACD}}=\frac{|KC|\cdot|CN|}{|AC|\cdot|CD|}=\frac{1}{2}\,\frac{|KC|}{|AC|}.$$

Аналогично, $\dfrac{V_{APND}}{V_{ABCD}}=\dfrac{S_{PND}}{S_{BCD}}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{|PD|}{|DB|}$. Осталось доказать, что $|KC|:|AC|=|PD|:|DB|$, или (что то же самое) $|KC|:|KA|=|PD|:|PB|$. Если плоскость α параллельна ребру AD, то это очевидно. Если же она пересекает ребро AD в точке L, то оба отношения равны $|DL|:|LA|$: проведем через точку D прямую DE, параллельную KN, тогда $|DL|/|LA|=|KE|/|KA|=|KC|/|KA|$, так как $|KC|=|KE|$. Аналогично $|PD|:|PB|=|DL|:|LA|$.

14. Для доказательства воспользуемся неравенством $a^2+b^2 \geqslant 2bc$: $2a^4+2b^4+2c^4=(a^4+b^4)+ +(b^4+c^4)+(c^4+a^4) \geqslant 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2= =(a^2b^2+b^2c^2)+(b^2c^2+c^2a^2)+(c^2a^2+a^2b^2) \geqslant \geqslant 2ab^2c+2bc^2a+2ca^2b=2abc\,(a+b+c)$.

15. а) Возьмем любые два из рассматриваемых отрезков (скажем AK и BL; рис. 5). Оба они лежат в одной плоскости ABM, где M — середина CD, и поэтому пересекаются. Далее, $|KM|=1/3\,|BM|$ (так как медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1), поэтому $|KL|=1/3\,|AB|$ и $|AG|:|GK|= =|AB|:|KL|=3:1$. Таким образом, любой из рассматриваемых отрезков проходит через точку G, делящую отрезок AK в отношении 3:1, поэтому все они пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершины (напомним, что AK — любой из этих отрезков).

б) (Сравните с задачей 5). Указание. 1) Докажите сначала, что радиус сферы, имеющей общую точку с каждой из граней тетраэдра, не меньше радиуса вписанной сферы (при этом равенство достигается только в том случае, когда рассматриваемая сфера является вписанной). 2) При гомотетии с коэффициентом $-1/3$ относительно центра G из задачи 15 а) описанная сфера перейдет в сферу радиуса $R/3$, имеющую общую точку с каждой из граней тетраэдра (а именно точку пересечения медиан грани). Следовательно, $R/3 \geqslant r$. Равенство достигается только для правильного тетраэдра.

Повторим гидростатику

1. $\Delta p=3\varrho g\Delta h\approx 4$ кПа.
2. $H=(D/d)^2(\varrho-\varrho_0)h/\varrho_0=7{,}2$ см (здесь $\varrho_0= =10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
3. $m=\varrho\pi R^2h-M$.
4. $S=\Delta F/(\varrho g\Delta h)=6{,}25$ см^2.

5. $Q=\lambda\left(M-m\dfrac{\varrho_2-\varrho_0}{\varrho_0-\varrho_1}\,\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$ (здесь ϱ_0 — плотность воды).
6. $l=12{,}5$ см.
7. Скорость сгорания газа определяется разностью давления газа и атмосферного давления. Газ, находящийся в трубах (под небольшим давлением), легче воздуха. Поэтому уменьшение давления воздуха при подъеме на четырнадцатый этаж больше, чем уменьшение давления газа. Значит, на верхнем этаже газ должен гореть сильнее.
8. Сила давления на крышку увеличится.

Московский государственый университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\{-3;\ -1\}$.

2. $\dfrac{13}{4}$. Указание. Искомый корень находится среди корней уравнения $\cos 2\pi x=0$, то есть среди чисел $x_m=\dfrac{1+2m}{4}$ $(m\in\mathbf{Z})$. Заметим, что $x_6=\dfrac{13}{4}<\sqrt{13}<\dfrac{15}{4}=x_7$, а расстояния от остальных корней до $\sqrt{13}$ больше $\dfrac{1}{2}$. Так как x_7 не удовлетворяет исходному уравнению $\left(\operatorname{tg}\dfrac{15\pi}{4}=-1\right)$, искомым корнем является x_6.

3. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\approx 1{,}2$. Указание. Можно считать, что луч DE пересекает катет BC (рис. 6). Точка E лежит на окружности, описанной около $\triangle ABC$. Поскольку $|BC|>|EC|$, $|AC|=|EC|=1$. Кроме того, $\widehat{ADC}=\widehat{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$ и поэтому $\widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{8}$. Отсюда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\times\times|BC|=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\approx 1{,}20\pm 0{,}01$.

4. $\left\{\left(0;\ \log_2\dfrac{8}{11}\right);\ \left(\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{3+\sqrt{8}}{2};\ 2+\log_2(3-\sqrt{8})\right)\right\}$

Указание. Второе уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x(3x+y-1)=0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$$

Поэтому исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\text{а)}\ \begin{cases} x=0,\\ 2+2^{y-2}=3\cdot 2^{y}.\end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x=1-y,\\ x\geqslant -1,\\ 2^{3x+1}+2^{y-2}=3\cdot 2^{y+3x}.\end{cases}$$

5. 4. Решение. Из условия сразу следует, что диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, и треугольники ABD и CBD — равнобедренные. Поскольку многогранник $ABCDA'B'C'D'$ имеет 6 граней, плоскость α пересекает каждую грань по отрезку, концы которого не совпадают с вершинами многогранника. Обозначим вершины шестиугольника, лежащие на сторонах основания $ABCD$, через K и M, на сторонах четырехугольника $A'B'C'D'$ — через K' и M', и на боковых ребрах DD' и BB' — *через P и T соответственно (для определенности* считаем вершину P соседней с вершинами K и K'). Поскольку $KMTM'K'P$ — правильный шестиугольник, прямая PT параллельна прямым KM и $K'M'$ и, следовательно, параллельна плоскостям $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и одинаково удалена от них. Следовательно, точки P и T — середины ребер DD' и BB' соответственно, а PT — средняя линия трапеции $BB'D'D$, поэтому прямые KM, $K'M'$, PT, $D'B'$ и DB — параллельны. Пусть E' — точка пересечения диагоналей основания $A'B'C'D'$, H — точка пересечения стороны KM с диагональю AC, H' — точка пересечения стороны $K'M'$ с диагональю $A'C'$. Возможны два случая расположения плоскости α: в первом случае точка H лежит между точками A и E, а во втором — между E и C (рис. 7).

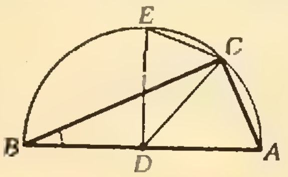


Рис. 6.

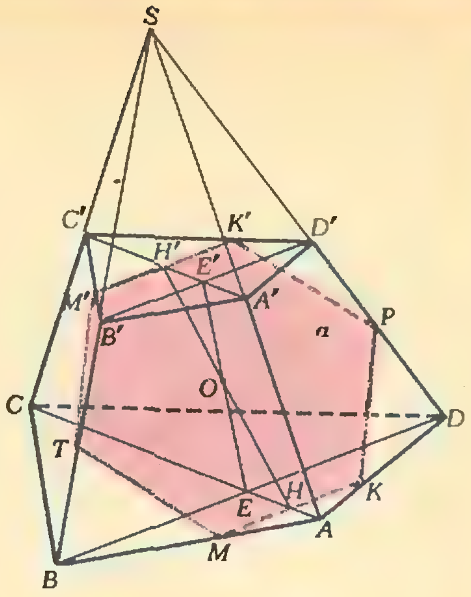


Рис. 7.

Докажем, что возможен лишь первый случай. Пусть O — точка пересечения плоскости $AA'C'C$ с диагональю PT. Треугольники HEO и $H'E'O$ конгруэнтны, поскольку $\widehat{HOE}=\widehat{H'OE'}$, $|EO|=|OE'|$, $|HO|=|H'O|$. *Следовательно,* $|HE|=|H'E'|$. Таким образом, у трапеций $BDKM$ и $B'D'K'M'$ конгруэнтны высоты HE и $H'E'$ и меньшие основания KM и $K'M'$. Поскольку эти трапеции равнобедренные (они симметричны относительно диагоналей AC и $A'C'$) и $|BD|>|B'D'|$, то $\widehat{KDB}<\widehat{K'D'B'}$. Поэтому второй случай невозможен (иначе $\widehat{CDB}<\widehat{ADB}$, что противоречит условию $|AE|<|CE|$).

Пусть $\dfrac{|CE|}{|AE|}=m$. Так как $\triangle BCD\backsim\triangle K'C'M'$, а $\triangle BAD\backsim\triangle KAM$, $\dfrac{|C'H'|}{|CE|}=\dfrac{|K'M'|}{|BD|}=\dfrac{|KM|}{|BD|}=\dfrac{|AH|}{|AE|}$. Поэтому $\dfrac{|C'H'|}{|AH|}=m$. Далее, $|AH|+|HE|=|AE|=\dfrac{1}{m}|CE|=\dfrac{2}{m}|C'H'|=\dfrac{2}{m}\times(|C'H'|+|H'E'|)=2|AH|+\dfrac{2}{m}|EH|$. Отсюда

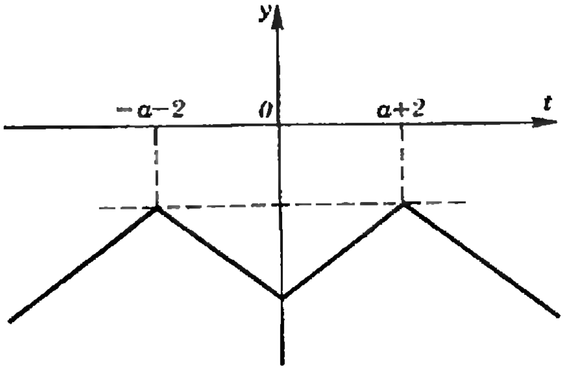


Рис. 8.

следует, что $|AH|=\frac{m-2}{2m-2}\,|AE|$. Значит, $\frac{|KM|}{|BD|}=\frac{|AH|}{|AE|}=\frac{m-2}{2m-2}$, но $|KM|=\frac{1}{2}\,|PT|=\frac{1}{4}\times(|B_1D_1|+|BD|)=\frac{3}{8}\,|BD|$. Поэтому $\frac{m-2}{2m-2}=\frac{3}{8}$, то есть $m=5$, и $|AE|=\frac{1}{6}\,|AC|=\frac{3}{2}$. Итак, $S_{ABD}=\frac{1}{2}\,|AE|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{3}=4$.

Вариант 2

1. $x=0$; $x<-\sqrt{3}$.
2. 40 м^3/ч и 30 м^3/ч.
3. $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2\pi k}{3}\quad(k\in Z)$.
4. $\frac{1}{12}$. Указание. Пусть K, L, M, N — середины ребер AB, BC, CD и AD соответственно. Пирамида $SKLMN$ — правильная, причем длины всех ее ребер равны $\sqrt{2}$. Плоскости SKN и SLM, а также плоскости SKL и SMN пересекаются по прямым l_1 и l_2 соответственно, проходящим через точку S. Обе эти прямые параллельны плоскости $ABCD$. Поскольку $A'B'C'D'$ — квадрат, пары его противоположных сторон параллельны прямым l_1 и l_2 соответственно. Отсюда следует, что плоскость $A'B'C'D'$ параллельна плоскости основания. Поэтому $|SA'|=|SB'|=|SC'|=|SD'|$, высота пирамиды $SABCD$ проходит через центр квадрата $A'B'C'D'$ и поэтому точка S' совпадает с центром квадрата $ABCD$. Поскольку все ребра пирамиды $S'A'B'C'D'$ равны между собой, эта пирамида подобна пирамиде $SKLMN$, причем коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $V_{A'B'C'}=\frac{1}{8}\,V_{KLMN}=\frac{1}{8}\,\frac{1}{3}\,(\sqrt{2})^2\times1=\frac{1}{12}$.
5. $-2\pm\sqrt{3}$. Указание. Ясно, что $a\neq-2$. Положив $t=x+2$, приведем неравенство к виду

$$f(t)=-\frac{1}{2}|a+2|\,(|t+a+2|+|t-a-2|)+\frac{1}{|a+2|}|t|\geqslant-2.\quad(*)$$

При $t<\min\{a+2,\,0,\,-a-2\}$ из $(*)$ получаем

$$\left(|a+2|-\frac{1}{|a+2|}\right)t\geqslant-2.$$

Если $|a+2|-1/|a+2|\leqslant0$, то есть при $-3\leqslant a\leqslant-1$, неравенство $(*)$ справедливо при всех $t\leqslant t_0$. Следовательно, $|a+2|-1/|a+2|>0$. При таких a график функции $f(t)$, стоящей в левой части $(*)$, имеет вид, показанный на рисунке 8. Поэтому $(*)$ может выполняться для двух значений t лишь тогда, когда $f(-a-2)=f(a+2)=-2$.

Вариант 3

1. $]1;\,3-\sqrt{3}[\,\cup\,]3+\sqrt{3};\,\infty[$.
2. $x=\pi(2k+1)\quad(k\in Z)$.
3. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.
4. $\frac{3\sqrt{14}}{16}\,a^2$; одна. Указание. Пусть φ — угол, образуемый линией пересечения плоскости сечения α с плоскостью $ABCD$ с диагональю AC. Можно подсчитать, что $\sin\varphi=1$. Поэтому плоскость α пересекает плоскость $ABCD$ по перпендикуляру к AC, проведенному через точку A. Отсюда следует единственность плоскости α, а также перпендикулярность диагоналей четырехугольника $ALMN$ (L и N — точки пересечения плоскости α с ребрами SB и SD соответственно).
5. $\begin{cases}x=4-\frac{1}{2}\,y^2,\\ y\in\mathbf{R};\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\,(n-y^2),\\ y=1\pm\sqrt{5+\frac{h}{2}}\end{cases}$

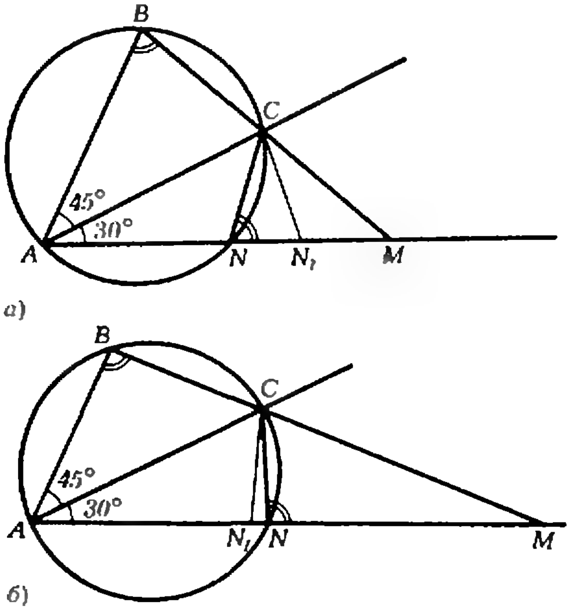
$(n\in\mathbf{Z},\ n\geqslant-10,\ n\neq8)$.

Указание. Второе уравнение системы приводится к виду $\sqrt{(x-3)^2+4}\,\sin\pi(y^2+2x)=-2\sin\pi(y^2+2x)\cdot\cos\pi(3x-y^2)$, поэтому либо $\sin\pi(y^2+2x)=0$, либо $\sqrt{(x-3)^2+4}=-2\cos\pi(3x-y^2)$. Таким образом, либо $y^2+2x=n$, $n\in\mathbf{Z}$, либо $x=3$, $\cos\pi(3x-y^2)=1$.

Вариант 4

1. 10/7 м^3/ч; 8/7 м^3/ч; 4/7 м^3/ч.
2. $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n\ (n\ \ \mathbf{Z})$.
3. $]-\infty,\,-3[\,\cup\,]3;\,+\infty[$.
4. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,b-\frac{\sqrt{2}}{2}\,c$. Решение. Пусть R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности, $|AN|=x$ (рис. 9). По теореме синусов $|BC|=2R\sin\hat{A}=R\sqrt{2}$; $|NC|=2R\sin30^\circ=R$.

По теореме косинусов $2R^2=|BC|^2=b^2+c^2-bc\sqrt{2}$, $|NC|^2=R^2=x^2+b^2-bx\sqrt{3}$. Отсюда следует, что x удовлетворяет уравнению



а)

б)

Рис. 9.

$$x^2+b^2-bx\sqrt{3}=\frac{b^2+c^2-bc\sqrt{2}}{2},$$

или $2x^2-2bx\sqrt{3}+b^2-c^2+bc\sqrt{2}=0.$ (*)

Полученное уравнение имеет положительные корни

$$x_{1,2}=\frac{b\sqrt{3}\pm\sqrt{b^2-2bc\sqrt{2}+2c^2}}{2}=\frac{b\sqrt{3}\pm(b-c\sqrt{2})}{2}.$$

Докажем, что условию задачи удовлетворяет лишь корень $x_1=\frac{b\sqrt{3}+(b-c\sqrt{2})}{2}$. В самом деле, если $\angle B$ острый (см. рис. 9, *а*), то $b<c\sqrt{2}$ и $\widehat{CNM}=\widehat{B}$ — тоже острый. Пусть $N_1=N$ — точка на прямой AM, для которой $|CN_1|=|CN|=R$. Число $|AN_1|$ удовлетворяет уравнению (*), но $|AN_1|>|AN|$ $\left(\widehat{B}<\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому решением задачи служит меньший корень уравнения (*), то есть x_1. Если же $\angle B$ тупой (см. рис. 9, *б*), то $(b>c\sqrt{2})$, и точка N_1, лежит ближе к точке A', чем точка N (рис. 9, *б*), поэтому мы должны выбрать больший из корней уравнения (*), то есть снова x_1. Если $\widehat{B}=\pi/2$, то $b=c\sqrt{2}$ и $x_1=x_2$.

Отметим, что при рассмотренном здесь способе решения мы не пользовались условием $b\geqslant c$.

5. $\left[-\frac{1}{20};0\right]$. Указание. Выполнив замену $y=-\left(x+\frac{x^2}{4}\right)$, $b=5a$, получим систему $\sqrt{b+\sqrt{b+y}}=y$, $0\leqslant y\leqslant 1$, которая равносильна системе

$$\begin{cases} 1\geqslant y\geqslant 0, \\ y^2\geqslant b, \\ b+y=(y^2-b)^2. \end{cases}$$

Решая уравнение этой системы *относительно* b, получим $b=y^2+y+1$ или $b=y^2-y$.

Таким образом, задача свелась к исследованию двух систем:

$$\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y^2\geqslant b, \\ y^2+y+1-b=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y^2\geqslant b, \\ y^2-y-b=0, \end{cases}$$

первая из которых несовместна, а вторая имеет решение при $-\frac{1}{4}\leqslant b\leqslant 0.$

Вариант 5

1. $x_1=\frac{\pi}{6}(2m+1)$; $x_2=(-1)\frac{2\pi}{3}+4\pi n$ $(m, n\in \mathbf{Z})$.

2. $\sqrt{7}$.

3. 1.

4. 8. Указание. Пусть MK данный отрезок (на рисунке 10 показано сечение пирамиды «диагональной» плоскостью ASC). Поскольку $\triangle SKL\cong\triangle LMO$ и $(MK)\parallel(OT)\parallel(AS)$, $|SK|=|KT|=\frac{1}{2}|TC|$. Отсюда следует, что $|SK|=\frac{1}{4}|SC|$, поэтому $|AS|=\frac{4}{3}|MK|=8$.

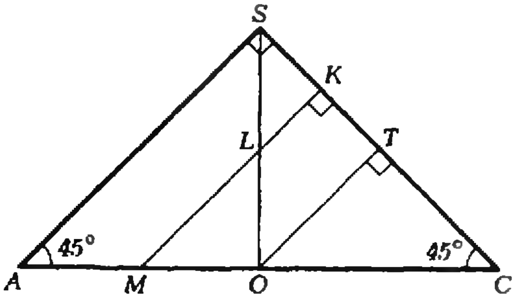


Рис. 10.

5. $a\leqslant -5-4\sqrt{2}$; $a>0$. Указание. Из второго уравнения системы следует, что $y=\frac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$. Подставляя это выражение в первое уравнение, приходим к уравнению относительно x:

$$(a-2)x^2-(a-1)x+1=2(x+1)|x+1|.$$

Возможны два случая $x>-1$ и $x<-1$. В первом случае получаем уравнение $(a-4)x^2-(a+3)x-1=0$, которое имеет корень, *больший* -1, при $a\leqslant -5-4\sqrt{2}$ и $a\geqslant -5+4\sqrt{2}$. Во втором случае получается уравнение $ax^2+(5-a)x+3=0$, имеющее корень, *меньший* -1, при $0<a\leqslant 11-4\sqrt{6}$.

Вариант 6

1. $\left\{\log_3\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}$.

2. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi (k\in\mathbf{Z})$.

3. $y_{\min}=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{53}{4}$, $y_{\max}=f(-1)=-1$.

4. $\sqrt{10}$. Указание. По условию $S_{ABC}-S_{BPQ}=\frac{1}{2}4\cdot 5\cdot\sin\widehat{B}-\frac{1}{2}2\cdot 3\cdot\sin\widehat{B}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$. Поэтому $\sin\widehat{B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\widehat{B}=\frac{1}{4}$.

5. $b=-\frac{1}{4}$. Указание. Если (x_0, y_0) — решение данной системы, то (y_0, x_0) — тоже решение. Поэтому $x_0=y_0$.

Вариант 7

1. 271.

2. 20 м^3.

3. $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

4. $\frac{75\sqrt{7}}{4}$. Указание. $S_{A_1BA_2C}=\frac{1}{2}|BC|\times|A_1A_2|$. Для нахождения $|BC|$ воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{2}|BC|$ — высота треугольника BO_1O_2, причем $|O_1O_2|=6$ и $S_{BO_1O_2}$ находится, например, по формуле Герона.

5. 3. Указание. Первые три члена прогрессии имеют вид: 5, $5q$, $5q^2$. Из условия следует неравенство $15q-\frac{5q^2}{2}>20$.

6. 248, 436, 624, 812. Указание. Если a, b, c — цифры данного числа, то $c=2b$, $b<4$ и $2b+a$ делится на 10. Значит, a четно, причем $2b+a=10$.

7. $\left(\frac{1}{2}-\log_3 2, 2\log_3 2\right)$. Указание. Из второго неравенства следует, что $y\geqslant 2-\log_3 4-4x$. Заменив y в первом неравенстве на правую часть полученного неравенства, приходим к неравенству $3^{-2x+1-\log_3 4}+4\cdot 3^{2x-1}\leqslant 1$. Положив в этом неравенстве $z=3^{2x-1}$, получим $4z+\frac{1}{4z}\leqslant 2$, откуда $4z=1$.

Физика

Физический факультет

1. $v_0=2\sqrt{sl/(t_2^2-t_1^2)}=15$ м/с$=54$ км/ч.

2. $\mu=1/3\ \mathrm{tg}\,\alpha$.

3. $N=(m(v-v_0)/t+mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))v$.

4. $s=(1-T_2/T_1)qV/F=5\cdot 10^5$ м$=500$ км.

5. $m=(\varphi_1\rho_1-\varphi_2\rho_2)V=86$ кг.
6. $U=U_1+4\rho lP/(\pi d^2U_1)\approx 220$ В.
7. $B=\frac{1}{vl}\sqrt{\frac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}$.
8. $q=CS\Delta B/\Delta t=10^{-7}$ Кл.
9. $z=\sqrt{R^2-h^2}+\frac{\sqrt{R^2-n^2h^2}\sqrt{R^2-h^2}+nh^2}{n\sqrt{R^2-h^2}-\sqrt{R^2-n^2h^2}}=$
$=14{,}3$ см.
10. $(H/h)_{\min}=2$.

Механико-математический факультет

1. $v=t\sqrt{ag(1+a/g)}=310$ м/с.
2. $H'=\frac{2gH^2}{(\Delta P/m-\sqrt{2gH})^2}\approx 0{,}07$ м.
3. $\alpha_m=\arccos(1-2\pi^2v^2/(g^2T^2))\approx 60°$.
4. $\Delta U=C\Delta T-(p_0+mg/S)V\Delta T/T=370$ Дж.
5. $T_1-T_3=(T_2T_4-T_3^2)/T_3=-117$ К.
6. $r=R(q_1-q_2)/q_2=22{,}5$ Ом.
7. $\mathcal{E}=U_1U_2/(3U_1-2U_2)=40$ В.
8. $q=P\eta/(c\rho\Delta T)=4\cdot10^{-5}$ м³/с.
9. $d=F(1+gt^2/(4\pi^2n^2l))\approx 4$ м.
10. $v_2=v_1(d+l)/(d-l)=1$ м/с.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $E_k=\frac{m_1m_2\omega^2l^2}{2(m_1+m_2)}=6$ Дж.
2. $A=Mv\Delta v+Mgl=1{,}25\cdot10^4$ Дж.
3. $v=\sqrt[3]{2\eta P/(\rho S)}\approx 6{,}4$ м/с (здесь $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).
4. $M=m(1-k)/(2k)-p_0S/g\approx 2{,}1$ кг.
5. $E=4F(1/q_1-1/q_2)=3\cdot10^5$ Н/Кл.
6. $q=\mathcal{E}CR/(2R+3r)=1{,}2\cdot10^{-4}$ Кл.
7. $m=4d\rho l^2(1+k)^2P/(kU^2)\approx 77$ кг.
8. $\Delta R=d\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=1{,}1$ см.
9. $k=(f_1-F)(f_2-F)/F^2=1{,}4$.
10. $f=Fn=13{,}3$ см.

Химический факультет

1. $t_{\text{общ}}=t(2+\sqrt{2})=6{,}8$ с.
2. $\mu=v_0^2/(3lg)=0{,}66$.
3. $T=(m_1+m_2)g+m_2^2v^2/(l(m_1+m_2))=1{,}28$ Н.
4. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha+eE\Delta t/m}\approx 45°$.
5. $d=Fl/(l-a)=0{,}6$ м.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $F=mg(\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)=36$ Н.
2. $A=(n-1)RT_1/n=2{,}2\cdot10^3$ Дж.
3. $l=I_AR_AS/(\rho(I-I_A))=2$ м.
4. $I=(B\pi a^2\sin\alpha)/(R\Delta t)\approx 0{,}8$ мА.
5. $n=W\lambda/(hc)=3\cdot10^{13}$.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1984, № 10)

Задание 19 (*Ф. Бондаренко, М. Либуркин*, 1950 г.). **1. Kh4! Kpg1 2. Kf3+Kpg2 3. K:h2 Kp:h2 4. e5!** Но не 4. Kpe6? Kpg3 5. Kpd7 Kpf4 6. Kpc8 Kpe5 7. Kpb7 Kpd6 8. Kp:a7 Kpc7 с ничьей. **4...C:e5 5. Kpe6!!** Черный слон помешает собственному королю! **5...Kpg3 6.Kpd7 Kpf4 7. Kpc8! Kpf5 8. Kpb7** и белые выигрывают. Другой вариант: **4...Cc3 5. e6 Cb4 6. Kpe5 Kpg3 7. Kpd5 Kpf4 8. Kpc6 Kpe5 9. Kpb7 Kpd6 10. e7** и снова белые выигрывают. Однако после 1. Ke1? Cc3! 2. Kf3 Kpg2 3. K:h2 Kp:h2 4. e5 Cb4 5. e6 Kpg3 6. Kpe5 Cf8 получается ничья.

Задание 20 (М. Левит, 1933 г.). **1. Kpe4 Cd8 2. b6! Kpa6!** (2...Kp:b6 3. Kpf5) **3. Kpe5! Cg5 4. b7 Cc1! 5. Kpd6! C:b2 6. Kpc7! Ce5+ 7. Kpc6! Ca1 8. b7 Kpa7 9.Kpc7** и белые выигрывают.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, В. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Виноделова, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото представили:
А. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор В. П. Сорокина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.12.84. Подписано к печати 1.02.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,51. Т-01262
Тираж 176 662 экз. Цена 40 коп. Заказ 3396

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПАРАДОКСЫ ПЕШЕЧНОГО ЭНДШПИЛЯ

Мы уже рассказывали о знаменитом этюде Рети, одном из самых парадоксальных на шахматной доске.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Крh8, п. c6; черные: Крa6, п. h5. Ничья.

Белых выручает своеобразная геометрия шахматной доски. Король догоняет пешку «h», двигаясь за ней не по прямому пути, а зигзагом — **1. Крg7! h4 2. Крf6! Крb6** (2... h3 3. Крe7 h2 4. c7) **3. Крe5! Кр:c6** (3...h3 4. Крd6 h2 5. c7) **4. Крf4**, и пешка остановлена.

Парадоксальная идея, принадлежащая Рети, вдохновила многих этюдистов, но пределов совершенствованию, видимо, нет. В «Кванте» № 10 за 1983 год мы привели несколько классических примеров на эту тему. А вот этюды, составленные позднее.

Т. Горгиев, 1967 г. Белые: Крg4, п. п. f5, h7; черные: Крg7, п. п. d7, h6. Ничья.

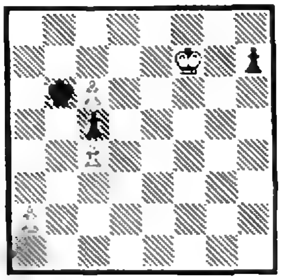
На доске материальное равенство, но если черные пешки спокойно идут вперед, то белым, как будто, не на что надеяться. И все же спасение есть — для этого дважды применяется маневр Рети! **1. f6+! Кр:h7 2. Крf5! Крg8 3. Крg6 d5 4. Крf5! h5 5. Крe5! Крf8 6. Кр:d5 h4 7. Крe4** с ничьей.

Э. Погосянц. Белые: Крh5, п. п. c6, f5; черные: Крa7, п. п. f7, g7, h6. Ничья.

Позиция напоминает этюд Рети, но содержит дополнительные нюансы. **1. f6! gf** (1... g5 2. Кр:h6 g4 3. Крg7 g3 4. Кр:f7 g2 5. Крe7 g1Ф 6. f7 с ничьей) **2. Кр:h6 Крb6 3. Крg7! f5 4. Крf6! f4 5. Крe5 f3 6. Крd6! f2 7. c7 f1Ф 8. c8Ф Фf6+ 9. Крd5! Ничья.**

В приведенном варианте игра не сильно отличается от решения первоисточника, но есть и совсем другой вариант — 2...Крb8. На сей раз 3. Крg7 не спасает — 3...f5 **4. Крf6 f4 5. Крe5 f3 6. Крd6 Крc8!**, и черные берут верх. Но у белых находится иной путь: **3. Крh5!! Крc7 4. Крg4 Кр:c6 5. Крf5** с ничьей.

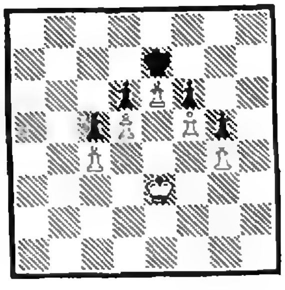
Следующее произведение, основанное на той же парадоксальной идее Рети, завоевало первый приз в этюдном конкурсе 1982 года.



М. Зинар, 1982 г. Ничья.

Кажется, что пешку «h» легко задержать, но после 1. Крf6? Кр:c6 2. Крg5 Крb6 3. Крh6 Крa5 4. Кр:h7 Крb4 5. Крg6 Кр:c4 6. Крf5 Крc3 7. Крe5 c4 8. a4 Крb4 черные выигрывают. **1. Крg7!!** Удивительно, белые как будто подгоняют проходную пешку противника. **1...h5 2. Крf6!** — теперь в погоню по Рети. **2...h4 3. Крe5! Кр:c6 4. Крf4 Крb6 5. Крg4 Крa5 6. Кр:h4 Крb4.** По сравнению с ложным следом 1. Крf6 белый король находится сейчас не на h7, а на h4, что весьма существенно. **7. Крg3!!** Легкомысленное 7. Крg4 проигрывает — 7...Кр:c4 8. Крf3 Крd3! 9. a4 c4 10. a5 c3 11. a6 c2 12. a7 c1Ф 13. a8Ф Фh1+. **7...Кр:c4 8. Крf2! Крc3 9. Крe2!** Заключительная тонкость: после 9. Крe1 (e3) черная пешка превращается с шахом. **9...c4 10. a4. Ничья.**

Рассмотрим теперь еще один парадоксальный пешечный эндшпиль, иллюстрирующий шахматную игру ЭВМ.



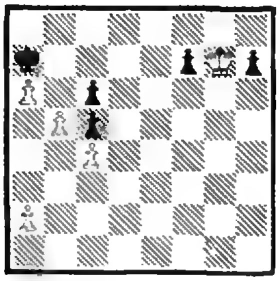
Г. Берлинер. Белые начинают и выигрывают.

По мнению автора позиции, ее пока не в состоянии выиграть белыми ни одна шахматная программа. Действительно, все разработанные алгоритмы для ЭВМ основаны на переборе вариантов и не предусматривают составления плана игры, особенно в эндшпиле. Если говорить об этой позиции, то даже шахматист невысокой квалификации быстро сообразит, что белому королю следует направиться к пешке d6 и завоевать ее. А что же ЭВМ? Для того чтобы обнаружить этот маневр королем, машине надо перебрать варианты на целых 8 ходов, то есть 16 полуходов. Это раза в три больше, чем доступно современным ЭВМ!

Напомним, что в большинство играющих программ, наряду с обычным перебором, заложен так называемый ФВ — форсированный вариант, при котором перебор производится на большее число ходов,— шахи и взятия фигур как бы не идут в счет. Однако в нашем эндшпиле ФВ не сработает: необходимые ходы белого короля хотя и просты, но являются «тихими». Любопытно, что, даже случайно блуждая по доске, белый король никогда не приблизится к пешке d6. Принцип централизации, заложенный в оценочную функцию, всякий раз заставит короля вернуться на вертикали «d» и «e». Для машин здесь ничейный исход неизбежен!

Этот пример хорошо показывает ограниченные возможности шахматного автомата.

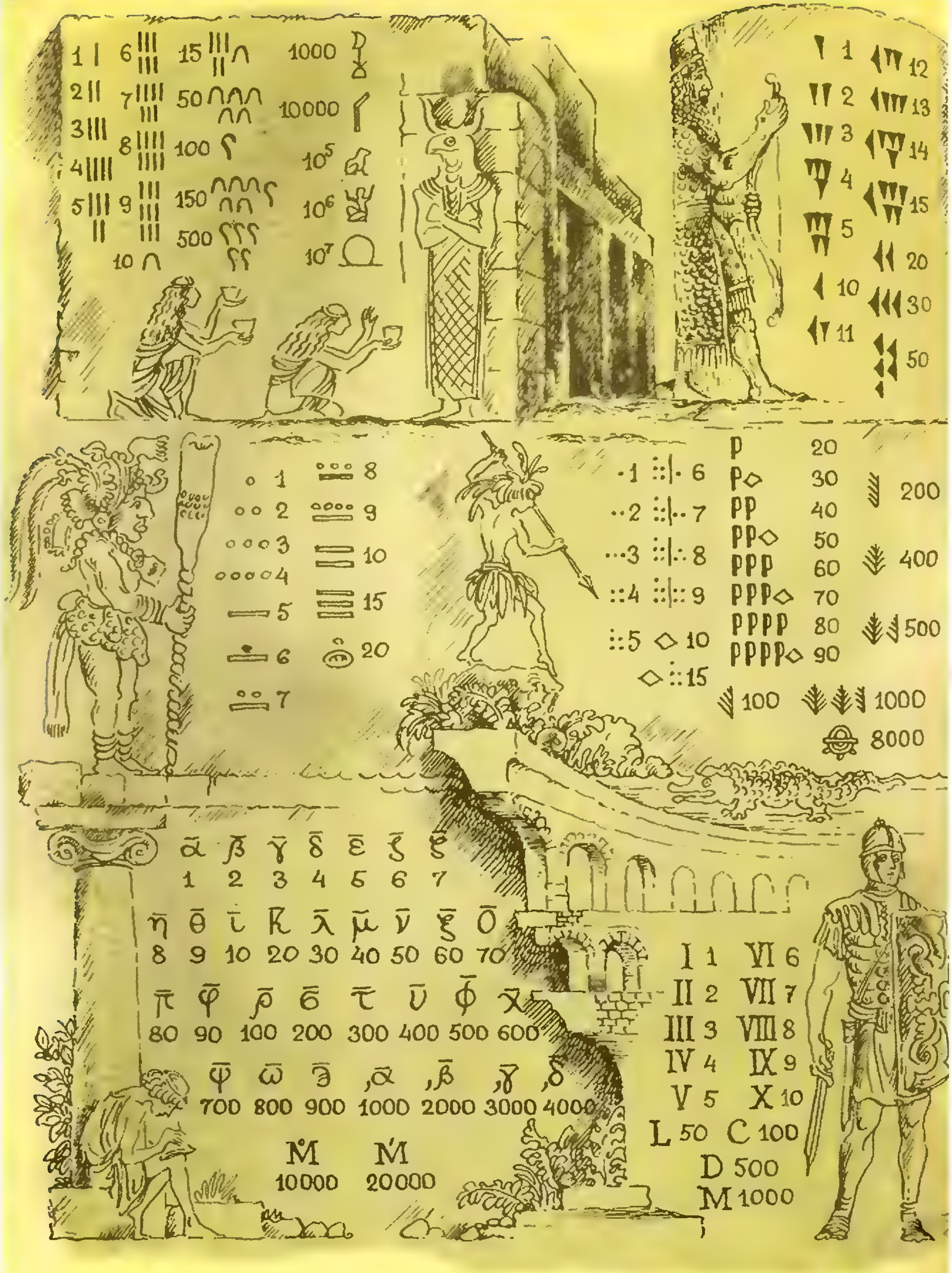
Конкурсные задания



3. Белые начинают и делают ничью.

4. Белые: Крa4, п. п. f3, h2; черные: Крh5, п. п. a3, c3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 50 100 150 500 1000 10000 10⁵ 10⁶ 10⁷
1 2 3 4 5 10 11 12 13 14 15 20 30 50
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 20
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15
20 30 40 50 60 70 80 90 100 200 400 500 1000 8000
α β γ δ ε ς ζ
1 2 3 4 5 6 7
η θ ι κ λ μ ν ξ ο
8 9 10 20 30 40 50 60 70
π ϙ ρ σ τ υ φ χ
80 90 100 200 300 400 500 600
ψ ω ϡ ,α ,β ,γ ,δ
700 800 900 1000 2000 3000 4000
M 10000
M 20000
I 1
II 2
III 3
IV 4
V 5
VI 6
VII 7
VIII 8
IX 9
X 10
L 50
C 100
D 500
M 1000

Здесь показаны системы записи чисел, придуманные людьми в разные эпохи. Слева вверху — числовые иероглифы древнего Египта; правее — клинописные записи чисел древнего Вавилона (2500—2000 г. до н. э.). Во втором ряду слева — числа в записи древних племен индейцев Майа (на нынешней территории Перу); правее — записи чисел ацтекских племен (XI—XVII века). В нижнем ряду слева — древнегреческая алфавитная запись чисел и рядом — знакомая вам древнеримская система счисления.

Мы предлагаем читателями записать число 1985 в каждой из этих систем счисления.

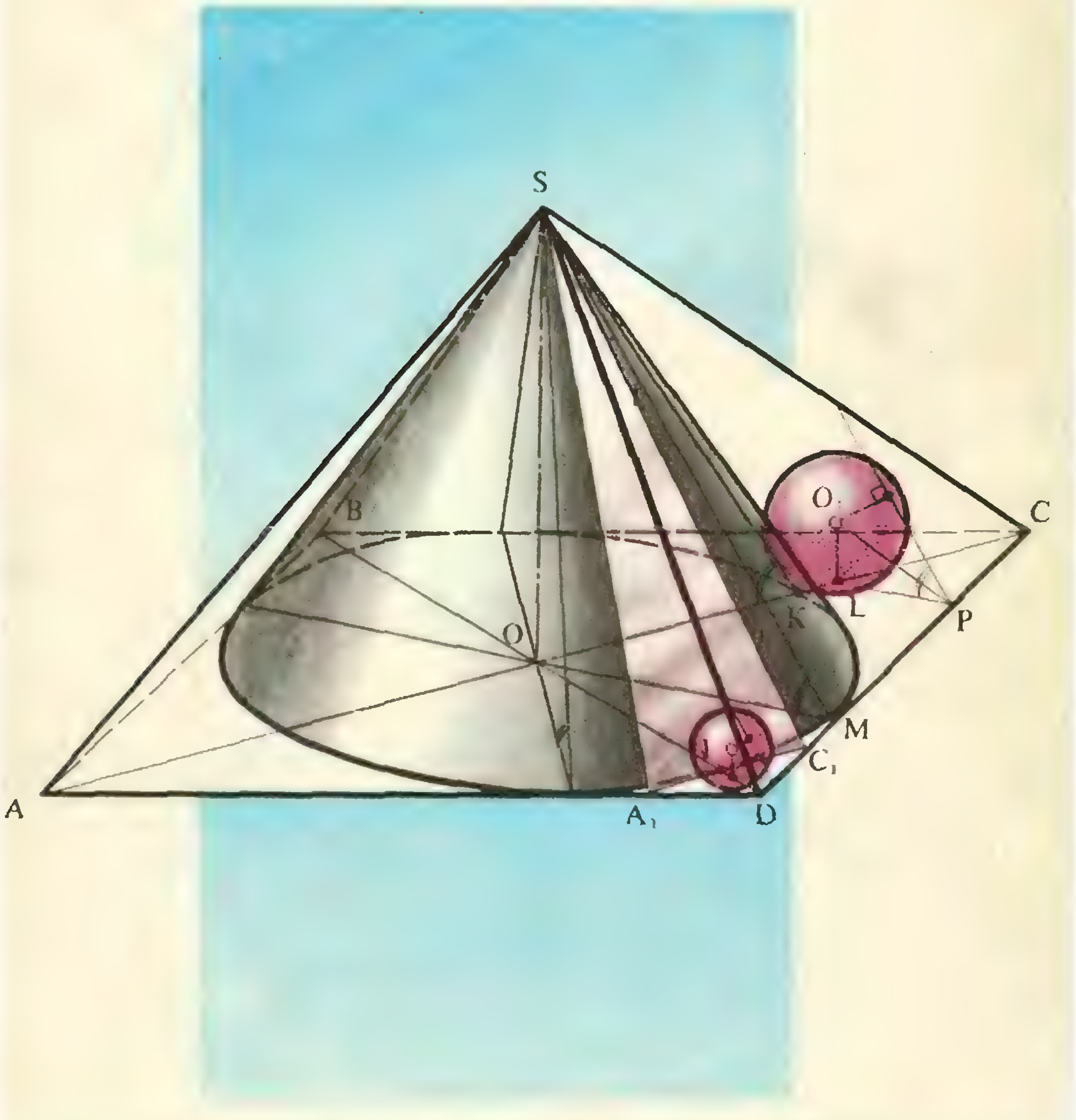
Цена 40 коп.

Индекс 70465

Не секрет, что стереометрические задачи для многих абитуриентов становятся камнем преткновения на экзаменах. Анализ экзаменационных работ показывает, что одна из причин этого — недостаточное пространственное воображение. Чтобы помочь читателям развить у себя это важное качество, мы будем публиковать на четвертой странице обложки чертежи (и, конечно, условия) к многофигурным стереометрическим задачам. Решения, вместе со вспомогательными чертежами, можно найти в следующем номере журнала. Разумеется, сначала читателям рекомендуется порешать задачу самостоятельно; при этом могут пригодиться дополнительные построения, которые иногда будут сделаны на общем чертеже.

Подчеркнем, что наши «красивые» чертежи — это своего рода идеал, который надо научиться, скорее, воображать, чем воспроизводить самостоятельно. В подавляющем большинстве случаев, держа в уме общую картину, можно обойтись гораздо более приблизительным чертежом всей конфигурации, а чаще даже только чертежами каких-то ее сечений или проекций.

Задача. Около конуса описана пирамида, основанием которой служит ромб; длины диагоналей ромба 6 и 8 см. Найти радиусы сфер, касающихся боковой поверхности конуса и вписанных в трехгранные углы при основании пирамиды, если ее высота имеет длину, равную 1 см.



НОМЕР
3

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **3** 1985

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТ.ИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Л. С. Понтрягин.* Обобщение чисел	*L. S. Pontriagin.* Generalized numbers
6	*В. А. Фабрикант.* Парадокс Вавилова	*V. A. Fabrikant.* The Vavilov paradox
8	*А. С. Штейнберг.* Репортаж из мира сплавов	*A. S. Shteinberg.* Report from the world of alloys
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
15	*А. В. Бялко.* Пинг-понг... в умывальнике	*A. V. Byalko.* Ping-pong... in the sink
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
18	Физика 9, 10	Physics 9, 10
22	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
23	Задачи	Problems
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
24	Победители конкурса «Задачник «Кванта»	Kvant problem solving contest prizewinners
25	Задачи М911—М915; Ф923—Ф927	Problems M911—M915; P923—P927
28	Решения задач М891—М895; Ф903—Ф907	Solutions M891—M895; P903—P907
39	*Н. Б. Васильев.* Задача о восьми точках	*N. B. Vasiliev.* The eight-point problem
41	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
43	*И. Г. Габович. П. И. Горнштейн.* Сколько корней имеет уравнение?	*I. G. Gabovich, P. I. Gornshtein.* How many roots does the equation have?
	Информация	**Information**
47	Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа»	Latvian open olympiads and the "Alpha" summer school
50	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(55)*	**Our cover page** *(55)*
	«Квант» улыбается *(49)*	**Kvant smiles** *(49)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Возвращение фигур *(3-я с. обложки)*	Returning pieces *(3rd cover page)*
	Победители шахматного конкурса 1984 года *(56)*	1984 chess contest prizewinners *(56)*

На фотографии, воспроизведенной на первой странице обложки, можно увидеть, как призма разлагает белый свет в спектр.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1985

Обобщение чисел

Академик Л. С. ПОНТРЯГИН

В этой статье продолжен рассказ о возможных обобщениях понятия числа, начатый в предыдущем номере «Кванта»*). Здесь показано, что двигаться дальше в этом направлении, то есть придумывать дальнейшие обобщения чисел, отличные от рассмотренных в предыдущей статье, невозможно.

§ 6. Теорема Фробениуса

Пусть L — некоторая совокупность величин x, которые записываются в форме

$$x=x_0+x_1i_1+x_2i_2+\ldots+x_ni_n, \qquad (50)$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа (*координаты* величины x), а символы

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \qquad (51)$$

называются *мнимыми единицами*.

В совокупности L определены сложение и умножение. Пусть y — некоторая другая величина совокупности L

$$y=y_0+y_1i_1+\ldots+y_ni_n. \qquad (52)$$

Величины x и y считаются *равными* тогда и только тогда, когда их координаты равны, то есть имеет место равенство

$$x_0=y_0,\ x_1=y_1, \ldots, x_n=y_n. \qquad (53)$$

Сложение величин x и y происходит по правилу

$$x+y=(x_0+y_0)+(x_1+y_1)\,i_1+\ldots+(x_n+y_n)\,i_n. \qquad (54)$$

Таким образом, величины из L складываются покоординатно. Величины из L можно и умножать на любое действительное число, тоже покоординатно:

$$\lambda x=\lambda x_0+(\lambda x_1)i_1+\ldots+(\lambda x_n)i_n.$$

Для того чтобы задать правило умножения величин x и y из L, мы должны прежде всего принять, что действительные числа перестановочны с мнимыми единицами (51), имеющимися в L, то есть при перемножении выражений (50) и (52) обычным образом раскрываются скобки и группируются члены, в частности, $(x_1i_1)\times(y_2i_2)=(x_1y_2)(i_1i_2)$ и т. п. Кроме того, нужно определить, по какому правилу перемножаются мнимые единицы (51), например указать, чему равно i_1i_2. При этом предполагается, что произведение двух любых мнимых единиц системы (51) есть некоторая величина из L, однако коммутативности умножения мнимых единиц мы не требуем. Результат Фробениуса заключается в том, что *совокупность величин L совпадает либо с совокупностью всех действительных чисел, в этом случае каждая величина записывается в форме $x=x_0$, либо с совокупностью всех комплексных чисел, в этом случае каждая величина из L записывается в форме*

$$x=x_0+x_1i, \qquad (55)$$

либо с совокупностью всех кватернионов, в этом случае величина x из L записывается в форме

$$x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k. \qquad (56)$$

§ 7. Несколько вспомогательных утверждений

При доказательстве теоремы Фробениуса я буду считать известным понятие *векторного пространства* R^m произвольной размерности m*). Напомню, что каждый вектор пространства R^m задается последовательностью из m действительных чисел, называемых *координатами* вектора. В этом пространстве определено *сложение* векторов, которое происходит покоординатно, *умножение вектора на действительное число*, при котором все координаты вектора умножаются на это действительное число. *Нулевым* вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю.

Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_k \qquad (57)$$

— некоторая совокупность векторов пространства R^m. Векторы (57) называются *линейно зависимыми*, если имеются действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, не все равные нулю, такие, что

$$a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_ku_k=0. \qquad (58)$$

Результат, которым я воспользуюсь здесь без доказательства, заключается в следующем. *В векторном пространстве размерности m всякая система векторов из k штук, где $k > m$, линейно зависима.*

---

*) См. «Квант», № 2, с. 6.

*) Необходимые сведения о векторных пространствах можно прочитать в Добавлении к этой статье (с.5)

Перейдем теперь к подготовительной части доказательства теоремы Фробениуса. Величину, входящую в совокупность величин L, будем считать действительным числом, если только ее координата x_0 отлична от нуля, остальные же равны нулю. Выберем из L такие величины z, которые удовлетворяют следующему условию: z^2 есть действительное неположительное число, то есть либо оно отрицательное, либо равное нулю. Совокупность таких величин обозначим через I. Заметим, что множество $\mathbf{R}$ действительных чисел и множество I имеют лишь один общий элемент — нуль.

Докажем теперь следующее:

Каждая величина x из L может быть представлена в виде суммы

$$\boxed{x=a+z,\ a\in\mathbf{R},\ z\in I} \qquad (59)$$

единственным образом.

Для доказательства этого утверждения составим последовательность величин

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n+1}, \qquad (60)$$

то есть последовательность степеней величины x, начиная от нулевой до $n+1$. Так как последовательность (60) содержит $n+2$ величины, а размерность векторного пространства L равна $n+1$, то величины (60) линейно зависимы. А это значит, что существует многочлен $f(u)$ некоторой переменной u с действительными коэффициентами, корнем которого является x, то есть выполнено условие

$$f(x)=0. \qquad (61)$$

Так как x есть корень многочлена $f(u)$, число x будет корнем неприводимого многочлена с действительными коэффициентами степени один или два, как это было доказано в конце § 5. Если этот неприводимый многочлен имеет степень один, то есть имеет вид $u-a$, где a — действительное число, то $x-a=0$, и, следовательно, x есть действительное число a. Если неприводимый многочлен $q(u)$ имеет вторую степень и его корни не являются действительными, то его легко преобразовать к виду

$$q(u)=(u-a)^2+b, \qquad (62)$$

где b — положительное число. Так как x является корнем этого многочлена, $(x-a)^2=-b$ и x записывается в форме

$$x=a+z,$$

где a — действительное число, а $z\in I$, ибо $z^2=-b$. Таким образом, формула (59) доказана.

Докажем теперь, что слагаемые a и z в разложении (59) однозначно определены величиной x. Это утверждение легко проверяется в случае, когда x — действительное число, так как тогда $z=x-a$, а $\mathbf{R}$ и I имеют лишь один общий элемент — нуль, так что z есть нуль. Допустим, что наряду с разложением (59) имеет место другое разложение:

$$x=a_0+z_0. \qquad (63)$$

Случай, когда одна из величин z или z_0 равна нулю, нами уже разобран. В дальнейшем будем считать, что они обе отличны от нуля. Из соотношений (59) и (63) вытекает равенство

$$z=z_0+(a_0-a).$$

Возводя это соотношение в квадрат, получаем

$$z^2=z_0^2+2z_0(a_0-a)+(a_0-a)^2. \qquad (64)$$

Так как z^2 и z_0^2 — действительные числа, из этого соотношения вытекает, что произведение $z_0(a_0-a)$ есть действительное число. Так как z_0 не равно нулю, это возможно лишь тогда, когда $a_0-a=0$. Таким образом, единственность разложения (59) установлена.

Герман Грассман (1809—1877), немецкий математик, физик и филолог, создатель общего понятия векторного пространства и (наряду с А. Кейли и У. Гамильтоном) теории кватернионов.

Заметим, что наряду с любым элементом z из множества I в него входит произведение этого элемента на любое действительное число. Наряду с элементом $z\neq 0$ в I входит и элемент z^{-1}, обратный к z. Запишем это в виде формул:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{При } a\in\mathbf{R},\ z\in I & \text{имеем} & az\in I. \\ \text{При } 0\neq z\in I & \text{имеем} & z^{-1}\in I. \end{array}} \qquad \begin{array}{l}(65)\\(66)\end{array}$$

Докажем теперь следующее утверждение:

I есть линейное пространство в отношении действительных чисел, то есть наряду с двумя величинами u и v из I в I входит также их линейная комбинация с действительными коэффици-

ентами a и b. В виде формулы запишем это утверждение так:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{При } a\in\mathrm{R},\ b\in\mathrm{R};\ u\in I,\ v\in I\\ \text{имеем } au+bv\in I.\end{array}} \tag{67}$$

Для доказательства последнего утверждения нам достаточно рассмотреть случай, когда a и b не равны нулю, так как случай, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю, содержится в уже доказанном утверждении (65). В силу разложения (59) имеем

$$au+bv=z_1+a_1,\ \text{где } z_1\in I,\ a_1\in\mathrm{R}. \tag{68}$$

Возведем соотношение (68) в квадрат. Тогда мы получим

$$a^2u^2+b^2v^2+ab\,(uv+vu)=2a_1z_1+a_1^2+z_1^2. \tag{69}$$

В силу разложения (59) мы имеем

$$uv+vu=z_0+a_0,\ \text{где } z_0\in I,\ a_0\in\mathrm{R}. \tag{70}$$

Здесь величины z_0 и a_0 не зависят от чисел a и b, а зависят лишь от u и v. В силу единственности разложения (59) из (68) и (70) вытекает равенство

$$abz_0=2a_1z_1. \tag{71}$$

А так как числа a и b оба предполагаются не равными нулю, мы получаем

$$z_0=\frac{2a_1}{ab}z_1. \tag{72}$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\text{если } z_0\neq 0,\ \text{то } a_1\neq 0. \tag{73}$$

При этом $a_1\neq 0$ при любых значениях a и b, так как z_0 не зависит от a и b. Принимая во внимание последнее равенство, мы можем переписать соотношение (68) в виде:

$$au+bv=cz_0+d, \tag{74}$$

где $c=ab/(2a_1)$ — не равное нулю действительное число. Выберем теперь два каких-нибудь числа a' и b', не пропорциональные a и b, то есть такие, чтобы не имело место равенство

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}. \tag{75}$$

Тогда в силу доказанного мы имеем

$$a'u+b'v=c'z+d', \tag{76}$$

где число c' не равно нулю. Вычтем теперь из соотношения (74) соотношение (76), умноженное на такое действительное число α, чтобы выполнялось равенство $c-\alpha c'=0$. Тогда мы будем иметь

$$a''u+b''v=d'', \tag{77}$$

где a'', b'' и d'' — действительные числа. Или, иначе,

$$a''u=-b''v+d''. \tag{78}$$

Так как левая часть этого равенства принадлежит I, и правой части этого равенства должен быть элемент из I (в силу единственности разложения (59)), то есть $d''=0$. Мы приходим к выводу, что векторы u и v пропорциональны между собой. Для этого случая наше утверждение (67) тривиально. Таким образом, утверждение (67) доказано.

Из доказанного следует, что в соотношении (68) действительное число a_1 всегда равно нулю и, следовательно, в силу соотношения (72) величина z_0 также всегда равна нулю. И поэтому

$$uv+vu=a_0 \tag{79}$$

есть действительное число. Из этого мы сделаем важный для дальнейшего вывод:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{При } u\in I \text{ и } u^2=\alpha\neq 0;\\ v\in I \text{ и } v^2=\beta\neq 0;\ uv\in I\\ \text{имеем } uv=-vu.\end{array}} \tag{80}$$

Действительно,

$$uvvu=u\beta u=\alpha\beta.$$

Поэтому мы получаем

$$vu=\alpha\beta(uv)^{-1}, \tag{81}$$

и, следовательно, в силу (65) и (66), $vu\in I$, так как $uv\in I$. Таким образом, в силу результата (67)

$$uv+vu\in I.$$

Но, будучи действительным числом (см. (79)), величина $uv+vu$ равняется нулю. Таким образом, соотношение (80) доказано.

§ 8. Доказательство теоремы Фробениуса

Если множество I содержит только нуль, то L совпадает с множеством R всех действительных чисел, в него входящих, и теорема Фробениуса доказана.

Если в I есть элемент $z\neq 0$, то, выбирая должным образом действительное число α, найдем величину

$$i=\alpha z,$$

удовлетворяющую условию

$$i^2=-1.$$

Если любой другой элемент из I пропорционален i с действительным коэффициентом, то множество L совпадает с множеством всех комплексных чисел вида

$$x=a_0+a_1i. \tag{82}$$

Допустим теперь, что I не совпадает с множеством всех чисел вида $x=a_1i$. Пусть z — некоторая величина из I, не пропорциональная i. Тогда мы имеем

$$iz=b+z_0$$

(см. (59)), где $z_0\in I$ и $b\in\mathrm{R}$; здесь $z_0\neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $z=-bi$, то есть z было бы пропорционально i. Положим теперь $j=a(z+bi)$. Тогда $0\neq ij\in I$ при произвольном действительном $a\neq 0$. Число a выберем так, чтобы $j^2=-1$. Таким образом, мы нашли в I две величины i и j, удовлетворяющие условиям

$$i^2=j^2=-1;\ ij=k\in I. \tag{83}$$

Теперь из соотношения (80) следует, что

$$ij=-ji. \tag{84}$$

Из этого уже легко вытекают нижеследующие соотношения:

$$k^2=-1;\ ki=-ik=j;\ jk=-kj=i.$$

Таким образом, для величин

$$i,\ j,\ k \qquad (85)$$

выполнены все условия, имеющие место для кватернионных единиц (см. «Квант» № 2, с. 11). Если теперь любой элемент z из I линейно зависит от величин i, j, k, то L совпадает с множеством всех кватернионов.

Остается рассмотреть случай, когда в L имеется элемент z, линейно не зависимый от величин i, j, k. Положим (см. (59))

$$iz=a_1+z_1;\ jz=a_2+z_2;\ kz=a_3+z_3. \qquad (86)$$

Положим также

$$l=a(z+a_1i+a_2j+a_3k). \qquad (87)$$

Легко проверяется, что при произвольном значении действительного числа $a\neq 0$ величина l принадлежит I и не равна нулю. Число a выберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$l^2=-1. \qquad (88)$$

Из соотношения (80) следует, что

$$il=-li;\ jl=-lj;\ kl=-lk. \qquad (89)$$

Теперь рассмотрим величину ilj. Мы имеем

$$\begin{aligned} ilj&=i(-jl)=-kl;\\ ilj&=-lij=-lk=kl. \end{aligned} \qquad (90)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что $-kl=kl$, что невозможно, так как $(kl)^2=-1$. Итак, мы пришли к противоречию — теорема Фробениуса доказана.

Добавление о векторных пространствах

Рассмотрим множество V_3 всех векторов в трехмерном пространстве с началом в фиксированной точке O. Если в пространство ввести систему координат x_0, x_1, x_2 с началом в точке O, то *любой вектор* $\mathbf{v}\in V_3$ *единственным образом представляется в виде*

$$\mathbf{v}=x_0\mathbf{i}_0+x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ — *единичные векторы осей* Ox_0, Ox_1, Ox_2, *а* x_0, x_1, x_2 — *некоторые числа* (называемые *координатами* вектора $\mathbf{v}$). *При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*, то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{v}+\mathbf{v}'&=(x_0\mathbf{i}_0+x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2)+(x_0'\mathbf{i}_0+x_1'\mathbf{i}_1+x_2'\mathbf{i}_2)=\\ &=(x_0+x_0')\mathbf{i}_0+(x_1+x_1')\mathbf{i}_1+(x_2+x_2')\mathbf{i}_2; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{v}&=\alpha(x_0\mathbf{i}_0+x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2)=\\ &=(\alpha x_0)\mathbf{i}_0+(\alpha x_1)\mathbf{i}_1+(\alpha x_2)\mathbf{i}_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

После того, как введены координаты, можно считать, что векторы в пространстве просто являются *тройками чисел* (x_0, x_1, x_2) и забыть об их геометрическом происхождении. При таком подходе их изучение становится чисто **алгебраическим** и базируется на формулах (1) — (3).

Алгебраический подход позволяет без труда определить и векторное пространство с числом измерений большим трех. Именно, при любом $n\geqslant 1$ *n-мерным (арифметическим) векторным пространством* называется множество наборов $\mathbf{v}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n вещественных чисел, в которое введены операции *сложения*:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v}&=(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\\ &=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)=\mathbf{w} \end{aligned} \qquad (4)$$

и *умножения на число* $\alpha\in\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u}&=\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\\ &=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned} \qquad (5)$$

При этом наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются *n-мерными векторами*. Их можно записывать в виде $(x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+\ldots+x_n\mathbf{i}_n)$ или в виде $x_0+x_1\mathbf{i}_1+\ldots+x_{n-1}\mathbf{i}_n$, как это сделано в статье Л. С. Понтрягина (см. с. 2).

Основным понятием при изучении n-мерного векторного пространства является понятие линейной зависимости: набор векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ называется *линейно зависимым*, если существуют такие числа α_1, α_2, …, α_k, не все равные нулю, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=0.$$

Можно показать, что *любой набор из более чем n штук векторов в n-мерном пространстве линейно зависим;* кроме того, в этом пространстве можно указать набор из n штук линейно независимых векторов (такой набор называется *базисом*), например набор $\mathbf{i}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{i}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\mathbf{i}_n=(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Упражнения

1. Докажите утверждения о V_3, выделенные курсивом в начале этого Добавления.

2. Докажите, что два вектора в пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой, а три вектора — когда они лежат в одной плоскости.

3. Докажите (геометрически, а потом чисто алгебраически), что любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

4*. Докажите, что любые $n+1$ векторов в n-мерном пространстве линейно зависимы.

5*. Покажите, что совокупность многочленов степени меньшей или равной трем образует арифметическое векторное пространство размерности четыре, базисом которого могут служить многочлены x^3, x^2, x, 1.

О. М.

Парадокс Вавилова

Академик АПН СССР В. А. ФАБРИКАНТ

В геометрической оптике часто и плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия.

Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» замечательного советского физика С. И. Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В электромагнитных волнах колеблются значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля. Эти величины в каждой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную количеству энергии поля, протекающей в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух световых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах, наоборот,— меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизонтальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой,— темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требование строгого «бухгалтера» природы — закона сохранения энергии — выполняется неукоснительно.

Перейдем теперь к парадоксу С. И. Вавилова. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a, пересекающихся под малым углом α (рисунок 2). В области *ABCD* происходит интерференция.

Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости черте-

---

Впервые эта статья была опубликована в февральском номере «Кванта» за 1971 год. Мы перепечатываем ее с небольшими изменениями.

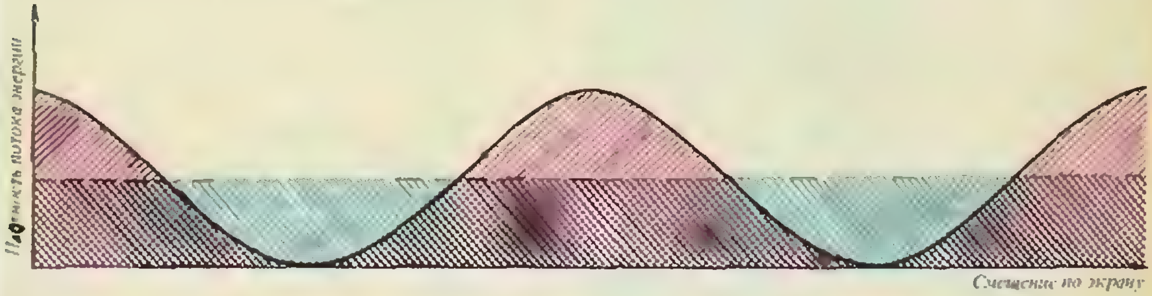


Рис. 1.

жа, проходящий через точки A и C. Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рисунок 3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если в точке D у обоих пучков одинаковые фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD, будет равна нулю. Значит, прямая BD соответствует середине центральной светлой полосы. В середине соседней темной полосы разность фаз должна быть равна π, иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны λ и умноженной на 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (1)$$

Увеличению длины пути, проходимого волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π. Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\lambda/2$.

Подсчитаем разность хода в точке A. Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей. Проведем через точку D (см. рисунок 2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A'.

Пути, проходимые обоими пучками до точки D, одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A, волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D, должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D, должна сместиться на отрезок DA. В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - A'A = \frac{a}{\sin\alpha} - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C.

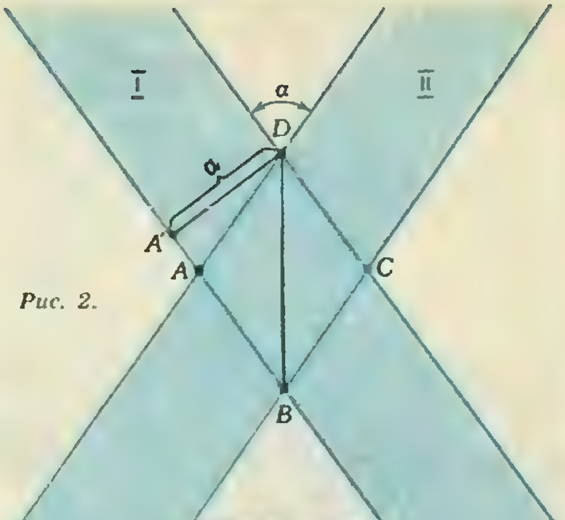


Рис. 2.

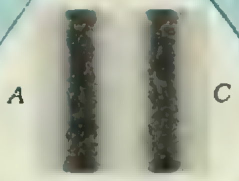


Рис. 3.

Начнем теперь уменьшать угол α. Как видно из формулы (2), при этом будет уменьшаться ΔL. При некотором малом α разность хода ΔL может стать равной $\lambda/4$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют!

Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной π. Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой. В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором — неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для случая, когда $\Delta L = \lambda/4$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ для малых α):

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{a\alpha}{2}. \qquad (3)$$

(Окончание см. на с. 14)

Репортаж из мира сплавов

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Без преувеличения можно сказать, что наша жизнь проходит в мире металла. Из него сделано большое количество окружающих нас повседневно предметов. Но чистых металлов практически не бывает. Когда о каком-нибудь предмете говорят «металлический», то всегда подразумевается, что это — сплав двух или нескольких металлов.

Как «устроены» сплавы? Как в них располагаются атомы тех элементов, из которых они состоят? Ответы на эти вопросы интересуют и физиков, и металлургов, и людей многих других специальностей, так как именно структура сплавов в первую очередь определяет их свойства, такие как прочность, электропроводность и т. п.

1. Чистые металлы и сплавы

Возьмем чистую медь. При нормальных условиях она представляет собой вещество с кристаллическим строением. «Кирпичики», из которых построен кристалл, можно изобразить так, как на рисунке 1. Это — так называемая элементарная ячейка меди. Она называется гранецентрированной кубической (ГЦК) ячейкой, так как атомы расположены и в вершинах куба, и в центрах его граней. Размеры куба весьма малы — длина его ребра $a=3{,}6\cdot10^{-10}$ м. Если периодически «продолжить» такие элементарные кубики во всех трех измерениях, то мы получим кристаллическую ГЦК решетку меди.

Будем теперь добавлять в медный кристалл атомы другого элемента, например золота. Разумеется, нельзя добавлять атомы по одному. Зато можно взять определенные количества золота и меди, вместе их расплавить и дать жидкости остыть и закристаллизоваться. Если посмотреть на элементарную ячейку кристалла теперь, то окажется, что она по-прежнему гранецентрированная кубическая, а часть позиций меди занята атомами золота. (рисунок 2). Такие сплавы называют сплавами замещения, поскольку атомы одного элемента просто замещают атомы другого. Это, пожалуй, самая распространенная группа сплавов.

Можно изменять относительные количества сплавляемых золота и меди. Тогда детали микроскопической картинки будут изменяться, но в целом, или, как говорят физики, качественно, она будет оставаться одной и той же — та же ГЦК решетка, по узлам (позициям) которой распределены атомы золота и меди. Это распределение может быть и хаотическим, и каким-либо упорядоченным — например, в вершинах куба будут находиться атомы одного сорта, а в центрах граней — другого. Так как же именно будут «расселяться» атомы разных сортов в кристаллической решетке? От чего зависит способ их распределения по позициям?

Конечно, можно всякий раз для ответа на эти вопросы ставить эксперимент, который позволил бы наблюдать воочию «сцены из жизни атомов». Такая возможность у нас имеется. Просвечивая образец интересующего нас сплава рентгеновскими лучами, мы получим дифракционную картину, по которой можно восстановить характер взаимного расположения атомов различных сортов в решетке. К примеру, если при комнатной температуре посмотреть «глазами рентгеновских лучей» на сплав, состоящий на 75 % из атомов меди и на оставшиеся 25 % — из атомов золота, то мы увидим почти совершенную картинку, о которой уже вскользь упоминалось, — почти все вершины кубов заняты атомами золота, а почти все центры граней — атомами меди (рисунок 3). Мы говорим «почти все» потому, что нет-нет да и мелькнет какой-нибудь шальной атом меди в вершине куба, или окажется забывчивый атом золота на медной позиции, но это очень редкий случай. В основном же картина просто поражает своей правильностью: в вершине куба — золото, в центре грани — медь. Про такие сплавы говорят, что они — упорядоченные. Какие силы заставляют атомы в сплавах упорядочиваться? Всегда ли это бывает? Какие еще могут быть упорядоченные структуры? Опять целая серия вопросов; вопросов, которые ставит перед исследователем сама природа. Сплавы всех элементов при разных концентрациях компонентов и при разных температурах под рентгеновскими лучами не пересмотришь, и поэтому стоит попытаться выработать некоторые общие способы прогнозировать «расселение» атомов в сплавах. А для этого надо прежде всего понять основные законы «общежития» атомов.

Атомы в кристалле всегда «под присмотром». У них есть две могущественные начальницы, которые не в ладах друг с другом. Попадешь в милость к одной — жди неприятностей от другой. Имя одной начальницы нам хорошо известно: это — энергия. Вторая же пока предстает перед нами инкогнито, и мы до поры до времени будем величать ее Королевой беспорядка.

2. Энергия

Для начала нам надо ввести количественные меры взаимодействия атомов в веществе. Во-первых, будем счи-

Рис. 1. Элементарная ячейка меди. Стрелками показаны некоторые пары ближайших соседей.

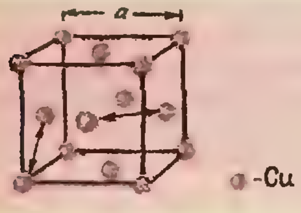


Рис. 2. Неупорядоченный сплав замещения медь — золото.

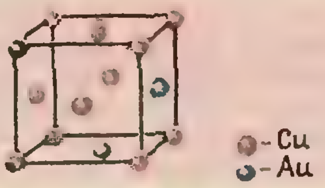
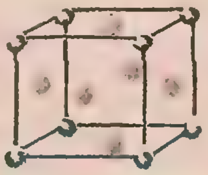


Рис. 3. Упорядоченный сплав замещения медь — золото (структура типа Cu_3Au; на каждую ячейку приходится по $^1/_8 \cdot 8=1$ атому золота и по $^1/_2 \cdot 6=3$ атома меди).



тать, что все атомы взаимодействуют между собой попарно. Парные силы нам хорошо известны. К ним относятся и силы Кулона, которые действуют между зарядами, и силы взаимного тяготения тел. Характерная особенность этих сил — убывание с расстоянием. Тела взаимодействуют тем слабее, чем больше расстояние между ними. Так, энергия кулоновского взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально расстоянию между ними.

В кристалле, состоящем из атомов металла, энергия взаимодействия между атомами убывает намного быстрее. Поэтому логично второе предположение: основное значение будут иметь взаимодействия между ближайшими соседями в решетке.

Вернемся теперь снова к рисунку 1. На нем указаны некоторые пары ближайших соседей в ГЦК решетке. Из теоремы Пифагора легко вычислить расстояние между ближайшими соседями: оно равно $a\sqrt{2}/2$ (напомним, что a — длина ребра элементарного кубика). Каждый атом в ГЦК решетке имеет по 12 ближайших соседей (попробуйте показать это сами). Число ближайших соседей, которое обычно называется координационным числом, обозначается буквой Z.

Итак, каждый атом в решетке взаимодействует со своими ближайшими соседями. Но, естественно, атомы разных сортов взаимодействуют между собой по-разному. Поскольку в решетке находятся атомы двух сортов A и B, то их взаимодействие описывается тремя значениями энергий, которые мы обозначим так: v_{AA}, v_{BB} — энергии взаимодействия соседних атомов одного сорта (A или B), v_{AB} — энергия взаимодействия двух атомов-соседей сортов A и B. Теперь через эти параметры легко записать энергию любой конфигурации атомов в решетке. Она будет складываться из суммы энергий взаимодействия всех пар ближайших соседей — типа AA, AB, BB:

$$E=P_{AA}\,v_{AA}+P_{BB}\,v_{BB}+P_{AB}\,v_{AB},$$

где P_{AA}, P_{BB}, P_{AB} — числа соответствующих пар соседей.

Пусть в рассматриваемом нами кристалле всего N атомов, из которых n_A атомов типа A и n_B атомов типа B (то есть $N=n_A+n_B$) Через эти величины, в частности, выражаются концентрации компонентов в сплаве:

$$c_A=\frac{n_A}{N},\quad c_B=\frac{n_B}{N}=1-c_A.$$

Теперь у нас имеется все необходимое для оценки различных вкладов в энергию. Заметим, что существуют соотношения между числами P_{AA}, P_{BB} и P_{AB}. Каждый атом сорта A может иметь всего Z ближайших соседей. Соответственно общее число ближайших соседей у всех атомов A равно n_AZ. Из них P_{AB} позиций приходится на долю атомов сорта B. Если же ближайшим соседом атома сорта A является другой атом того же сорта, то это соседство использует сразу две из n_AZ позиций, так как для второго атома первый будет в свою очередь являться ближайшим соседом. Так что для атомов сорта A должно выполняться соотношение

$$n_AZ=2P_{AA}+P_{AB},$$

а для атомов сорта B, аналогично, —

$$n_BZ=2P_{BB}+P_{AB}.$$

Теперь из этих равенств выразим величины P_{AA} и P_{BB} через P_{AB} и подставим их в выражение для энергии:

$$E=\frac{n_AZ-P_{AB}}{2}\,v_{AA}+\frac{n_BZ-P_{AB}}{2}\,v_{BB}+$$

$$+P_{AB}v_{AB}=P_{AB}\Bigl(v_{AB}-\frac{v_{AA}+v_{BB}}{2}\Bigr)+$$

$$+\Bigl(\frac{n_AZ}{2}\,v_{AA}+\frac{n_BZ}{2}\,v_{BB}\Bigr).$$

Итак, энергию взаимодействия атомов в кристалле сплава мы представили в виде суммы двух слагаемых. Видно, что второе слагаемое зависит только от чисел атомов сортов A и B, но совершенно не зависит от их взаимного расположения. Первое же слагаемое, наоборот, явно зависит от расположения атомов, поскольку перераспределение атомов в решетке очень сильно сказывается на числе P_{AB}. Например, представим себе кристалл, в одной части которого сосредоточены все атомы A, а в другой — все атомы B, как это схематически показано на рисунке 4. В таком кристалле число P_{AB} будет минимальным, так как соседство разноименных атомов осуществляется только в узкой зоне вблизи границы обеих частей кристалла. Естественно, что при «перемешивании» атомов это число сильно возрастет.

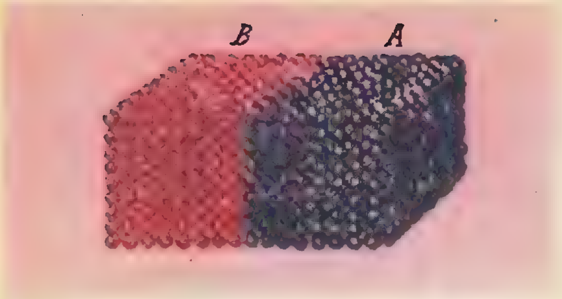


Рис. 4. Структура распадающегося сплава A—B.

Суммируя наши рассуждения, запишем энергию E в таком виде:

$$E = P_{AB}\, v + E_0.$$

В этом равенстве мы обозначили через E_0 второе слагаемое, которое будет постоянным при любом взаимном расположении атомов A и B, и заменили величиной v выражение $v_{AB} - \frac{v_{AA}+v_{BB}}{2}$, чтобы подчеркнуть, что для нас существенны не абсолютные значения величин v_{AA}, v_{AB} и v_{BB}, а только определенная их комбинация v, которую обычно называют энергией смешения.

Опыт повседневной жизни подсказывает, что предоставленная самой себе система стремится занять такое положение, в котором ее энергия будет возможно наименьшей. Именно поэтому поднятый вверх, а затем отпущенный камень вновь падает на землю, растянутая пружина вновь сжимается и т. д. Посмотрим, как с этой точки зрения может «управлять» расселением атомов в кристаллической решетке энергия смешения. Значение v может быть как положительным, так и отрицательным (в первом случае средняя энергия взаимодействия одноименных атомов больше энергии взаимодействия атомов разных сортов, во втором — наоборот).

Если $v > 0$, то энергия E тем меньше, чем меньше величина P_{AB}, — в этом случае структура сплава должна быть примерно такой, как на рисунке 4. Про такой сплав говорят, что он распадающийся — он как бы стремится вновь распасться на чистые компоненты, из которых был образован. По существу кристалл на рисунке 4 как раз и состоит из этих чистых компонентов: правая часть — только из A, а левая — только из B.

Если же $v < 0$, то для достижения минимума энергии число P_{AB}, наоборот, должно быть как можно бо́льшим. Как раз такому состоянию и соответствует упорядоченный сплав.

Например, при относительных концентрациях $c_A = 0{,}25$ и $c_B = 0{,}75$ оптимальной будет такая конфигурация, как на рисунке 3. Строго доказать этот факт не так просто, хотя интуитивно он довольно очевиден: попробуйте поменять местами пару атомов A и B и увидите, что число P_{AB} уменьшится.

Мы объяснили, почему одни сплавы — упорядоченные, а другие — распадающиеся. Все определяется знаком энергии смешения. Но почему же тогда бывают неупорядоченные сплавы? Для объяснения этого факта нам придется вспомнить и о другой грозной начальнице из мира атомов.

3. Королева беспорядка

Эта грозная незнакомка, названная нами пока Королевой беспорядка, для атомов значит не меньше, чем энергия. Она проявляет себя в полной мере в очень больших системах, состоящих из колоссального числа частиц. Одной из таких систем как раз и является интересующий нас кристалл сплава замещения. Какую же роль играет в жизни атомов Королева беспорядка? Мы попытаемся объяснить это на качественном уровне, без математических выкладок.

Проверим на опыте, управляет ли что-либо поведением системы большого количества тел в отсутствие энергетического фактора, то есть когда взаимным влиянием тел можно пренебречь. Для этого возьмем много красных и синих шаров и будем многократно бросать их на биллиардное поле. Энергетический фактор в таком эксперименте будет проявлять себя только при столкновении шаров друг с другом, поскольку при отсутствии касания шары, по существу, не взаимодействуют. Естественно, на конечное положение шаров он практически влиять не будет.

Итак, что же мы увидим, бросив шары на сукно биллиарда? Они хаотично распределятся по полю. Повторим опыт. Опять та же хаотическая картина. Никакого порядка в расположении шаров не видно. Очень маловероятно, что при каком-то бросании

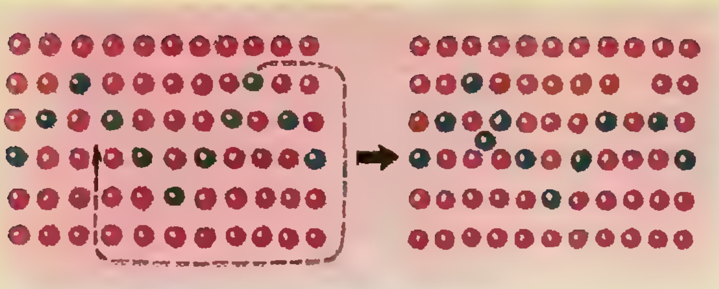


Рис. 5. Перемещение одного шара разрушает узор.

шары разных цветов соберутся в разных концах биллиардного поля. Еще менее вероятно, что красные и синие шары «изобразят» какой-нибудь сложный правильный узор. Это представляется нам очевидным и без эксперимента.

Но с другой стороны... Мы бросаем шары случайным (беспорядочным) образом, и их расположение на сукне также совершенно случайно. Казалось бы, шарам все равно как расположиться — хаотически или в виде правильного узора. Почему же все-таки они располагаются хаотически?

Проделаем такой эксперимент. Сложим из шаров какой-нибудь узор, например такой, как на рисунке 5. А теперь вынем из узора один шар и поместим его в любое другое место — узор наверняка нарушится. Проделаем тот же опыт при хаотическом расположении шаров — при перенесении одного шара в другое место картина по-прежнему будет хаотической. Чтобы из хаоса создать узор, нам необходимо согласованным образом передвинуть большое количество шаров. Схематически эти закономерности можно изобразить так:

$$\text{УЗОР} \xrightarrow{\text{перенесение шаров}} \text{ХАОС}$$

$$\text{ХАОС} \xrightarrow{\text{перенесение шаров}} \text{ХАОС}.$$

Иначе говоря — все пути ведут в хаос.

Перенося шар с одного места на другое, мы тем самым, по существу, «выкидываем» новую конфигурацию шаров. Но хаос многолик, и в каждой конфигурации он обращен к нам лишь одним из своих бесчисленных ликов. Новая конфигурация — новый лик все того же хаоса.

Отсюда можно понять, что хотя все конфигурации шаров имеют равные «права на существование», но число конфигураций, соответствующих узору, значительно уступает числу конфигураций, соответствующих хаосу. Иными словами, при каждом бросании хаотическое расположение шаров на сукне более вероятно, чем упорядоченное, в виде какого-нибудь узора.

Из всего сказанного мы можем сделать вывод: помимо энергетического, существует другой фактор, управляющий поведением шаров. Благодаря его влиянию при каждом бросании осуществляется наиболее вероятная картина распределения шаров по биллиардному полю — хаотическая.

А теперь вернемся к нашим сплавам. Несмотря на некоторую условность понятий «узор» и «хаос», аналогия между шарами разных цветов на биллиардном поле и атомами разных сортов в кристаллической решетке довольно наглядна. В случае сплава замещения биллиардному узору соответствует упорядоченный сплав, хаотическому расположению шаров — разупорядоченный. И теперь нам понятно, какую роль играет в жизни атомов вторая правительница, которую мы называли Королевой беспорядка, — она стремится внести хаос в расположение атомов в решетке кристалла. А подлинное имя этой правительницы — энтропия.

4. Порядок и беспорядок в сплавах

Подведем некоторые итоги. Нам известно, что энергетический фактор стремится упорядочить расположение атомов в узлах кристаллической решетки. Это приводит либо к образованию упорядоченных структур, либо к распаду сплава на чистые элементы. С другой стороны, энтропийный фактор стремится разупорядочить систему, создать какое-то хаотическое расположение атомов. Борьбой этих двух тенденций и определяются те законы «общежития» атомов, о которых говорилось вначале. Какая из тенденций будет преобладать: энергетическая или энтропийная? Кто решает тяжбу двух начальственных дам — Энергии и Энтропии? Судьей оказывается хорошо известная нам величина — температура! И судьей не беспристрастным. Температура выступает союзницей сил беспорядка, сил, которые на нашем «биллиардном» языке стремятся превратить строгий узор в хаос.

Ничего особенно удивительного в этом нет. Мы знаем на примере газов, что с ростом температуры движение молекул становится все более и более интенсивным. То же самое происходит и в других веществах. При определенной температуре это тепловое движение оказывается способным разорвать «энергетические путы» и тем самым разупорядочить систему.

Примеров таких превращений много. Один из них — плавление. Вспомним, что происходит при нагревании с твердым телом, представляющим собой правильный кристалл, то есть тот самый узор, о котором мы уже не раз говорили. С ростом температуры все сильнее становится стремление ионов вырваться из кристаллической решетки, и наконец им это удается — выше температуры плавления из правильного кристалла образуется жидкость — узор переходит в хаос.

Таким образом, при достаточно высоких температурах определяющим оказывается энтропийный фактор. Соответственно при более низких температурах главную роль играет энергетический фактор. Что значит «достаточно высокие» и «более низкие» температуры — решается в каждом конкретном случае по-своему. Главное, что надо понять и запомнить: температура регулирует относительную важность энергетического и энтропийного факторов.

Вернемся, и теперь уже окончательно, к миру сплавов. При высоких температурах распределение атомов будет в основном определяться энтропийным фактором — и сплав будет разупорядоченным. Однако по мере понижения температуры энергетический фактор будет играть все бо́льшую и бо́льшую роль, пока, наконец, при некоторой температуре не станет важнее энтропийного. Такая температура носит название критической. При критической температуре сплав становится упорядоченным и будет оставаться таким при дальнейшем охлаждении.

Вся информация о порядке и беспорядке в сплавах обычно заключается в специальные схемы, которые носят название диаграмм состояния. На рисунке 6 приведена в несколько упрощенном виде такая диаграмма для сплавов меди с золотом, с которых мы начали этот рассказ. По оси ординат отложена температура, а по оси абсцисс — относительная концентрация компонентов. Любая точка на диаграмме соответствует определенным значениям концентраций и температуры. Точки, лежащие на кривых линиях, указывают значения критических температур для разных концентраций компонентов. Над линиями расположена область неупорядоченного состояния сплавов, под линиями — область упорядоченных сплавов. Упорядоченные состояния под двумя крайними кривыми имеют уже известные нам структуры типа изображенной на рисунке 3: слева — сплав с относительными концентрациями $c_{Cu}=75\ \%$ и $c_{Au}=25\ \%$, а справа — сплав с $c_{Cu}=25\ \%$, $c_{Au}=75\ \%$. Позиции, занимаемые в кристаллической решетке первого сплава атомами меди, во втором сплаве занимают атомы золота и наоборот. А под кривой

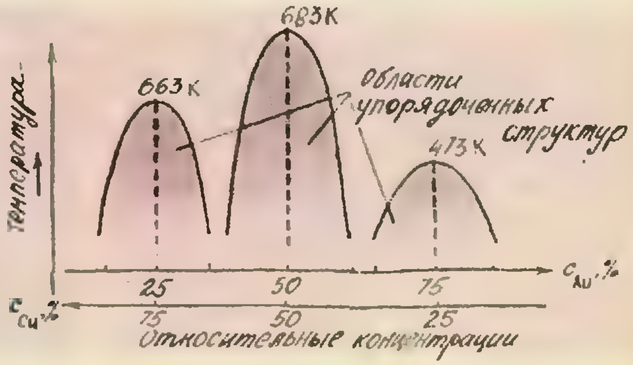


Рис. 6. Упрощенное изображение части диаграммы состояния сплавов меди с золотом. При низких температурах точный вид диаграммы неизвестен.

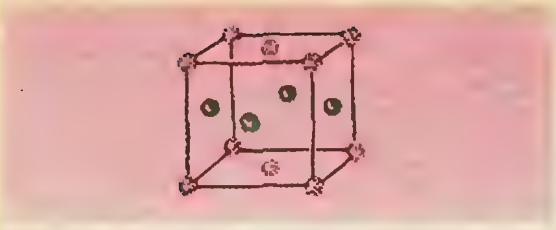


Рис. 7. Упорядоченный сплав замещения медь — золото (структура типа CuAu).

в центре диаграммы — область существования упорядоченного сплава, элементарная ячейка которого изображена на рисунке 7: в кристаллической решетке такого сплава атомы меди и золота чередуются послойно — слой меди, слой золота и т. д.

Теперь металловед при разработке сплава из данных материалов не должен действовать вслепую. Ему достаточно посмотреть на диаграмму, и сразу станет ясным, какую структуру будет иметь сплав данной концентрации при данной температуре. И поскольку, как мы уже говорили, структура сплава во многом определяет его свойства (сопротивление, прочность и т. д.), подобные диаграммы позволяют до некоторой степени эти свойства прогнозировать.

5. Заключение

Теперь дадим волю нашему воображению. Нам нужен сплав с определенными прочностью, пластичностью, электропроводностью? Ничего не может быть проще. Вкладываем в компьютер все требования, и машина выдает точный рецепт сплава.

Очень хочется, чтобы все было именно так. Но пока до этого далеко. Сегодня мы еще учимся рассчитывать состояние твердого вещества, и задача об упорядочивающемся сплаве — только скромный этап долгого пути.

Этой задаче уже 65 лет. В ее разработке принимали участие советские физики академики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, американские ученые Х. Бете и Л. Онсагер, английский физик Р. Пайерлс. Но белых пятен еще много: как рассчитать величину энергии смешения? как учесть дальнее взаимодействие атомов, то есть выйти за пределы приближения ближайших соседей? как обобщить развитые методы на сплавы трех и более компонентов? Эти и многие другие вопросы до сих пор ждут своего решения.

Парадокс Вавилова

(Начало см. на с. 6)

Покажем, что для выполнения условия $\Delta L=\lambda/4$ угол α действительно должен быть очень мал.

Как видно из (3),

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}. \qquad (4)$$

Возьмем $a=1$ см, $\lambda=5\cdot10^{-5}$ см; тогда $\alpha=2{,}5\cdot10^{-6}$ радиан.

Итак, неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к ширине пучка.

Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения.

При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Благодаря явлению дифракции ограничение размеров пучка с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол φ расхождения пучка определяется как раз формулой (4). Естественно, угол α, под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла φ. Пока $\alpha\gg\varphi$, расхождением пересекающихся пучков можно пренебречь. Но когда α становится сравнимым по порядку величины с φ, понятие ограниченного параллельного пучка теряет смысл.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (4) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла (угла расхождения). Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Взяв реальные световые пучки, мы никогда, конечно, не получим противоречия с законом сохранения энергии. В интерференционных опытах данного типа всегда дело будет сводиться к пространственному перераспределению потока энергии.

Пинг-понг... в умывальнике

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Опыты, о которых пойдет речь, доступны всем и не требуют никакого специального оборудования. Вам понадобятся только шарик для настольного тенниса (пинг-понга), стандартная раковина для умывания (или ванна), миллиметровая линейка, трехлитровая банка и часы с секундной стрелкой.

Опыт 1. Закройте сливное отверстие раковины (ванны) и наполните ее водой до уровня 3 — 5 см. Подставьте пинг-понговый шарик под струю там, где она прорезает поверхность воды, и отпустите его. Интуитивно кажется, что струя должна отбросить шарик в сторону. Но это не так! Наоборот, струя захватывает шарик, и он остается в месте ее падения.

Присмотритесь внимательнее. Оказывается, шарик не неподвижен — под действием струи он совершает небольшие колебания. Сложите ладони лодочкой и подведите их под шарик так, чтобы он продолжал плавать под струей, не касаясь рук. Теперь поднимайте шарик вдоль струи. Вы заметите, что частота колебаний при подъеме шарика уменьшается.

Опыт 2. Откройте сливное отверстие. В стандартной раковине (ванне) оно представляет собой ямку цилиндрической формы с решетчатым дном глубиной около 20 мм и диаметром около 40 мм. Шарик для пинг-понга немного меньше — его диаметр равен 37 мм, так что шарик свободно помещается в сливном отверстии, и еще остается зазор в 1 — 2 мм (рис. 1).

Поднесите шарик под водой к сливному отверстию и отпустите. Поток воды втянет его в отверстие, несмотря на то, что шарик в воде не тонет. Но что это? Вы слышите низкий гудящий звук, очевидно, вызванный колебаниями шарика. Первая мысль, которая приходит в голову, — что шарик подпрыгивает на решетке. Однако дело не в этом. Прикоснитесь сверху к шарику пальцем, и вы убедитесь, что он колеблется не вертикально, а горизонтально — насколько позволяет ему величина зазора.

Более того. Посмотрите на фабричное клеймо на шарике, и вы увидите, что шарик еще и вращается, причем достаточно медленно, так что это можно заметить глазом. Иногда вращение происходит только в одну сторону, а иногда направление вращения шарика время от времени произвольно изменяется.

Как же объяснить эти опыты? Сразу скажем, что оба они служат яркой иллюстрацией закона Бернулли — од-

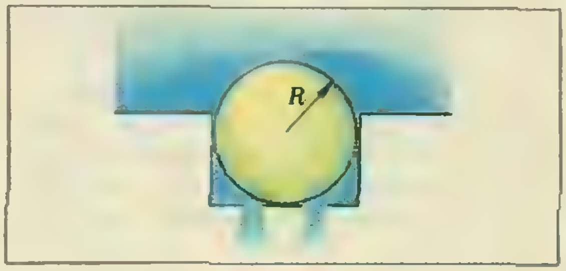


Рис. 1.

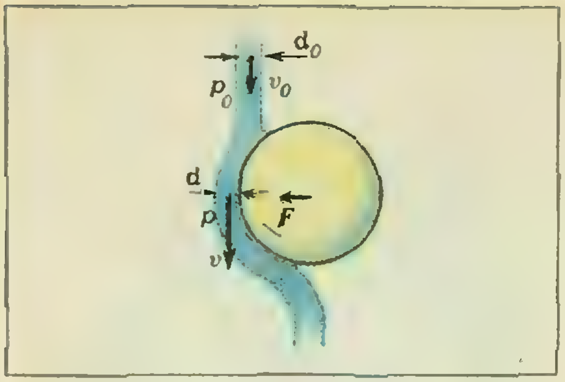


Рис. 2.

ного из первых законов гидродинамики. Качественно его можно сформулировать так («Физика 8», § 65): в движущейся жидкости давление больше в тех сечениях, где меньше скорость движения, и наоборот, там, где скорость больше, давление меньше. Другими словами, при увеличении скорости движения жидкости давление в ней падает. Это уменьшение давления и приводит к тому, что в обоих опытах поток воды как бы *втягивает пластмассовый шарик* внутрь себя.

Закон Бернулли поможет объяснить и колебания шарика в струе и в отверстии раковины. Но прежде давайте оценим скорость воды в струе из водопроводного крана.

Нетрудно подобрать такой приток воды в раковину (или ванну), при котором уровень воды в ней почти не изменяется. С помощью трехлитровой банки и секундомера можно измерить соответствующий расход жидкости (то есть массу жидкости, расходуемой в единицу времени). Он окажется равным примерно (80 — 100) г/с. Теперь линейкой измерим диаметр струи вблизи поверхности воды в раковине. Он близок к 6 мм. Этому соответствует скорость струи около 3 м/с (проверьте это). Конечно, скорость течения можно сделать и большей и меньшей полученного значения, но в дальнейших оценках давайте считать ее именно такой.

Для более детального обсуждения наблюдаемых эффектов нам понадобится не только качественная, но и количественная формулировка закона Бернулли*). Согласно этому закону, в любом сечении струи жидкости остается постоянной сумма

$$\frac{\varrho v^2}{2}+p+\varrho gh,$$

где ϱ — плотность, v — скорость, p — давление жидкости, h — высота выбранного сечения.

Объяснение опыта 1. Давайте временно упростим себе задачу: рассмотрим не взаимодействие шарика *с цилиндрической струей, а воздействие* плоской струи на цилиндр. Существо физического явления от этого не изменится, а рассуждать нам будет проще.

Сначала обсудим случай, когда цилиндр лишь слегка касается струи, и оценим действующую на него силу (рис. 2). Согласно закону Бернулли, внутри изгибающейся струи давление падает на величину

$$p_0-p=\frac{\varrho}{2}(v^2-v_0^2)$$

(слагаемым ϱgR можно пренебречь, поскольку в нашем случае величина $gR\approx0{,}2$ м^2/с^2 заметно меньше, чем $v^2/2\approx4{,}5$ м^2/с^2). Траектория частиц жидкости, огибающих цилиндр, — дуга окружности, поэтому они движутся с центростремительным ускорением. Это ускорение обусловлено разностью атмосферного давления p_0 (оно же есть давление воды в прямой струе) и давления p в изогнутой струе:

$$m\frac{v^2}{R}=(p_0-p)S,\ \text{или}\ \frac{v^2}{R}=\frac{p_0-p}{\varrho d},$$

где S — площадь соприкосновения струи с цилиндром. Для струи, толщина которой d много меньше радиуса цилиндра R, скорость обтекания лишь немного больше начальной скорости v_0. Поэтому сила, отклоняющая струю, равна

$$F=(p_0-p)S=\frac{\varrho v_0^2 d}{R}S.$$

Такая же по модулю, но противоположно направленная сила действует на цилиндр.

Этот результат, полученный для обтекания цилиндра, остается справедливым и для обтекания шарика, возможно, с другим численным коэффициентом. Площадь соприкосновения струи с шариком практически всегда порядка квадрата его радиуса R. Поэтому сила, втягивающая шарик

---

*) Об этом можно прочитать в заметке «Закон Бернулли» («Квант» 1984, № 5, с. 33). (*Примеч. ред.*)

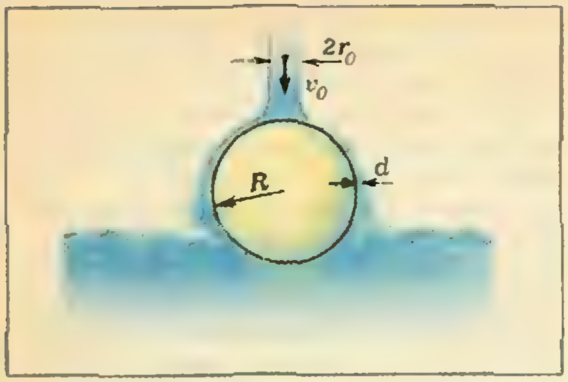


Рис. 3.

в струю при их касании, по порядку величины равна

$$F \sim \varrho v_0^2 R d.$$

Рассмотрим теперь центральное обтекание шарика, когда струя падает точно на его вершину (рис. 3). В этом случае вода обтекает шарик симметрично, и поэтому $F=0$. Для центрального обтекания нетрудно найти толщину слоя d. Из условия постоянства потока следует, что

$$d \sim \frac{r_0^2}{R}$$

(покажите это самостоятельно).

Наконец, для промежуточного случая, когда смещение x шарика от оси симметрии струи невелико по сравнению с его радиусом R (рис. 4), оказывается, что сила F линейно зависит от x и направлена так, чтобы вернуть шарик в положение равновесия:

$$F \sim -\varrho v_0^2 d \cdot x \sim \frac{\varrho v_0^2 r_0^2}{R} x.$$

(К сожалению, точное значение силы F для этого случая получить трудно.)

Под действием этой силы шарик и будет совершать колебания. Выражение для частоты колебаний можно написать по аналогии с колебаниями грузика на пружине:

$$F_{\text{пр}} = -kx \Rightarrow \omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$F_{\text{ш}} \sim -\frac{\varrho v_0^2}{R} x \Rightarrow \omega_{\text{ш}} \sim v_0 r_0 \sqrt{\frac{\varrho}{RM}}.$$

При массе шарика $M \approx 3$ г получаем

$$\omega_{\text{ш}} \sim 40\ \text{с}^{-1}, \text{ и } \nu_{\text{ш}} \sim 6\ \text{Гц}.$$

При подъеме шарика в ладонях вверх по струе одновременно изменяются и r_0, и v_0, но остается постоянным произведение $v_0 r_0^2$. Поскольку r_0 растет, произведение $v_0 r_0$ падает. Следовательно, по мере подъема к источнику частота колебаний шарика должна уменьшаться, что и наблюдается на опыте.

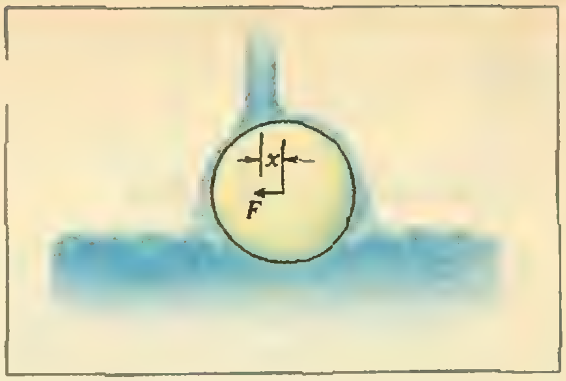


Рис. 4.

При уменьшении частоты колебаний можно заметить, что шарик еще и поворачивается в разные стороны. В тонких медленных струях колебание и вращение шарика объединяются в сложное красивое движение вокруг струи. Убедитесь в этом сами на опыте.

Объяснение опыта 2. *Пусть начальное* положение шарика такое, как изображено на рисунке 5 (вид сверху). Оценим скорость течения в зазоре сливного отверстия. Площадь зазора не зависит от положения шарика и равна $\pi(R_{\text{отв}}^2 - R^2) \approx 1$ см², поэтому средняя скорость течения вокруг шарика составляет $v \approx 1$ м/с. Эта скорость, однако, отнюдь не постоянна по сечению зазора: в его широкой части она существенно больше, чем в сужающейся щели (вблизи точки касания *A*), где течение тормозится трением о стенки. Согласно закону Бернулли давление в движущейся жидкости больше там, где меньше скорость. Поэтому появляется сила, направленная к широкой части зазора,

(Окончание см. на с. 48)

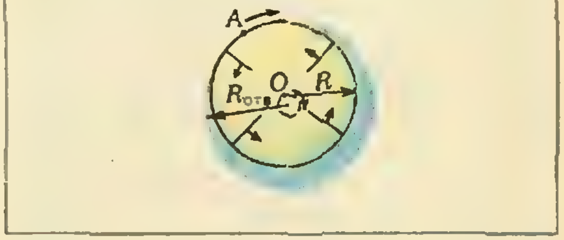


Рис. 5.

Физика 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Открытие электрона» предназначена девятиклассникам, «Как увидеть невидимое?» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Открытие электрона

Слово «электрон» — название одной из заряженных элементарных частиц — и производные от него, пожалуй, чаще всего встречаются в наши дни в научно-технической литературе. Сравнительно недавно появилось слово «электроника», обозначающее, с одной стороны, науку о взаимодействиях электронов с электромагнитными полями, а с другой — новую область техники. Такие прилагательные, как «электронный», «электронная» и т. д., широко вошли в наш язык и в нашу жизнь. Достаточно напомнить, например, о существовании различных электронных приборов и электронных вычислительных машин.

Когда, кем и как был открыт электрон? Когда, кто и как определил его основные свойства и выяснил его роль в природе?

Лучи или частицы? Открытие электрона представляет собой завершение длившегося несколько десятилетий исследования газового разряда, то есть процесса прохождения электрического тока через газ («Физика 9», § 70—72). В частности, приблизительно к середине прошлого века было выяснено, что если к электродам, впаянным в стеклянную трубку с газом, приложить достаточно высокое напряжение, то через газ проходит электрический ток, а сам газ при этом светится. Характер свечения зависит от давления газа и приложенного напряжения, а цвет света определяется природой газа. Однако при достаточно малом давлении (около одного паскаля, то есть стотысячной доли атмосферы) свечение газа почти исчезает (хотя ток продолжает идти), но зато начинает светиться зеленоватым светом стекло трубки.

Что же происходит в разрядной трубке после исчезновения свечения газа? По этому поводу возник длительный спор между физиками, наиболее активно изучавшими это явление.

Немецкие физики (Г. Герц, Э. Гольдштейн) считали, что из катода трубки исходят особые лучи, которые и вызывают свечение стекла. Их поэтому стали называть *катодными лучами*. Герц, открывший электромагнитные волны, естественно, склонен был считать, что катодные лучи — это особые электромагнитные волны, похожие на свет, но свет невидимый.

Английские физики (У. Крукс, А. Шустер, затем Дж. Дж. Томсон) полагали, что из катода выходят не лучи, а какие-то отрицательно заряженные частицы и что именно под их воздействием возникает свечение стекла. Крукс, например, утверждал, что это газовые молекулы, которые, ударяясь о катод, приобретают отрицательный заряд и затем ускоряются силой притяжения к аноду. В пользу этого говорило то, что катодные лучи отклоняются магнитным полем. Об этом важном факте знали, конечно, и немецкие физики, но в то время еще не было твердо установлено, что электромагнитные волны с магнитным полем не взаимодействуют.

Обеими спорящими сторонами было твердо установлено, что свойства катодных лучей не зависят от того, из какого материала сделан катод. Спор этот был весьма плодотворным, так как каждая группа ученых старалась придумать и поставить такие опыты, которые доказали бы их правоту.

Решающие опыты были выполнены в 1897 году английским физиком Джозефом Джоном Томсоном. Опыты эти состояли в наблюдении движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. В прошлом номере в заметке «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» было показано, что скорость v и ускорение a заряженной частицы в электрическом поле определяются удельным зарядом частицы q/m (q — заряд частицы, m — ее масса):

$$v=\sqrt{2\frac{q}{m}U},\quad a=\frac{q}{m}E,$$

где U — напряжение, а E — напряженность поля.

Но оказывается, движение частицы в *магнитном* поле тоже определяется ее удельным зарядом. Покажем это.

На частицу с зарядом q (для простоты будем считать его положительным), движущуюся с начальной скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}_L$ («Физика 9», § 89). Если вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$, то сила Лоренца по модулю равна qvB и направлена перпендикулярно вектору скорости и вектору магнитной индукции. Поскольку сила перпендикулярна скорости частицы, она заставляет частицу двигаться по окружности, сообщая ей центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для этого случая имеет вид

$$m\frac{v^2}{r}=qvB,$$

откуда для радиуса r окружности получаем

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{v}{B(q/m)}.$$

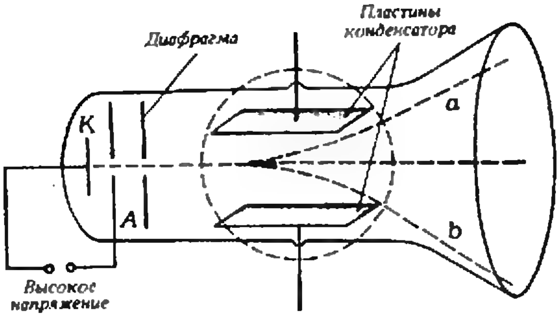
Таким образом, при заданном значении магнитной индукции и начальной скорости частицы радиус кривизны ее траектории действительно определяется удельным зарядом частицы (q/m).

Из последнего равенства можно получить формулу для определения самого удельного заряда:

$$\frac{q}{m}=\frac{v}{Br}.$$

Радиус окружности r и индукцию B измерить нетрудно. Но нужно еще знать скорость v частицы, которую измерить не так просто. Томсон сумел обойти эту трудность. И вот каким способом.

Опыты Дж. Дж. Томсона. Целью опытов Томсона было определение удельного заряда тех предполагаемых частиц, которые, по мнению английских физиков, образуют катодные лучи. Прибор, созданный Томсоном, схематически показан на рисунке.



В стеклянный сосуд впаяны катод K, и анод A, диафрагма и пластины конденсатора. Между K и A подается достаточно высокое напряжение, необходимое для возникновения катодных лучей. Отверстия в аноде и диафрагме «вырезают» узкий пучок лучей, попадающий на противоположную стенку сосуда, где он вызывает свечение стекла. Пунктирная окружность на рисунке изображает катушки (вне сосуда), создающие магнитное поле, перпендикулярное электрическому полю конденсатора (и плоскости рисунка).

Когда в трубке создано только электрическое поле конденсатора и верхняя пластина заряжена положительно, пучок лучей, если он действительно состоит из отрицательно заряженных частиц, отклоняется вверх (траектория a на рисунке). Если создано только магнитное поле, направленное от нас за плоскость рисунка, пучок отклоняется вниз (траектория b). По свечению торцевой стенки трубки легко установить, куда именно попадает пучок.

Но можно подобрать такие значения напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$, чтобы пучок вовсе не отклонялся и двигался по прямолинейной траектории (показанной на рисунке красным цветом). Это означает, что электрическая сила, действующая на частицу, равна по модулю силе Лоренца: $qE=qvB$. Отсюда для скорости частицы получаем выражение $v=E/B$. Подставив его в формулу для удельного заряда, находим

$$\frac{q}{m}=\frac{E}{B^2r}. \qquad (*)$$

Все в опыте Томсона происходило так, как и предполагалось. В электрическом поле пучок двигался по одной траектории (a), в магнитном — по другой (b). При одновременном действии обоих полей пучок не отклонялся вовсе.

По формуле (*), в которую входят легко измеряемые величины (и не входит скорость частиц), можно было определить удельный заряд частиц, образующих то, что до того называлось катодными лучами. Удельный заряд этих частиц оказался чудовищно большим: $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Эти-то частицы и получили название электронов. Поэтому теперь принято считать, что год открытия электрона — 1897, а автор этого важнейшего открытия — Джозеф Джон Томсон.

Так как электроны вылетают из катода разрядной трубки всегда, независимо от того, из какого материала изготовлен катод, можно было сделать вывод о том, что электроны входят в состав любого атома. Эту гипотезу Томсон высказал в том же 1897 году.

В течение нескольких последующих лет Томсон (а также и другие ученые) показал, что частицы, вылетающие из нагретого металла при термоэлектронной эмиссии, имеют тот же удельный заряд, то есть что это тоже электроны. Тот же удельный заряд имеют и частицы, вырываемые из металлов светом. И это тоже электроны!

За теоретические и экспериментальные исследования прохождения электричества через газы (приведшие к открытию электрона) Дж. Дж. Томсон в 1906 году получил Нобелевскую премию по физике.

О массе и заряде электрона. Зная значение удельного заряда электрона, еще ничего нельзя сказать ни о значении заряда, ни о значении массы электрона по отдельности. Однако к концу прошлого века было уже известно значение удельного заряда иона водорода, а также то, что заряд иона водорода по модулю (но не по знаку) равен заряду электрона. А это позволяет кое-что сказать о массе электрона. В самом деле, удельные заряды электрона и иона водорода равны соответственно

$$\frac{e}{m_e} = 1{,}76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг},$$

$$\frac{e}{m_{\text{H}}} = 9{,}65 \cdot 10^{7} \text{ Кл/кг}$$

(здесь e — модуль заряда электрона, как его принято обозначать, m_e — масса электрона, m_{H} — масса иона водорода). Разделив e/m_e на e/m_{H}, получаем, что масса электрона примерно в 1840 раз меньше массы иона водорода.

Приблизительно через 15 лет после опытов Томсона Р. Милликен в США и А. Ф. Иоффе в России непосредственно измерили заряд электрона, который оказался равным $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Отсюда для массы электрона получается значение $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Это самые маленькие значения заряда и массы в природе.

Как увидеть невидимое?

Природа наделила человека бесценным даром зрения, позволяющим ему видеть окружающий мир во всех цветах радуги. И все же надо признать, что возможности нашего зрения ограничены. Во-первых, мы не можем как следует рассмотреть очень мелкие или очень далекие предметы. Во-вторых, длины волн видимого невооруженным глазом света заключены в интервале приблизительно от 0,4 до 0,8 мкм, что составляет ничтожно малую часть диапазона длин существующих в природе электромагнитных волн («Физика 10», § 86).

К некоторым животным природа оказалась более щедрой, чем к человеку, к другим — более скупой. Так, орел, паря на огромной высоте, замечает пробирающуюся по земле мышь, сова прекрасно видит в темноте, а крот почти ничего не видит ни ночью, ни днем.

По мере развития науки и техники человек стал «вооружать» свое зрение. Сначала он «обострил» его в области видимого света. Уже в XVII веке были созданы микроскоп и телескоп, позволившие открыть микроорганизмы и обнаружить горы на Луне. Двадцатый век ознаменовался бурным развитием новой — квантовой — физики, открывшей качественно новые возможности. Например, использование фотоэффекта («Физика 10», § 87) позволило расширить диапазон длин волн,

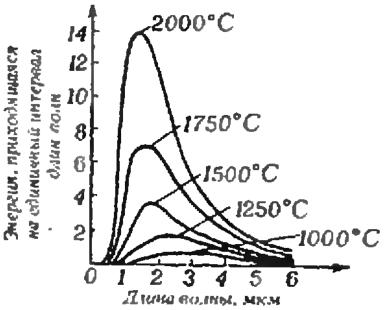


Рис. 1. Распределение энергии теплового излучения по длинам волн.

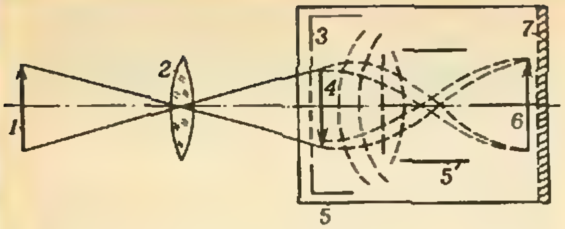


Рис. 2. Схема электроннооптического преобразователя: 1 — предмет, освещаемый инфракрасным светом; 2 — объектив, с помощью которого получается световое изображение; 3 — фотокатод; 4 — световое изображение; 5—5′ — фокусирующие электроды; 6 — электронное изображение; 7 — анод, покрытый люминесцирующим веществом.

которые может «увидеть» человеческий глаз. Расскажем об этом немного подробнее.

В тридцатые годы группа голландских физиков во главе с В. Хольстом занималась проблемой улучшения качества фотографического изображения, получаемого в условиях слабой освещенности. Идея предложенного ими метода была довольно простой.

Обычная фотопленка воспринимает видимый свет, отраженный фотографируемым предметом. Однако и сам предмет всегда (при температурах, отличных от абсолютного нуля) служит источником так называемого теплового излучения, которое по своей природе тоже электромагнитное. Оказывается, что длина волны, которой соответствует максимум в распределении энергии этого излучения по длинам волн, зависит от температуры (см. график на рисунке 1, где по оси абсцисс отложена длина волны, а по оси ординат — энергия излучения, приходящаяся на единичный интервал длин волн). При очень высоких температурах тела испускают в основном видимый свет. При комнатных же температурах, когда обычно и производится фотографирование, максимум в излучении приходится на невидимую инфракрасную область. Если бы удалось найти способ преобразовать это невидимое инфракрасное излучение в более коротковолновое, к которому чувствительна фотопленка, то можно было бы фотографировать при слабой освещенности или даже в темноте.

Такой преобразователь был создан и получил название электроннооптического преобразователя. Его основным элементом служит фотокатод — тонкая прозрачная пленка, изготовленная из материала, содержащего атомы щелочных металлов — цезия, рубидия или калия. Красная граница фотоэффекта λ_{max} для таких материалов находится в инфракрасной области, поэтому при падении на пленку инфракрасных лучей с длинами волн $\lambda < \lambda_{max}$ свет вырывает из нее электроны. Для восполнения вылетевших при фотоэффекте электронов на пленку напыляется слой металла, настолько тонкий, что пленка остается прозрачной.

Принципиальная схема преобразователя показана на рисунке 2. Изображение предмета 1, освещаемого инфракрасным светом, формируется на фотокатоде 3. Как уже говорилось, тонкий слой металла не является препятствием для лучей, и в тех местах фотокатода, куда попало изображение предмета, с противоположной стороны пленки появляются фотоэмиссионные электроны. На некотором расстоянии за катодом расположен анод 7, поверхность которого покрыта слоем люминесцирующего материала (эта часть прибора напоминает собой обычную телевизионную трубку). Между анодом и катодом создается высокая разность потенциалов (порядка десятков тысяч вольт), которая ускоряет фотоэлектроны. Таким образом возникает поток электронов, летящих от катода к аноду, причем, при соблюдении определенных условий, распределение этих электронов по поверхности анода повторяет форму фотографируемого предмета. Попав на анод, электроны вызывают его свечение. При этом если фотокатод чувствите-

Силуэт человека виден в полной темноте с помощью прибора ночного видения, который воспринимает инфракрасные (тепловые) лучи.

лен к красному и инфракрасному свету, то люминесцирующий анод излучает голубые, фиолетовые и даже ультрафиолетовые лучи. Другими словами, при проецировании на фотокатод невидимого инфракрасного изображения на аноде наблюдается видимое изображение.

Мы изложили здесь лишь принципиальную схему работы электронно-оптического преобразователя, созданного Хольстом с сотрудниками в 1933 году. В их опытах была доказана возможность преобразования длинноволнового невидимого излучения в коротковолновое видимое излучение с помощью фотоэлектрического эффекта.

За прошедшие пятьдесят лет фотоэлектронная техника ушла далеко вперед. В настоящее время она применяется не только в фотографии, но и в научных исследованиях, военном деле, технике, космонавтике.

Избранные школьные задачи

(По мотивам книги Льюиса Кэрролла «История с узелками»)

8 класс

1. Даны длины a и b двух смежных сторон четырехугольника и острый угол α между ними. Кроме того, известно, что углы четырехугольника, прилежащие к каждой из данных сторон, прямые. Найдите: а) остальные стороны четырехугольника; б) площадь четырехугольника.

2. Докажите, что сумму квадратов двух различных натуральных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных натуральных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. Два путешественника выходят из гостиницы к вершине горы в 3 часа дня и возвращаются в 9 часов вечера. Маршрут их то проходит по ровному месту, то идет в гору или под гору. По ровному месту они идут со скоростью 4 мили в час, в гору — 3 мили в час и под гору — 6 миль в час. Какое расстояние они проходят за время прогулки? Определите также с точностью до 30 мин момент восхождения на вершину горы, считая, что при движении к вершине горы длина участков подъема больше длины участков спуска.

4. На основании данного треугольника найдите такую точку, что прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны, параллельна основанию.

5. Внутри данного угла с вершиной B дана точка P. Проведите через точку P прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

9 класс

6. Два пешехода A и B пускаются в путь ровно в 6 часов утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход B сначала опережает пешехода A на 14 миль. Оба идут с 6 часов утра до 6 часов вечера. В первый день A, двигаясь в течение дня с постоянной скоростью, проходит 10, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход B, двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2, во второй — 4, в третий — 6 миль и т. д. Где и когда пешеходы A и B будут догонять друг друга?

7. Две окружности пересекаются так, что их общая хорда стягивает центральные углы в 30° и 60°. Какая часть круга, ограниченного меньшей окружностью, находится внутри большей окружности?

8. В данную окружность впишите трапецию, у которой одно основание в два раза больше другого, а площадь максимальна.

9. Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Сколько стоят 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов? (1 шиллинг равен 12 пенсам)

10. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник, стороны которого при каждой из его вершин образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

10 класс

11. Пусть p — полупериметр некоторого треугольника, S — его площадь, а V — объем прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны сторонам треугольника. Найдите сумму квадратов сторон треугольника.

12. Несколько человек сидят вокруг круглого стола. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает шиллинг второму, второй — два шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем он получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих оказалось в 4 раза больше шиллингов, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них?

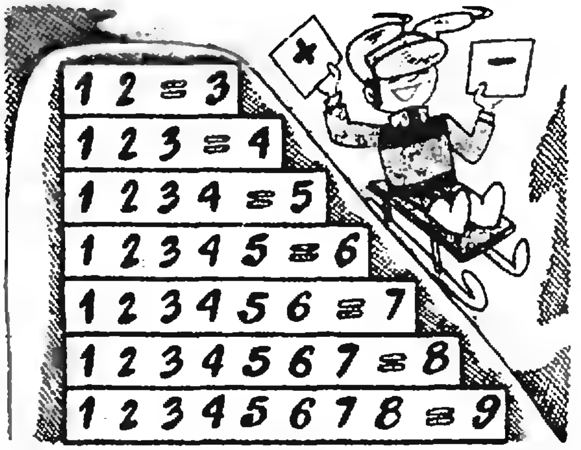
13. От данного треугольника тремя прямыми, параллельными сторонами треугольника, отрезаются три треугольника так, что оставшийся шестиугольник оказывается равносторонним. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a, b и c.

14. На плоскости расставлены три цилиндрические башни с радиусами оснований 1, 2, 3. Найдите точку плоскости, из которой их ширина будет казаться одинаковой.

15. Все грани треугольной пирамиды — конгруэнтные треугольники со сторонами a, b, c. Найдите объем этой пирамиды.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

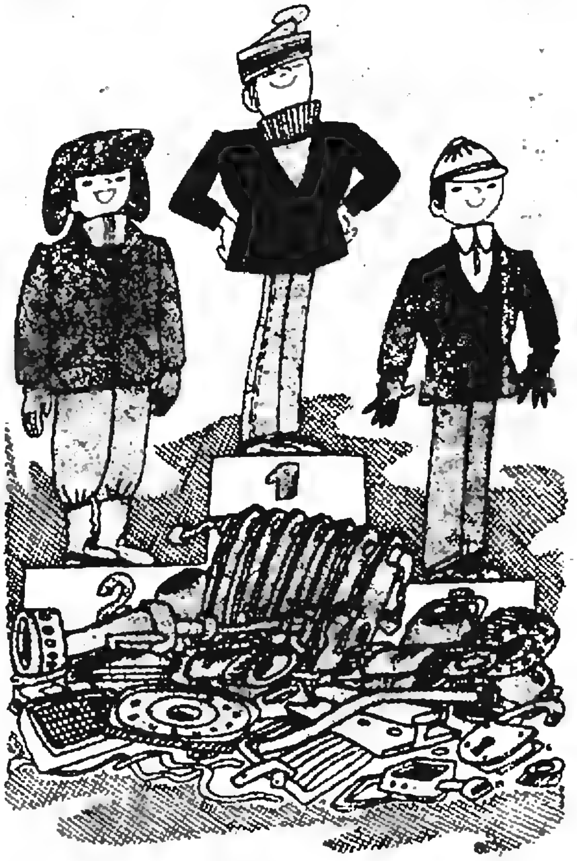
КВАНТ для младших школьников



Задачи

1. В числовой пирамиде, изображенной на рисунке, расставьте знаки + и — так, чтобы выполнялись указанные равенства. Между некоторыми соседними цифрами можно не ставить знака, объединяя их в одно число.

2. Во время подведения итогов соревнования по сбору металлолома выяснилось, что 6 «А» собрал металлолома больше, чем 6 «Б» и 6 «В» вместе, но 6 «А» и 6 «Б» собрали вместе столько же металлолома, сколько 6 «В» и 6 «Г», кроме того, 6 «Б» и 6 «Г» собрали металлолома больше, чем 6 «А» и 6 «В». Как распределились места в соревновании этих классов?



3. На столе лежали три карточки с цифрами. Сначала из них сложили наибольшее возможное трехзначное число, потом сложили следующее по величине. Их сумма оказалась равной 1233. Какие цифры были на карточках?

4. Сумма 13 различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

5. Когда я вымыл стаканы в горячей воде и поставил их сушиться вверх донышками на гладкий стол, то они дружно поползли по столу. Я вспомнил, что когда я мыл их холодной водой, то такого с ними не происходило. Почему стаканы начали двигаться?

Эти задачи нам предложили:
Л. П. Мочалов, А. В. Сигрианский, Н. К. Антонович, А. П. Савин.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1984 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1985 года:

По математике

М. АЛЕКСАНДРОВ — Москва, с. ш. № 542, 9 кл.
А. АСРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 10 кл.
Р. БАБАЕВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
С. ВЕЛЕСЬКО — Минск, с. ш. № 103, 9 кл.
Э. ВЕЛИМЕТОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
Л. ВЕРТГЕЙМ — Новосибирск, с. ш. № 25, 10 кл.
Д. ГАМАРНИК — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 8 кл.
А. ГРИГОРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
А. ДАВТЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
С. ДЕМЬЯНЧЕНКО — Москва, с. ш. № 315, 10 кл.
В. ДЗЮБА — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
А. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 9 кл.
И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 10, 8 кл.
В. ЕЛИСТРАТОВ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 8 кл.
С. ЗЕЙНАЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
Л. ЗОСИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 9 кл.
И. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 9 кл.
Т. КОБДИКОВ — Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
М. КУРИННОЙ — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
С. ЛАУСМАА — Кохтла-Ярве, с. ш. № 15, 6 кл.
М. МАКАРОВ — Севастополь, с. ш. № 3, 9 кл.
Т. МИСИРПАШАЕВ — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
А. МОЛОТКОВ — Ленинград, с. ш. № 366, 10 кл.
В. ПОГРЕБНЯК — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
И. САМОВОЛ — Гайворон, с. ш. № 5, 8 кл.
Р. СИБИЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.
А. ТРУХАН — Минск, с. ш. № 116, 10 кл.
Е. ФИНК — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
Ю. ШАМРУК — д. Новый Двор Гродненской обл., 7 кл.

По физике

О. АВРАМЕНКО — Херсон, с. ш. № 30, 10 кл.
В. АПАЛЬКОВ — Харьков, с. ш. № 16, 10 кл.
Г. АРВЕЛАДЗЕ — Тбилиси, с. ш. № 37, 9 кл.
А. БАЙРАМОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
А. БЕГЛАРОВ — Тбилиси, с. ш. № 42, 9 кл.
Э. БОНДАРЕНКО — Полтава, с. ш. № 6, 10 кл.
Р. БОТАШЕВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Е. ВАЙНШТЕЙН — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.
М. ГОТМАН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ДОДА — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 9 кл.
С. ДУБОВИК — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
С. ЖИЛИНСКАС — Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.
Г. КЛИМОВИЧ — Болшево, с. ш. № 3, 10 кл.
Д. КУЧУЛОРИЯ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
А. ЛИХТЦИНДЕР — Ташкент, в. ш. № 49, 10 кл.
К. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 9 кл.
Д. ЛУНЦ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Ю. МАХЛИН — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
В. МЕНЬКОВ — Мончегорск, с. ш. № 3, 10 кл.
А. МИКАЛЬКЯВИЧУС — Панявежис, с. ш. им. Ю. Бальчикониса, 11 кл.
О. МОРОЗ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
А. ОНУФРИЕВ — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
Я. ПУГАЙ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
С. РАХАМОВ — Казань, с. ш. № 131, 9 кл.
А. РЖЕВСКИЙ — Новосибирск, с. ш. № 149, 10 кл.
Р. РИВКИН — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
М. РУДЫК — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
М. САВЧЕНКО — Белгород, с. ш. № 3, 10 кл.
В. САКБАЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 9 кл.
М. СКОРОБОГАТОВ — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
С. СТЕПАНЯНЦ — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 10 кл.
Б. СУЛЕЙМАНОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
С. ТУЖАНСКИЙ — Винница, с. ш. № 33, 9 кл.
Л. ФЕДИЧКИН — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
С. ФЕРАНЧУК — Минск, с. ш. № 1, 10 кл.
С. ЧЕРНЫШЕВ — Ташкент, с. ш. № 50, 10 кл.
А. ЩЕГОЛЕВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

M911—M915; Ф923—Ф927

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M911, M912» или «Ф923». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M911. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F.

М. В. Старк

M912. Докажите, что а) многочлен x^2, б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.

В. П. Пикулин

M913. Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PC

а) пересекает сторону AB в точке K, делящей ее в отношении $AC^2:BC^2$;

б) симметрична медиане, проведенной из C, относительно биссектрисы угла C треугольника.

С. Литовченко, ученик 10 кл.

M914. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

В. Г. Ильичев

M915*. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d верно неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

Л. Д. Курляндчик

Ф923. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два касающихся друг друга диска, скрепленных нерастяжимой нитью (рис. 1). Диск радиуса R начинает вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, причем скорость вращения линейно возрастает со временем. В некоторый момент диск меньшего радиуса r отрывается от большого диска (перестает его касаться). На какой угол повернется к этому моменту большой диск? Трение между дисками отсутствует.

Считать, что вся масса диска сосредоточена в его центре.

Л. Г. Маркович

Ф924. В жаркую погоду для быстрого охлаждения воды ее наливают в обросшую льдом формочку, вынутую из морозильной камеры холодильника. Воду «перекатывают» от одного края формочки к другому, потом выливают. Оцените, больше или меньше воды становится при этой операции.

Л. А. Ашкинази

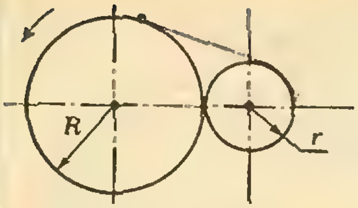


Рис. 1.

Ф925. Две одинаковых массивных трубы скатываются с горок одинаковой высоты, но разного профиля (рис. 2). По первой горке труба на всем участке движется без проскальзывания; на второй горке имеется абсолютно гладкий участок (участок *1*—*2*), но в конце пути (у подножия горки) труба вновь движется без проскальзывания. У какой трубы в конце горки скорость больше?

А. И. Буздин

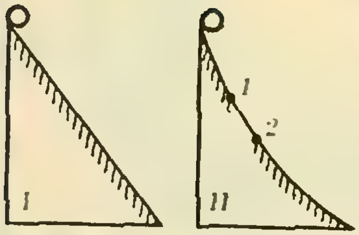


Рис. 2.

Ф926. В пространстве находятся 1985 несоприкасающихся металлических шаров, заряды которых равны, соответственно, q, $-2q$, $3q$, $-4q$, ..., $-1984q$, $1985q$ $(q>0)$. Докажите, что среди них есть шар, у которого поверхностная плотность заряда всюду неотрицательна. Расстояния между шарами конечны.

В. А. Ясинский

Ф927. Через сцинтилляционный счетчик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, пролетает заряженная частица, и молекулы сцинтиллятора, лежащие вдоль ее траектории, испускают свет. Свет в каждой точке испускается изотропно, то есть равномерно во все стороны. Какая доля световой энергии выйдет из сцинтиллятора в воздух, если коэффициент преломления вещества сцинтиллятора $n=1{,}6$? Поглощением света в сцинтилляторе пренебречь.

Примечание: телесный угол при вершине конуса равен $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$, где θ — угол между осью конуса и его образующей.

С. А. Хорозов

Problems

M911—M915; P923—P927

M911. Arbitrary points E and F are chosen on sides AB and CD respectively of the quadrilateral $ABCD$. Prove that the midpoints of the segments AF, BF, CE, and DE are the vertices of a convex quadrilateral whose area does not depend on the choice of the points E and F.

M. V. Stark

M912. Prove that a) the polynomial x^2, b) any polynomial may be represented as the difference of two polynomials, each of which is a monotonic increasing function.

V. P. Pikulin

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are

first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we summ up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M913. The tangents to the circumcircle of triangle ABC at the points A and B intersect at the point P. Prove that the line PC

a) intersects side AB at the point K which divides it in the ratio $AC^2:BC^2$;

b) is symmetric to the median passing through the vertex C with respect to the bissector of the angle C of the triangle.

S. Litovchenko, 10th grade student

M914. Bluebrownblack island is inhabited by 13 blue, 15 brown and 17 black chameleons. If two chameleons of diffferent colours meet, they simultaneously change their colours to the third one (e. g. a blue and brown one both turn black, etc.). Can it happen that after a while all the chameleons will be of the same colour?

V. G. Ilichev

M915*. Prove that for any positive numbers a, b, c, d the inequality

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2$$

holds.

L. D. Kurlyandchik

P923. Two disks, tied together by an inelastic string, are placed, touching each other, on a smooth horizontal plane (Fig. 1). The disk of radius R begins to rotate about a vertical axis passing through its centre, its velocity linearly increasing with time. At a certain moment the disk of smaller radius r moves away from the larger one (they stop touching each other). By what angle will the larger disk have rotated at that moment? There is no friction between the disks. It may be assumed that the mass of each disk is concentrated at its centre.

L. G. Markovich

P924. In order to cool some water on a hot day, the water is poured into an ice-covered receptacle taken out of the freezing compartement of a refrigerator. The water is then "rolled" from one side of the receptacle to the other and poured out. Estimate whether the amount of water will increase or decrease during this operation.

L. A. Ashkinazi

P925. Two identical massive pipes roll down two hills of the same altitude, but of different profiles (Fig. 2). The pipe rolling down the first hill does so without sliding; the second hill has an absolutely smooth section (section *1*—*2*), but at the end of its trajectory the pipe again rolls without sliding. Which pipe will have the greater velocity at the bottom of the hill?

A. I. Buzdin

P926. There are 1985 metallic balls in space, not touching each other, with charges q, $-2q$, $3q$,

$-4q$, ..., $-1984q$, $1985q$ $(q>0)$, respectively. Prove that one of the balls has an everywhere positive charge density on its surface. The distances between the balls are finite.

V. A. Yasinski

P927. A charged particle flies through a scintillation counter; the scintillating molecules along its trajectory emit light. The light is emitted isotropically (i. e. uniformly in all directions) at each point. What part of the emitted light will leave the scintillator into the air, if the refraction coefficient of the scintillating matter is $n=1.6$? Light absorbtion in the scintillator may be neglected. Remark. The solid angle at the vertex of a cone equals $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$, where θ is the angle between the cone's axis and its generator.

S. A. Khorozov

Решения задач

M891 — M895; Ф903 — Ф907

M891. *Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.*

Обозначим в данном треугольнике ABC длины сторон BC и CA через a и b, длины медиан AA_1 и BB_1 — через m_a и m_b, точку пересечения медиан — через M (см. рисунок). Поскольку отрезок медианы от середины стороны до точки пересечения медиан равен ее трети, а четырехугольник MA_1CB_1 описан около окружности, имеет место равенство $m_a/3+b/2=m_b/3+a/2$ или

$$m_a+\frac{3b}{2}=m_b+\frac{3a}{2}. \qquad (1)$$

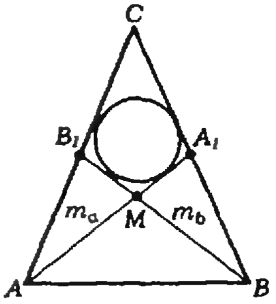
Далее, треугольники AA_1C и BB_1C имеют одинаковые площади (равные половине площади треугольника ABC) и общую вписанную окружность, поэтому их периметры равны: $m_a+a/2+b=m_b+b/2+a$, то есть

$$m_a+\frac{b}{2}=m_b+\frac{a}{2}. \qquad (2)$$

Вычитая равенство (2) из (1), получим $a=b$.

Отметим, что утверждение задачи справедливо и тогда, когда окружность касается продолжений двух сторон треугольника и двух его медиан.

А. А. Муратов



◆

M892. *а) Докажите, что среди чисел 2^m+2^k, а также среди чисел 3^m+3^k бесконечно много квадратов, а среди чисел 4^m+4^k, 5^m+5^k и 6^m+6^k нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, $m\neq k$).*
б) Есть ли квадраты среди чисел 7^m+7^k?*

а) Заметим сначала, что если число a^m+a^k является квадратом, то квадратов такого вида бесконечно много: $a^{m+2n}+a^{k+2n}=(a^n)^2\cdot(a^m+a^k)$ (здесь m или k может равняться и нулю). Поэтому утверждение задачи для $a=2$ и $a=3$ вытекает из равенств $2^3+2^0=8+1=3^2$, $3^1+3^0=2^2$.

Случай $a=4$. Пусть $4^m+4^k=b^2$, где b — целое число, причем $m>k$; тогда $4^{m-k}+1=(b/2^k)^2$ или $4^n+1=c^2$ $(n=m-k,\ c=b/2^k)$. Отсюда следует, что $(c+2^n)(c-2^n)=1$, что, очевидно, невозможно.

Случай $a=5$. Легко видеть, что число 5^m при любом $m>1$ кончается цифрами 25, поэтому 5^m+5^k может кончаться только на 30 (при $k=1$) или на 50 (при $k>1$) и, следовательно, не может быть квадратом (квадрат, кончающийся нулем, должен делиться на 100).

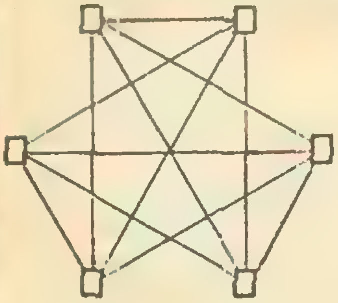
Случай $a=6$. Степень числа 6 всегда кончается на 6, а значит, число 6^m+6^k — на 2. Но квадраты целых чисел могут кончаться только на 0, 1, 4, 6, 9.

б) Ответ: нет. Поскольку 7 при делении на 3 дает в остатке 1, такой же остаток дают и все степени семи. Поэтому число 7^m+7^k дает при делении на 3 остаток 2 и, следовательно, не может быть квадратом ($(3n)^2$ делится на 3, а $(3n\pm1)^2=3(3n^2\pm2n)+1$).

А. И. Зайчик, В. Н. Дубровский

◆

M893. *Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из n—1 цветов так, чтобы из каждого блока выходило n—1 проводов разного цвета, если а) n=6; б) n=13?*



а) Ответ: можно. Нужная раскраска показана на рисунке.

б) Ответ: нельзя. Действительно, если было использовано m проводов какого-то одного цвета, то число блоков — $2m$ (столько концов у всех этих проводов, а каждый конец подсоединен ровно к одному блоку). Но 13 — нечетное число.

Эту задачу часто формулируют как задачу о составлении расписания кругового турнира — при этом проводам одного цвета отвечает разбиение участников турнира на пары для одного тура. Мы видели, что при нечетных n эта задача неразрешима. Можно доказать, что при четных n она всегда имеет решение (см., например, книгу О. Оре «Приглашение в теорию чисел» (М.: Наука, 1980, гл. 8, § 3), а также решение задачи 1.16 в книге «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1981, с. 19)).

В. Б. Алексеев

◆

M894. *а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила 1/5.*

б) По кругу расставлено $n\geq4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит 1/4.*

а) Доказательство будем вести от противного. Допустим, что при любой расстановке чисел a, b, c, d, e рассматриваемая сумма больше 1/5, в частности (см. рисунки 1 и 2):

$$ab+bc+cd+de+ea>1/5,$$
$$ac+ce+eb+bd+da>1/5.$$

Отсюда получим противоречие:

$$1=(a+b+c+d+e)^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+$$
$$+\frac{d^2+e^2}{2}+\frac{e^2+a^2}{2}+2[(ab+bc+cd+de+ea)+$$
$$+(ac+ce+eb+bd+da)]\geqslant$$
$$\geqslant3(ab+bc+cd+de+ea)+$$
$$+2(ac+ce+eb+bd+da)>1$$

(мы использовали неравенство $x^2+y^2\geqslant2xy$).

Из решения видно, что условие неотрицательности чисел несущественно. Утверждение задачи

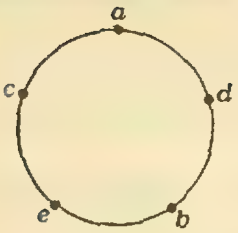


Рис. 1.

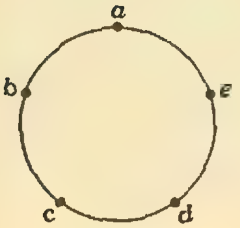


Рис. 2.

(с заменой 1/5 на $1/n$) справедливо для любых n чисел.

б) Мы должны доказать, что для любых $n \geqslant 4$ неотрицательных чисел $a_1, \dots, a_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leqslant 1/4.$$

При четном n ($n=2m$) это неравенство доказывается непосредственно: пусть $a_1+a_3+\dots+a_{2m-1}=a$; тогда, очевидно,

$$a_1a_2+\dots+a_na_1 \leqslant (a_1+a_3+\dots+a_{2m-1})\times$$
$$\times(a_2+a_4+\dots+a_{2m})=a(1-a)\leqslant 1/4.$$

Пусть теперь n нечетно и пусть a_k — наименьшее из данных чисел. (Для удобства будем считать, что $1<k<n-1$ — это не ограничивает общности при $n \geqslant 4$.) Положим $b_i=a_i$ при $i=1, \dots, k-1$, $b_k=a_k+a_{k+1}$ и $b_i=a_{i+1}$ при $i=k+1, \dots, n-1$. Применяя наше неравенство к числам $b_1, \dots, b_{n-1}$, получим:

$$a_1a_2+\dots+a_{k-2}a_{k-1}+(a_{k-1}+a_{k+2})b_k+a_{k+2}a_{k+3}+$$
$$+\dots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leqslant 1/4.$$

Остается воспользоваться тем, что

$$a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}+a_{k+1}a_{k+2} \leqslant a_{k-1}a_k+$$
$$+a_{k-1}a_{k+1}+a_{k+1}a_{k+2} \leqslant (a_{k-1}+a_{k+2})b_k.$$

Заметим, что в обоих пунктах указанные оценки точные (их нельзя уменьшить); в пункте а) оценка $1/n$ достигается, когда все n чисел равны, а в пункте б) — когда два из них равны 1/2, а остальные 0.

С. Б. Гашков, А. И. Дранишников

◆

M895*. *Докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Рассмотрите случаи, когда это сечение а) треугольник, б) четырехугольник.*

в) Докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани.

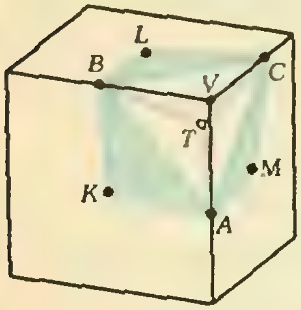


Рис. 1.

а), в). Для краткости мы начнем излагать решения задач а) и в) одновременно. Отметим сразу, что утверждение а) следует из в), так как площадь любой грани тетраэдра (в данном случае — площадь сечения) меньше суммы площадей трех других граней. (Ортогональные проекции этих трех граней на плоскость первой грани полностью ее покрывают, а площади проекций меньше площадей самих граней.) Тем не менее, мы докажем а) независимо, поскольку при этом получится несколько более общий результат.

Обозначим вершины рассматриваемого треугольного сечения куба через A, B, C, общую вершину трех ребер, на которых они лежат — через V, точки касания вписанной сферы с плокостями ABC, VAB, VBC, VCA — через T, K, L, M (последние три точки, очевидно, — центры граней куба; рис. 1). В силу равенства касательных, проведенных к сфере из одной точки, $AT=AK=AM$, $BT=BK=BL$, $CT=CL=CM$, поэтому треугольники ABK и ABT, BCL и BCT, CAM и CAT (рис. 1), а также AVK и AVM, BVK и BVL, CVL и CVM (рис. 2) попарно равны и, тем более, равновелики. Следовательно, площадь сечения ABC равна сумме S_1 площадей голубых треугольников на рисунке 1, а площадь $S_{\text{тетр}}$ полной поверхности тетраэдра $VABC$ равна сумме площадей четырехугольников $AKBV$, $BLCV$ и $CMAV$, то есть удвоенной сумме

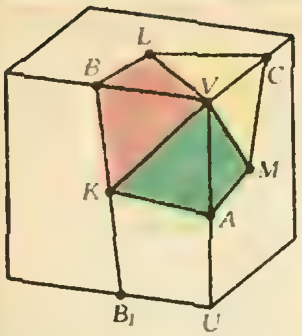


Рис. 2.

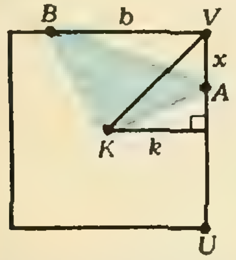


Рис. 3. Площадь треугольника ABK с фиксированными вершинами B и K линейно зависит от $x=VA$: $S_{ABK}=S_{VBK}+S_{VAK}-S_{VAB}=S_{VBK}+x(k-b)/2$, где k — расстояние от точки K до прямой VU. $b=BV$.

S_2 площадей зеленого, красного и желтого треугольников на рисунке 2:

$$S_{тетр}=2S_2=2(S_{AKV}+S_{BKV}+S_{CLV})=2(S_{AKBV}+S_{CLV}).$$

Пусть S_0 — площадь грани куба. Докажем, что *для любых трех точек* A, B, C на ребрах куба, выходящих из вершины V,

$$S_1=S_{ABK}+S_{BCL}+S_{CAM}\leqslant S_0/2 \qquad (1)$$

(*и, в частности, утверждение* а)).

Для этого заметим, что если две из трех точек, например B и C, закреплены, то площади треугольников ABK и ACM, а значит и вся сумма S_1, линейно зависят от $x=VA$ (доказательство см. на рисунке 3). Поэтому всегда можно передвинуть точку A в конец ребра так, чтобы величина S_1 возросла (или, во всяком случае, не уменьшилась). То же самое можно проделать последовательно с точками B и C; следовательно, неравенство (1) достаточно доказать для точек A, B и C, расположенных в вершинах куба. Имеется всего 4 таких расположения (с точностью до переобозначений); они показаны на рисунке 4. В двух случаях $S_1=0$, в двух других $S_1=S_0/2$. Легко понять, что за исключением двух последних случаев неравенство в (1) всегда строгое, но треугольник ABC на рисунке 4,в можно рассматривать как предельное положение сечения, касающегося вписанной сферы, поэтому оценка в задаче а) точная.

Докажем теперь неравенство

$$S_2=S_{AKBV}+S_{CLV}<S_0/2$$

(и вместе с ним — *утверждение* в)).

Пусть для определенности $KB\geqslant KA$. Очевидно, прямая KB делит грань куба на две равные трапеции площади $S_0/2$, одна из которых — VBB_1U (рис. 2) состоит из четырехугольников $AKBV$ и AKB_1U. Таким образом, достаточно доказать, что

$$S_{CLV}<S_{AKB_1U}.$$

Отложим на ребре UV отрезок $UC_1=VC$ (рис. 5); тогда треугольники C_1KU и CLV равны, причем

$$\angle C_1KU=\angle CLV=\angle AKB_1.$$

(Действительно, из равенства одноцветных треугольников на рисунке 2 следует, что $2(\angle CLV+\angle AKB)=\angle AKB+\angle BLC+\angle CMA=\angle ATB+\angle BTC+\angle CTA=360^\circ=2(\angle AKB_1+\angle AKB)$.) Следовательно, $\angle B_1KU=\angle C_1KA$ (рис. 5) и, кроме того, $KB_1=KB\geqslant KA$, $KU>KC_1$, поэтому $S_{AKC_1}<S_{B_1KU}$, то есть

$$S_{CLV}=S_{C_1KU}=S_{AKC_1}+S_{AKU}<S_{B_1KU}+S_{AKU}=S_{AKB_1U}.$$

Такие же соображения, как в пункте а), показывают, что и здесь оценка точная.

б) Пусть $ABCD$ — четырехугольное сечение куба, отделяющее от него ребро UV и пересекающее грани с центрами K, L, M, N (рис. 6). Как и выше, легко видеть, что его площадь равна сумме S_3 площадей треугольников ABK, BCL, CDM и DAN, которая, очевидно, меньше суммы

$$S_4=S_{ABK}+S_{BLCV}+S_{CDM}+S_{DNAU}.$$

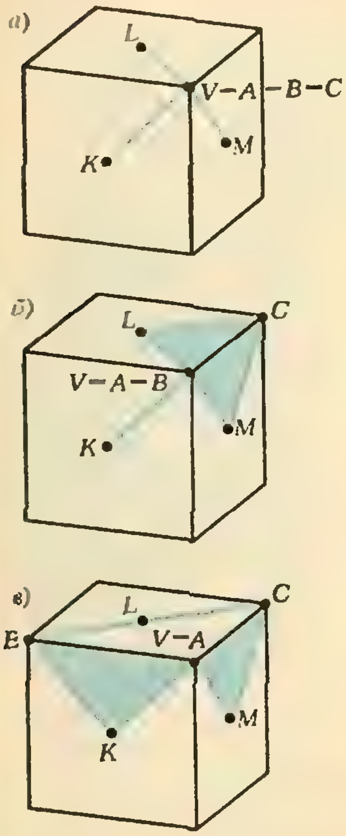


Рис. 4. а—в.

(Окончание см. на с. 34)

П. Л. Чебышёв

«Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных...»

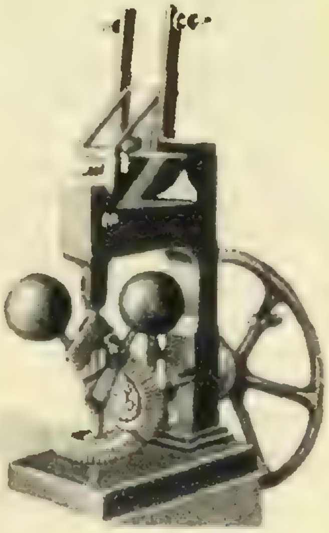
П. Л. Чебышёв

* * *

Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894) — великий русский математик и механик. Ему принадлежат выдающиеся результаты во многих областях математики. В частности, он показал, что количество $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих числа n, с большой точностью описывается зависимостью: $\pi(n) \approx n/\log n$. Чебышёв построил теорию приближения функций многочленами, внес огромный вклад в развитие теории вероятностей. В то же время он много внимания уделял прикладной математике и механике. Известны его работы о рациональном раскрое тканей, строении географических карт, полетах артиллерийских снарядов.

Очень интересны исследования П. Л. Чебышёва по теории и конструированию шарнирных механизмов, которым он посвятил 15 своих работ. Им было придумано и сконструировано около 40 разнообразных механизмов, в числе которых следует отметить «стопоходящую машину», или, как ее называли, «механическую лошадь», лодку с гребным механизмом, регуляторы к паровой машине (см. фото), арифмометр и многое другое.

П. Л. Чебышёв был и выдающимся педагогом. Он воспитал многих первоклассных математиков, составивших петербургскую математическую школу, традиции которой живы и по сей день.



Нарисуем на клетчатой бумаге какой-нибудь многоугольник с вершинами в узлах сетки, например такой, как на рисунке 1. Попробуем теперь посчитать его площадь. Как это сделать? Наверное, проще всего разбить его на прямоугольные треугольники и прямоугольники, площади которых уже нетрудно вычислить, и сложить полученные результаты. Последовательно проводя вычисления, получим, что площадь нашего многоугольника равна 20,5, если за единицу площади взять площадь одного квадратика клетчатой бумаги. Но если вспомнить, что сторона такого квадратика равна 0,5 см, а значит, его площадь равна четверти квадратного сантиметра, площадь нашего многоугольника в квадратных сантиметрах будет равна $20{,}5/4 = 5{,}125$ см^2.

Использованный нами способ несложен, но очень

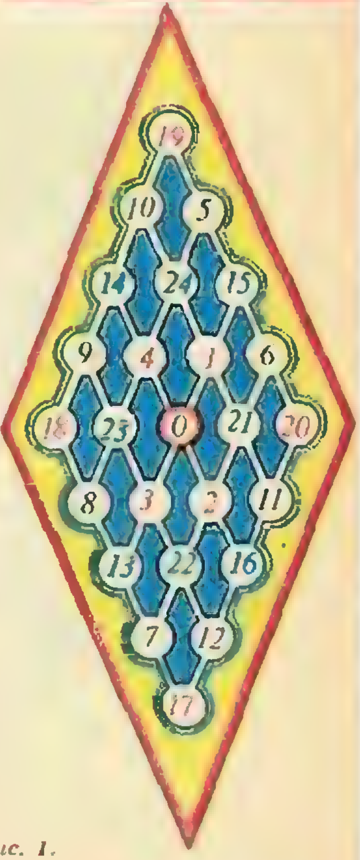


Рис. 1.

Формула площади

громоздок, кроме того, он годится не для всяких многоугольников. Так, многоугольник на рисунке 2 уже нельзя разбить на прямоугольные треугольники и прямоугольники так, как мы это делали с предыдущим многоугольником. Можно, например, попробовать дополнить наш многоугольник до «хорошего», то есть до такого, площадь которого мы сможем вычислить описанным способом, потом из полученного числа вычесть площади добавленных частей.

Однако оказывается, что есть очень простая формула, позволяющая вычислять площади многоугольников с вершинами в узлах квадратной сетки:

$$S=В+Г/2-1,$$

где S — площадь многоугольника, выраженная в площадях единичных квадратиков сетки, $Г$ — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника, а $В$ — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника. Для многоугольника на рисунке 3

$$Г=7,\ В=18,$$
$$S=18+3{,}5-1=20{,}5.$$

Столь же просто сосчитать и площадь многоугольника на рисунке 2:

$$В=10,\ Г=11,$$
$$S=10+5{,}5-1=14{,}5.$$

Формула, о которой мы рассказали, носит название «формула Пика» по имени открывшего ее немецкого математика. Подробнее об этой формуле можно прочесть в статье Н. Б. Васильева «Вокруг формулы Пика» («Квант» 1974, № 12, с. 39—43).

А. П.

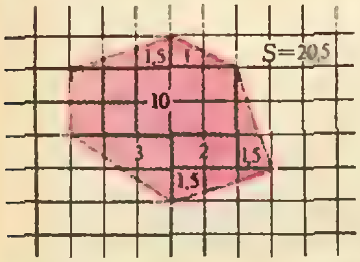


Рис. 1.

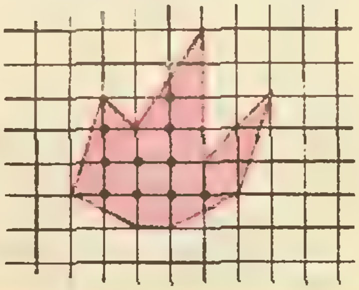


Рис. 2.

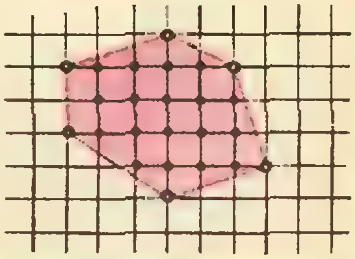


Рис. 3.

ГОЛОВОЛОМКИ

1. Найдите замкнутый путь по дорожкам парка, проходящий через каждую отмеченную числом площадку (рис. 1) не более одного раза, так, чтобы сумма пройденных чисел была наибольшей. А какую наибольшую сумму можно получить на замкнутом пути, проходящем через центральную клетку, если опять разрешается не более одного раза проходить через каждую площадку?

В. Д. Вьюн

2. Впишите в квадратики цифры так, чтобы во всех трех горизонтальных строчках и в каждом из пяти вертикальных столбцов получились различные квадраты натуральных чисел (рис. 2).

Л. П. Мочалов

3. На рисунке 3 изображены два варианта головоломки, состоящей из двух пуговиц и нитки. Один из них (какой?) не имеет решения (не распутывается), а второй имеет (какое?).

А. Т. Калинин

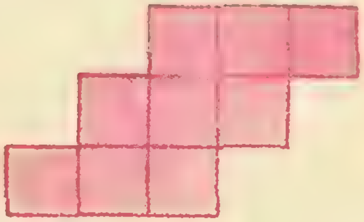


Рис. 2.

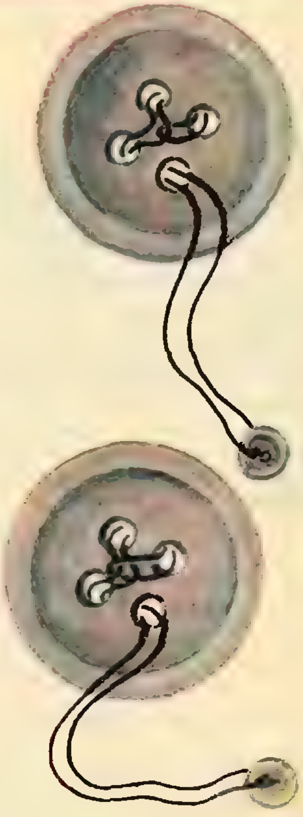


Рис. 3.

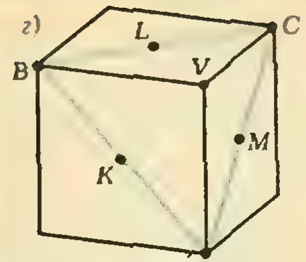


Рис. 4. г.

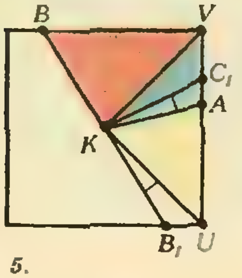


Рис. 5.

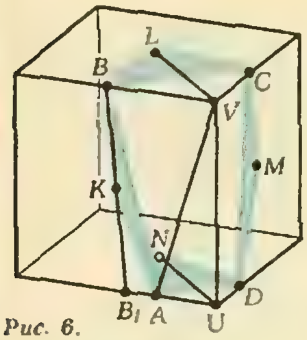


Рис. 6.

(Начало см. на с. 30)

Покажем, что $S_4=S_0/2$ (S_0 — площадь грани куба). Очевидно, $S_{ABK}=S_{ABB_1}/2$, где B_1 — точка, симметричная B относительно K (см. рис. 6), поскольку треугольники ABK и ABB_1 имеют общее основание AB, а высота первого вдвое меньше высоты второго. Аналогично, $S_{BVL}=S_{BVA}/2$, $S_{AUN}=S_{AUV}/2$. Следовательно, $S_{ABK}+S_{BVL}+S_{AUN}=\frac{1}{2}(S_{ABB_1}+S_{BVA}+S_{AUV})=\frac{1}{2}S_{BVUB_1}=\frac{1}{4}S_0$ и, точно так же,

$$S_{CDM}+S_{CVL}+S_{DUN}=\frac{1}{4}S_0.$$

Складывая эти два равенства, мы и получим, что $S_4=S_0/2$.

Из решения видно, что равенство $S_4=S_0/2$ верно *для любых точек* A, B, C, D на тех же ребрах при условии, что центры граней K и M находятся по разные стороны с ребром UV относительно прямых AB и CD соответственно. Если точка A или D совпадает с U, а B или C — с V, то $S_3=S_4$; в частности, случай, когда $A=U$, $B=V$, а C и D — середины соответствующих ребер, можно получить как предельное положение сечения, касающегося вписанной сферы, при $A\to U$, $B\to V$, поэтому в этой задаче оценка также точная.

Попробуйте доказать самостоятельно, что боковая поверхность усеченной пирамиды (или призмы) $AUDBVC$ не превосходит S_0, причем равенство достигается как раз в случае призмы, то есть когда касательная плоскость $ABCD$ параллельна ребру UV.

В. Н. Дубровский

◆

Ф903. *На верхней образующей гладкого цилиндра радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту, укреплена гибкая невесомая веревка длины l (рис. 1). К другому концу веревки прикреплен небольшой груз. Определить:*

1) длину свисающей части веревки в положении равновесия груза;

2) период малых колебаний груза в вертикальной плоскости, параллельной оси цилиндра.

Очевидно, что когда груз находится в положении равновесия, свисающая часть веревки вертикальна (на рисунке 1 это участок BD, где B — последняя точка касания веревки и цилиндра) и, следовательно, образует с осью цилиндра угол $\beta=\pi/2-\alpha$.

Рассмотрим ту часть веревки, которая лежит на цилиндре. Разобьем ее на множество малых участков, каждый из которых можно считать прямолинейным. Каждый такой участок испытывает действие сил натяжения со стороны двух соседних участков и силы реакции со стороны цилиндра. Так как трение отсутствует, сила реакции в каждой точке касания веревки и цилиндра перпендикулярна поверхности цилиндра (то есть направлена по перпендикуляру к соответствующей образующей, который проходит через ось цилиндра). Поскольку веревка невесомая, силы натяжения, действующие на отдельный участок, имеют одинаковые по абсолютной величине проекции на направление образующей. Значит, все участки веревки пересекают соответствующие образующие под одним и тем же углом, равным $\beta=\pi/2-\alpha$. Отсюда следует, что если мысленно «развернуть» верхнюю четверть цилиндра (от образующей, проходящей

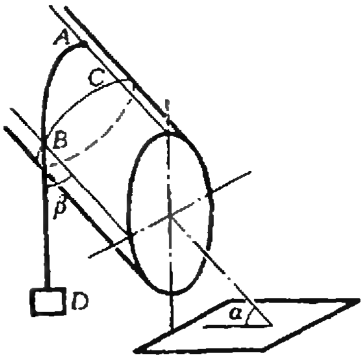


Рис. 1.

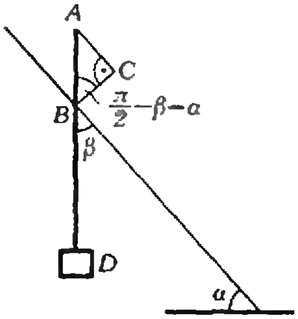


Рис. 2.

через точку B, до образующей, проходящей через точку A), то участок BA веревки перейдет в прямолинейный отрезок BA. Найдем длину этого отрезка.

Проведем сечение цилиндра, перпендикулярное его оси и проходящее через точку B. Пусть C — верхняя точка этого сечения (см. рис. 1). При «развороте» верхней четверти цилиндра точки A, B и C окажутся лежащими в вершинах прямоугольного треугольника с прямым углом BCA (рис. 2). Угол ABC равен $\pi-\pi/2-\beta=\alpha$, и $|BA|=|BC|/\cos\alpha$. Но $|BC|=\pi R/2$, так что

$$|BA|=\frac{\pi R}{2\cos\alpha}.$$

Следовательно, длина свободно свисающей части веревки равна

$$|BD|=l-\frac{\pi R}{2\cos\alpha}.$$

После того как грузу сообщат небольшую скорость в вертикальной плоскости, параллельной образующей цилиндра, он на протяжении всего движения будет находиться в этой вертикальной плоскости. Поскольку веревка все время натянута, то в любом промежуточном положении свисающая часть ($B'D$) будет образовывать прямую, а вся веревка будет лежать в плоскости, проходящей через точку A. Роль кривой AB' будет такая же, как если бы точка A находилась на вертикали над точкой B на расстоянии $\pi R/2\cos\alpha$ выше нее.

Отсюда для периода малых колебаний груза получим

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

С. С. Кротов

Ф904. *Сферу радиуса R, составленную из двух одинаковых плотно пригнанных тонкостенных полусфер массы m каждая, наполняют жидкостью с плотностью ϱ.*

1) Какую вертикальную силу надо приложить к нижней полусфере, чтобы жидкость не выливалась, если верхняя сфера закреплена (рис. 1)?

2) С какой силой надо сжимать левую и правую полусферы (рис. 2), чтобы жидкость не выливалась?

◆

1) Рассмотрим условие равновесия нижней полусферы, заполненной жидкостью. На эту систему действуют сила тяжести

$$F=mg+\varrho g\cdot\frac{2}{3}\pi R^3,$$

сила F_1 давления со стороны жидкости из верхней полусферы; вертикальная сила F_y, которую надо приложить к полусфере, чтобы жидкость не выливалась, определяется условием равновесия:

$$F_y=F+F_1.$$

Согласно закону Паскаля давление в жидкости в центре сферы равно

$$p_1=\varrho gR,$$

и, следовательно,

$$F_1=p_1\pi R^2=\varrho g\pi R^3.$$

Таким образом,

$$F_y=mg+\frac{2}{3}\varrho g\pi R^3+\varrho g\pi R^3=g\left(m+\frac{5}{3}\varrho\pi R^3\right).$$

2) Запишем условие равновесия заполненной жидкостью правой полусферы (см. рис. 2) в проекциях на горизонтальную ось:

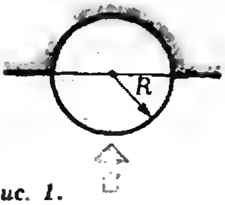


Рис. 1.

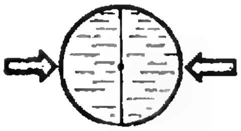


Рис. 2.

$$F_2 = F_x,$$

где F_2 — сила давления на правую полусферу со стороны жидкости в левой полусфере, F_x — сила, которую необходимо приложить к правой полусфере, чтобы жидкость не выливалась.

Найдем значение F_2. Давление жидкости внутри сферы линейно возрастает по мере увеличения глубины от 0 до $2\varrho gR$. Следовательно,

$$F_2 = \sum_i p_i s_i = p_{ср} S = \varrho gR\pi R^2 = \varrho g\pi R^3$$

(здесь p_i — давление на участок площади s_i, лежащий в центральном вертикальном сечении).

Таким образом, минимальная сила, которую надо приложить к правой полусфере, чтобы жидкость не выливалась, равна

$$F_x = \varrho g\pi R^3.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф905. *Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M с высотой H и площадью основания S плавает в воде (рис. 1). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на ΔH. Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p, температура не меняется.*

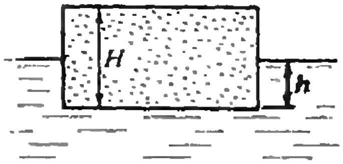


Рис. 1.

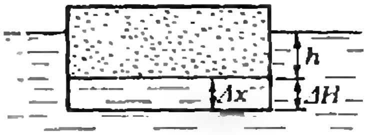


Рис. 2.

Пусть цилиндр первоначально был погружен в воду на глубину h (см. рис. 1). Тогда

$$Mg = \varrho_в ghS \Rightarrow h = \frac{M}{\varrho_в S}.$$

Нетрудно показать, что если в результате потери герметичности цилиндр опустился еще на глубину ΔH, то это значит, что высота Δx уровня воды, которая затекла в цилиндр, как раз равна ΔH. Действительно, в новом положении равновесия (рис. 2)

$$Mg + \varrho_в gS \cdot \Delta x = \varrho_в gS(h + \Delta H) \Rightarrow \Delta x = \Delta H.$$

Найдем давление p_1 газа в цилиндре, заполненном частично водой. Сумма давления p_1 и давления столба воды высоты ΔH на дно цилиндра должна быть равна давлению в воде на глубине $h + \Delta H$, то есть

$$p_1 + \varrho_в g \cdot \Delta H = p + \varrho_в g(h + \Delta H).$$

Отсюда

$$p_1 = p + \varrho_в gh = p + \frac{Mg}{S}.$$

Итак, газ занимает объем $V_1 = S(H - \Delta H)$ и давление газа равно p_1. Согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_0 V_0,$$

где p_0 — первоначальное давление газа, когда он занимал объем $V_0 = SH$. Таким образом,

$$\left(p + \frac{Mg}{S}\right) S\,(H - \Delta H) = p_0 SH,$$

откуда

$$p_0 = \left(p + \frac{Mg}{S}\right)\left(1 - \frac{\Delta H}{H}\right).$$

О. Ю. Никишина

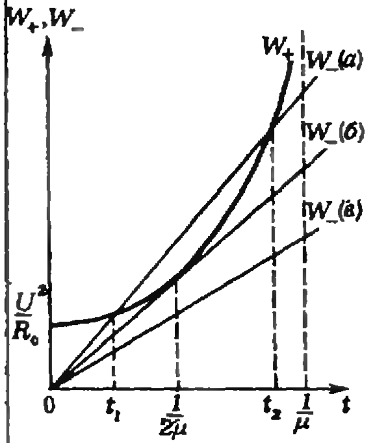
◆

Ф906. *Проводник, сопротивление которого зависит от температуры, подключили к источнику постоянного напряжения U. Сопротивление проводника меняется в зависимо-*

Тепловая мощность, выделяющаяся в проводнике, когда он подключен к источнику с напряжением U, равна

$$W_+ = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0(1 - \mu t)}.$$

сти от температуры по закону $R=R_0(1-\mu t)$, где R_0 — сопротивление при $t=0$ °C, $\mu>0$. Определить установившуюся температуру проводника, если температура окружающей среды равна 0 °C, а тепловая мощность, выделяемая проводником в окружающую среду, равна $W=b\cdot\Delta t$, где Δt — разность температур проводника и среды. Изменением размеров проводника из-за теплового расширения пренебречь.



Проводник будет находиться в тепловом равновесии, если эта мощность будет равна тепловой мощности $W_-=bt$, выделяемой проводником в окружающую среду. Из условия $W_+=W_-$ найдем, при каких температурах возможно тепловое равновесие проводника:

$$\frac{U^2}{R_0(1-\mu t)}=bt,$$

откуда

$$t=\frac{1}{2\mu}\pm\sqrt{\frac{1}{4\mu^2}-\frac{U^2}{R_0 b\mu}}=\frac{1}{2\mu}\left(1\pm\sqrt{1-U^2\frac{4\mu}{R_0 b}}\right).$$

Перепишем подкоренное выражение в виде $1-(U/U_0)^2$, где $U_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0 b}{\mu}}$:

$$t=\frac{1}{2\mu}\left(1\pm\sqrt{1-\left(\frac{U}{U_0}\right)^2}\right) \qquad (*)$$

(физический смысл параметра U_0, имеющего размерность напряжения, станет ясным после анализа решений уравнения (*)).

Рассмотрим три возможных случая:

а) $U<U_0$; уравнение (*) имеет два решения:

$$t_1=\frac{1}{2\mu}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{U}{U_0}\right)^2}\right),\quad t_2=\frac{1}{2\mu}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{U}{U_0}\right)^2}\right).$$

б) $U=U_0$; решение уравнения (*) —

$$t_0=\frac{1}{2\mu}.$$

в) $U>U_0$; уравнение (*) не имеет действительных корней. Это означает, что при условии $U>U_0$ тепловое равновесие невозможно.

Чтобы лучше уяснить физический смысл полученных математических выражений, построим графики функций $W_+(t)$ и $W_-(t)$ для случаев *а*), *б*) и *в*).

В случае *а*) графики этих функций имеют две общие точки, соответствующие состояниям теплового равновесия, — при $t=t_1$ и при $t=t_2$. Однако при $t=t_2$ равновесие неустойчиво: если $t_1<t<t_2$, то $W_->W_+$ — происходит охлаждение провода; если $t>t_2$, то $W_+>W_-$ — провод нагревается (в принципе — до температуры плавления). Устойчивое тепловое равновесие устанавливается при температуре $t=t_1$.

В случае *б*) графики $W_+(t)$ и $W_-(t)$ имеют одну общую точку — при $t=t_0$. Но и это равновесное состояние неустойчиво: с повышением температуры ($t>t_0$) $W_+(t)$ растет быстрее, чем $W_-(t)$, — провод разогревается.

В случае *в*) графики не пересекаются — при $U>U_0$ тепловое равновесие невозможно.

Итак, тепловое равновесие провода возможно при $U<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0 b}{\mu}}$; установившаяся температура

$$t=\frac{1}{2\mu}\left(1-\sqrt{1-U^2\frac{4\mu}{R_0 b}}\right).$$

Р. Ю. Винокур

Ф907. *Два металлических шара массы m каждый с радиусами r и $2r$ помещены в электрическое поле, напряженность которого направлена от большего шара к меньшему и равна E. Расстояние между центрами шаров равно $R_0=4r$. Большой шар несет заряд q $\left(k\frac{q}{r^2}\ll E\right)$, малый шар не заряжен. Шары отпускают. Время между первым и вторым соударениями шаров равно τ. Найти время между n-м и $(n\;1)$-м соударениями и пути, которые пройдут шары между этими соударениями. Чему равно среднее ускорение шаров за достаточно большой промежуток времени? Соударения считать абсолютно упругими.*

Когда шары отпускают, маленький шар остается неподвижным (действие силы тяжести не учитываем). Большой шар начинает двигаться с ускорением $a=qE/m$; через время $t=\sqrt{2(R_0-3r)/a}=\sqrt{2r/a}$ он подойдет к меньшему шару, имея скорость $u=at=\sqrt{2ra}$. В результате соударения шары обменяются скоростями: большой шар сразу после соударения будет иметь скорость 0, а маленький — скорость $u=\sqrt{2ra}$. Так как шары металлические, при соударении заряд q распределится по обоим шарам. Пусть αq — заряд большего шара после соударения ($\alpha<1$); тогда заряд меньшего шара будет $(1-\alpha)q$. Понятно, что при следующих соударениях заряды шаров меняться не будут. Ускорения, с которыми будут двигаться шары между соударениями,— $\alpha qE/m=\alpha a$ (большой шар) и $(1-\alpha)qE/m=(1-\alpha)a$ (меньший шар). При каждом соударении шары будут обмениваться скоростями.

Второе соударение произойдет через время τ после первого. Из условия равенства путей, пройденных шарами между первым и вторым соударениями,—

$$\frac{\alpha a}{2}\tau^2=\sqrt{2ra}\,\tau+\frac{(1-\alpha)a}{2}\tau^2,$$

— найдем значение αa:

$$\alpha a=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2ra}}{\tau}.$$

Перед вторым соударением больший шар имеет скорость $\alpha a\tau=\frac{1}{2}a\tau+\sqrt{2ra}$, а меньший — $\sqrt{2ra}+(1-\alpha)a\tau=\frac{a\tau}{2}$.

Для определения времени между вторым и третьим соударениями перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $a\tau/2$ (скорость большего шара сразу после второго соударения). В этой системе в первый момент времени большой шар имеет скорость 0, а меньший — $\sqrt{2ra}$. Но это значит, что время между вторым и третьим соударениями также равно τ.

Рассуждая аналогичным путем, придем к выводу, что времена между всеми последовательными столкновениями равны τ.

Из проведенных расчетов ясно, что скорость большего шара после n-го соударения равна $\frac{a\tau}{2}(n-1)$. Учитывая это, найдем путь, проходимый шарами между n-м и $(n+1)$-м соударениями:

$$S=\frac{a\tau}{2}(n-1)\tau+\frac{\alpha a}{2}\tau^2=\frac{a\tau^2}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2ra}\,\tau}{2}.$$

Среднее ускорение, с которым будет двигаться система (центр масс шаров), равно

$$a_{\text{ц.м.}}=\frac{qF}{2m}.$$

А. А. Лапидес

Задача о восьми точках

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ

В этой заметке речь идет о задаче, предлагавшейся десятиклассникам в апреле прошлого года на последней Всесоюзной олимпиаде по математике в Ашхабаде.*) Приведем с незначительными изменениями ее формулировку.

Задача 1. *Около треугольника ABC описана окружность. Через произвольную точку P в плоскости треугольника (не лежащую на окружности) проводятся прямые AP, BP, CP и отмечаются вторые точки их пересечения с окружностью. Докажите, что найдется не более 8 точек P, для которых отмеченные точки не совпадают ни с одной из точек A, B, C и служат вершинами треугольника, равного треугольнику ABC.*

Эта задача оказалась довольно трудной. Некоторые участники решали ее, перебирая разные расположения точки P относительно прямых AB, BC, CA и окружности. Здесь приводится другое, более поучительное решение этой задачи, использующее «язык движений»: мы представим себе, что отдельные элементы нашей конфигурации вращаются, и в некоторый момент возникает нужная фигура.

Сначала решим следующую «обратную» задачу.

Вращение и пересечения прямых

Задача 2. *В окружность вписаны два (не обязательно равных) треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Треугольник ABC закреплен, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается вокруг центра окружности. При каком его положении прямые AA_1, BB_1 и CC_1 будут проходить через одну точку P? Сколько будет таких положений?*

Дадим сразу ответ на второй вопрос (он будет использован ниже): такое положение лишь одно, то есть за время полного оборота треугольника $A_1B_1C_1$ прямые AA_1, BB_1 и CC_1 лишь однажды пересекутся в одной точке (а в некотором «вырожденном» случае такого положения вообще не будет).

Решить задачу 2 помогает метод геометрических мест.

Лемма. Пусть хорда AB окружности закреплена, а хорда A_1B_1 скользит концами по окружности. Тогда угол φ между прямыми AA_1 и BB_1 остается неизменным, а точка M пересечения этих прямых (если $\varphi \neq 0$) описывает окружность, проходящую через точки A и B (рис. 1).

Наметим доказательство леммы. Если точки A_1 и B_1 равномерно с одинаковой скоростью движутся по окружности, то прямые AA_1 и BB_1 совершают равномерное вращение с одинаковой угловой скоростью вокруг точек A и B, а значит, угол между ними остается постоянным (на рисунке 1 для точек M по одну сторону от прямой AB угол AMB равен φ — углу между прямыми, а для точек M по другую сторону от AB угол AMB равен $\pi-\varphi$). Если в начальный момент прямые AA_1 и BB_1 пересекались в некоторой точке M_1, то описанная около треугольника ABM_1 окружность и будет искомой траекторией точки M, причем M также равномерно движется по окружности (угловая скорость вращения прямых равна половине угловой скорости вращения по своим окружностям точек A_1, B_1 и M).

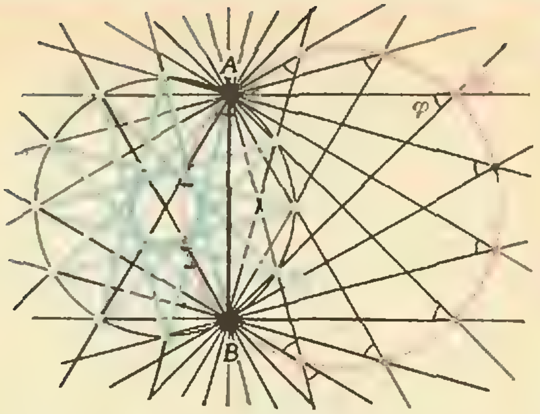


Рис. 1. Если точки A и B закреплены, а точки A_1 и B_1 с одинаковой угловой скоростью ω движутся по окружности, то прямые AA_1 и BB_1 вращаются с угловой скоростью $\omega/2$, а их точка пересечения M_1 движется по красной окружности (с угловой скоростью ω).

За этим наглядным рассуждением «на языке вращений» скрыто, как легко видеть, многократное использование теоремы о величине вписанного угла.*)

К лемме нужно сделать два уточнения, которые окажутся существенными в дальнейшем.

1°. Особый случай $\varphi=0$ возникает, если хорды AB и A_1B_1 равны по длине, причем в некоторый «начальный» момент времени точка A_1 совпадает с B, а B_1 с A. В этом случае в начальный момент прямые AA_1 и BB_1 просто совпадают, а при дальнейшем движении будут все время параллельны друг другу.

2°. В тот момент времени, когда A_1 совпадает с A (или B_1 с B), прямую AA_1 (соответственно BB_1) «по непрерывности» нужно считать направленной по касательной к данной окружности (или, если этого не делать, нужно исключить соответствующие две точки из найденного геометрического места — окружности).

Вернемся к задаче 2. Построим, пользуясь леммой, две окружности — геометрические места точек пересечения прямых AA_1 и BB_1, а также BB_1 и CC_1 (рис. 2). Первая проходит через точки A и B, вторая — через точки B и C. На роль точки P, где должны пересекаться все три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 (она, разумеется, не может лежать на данной окружности), годится лишь одна точка — отличная от B точка пересечения двух построенных окружностей. (Нам нет нужды строить геометрическое место точек пересечения AA_1 и CC_1 — третью окружность, проходящую через A и C, — она, конечно, автоматически пройдет через ту же точку P пересечения двух построенных окружностей.) Итак, вообще говоря, существует лишь одно положение треугольника $A_1B_1C_1$, удовлетворяющее нужному условию. В любом случае, с учетом сделанных выше уточнений, мы можем утверждать, что нужных точек P не более одной (особый

---

*) Другие задачи олимпиады были разобраны в «Кванте» № 11 за 1984 г.

*) О «языке движений» в геометрии подробно рассказывается в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., Наука, 1978).

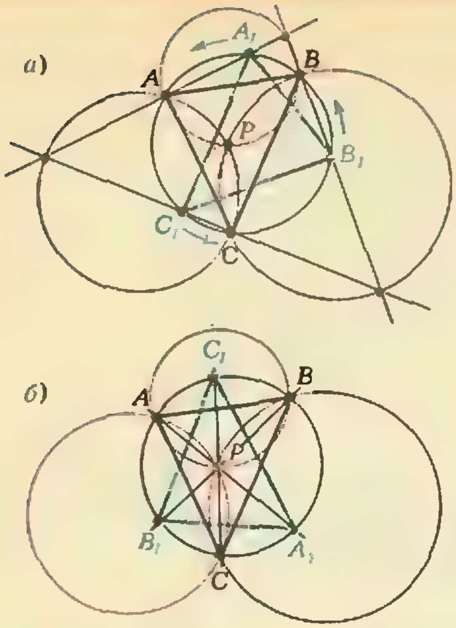


Рис. 2. Точка P находится на пересечении двух геометрических мест: когда прямая BB_1 повернется в положение BP, то AA_1 и CC_1 совпадут с AP и CP.

случай изображен на рисунке 3). Задача 2 решена.

Теперь можно заняться задачей 1. Для каждой точки P, не лежащей на окружности, обозначим через A_1, B_1 и C_1 вторые точки пересечения с окружностью прямых AP, BP и CP. Условие задачи выделяет те точки P, для которых треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC; на первый взгляд может показаться, что, взяв в задаче 2 равные треугольники, мы найдем лишь один нужный $\triangle A_1B_1C_1$ (симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности). Но тут есть тонкость, не столько геометрическая, сколько логическая. Мы объясним ее после небольшого отступления.

Перестановка вершин и симметрии

Все знают, что равные (по другой терминологии «конгруэнтные») треугольники по определению имеют соответственно равные углы и стороны, так что их можно совместить наложением. В учебном пособии академика А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» равенство треугольников $\triangle ABC=\triangle DEF$, вершины которых обозначены буквами, принято всегда записывать так, чтобы соответствующие вершины шли в одном и том же порядке (то есть так, что $\hat{A}=\hat{D}$, $\hat{B}=\hat{E}$, $\hat{C}=\hat{F}$, $AB=DE$ и т. д.).

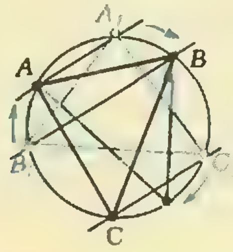


Рис. 3. Особый случай $\varphi=0$, когда точка P не существует (прямые AA_1, BB_1 и CC_1 остаются параллельными).

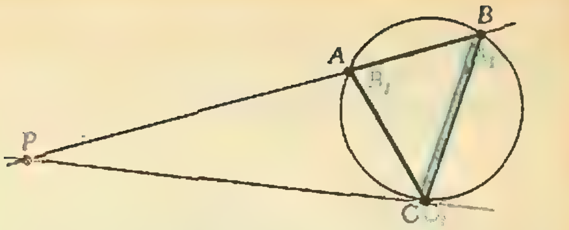


Рис. 4. Особый случай: точка P возникает в момент совпадения треугольников.

Прочитав еще раз условие задачи 1, можно заметить, что в этом смысле наш $\triangle A_1B_1C_1$ не обязан равняться треугольнику ABC — он может быть равен (с учетом соответствия вершин) любому из шести треугольников ABC, BCA, CAB, BAC, ACB, CBA. И это число вариантов нужно еще удвоить, уже по чисто геометрической причине: $\triangle A_1B_1C_1$ может быть, как говорят, «собственно равным» треугольнику ABC — то есть может быть совмещен с ним непрерывным движением в плоскости (в нашей задаче — поворотом R), либо «зеркально равным» — при этом для совмещения треугольников один из них нужно «перевернуть» (в нашей задаче достаточно сделать симметрию S относительно некоторой прямой: все треугольники $A_1B_1C_1$, зеркально равные треугольнику ABC, будут получаться друг из друга поворотами). Для различения этих случаев мы будем писать над равенством треугольников букву R или S. И для каждого из $2\cdot 6=12$ вариантов мы, применив задачу 2, можем построить (не более чем) одну нужную точку P.

Более наглядно это рассуждение можно пояснить так: мы берем картонный треугольник T (с тем же радиусом описанной окружности, что и у треугольника ABC), помещаем его вершины на окружность, положив на плоскость той или другой стороной, обозначаем их буквами A_1, B_1, C_1 (6 способов) и, вращая его как в задаче 2, находим для каждого из $2\cdot 6$ вариантов точку P.

Чтобы закончить решение задачи 1, остается объяснить, почему в случае $T=\triangle ABC$ исключаются 4 варианта. Один из них (случай $\triangle ABC\overset{S}{=}\triangle A_1B_1C_1$) исключается сразу (здесь для каждой из трех сторон возникает особый случай 1° леммы — см. рис. 3, — так что при вращении треугольника $A_1B_1C_1$ прямые AA_1, BB_1 и CC_1 никогда не проходят через одну точку). Кроме того, условие, что точки A_1, B_1 и C_1 не должны совпадать ни с одной из вершин A, B, C, исключают случай $\triangle BAC\overset{R}{=}\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4), а также два аналогичных — $\triangle ACB\overset{R}{=}\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle CBA\overset{R}{=}\triangle A_1B_1C_1$; здесь точка P возникает в тот момент, когда треугольники полностью совпадают (и при этом проявляются сразу обе особенности 1° и 2°, см. рис. 4). Задача 1 решена.

Тем, кто не ленится доводить начатое дело до конца, мы предлагаем подумать еще над следующими вопросами. 1) Верно ли, что в общем случае все 12 (а в случае $T=\triangle ABC$ — все 8 не исключенных нами) вариантов реализуются и приводят, как правило, к разным точкам P (попробуйте поэкспериментировать с помощью циркуля и линейки)? 2) На сколько уменьшается число 12 (и — в частном случае — число 8) для равнобедренного или равностороннего треугольника T?

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М866 — М880, Ф878 — Ф892, справились с задачами М871, Ф878, Ф880, Ф881, Ф890. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз. ССР) 67, 69; *Н. Агазарян* (Абовян) 72, 73, 75—80; *М. Александров* (Москва) 66—69, 73, 74, 77, 78, 80; *Р. Алексеев* (Ленинград) 66—70, 72—75; *Я. Алиев* (Баку) 66, 69, 73, 78, 79; *Д. Алтаев* (Чимкент) 73, 75; *Г. Андреева* (Пермь) 68, 69, 76, 79; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм. ССР) 76—80; *Р. Бабаев* (Баку) 66, 68, 69, 76, 79; *М. Байрамов* (Баку) 69, 73, 78, 79; *А. Барабаш* (Киев) 66—70, 72, 73, 75; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 66—70, 72, 73, 75, 77, 78; *М. Барон* (Ленинград) 66, 69, 70, 73, 75; *Т. Батбаяр* (Улан-Батор, МНР) 79; *Б. Батгорэл* (Улан-Батор, МНР) 76; *А. Батырев* (Москва) 67, 68, 70, 72, 73, 76, 79; *Ю. Бекетов* (Ленинград) 73, 76; *А. Бирман* (Донецк) 67, 69, 72, 73, 75, 76; *А. Бирюков* (Саратов) 67, 68, 72, 73, 75, 76, 78; *Д. Богатырев* (Пенза) 73; *О. Бондарев* (Киев) 73; *Д. Боровской* (Ульяновск) 68; *А. Бурд* (Ярославль) 69; *А. Бурлука* (Ростов) 73; *И. Вайнштейн* (Калинин) 69; *И. Вайнштейн* (Первоуральск) 67, 69; *А. Валиев* (Грозный) 73; *Д. Валунас* (Друскининкай) 67, 69; *В. Васильев* (Москва) 67—69; *А. Ващенко* (Дзержинск) 66, 67, 69; *С. Велесько* (Минск) 73—75; *Э. Велиметов* (Баку) 78, 79; *И. Верный* (Киев) 78; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 66—70, 72—74, 76—79; *Р. Видгоп* (Баку) 67, 69, 72, 73, 75, 76; *Т. Газарян* (Ереван) 66—69, 76—80; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 72, 73, 76—79; *Т. Гамбарян* (Баку) 66, 69, 73; *Р. Гендлер* (Ташкент) 66—70, 72, 73, 76—79; *Д. Гехтман* (Киев) 67—69, 72, 73, 75, 76; *А. Глазок* (Киев) 76, 78; *Д. Глек* (Воронеж) 69; *Э. Годзданкер* (Витебск) 69, 72, 73, 75; *Л. Гольдштейн* (Киев) 67, 69, 80; *В. Гордиюк* (Киев) 66, 67, 73, 76; *В. Городницкий* (Днепропетровск) 66—69, 73, 76, 78; *Е. Гороховская-Усветова* (Ташкент) 66; *Ю. Грабовский* (Киев) 68; *Н. Григорьева* (Андропов) 66, 67, 69, 70; *А. Григорян* (с. Маджадия Гр. ССР) 76—80; *А. Гродницкий* (Севастополь) 69, 73; *И. Гроздева* (Бургас, НРБ) 72, 73, 76; *И. Гуров* (Баку) 66, 67, 69; *А. Давтян* (п. Мецамор Арм. ССР) 72—80; *Ю. Дейкало* (Киев) 76; *В. Демидов* (Армавир) 68, 69; *С. Демьянченко* (Москва) 66—70, 73, 76, 77; *А. Джафаров* (Баку) 66, 67, 69; *В. Дзюба* (Одесса) 66—69, 72, 73, 75, 76, 78; *Д. Димова* (Ямбол, НРБ) 67—69, 73; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 66, 67, 73; *А. Дубровин* (Воронеж) 66, 76; *А. Дынников* (Жуковский) 66—70, 72, 73, 75—78, 80; *И. Дынников* (Жуковский) 66—70, 73, 75—78; *Д. Ежинов* (Минск) 73; *В. Елистратов* (Донецк) 66—68; *А. Еременко* (Киев) 78, 79; *А. Еренбург* (Запорожье) 73; *В. Журавлев* (Гайворон) 66, 67, 69, 70, 73, 75, 76, 78, 79; *А. Захаров* (Гатчина) 66, 72, 76, 78; *С. Зейналов* (Баку) 66, 69, 73, 76, 78—80; *Л. Зосин* (Киев) 66—69, 72, 73, 75—77, 80; *А. Иванов* (Первомайск) 67, 69; *Л. Иванов* (Саратов) 66—70; *В.* и *И. Капловичи* (Хабаровск) 66—70, 72, 73, 75—77; *А. Касимов* (Киев) 73, 76; *Д. Кашпер* (Киев) 76, 78; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) 69; *П. Кирилин* (Дубна) 67—70, 72—75; *О. Кирнасовский* (Винница) 73, 75—79; *А. Киселев* (Ленинград) 66, 67; *И. Кича* (Киев) 73, 76, 79; *И. Клигман* (Калинин) 67; *А. Кноп* (Винница) 73; *Т. Кобдиков* (Павлодар) 67, 68, 72, 73; *М. Колодин* (Ленинград) 66, 67, 73; *Д. Коломиец* (Москва) 66, 69, 70; *Ю. Кондратенко* (Киев) 73, 76, 78; *К. Копотун* (Киев) 66, 68—70, 72—76, 80; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 69, 73; *С. Котов* (Первоуральск) 68; *Ю. Кочетков* (Винница) 67—70; *Н. Крылов* (Ленинград) 73; *О. Крылов* (п. Синегорье Магаданской обл.) 67, 69; *Д. Кузин* (Пенза) 73; *В. Кузнецов* (Киев) 73; *В. Кузнецов* (Пенза) 67, 69; *Н. Курило* (с. Ольховатка Харьковской обл.) 68, 76, 79; *М. Куринной* (Харьков) 66—70, 72, 73, 78, 79; *В. Кутищев* (Магадан) 67, 69, 72; *Н. Кушлевич* (Москва) 67, 69, 73, 78; *С. Кярас* (Молетай) 66—70, 72, 73, 75, 76, 78; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 67, 73; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 76; *Л. Леняшин* (Ленинград) 67, 73, 76, 79; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) 73; *А. Липай* (Минск) 66, 67, 73, 78; *В. Литовченко* (Киев) 72, 73; *В. Любарский* (Киев) 76; *Е. Макаров* (Серпухов) 69, 73; *И. Макаров* (Новокузнецк) 73; *М. Макаров* (Севастополь) 67—70, 72—75, 77; *А. Максимов* (Ташкент) 72; *Ю. Махлин* (Москва) 66, 67, 69, 70, 73, 74; *В. Мацкин* (Ленинград) 67; *А. Мельниченко* (Киев) 76; *С. Минаев* (Свердловск) 66—68, 70, 73, 76; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 66—70, 72—76, 78, 80; *Е. Мишин* (Севастополь) 67—70, 72, 73, 75; *Д. Могалевский* (Ленинград) 73; *П. Молодчик* (Киев) 67; *А. Молотков* (Ленинград) 67—69, 73, 77; *В. Морозов* (Пущино) 67, 69, 73; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 69, 72, 73; *Н. Наншир* (Улан-Батор, МНР) 76; *О. Никифорчин* (Ивано-Франковск) 73; *Ф. Нюсс* (Страсбург, Франция) 69; *М. Ободовский* (Москва) 69, 73, 76; *О. Овецкая* (Донецк) 66, 67, 69, 72, 73, 75; *Л. Ольха* (Свердловск) 69, 73; *Б. Панич* (Севастополь) 72, 73, 75; *А. Панькин* (Киев) 67, 68; *Е. Патрушев* (Нижний Тагил) 73; *С. Пиунихин* (Москва) 67—70, 73, 77; *В. Погребняк* (Винница) 66—70, 73; *М. Померанцев* (Черкассы) 66, 67; *В. Порошин* (Ленинград) 66—69, 76, 77; *А. Приходько* (Днепропетровск) 73; *И. Путилин* (Рязань) 73; *И. Пухов* (Москва) 69; *С. Пяртли* (Иваново) 67; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 66—70, 72, 73, 75—77, 79, 80; *А. Расийски* (Кюстендил, НРБ) 69; *Е. Растигеев* (Барнаул) 66—68; *Д. Розман* (Севастополь) 67—70, 72, 73, 75; *А. Ройтерштейн* (Пушкин) 73; *Е. Романов* (Дмитровград) 66—69, 73, 76—78; *А. Ростов* (Винница) 69, 72, 73, 76, 78; *С. Русева* (Сливен, НРБ) 76, 78—80; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 66, 73, 78; *И. Самовол* (Гайворон) 66, 67, 69, 70, 73—76, 78—80; *С. Седова* (Москва) 68, 69, 73; *К. Семенов* (Киев) 66, 67, 72—76, 78—80; *Р. Сибилёв* (Ленинград) 73, 76—80; *В. Сизый* (Киев) 72—76, 78—80; *М. Соколова* (Ленинград) 69, 76, 77; *Г. Спивак* (Киев) 66, 68, 76, 78; *С. Старцев* (Уфа) 66—68, 70, 73, 76, 77; *С. Стасевич* (Брест) 73; *И. Струговщиков* (Киев) 76, 78; *В. Судаков* (Тбилиси) 66, 69, 72, 73, 75—80; *Р. Суник* (Киев) 76, 78; *И. Сысоева* (Балашиха) 69; *В. Тартаковский* (Киев) 72, 73, 75; *М. Тейтель* (Киев) 66—70, 72, 73, 75, 76, 80; *Д. Толпин* (Электросталь) 67, 69; *Ю. Томилов* (Винница) 73, 75—79; *Е. Тополюк* (Пенза) 73; *С. Торшин* (Магнитогорск) 73; *А. Трухан* (Минск) 66, 67, 72, 76; *В. Тульчинский* (Киев) 66—69, 72—74, 76, 78; *Е.* и *Т. Уклистые* (Астрахань)

66, 68, 73, 76; *Н. Устинов* (Калининград) 66—69, 75, 77; *Н. Федин* (Омск) 68, 69, 72, 76, 78, 79; *Р. Федосов* (Киев) 73, 76; *Е. Финк* (Ленинград) 66—69, 72, 73, 75; *Д. Финогенов* (Магадан) 69; *И. ван дер Флинт* (Ленинград) 66, 69, 72, 73, 75; *М. Хованов* (Москва) 66, 67, 69; *С. Хосид* (Алма-Ата) 69; *Е. Хотькова* (Наро-Фоминск) 73; *А. Цирс* (Апатиты) 78; *Т. Чабановский* (Киев) 73; *Е. Чебукова* (Киев) 73; *А. Череватый* (Киев) 67—69, 72—80; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 66, 67, 73; *М. Черномысов* (п/о Никольское Ленинградской обл.) 76; *Г. Шаглеев* (Севастополь) 68, 70, 72, 73, 75; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 66, 67, 69, 73, 77; *А. Шаповал* (Киев) 73, 76, 78, 80; *О. Шаров* (Киев) 66, 67, 69; *С. Шейник* (Молодечно) 66, 67, 69, 73, 75, 77; *А. Шишкин* (Калинин) 69; *Г. Шпитальник* (Ленинград) 73; *Б. Шраер* (Ленинград) 73, 76, 77; *Г. Шуклин* (Киев) 76; *В. Шульга* (Евпатория) 72, 73, 75, 76; *М. Шульгина* (Фатеж) 66, 67, 70; *Г. Шухлин* (Киев) 72, 75; *В. Щепинов* (Севастополь) 68, 69; *Е. Юдицкий* (Киев) 66, 68, 76—78; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 66, 67, 69.

Физика

О. Авраменко (Херсон) 79, 82, 85, 86, 89, 91, 92; *В. Антипенко* (Киев) 82; *В. Апальков* (Харьков) 82, 84, 85, 88, 89, 91, 92; *М. Апреленко* (Киев) 85; *А. Байрамов* (Баку) 92; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 82—86, 88, 91, 92; *Н. Барский* (Донецк) 82; *К. Баталин* (Нижний Тагил) 91; *Г. Батрак* (Киев) 88; *Б. Баяраа* (Улан-Батор, МНР) 86; *Э. Бондаренко* (Полтава) 82—86, 88, 91; *Ю. Боровский* (Киев) 83, 85, 88, 89; *Р. Боташев* (Фрунзе) 82, 85, 91; *Т. Брейтус* (Москва) 82; *Е. Вайнштейн* (Ташкент) 88; *О. Васильев* (Алма-Ата) 82, 85, 88, 91; *В. Викторов* (п. Чимишлия Молд. ССР) 88; *А. Воротняк* (Киев) 83, 85, 88; *И. Гаврик* (Часов Яр) 82, 85, 86, 88, 91, 92; *В. Гай* (Киев) 82; *К. Галочкин* (Ташкент) 85; *В. Галухин* (Рязань) 82—86, 89, 91; *Е. Генчикмахер* (Киев) 91; *А. Глухов* (Саратов) 82, 85, 88, 91; *М. Готман* (Киев) 82, 85, 91, 92; *В. Гриншпун* (Караганда) 82, 85; *В. Гусев* (Красноярск) 82, 84—86, 91; *Ю. Дейкало* (Киев) 85; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 82, 85, 88, 91; *П. Дробышев* (Киев) 82, 85, 89, 91; *С. Дубовик* (Брест) 82, 84, 85, 89; *С. Дудко* (Донецк) 84—86; *А. Еренбург* (Запорожье) 82, 84—86; *С. Ерлыков* (Ленинград) 89; *М. Замкович* (Брест) 82; *А. Иванов* (Петрозаводск) 82; *А. Карнаухов* (Устинов) 82, 85, 86; *Д. Кашпер* (Киев) 91; *Т. Квитковский* (Быдгощ, ПНР) 82; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) 82; *В. Киреев* (Киев) 87; *П. Климкин* (Киев) 88, 91; *А. Климачев* (Минск) 82—84, 86, 88, 89, 91; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) 82—89, 91, 92; *В. Князницкий* (Пружаны) 85, 87—89; *С. Комечко* (Брест) 86; *Ю. Кондратенко* (Киев) 91; *В. Костенко* (Киев) 88, 91; *С. Котов* (Первоуральск) 81, 82, 85; *М. Кудряшев* (Москва) 84—88, 91; *М. Кудрявцев* (Стаханов) 86; *В. Кузнецов* (Киев) 85; *Н. Курило* (с. Ольховатка Харьковской обл.) 86; *В. Кусков* (п. Красиый Октябрь Владимирской обл.) 83—85; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 84, 88, 89; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 85; *Ю. Лобзаков* (Киев) 82, 85; *К. Лопин* (Фрунзе) 91; *Д. Лунц* (Саратов) 83—86, 88, 91, 92; *П. Лушников* (Москва) 84—88, 91; *О. Мазяр* (Львов) 85, 86, 88, 91; *К. Макарчук* (Киев) 84—86; *А. Максимов* (Ташкент) 84, 85; *А. Мастыкин* (Минск) 91; *Ю. Махлин* (Москва) 82, 86; *С. Машкевич* (Киев) 82—86, 88, 91; *В. Меньков* (Мончегорск) 79, 82—85, 87—89, 91, 92; *А. Микалькявичус* (Паневежис) 82, 85, 87—89, 91, 92; *С. Минаев* (Свердловск) 82; *А. Михеев* (Москва) 82, 85, 91; *О. Мороз* (Алма-Ата) 82, 85, 86, 88, 91; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 82, 85; *А. Муравьева* (Брест) 82; *С. Мягчилов* (Одесса) 82—85, 88, 89, 91, 92; *С. Настенко* (Киев) 82; *А. Никитин* (Киев) 82; *С. Никитенко* (Киев) 82, 84—87; *С. Никоненко* (Киев) 88, 91, 92; *А. Онуфриев* (Москва) 82, 85, 86, 91; *О. Осауленко* (Киев) 83, 85, 88, 89; *Р. Паламарчук* (Нежин) 85, 91; *Б. Парканский* (Кишинев) 84—86, 89, 91, 92; *Д. Пастухов* (Витебск) 82, 83, 85, 86, 92; *А. Перепеличный* (Владимир-Волынский) 82, 84—86, 88, 91; *И. Пильников* (Тамбов) 82, 84—86; *С. Пиунихин* (Москва) 82, 85, 88; *М. Померанцев* (Черкассы) 82; *О. Посудневский* (Береза) 85; *Ю. Прахович* (Москва) 82; *В. Прибытков* (Находка) 82; *А. Приходовский* (Береза) 79, 82; *А. Прохоров* (Херсон) 91; *Я. Пугай* (Алма-Ата) 82—85, 89, 91; *В. Рай* (с. Марфовка Крымской обл.) 85, 86; *С. Рахамов* (Казань) 82—89, 91, 92; *А. Ржевский* (Новосибирск) 82, 85, 86, 88, 89, 91; *Р. Ривкин* (Минск) 79, 82, 88; *Н. Ромец* (Кировоград) 88, 89; *В. Руднев* (Целиноград) 82, 85, 86; *М. Рудык* (Винница) 82, 85, 86, 88; *Ю. Рыбалочко* (Киев) 82, 83, 85, 86, 88, 91; *Л. Рывчин* (Киев) 85, 86, 91; *М. Савченко* (Белгород) 82, 84—86, 92; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 88; *Б. Самойлов* (Киев) 83—85, 88; *И. Серикбаев* (с. Чилик Алма-Атинской обл.) 82; *М. Скоробогатов* (Киев) 78—92; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) 82, 87; *А. Сомов* (Киев) 79, 82, 85, 86, 88; *Г. Спивак* (Киев) 82, 91; *С. Степанянц* (Ереван) 84; *И. Стрешинский* (Киев) 85, 86, 88, 91; *И. Струговщиков* (Киев) 79, 82, 85, 86, 91; *Б. Сулейманов* (Баку) 92; *Д. Таджибаева* (Учкурган) 82; *В. Тартаковский* (Киев) 82, 84—86, 89, 91, 92; *И. Терез* (Симферополь) 82, 84—89, 91, 92; *А. Тихомиров* (Чимкент) 82; *С. Тужанский* (Винница) 82, 85, 86, 88; *А. Умнов* (Миасс) 82, 88, 91; *Л. Федичкин* (Москва) 82, 85, 86, 88, 91; *Н. Федин* (Омск) 82, 84—89, 92; *Л. Фельдман* (Саратов) 82—92; *С. Феранчук* (Минск) 82, 84—86, 88, 91; *А. Фокин* (Москва) 82; *В. Фурман* (Ташкент) 79, 82, 83, 85—89, 91; *А. Цирс* (Апатиты) 89, 92; *Т. Чабановский* (Киев) 85; *О. Чемерченко* (п. Купянск-Узловой Харьковской обл.) 82, 88; *С. Чернышов* (Ташкент) 82, 85; *А. Шаповал* (Киев) 85; *А. Швед* (с. Раздольное Амурской обл.) 91; *Г. Швец* (Киев) 88; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) 82, 84—86, 88, 89, 91; *А. Щербаков* (Москва) 82; *О. Яковлев* (Иркутск) 79, 91, 92.

Поправка

В «Кванте» № 2 этого года на с. 32 в условии задачи 1 вместо слов «... в этом году» следует читать «в 1865 году».

Сколько корней имеет уравнение?

И. Г. ГАБОВИЧ,
П. И. ГОРНШТЕЙН

На вступительных экзаменах в вузы нередко предлагаются примеры, в которых требуется определить, сколько корней имеет то или иное данное уравнение. Заметим, что в этих примерах требуется чаще всего найти лишь число корней, а не сами корни.

Более сложным является аналогичный вопрос в отношении уравнения, содержащего параметр. В этом случае предлагается определить, при каком значении параметра данное уравнение имеет один, два или другое конечное число корней.

Решению таких примеров посвящена данная статья.

Пример 1 (КГУ, мехмат, 1981). *Сколько корней имеет уравнение*

$$x^2-2x-\log_2|1-x|=3? \qquad (1)$$

Решение. Перепишем уравнение (1) в виде

$$x^2-2x-3=\log_2|x-1|. \qquad (2)$$

Ясно, что $(2)\Leftrightarrow(1)$. Заметим, также, что знак выражения, стоящего под знаком абсолютной величины, можно изменить на противоположный.

Число корней уравнения (2) равно числу точек пересечения графиков функций, являющихся левой и правой частями уравнения (2). Графики этих функций (рис. 1) пересекаются в четырех точках (A, B, C и D). Следовательно, уравнение (2), а значит и эквивалентное ему уравнение (1), имеет четыре корня (равные абсциссам точек пересечения).

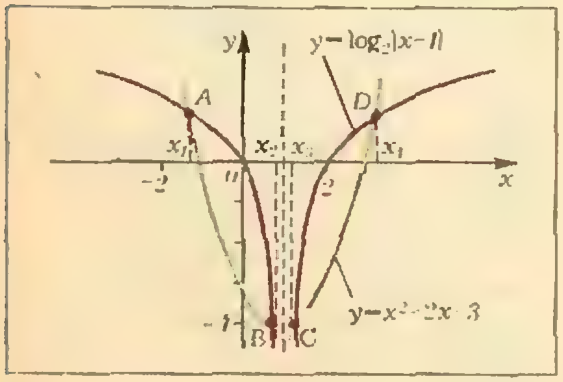


Рис. 1.

Пример 2 (МГУ, ВМК, 1980). *При каких значениях параметра a уравнение*

$$(a+1)x^2-ax+(a-3)=0 \qquad (3)$$

имеет не более одного действительного корня?

Решение. 1) Пусть $a\neq-1$. Тогда уравнение (3) квадратное и имеет не более одного действительного корня, если $D\leqslant0$, то есть

$$a^2-4(a+1)(a-3)\leqslant0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a^2-8a-12\geqslant0. \qquad (4)$$

Квадратный трехчлен $3a^2-8a-12$ имеет корни: $a_1=(4-2\sqrt{13})/3$ и $a_2=(4+2\sqrt{13})/3$. Ясно, что $a_2>-1$. Покажем, что $a_1<-1$:

$$-1-(4-2\sqrt{13})/3=(2\sqrt{13}-7)/3=$$
$$=(\sqrt{52}-7)/3>0;$$

это и означает, что $a_1<-1$.

Следовательно, решением (4) будет объединение промежутков:

$$]-\infty;\ (4-2\sqrt{13})/3]\cup$$
$$\cup[(4+2\sqrt{13})/3;\ \infty[.$$

2) При $a=-1$ уравнение (3) обращается в уравнение первой степени: $x-4=0$, имеющее один действительный корень.

Таким образом, получаем следующий ответ:

$$a\in\ ]-\infty;\ (4-2\sqrt{13})/3]\cup$$
$$\cup\{-1\}\cup[(4+2\sqrt{13})/3;\ \infty[.$$

Пример 3 (МИЭМ, 1982). *Решить уравнение*

$$|2x+2|=ax^2+4 \qquad (5)$$

и определить значения a, при которых оно имеет единственное решение.

Решение. Уравнение (5) эквивалентно совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1;\\ -2x-2=\\ =ax^2+4;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant-1;\\ 2x+2=\\ =ax^2+4;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1;\\ ax^2+2x+\\ +6=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant-1;\\ ax^2-2x+\\ +2=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

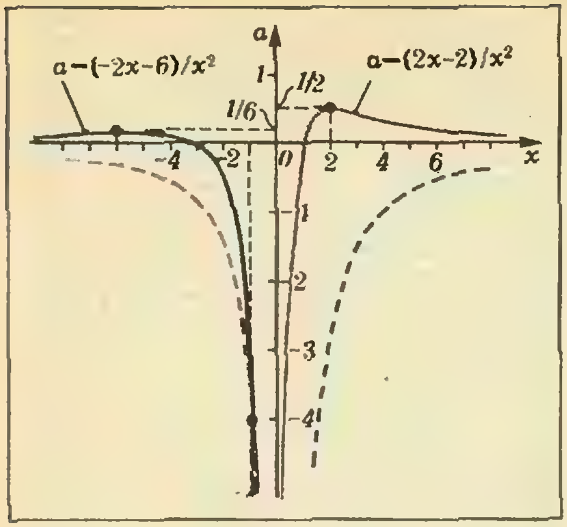


Рис. 2.

Учитывая, что $x\neq 0$, получаем зависимость $a=f(x)$, имеющую на каждом из рассматриваемых промежутков разные аналитические выражения:
$a=(-2x-6)/x^2=f_1(x)$ при $x<-1$ и $a=(2x-2)/x^2=f_2(x)$ при $x\geqslant -1$.

Построим график этой зависимости в системе координат xOa (рис. 2). Графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются «сплошные» синяя и красная кривые соответственно. Объединение этих линий является графиком зависимости $a=f(x)$. (Пунктирные синяя и красная кривые есть графики зависимостей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вне промежутков, на которых они рассматриваются. Эти пунктирные линии понадобятся ниже при отборе решений.) Синяя и красная кривые пересекаются в точке с координатами $(-1; -4)$.

Исследование функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ показывает (что видно также и на рисунке 2), что $\max\limits_{]-\infty;\,-1]} f_1(x)=f_1(-6)=\frac{1}{6}$, а $\max\limits_{[-1;\,\infty[} f_2(x)=f_2(2)=\frac{1}{2}$.

Абсциссы точек, в которых прямая, параллельная оси Ox, пересекает сплошные линии, являются решениями уравнения (5).

Из приведенного рисунка и сделанных выше замечаний следует, что уравнение (5) имеет:

а) При $a\in\ ]-\infty; -4]$ — два решения: $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a$, определяемые из уравнения

$$ax^2-2x+2=0. \qquad (6)$$

б) При $a\in\ ]-4; 0[$ — два решения: $x_1=(-1+\sqrt{1-6a})/a$ и $x_2=(1-\sqrt{1-2a})/a$.

Объясним, как отбираются эти корни. Решая уравнение

$$ax^2+2x+6=0, \qquad (7)$$

мы получаем два корня: $x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1-6a})/a$. При рассматриваемых значениях a оба корня действительны и меньшим будет корень $x_1=(-1+\sqrt{1-6a})/a$. Он и является решением уравнения (5). Больший же корень $x_2=(-1-\sqrt{1-6a})/a$ будет посторонним. Это объясняется тем, что упомянутая выше прямая, параллельная оси Ox, при рассматриваемых значениях a дважды пересечет синюю линию: один раз — ее сплошную ветвь, другой — пунктирную. Корнем же уравнения (5) будет абсцисса точки, принадлежащей сплошной ветви. Аналогично находится второй корень.

в) При $a=0$ — два решения: $x_1=-3$ и $x_2=1$, определяемые из уравнений (7) и (6) соответственно.

г) При $a\in\ ]0, 1/6[$ — четыре решения. Два из них находятся из уравнения (6), а два других — из

Таблица

Значения a	Число решений	Решения
$a\ ]-\infty; -4]$	два	$x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a$
$a\in\ ]-4; 0[$	два	$x_1=(-1+\sqrt{1-6a})/a$; $x_2=(1-\sqrt{1-2a})/a$
$a=0$	два	$x_1=-3$ и $x_2=1$
$a\in\ ]0; 1/6[$	четыре	$x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1-6a})/a$; $x_{3,4}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a$
$a=1/6$	три	$x_1=-6$; $x_{2,3}=6\pm2\sqrt{6}$
$a\in\ ]1/6; 1/2[$	два	$x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a$
$a=1/2$	одно	$x=2$
$a\in\ ]1/2; \infty[$	0	—

уравнения (7):

$$x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1-6a})/a;$$
$$x_{3,4}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a.$$

д) При $a=1/6$ — три решения: $x_1=-6$ и $x_{2,3}=6\pm2\sqrt{6}$.

е) При $a\in\,]1/6;\ 1/2[$ — два решения: $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1-2a})/a$.

ж) При $a=1/2$ — единственный корень $x=2$.

з) При $a\in\,]\frac{1}{2};\ \infty[$ уравнение (5) действительных корней не имеет.

Выпишем теперь все решения уравнения (5) в таблицу, идя по «спектру» значений a. Эта таблица и будет ответом для данного примера.

Пример 4 (ЛГУ, матмех, 1980). *При каких действительных a уравнение*

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+a=\cos 2x \qquad (8)$$

имеет более одного корня на отрезке $[\pi/8;\ 3\pi/8]$?

Решение. Преобразовав в уравнении (8) произведение $\cos x\cdot\cos 3x$ в сумму, получаем

$$\frac{1}{2}\cos 2x(\cos 2x+\cos 4x)+a=\cos 2x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2a=-2\cos^3 2x-\cos^2 2x+3\cos 2x.$$

Положим $\cos 2x=z$; тогда если x возрастает от $\pi/8$ до $3\pi/8$, то z убывает от $\sqrt{2}/2$ до $-\sqrt{2}/2$. Таким образом, требуется определить, при каких значениях a уравнение

$$2a=-2z^3-z^2+3z \qquad (9)$$

имеет более одного корня на отрезке $[-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2]$. Для решения этой задачи построим график функции $f(z)=-2z^3-z^2+3z$. Из уравнения $f'(z)=0\Leftrightarrow 6z^2+2z-3=0$ находим критические точки функции f:

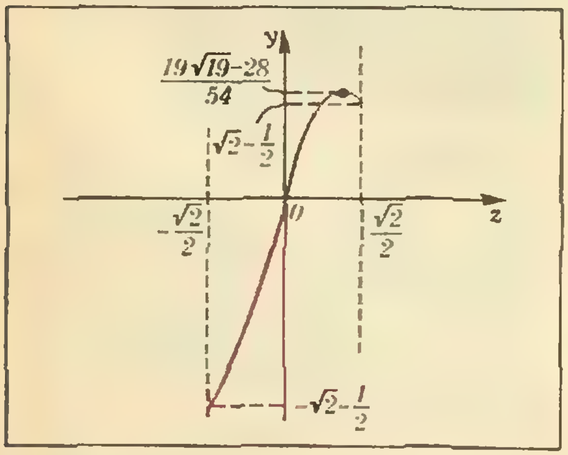


Рис. 3.

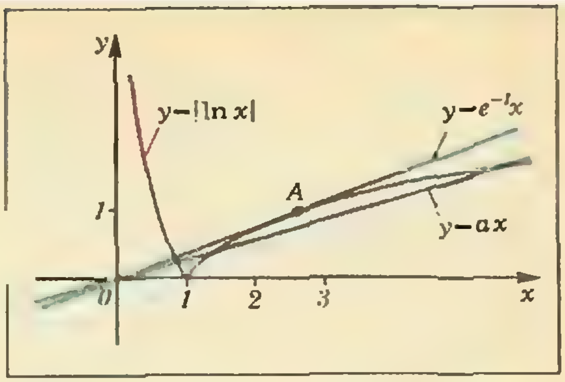


Рис. 4.

$$z_1=(-1-\sqrt{19})/6;\quad z_2=(-1+\sqrt{19})/6.$$

Легко проверить, что $z_1\notin[-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2]$, $z_2\in[-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2]$, z_2 — точка максимума, $\max\limits_{[-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2]} f=f(z_2)=(19\sqrt{19}-28)/54$. Кроме того, $f(-\sqrt{2}/2)=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}$; $f(\sqrt{2}/2)=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

Из графика видно (рис. 3), что при $z\in[-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2]$ функция $f(z)$ каждое свое значение на промежутке $[\sqrt{2}-1/2;\ (19\sqrt{19}-28)/54[$ принимает два раза, а остальные — один раз.

Учитывая, что $f(z)$ — это $2a$, получаем

Ответ: $[(2\sqrt{2}-1)/4;\ (19\sqrt{19}-28)/108[$.

Пример 5 (КГУ, ф-т кибернетики, 1981). *При каких значениях a уравнение*

$$|\ln x|-ax=0 \qquad (10)$$

имеет три корня?

Решение. Перепишем уравнение (10) в виде

$$|\ln x|=ax. \qquad (11)$$

Рассмотрим функции $f(x)=|\ln x|$ и $g_a(x)=ax$ и построим их графики (рис. 4). Графиком функции $g_a(x)$ является прямая, проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси абсцисс угол, определяемый параметром a.

Ясно, что при $a<0$ прямая $y=ax$ *не пересекает графика* функции $f(x)$ — уравнение (11), а значит, и уравнение (10), решений не имеет. При $a=0$ уравнение (11) имеет единственный корень: $x=1$. При $a>0$, но не превышающем некоторого значения a_m, при котором прямая $y=ax$ касается ветви кривой $f(x)$, соответствующей промежутку

$]1;\ \infty[$, то есть при

$$0<a<a_m, \qquad (12)$$

уравнение (11) имеет три корня. Это обусловливается тем, что при указанных в (12) значениях a прямая $y=ax$ пересекает график функции $f(x)$ в трех точках: в одной точке — ветвь кривой на промежутке $]0;\ 1[$ и в двух точках — на промежутке $]1;\ \infty[$. Абсциссы этих точек и будут корнями уравнения (11).

Может показаться, что при малых положительных a прямая $y=ax$ пересечет ветвь графика функции $f(x)$ на промежутке $]1;\ \infty[$ только в одной точке, абсцисса которой близка к единице. Но такое мнение ошибочно. Известно, что степенная функция при возрастании x растет быстрее логарифмической («Алгебра и начала анализа 9—10» 1980, п. 70, с. 214). Поэтому при любом $a>0$ и как угодно малом по абсолютной величине прямая $y=ax$ **дважды** пересечет ветвь $f(x)$, соответствующую промежутку $]1;\ \infty[$.

Определим теперь, при каком значении a прямая $y=ax$ касается упомянутой ветви.

Пусть $A(x_0,\ y_0)$ — точка касания. Тогда искомое значение a находим из системы

$$\begin{cases} f(x_0)=g_a(x_0), \\ f'(x_0)=g'_a(x_0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln x_0=ax_0, \\ \dfrac{1}{x_0}=a, \end{cases}$$

откуда $x_0=1/a$; $\ln(1/a)=1 \Rightarrow a=e^{-1}$.

Итак, $a_m=e^{-1}$. Следовательно, при $a\in\ ]0;\ e^{-1}[$ уравнение (10) имеет три корня.

Рассмотренные в статье примеры различны по содержанию. В решении одних мы пользовались, наглядности ради, графиками, другие же решались только аналитически.

Вместе с тем, ознакомившись с приведенными решениями, вы приобрели некоторые навыки, которые сумеете применить в решении других аналогичных примеров и, в частности, приведенных в упражнениях.

Упражнения

1 (МГУ, химфак, 1982). При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-p)^2\cdot[p(x-p)^2-p-1]=-1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

2 (ЛГУ, матмех, 1979). Сколько корней имеет уравнение

$$(x+2)e^{-x^2}-x^4/6-x^5/20=x^2+1?$$

3 (НГУ, мехмат, 1977). Определить, при каких значениях a уравнение $\log_{2x}(ax+1)=1/2$ имеет единственное решение.

4 (ЛГУ, матмех, 1980). При каких действительных a уравнение

$$\sin x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x=a$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/4;\ \pi/2]$?

5 (МГУ, ВМК, 1980). При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

имеет два действительных корня?

6 (МГУ, мехмат, 1980). При каких значениях a уравнение

$$4^{-|x-a|}\cdot\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\times$$
$$\times\log_{1/3}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных корня?

7 (МГУ, общая геология, 1979). Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2+6x/\sqrt{\sin a}+9\sqrt{3}/\cos a+36=0$$

имеет единственное решение.

8 (УрГУ, матмех, 1981). При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2-3x+2)=2\log_{ax-6}(x^2+2x-4)$$

имеет единственное решение?

9 (МГУ, химфак, 1980). Найти все такие значения k, для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$2x^3+6x=(3^{6k}-9)\sqrt{2^{8k}-1/6}-(3k-1)^2\cdot 12^x$$

не меньше числа решений относительно y уравнения

$$3(5y^2-k^4)-2y=2k^2(6y-1).$$

10 (МИФИ, 1980). Найти значение c, при которых уравнение

$$2\log_7(cx-2)=\log_{\sqrt{7}}(-x^2-9x-18)$$

имеет только одно решение.

11 (МИЭМ, 1980). Найти при $a=1$ все решения уравнения

$$\sin(2(x-\pi))-\sin(3x-\pi)=a\sin x,$$

расположенные на отрезке $[0;\ \pi/2]$, и выяснить, при каких a данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

12 (ЛЭТИ, 1982). Дана функция $y=f(x)$, где

$$f(x)=x^2+x+9/(x^2+x+1).$$

При каких a уравнение $f(x)=a$ имеет 4 корня?

13 (ЛЭТИ, 1982). Сколько корней имеет уравнение

$$\log_2\sin x=x^2-36?$$

14 (ЛЭТИ, 1982). При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{x+a}=x$$

имеет 2 корня?

15 (МИСиС, 1983). При каком a уравнение

$$|x+2|-|2x+8|=a$$

имеет единственное решение?

16 (МИСиС, 1983). При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$ имеет больше трех решений?

17 (МГУ, ВМК, 1983). При всех a решите уравнение

$$(x+2)(x+4)+5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}=(a+2)(a-3).$$

Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа»

В Латвийской ССР практикуются разные формы работы со школьниками: система кружков, как школьных, так и работающих при вузах республики и станциях юных техников, малые университеты, семинары, проводимые Латвийским государственным университетом им. П. Стучки для учащихся выпускных классов, производственная практика в лабораториях НИИ и вузов, ежегодная неделя науки и техники для юношества, республиканские олимпиады, республиканские открытые олимпиады, летние школы-семинары для победителей республиканских олимпиад «АЛЬФА» и другие.

В этой заметке рассказывается об открытых олимпиадах и летней школе «АЛЬФА».

Слово «открытые» подчеркивает главное отличие этих олимпиад от обычных республиканских. Последние проходят в несколько этапов (школьный, районный или городской, финал), в следующий этап выходят победители предыдущего, а в финал выходят 100 школьников. Это очень мало. В республике действует целый ряд школ физико-математического направления или с углубленным изучением радиоэлектроники и основ программирования, в которых обучение ведется с повышенными требованиями по физике и математике. В этих школах учится много хорошо подготовленных ребят, достойных участия в финале республиканской олимпиады. Однако многие из них оставались в роли наблюдателей, так как общее количество участников и лимиты представительства от районов и школ налагали свои ограничения. Школьник мог остаться «за чертой» и по причине случайного «творческого срыва» или болезни во время одного из предварительных этапов.

Чем же открытые олимпиады отличаются от обычных?

Во-первых, в них не существует никаких ограничений на представительство — могут участвовать все желающие, выславшие заранее письмом или на обычной открытке заявку (она необходима лишь для того, чтобы можно было лучше планировать размещение разных групп участников по аудиториям).

Второй особенностью открытых олимпиад является то, что они одноступенчатые, то есть не имеют предварительных этапов отбора и проводятся в один день. Это открывает путь для соревнования со своими сверстниками на «высшем уровне» многим ребятам, которые не попадали в финальный тур традиционных олимпиад главным образом из-за количественных ограничений.

Математики проводят открытые олимпиады с 1972 года, ныне в них принимают участие более 1000 школьников 4—10-х (11-х) классов. Первая открытая олимпиада по физике состоялась в 1976 году, в этом году будет юбилейная — десятая. На олимпиаду приезжают ученики 8—10-х классов школ с русским языком обучения и 9—11-х классов — с латышским языком обучения, а также учащиеся ПТУ и техникумов, всего порядка 400 человек.

Открытые олимпиады проводятся ежегодно в одно из воскресений апреля. Они начинаются в 10 часов 30 минут, на выполнение работы отводится 4,5 часа «чистого» времени. Начало работы и предоставленное время выбраны с таким расчетом, чтобы ребята на олимпиаду могли прибыть практически со всей республики и успели вечером вернуться домой.

На открытых олимпиадах по физике обычно предлагаются 6 задач, как аналитических, так и качественных.

Некоторую особенность по сравнению с традиционными олимпиадами имеют экспериментальные задачи. Из-за большого количества участников невозможно подготовить индивидуально выполняемые экспериментальные задачи. Поэтому участникам олимпиады демонстрируется какой-либо опыт или явление и требуется дать его описание и объяснение. Как правило, участникам олимпиады предоставляется возможность самостоятельно повторить опыт.

Олимпиадные задачи подбираются так, чтобы они в меру возможности отражали традиционные для республики направления физики.

По окончании работы проводится разбор задач, на котором участники олимпиад знакомятся с правильными решениями. Участники из отдаленных от Риги школ, не имеющие возможности остаться на разбор, а также учителя и все желающие могут ознакомиться с задачами открытых олимпиад и их решениями по сборнику статей Астрофизической обсерватории АН Латвийской ССР «Звездное небо».

Многократным председателем оргкомитета и жюри открытой олимпиады по физике является член-корреспондент АН Латвийской ССР профессор К. К. Шварц, в состав жюри входят сотрудники Латвийского государственного университета, Института физики и других НИИ республики. Жюри определяет победителей, которые получают персональные приглашения на День награждения. Этот день заканчивается экскурсией в лаборатории Института физики. Список призеров олимпиады публикуется в республиканской печати, призеры награждаются соответствующими дипломами и ценными памятными подарками.

Группа призеров открытых олимпиад, кроме того, приглашается в летние школы-семинары победителей республиканских олимпиад с символическим названием «Альфа». Первая буква греческого алфавита символизирует первые шаги участников школы на пути серьезного знакомства с наукой.

Школы-семинары «Альфа» в Латвии проводятся с 1968 года во время летних каникул — обычно в июле. На протяжении 26 дней участники школы под руководством своих наставников (научных сотрудников НИИ и преподавателей вузов) усиленно занимаются интересующими их вопросами, решают задачи. Среди лекторов — молодые специалисты, недавно кончившие вузы (многие из них — бывшие участники «Альф»), и уважаемые профессора. У ребят гостили члены-корреспонденты АН Латвийской ССР Я. Я. Лиелпетер и К. К. Шварц, профессора К. А. Штейн и И. К. Витол. В «Альфе-84» был Герой Социалистического Труда академик АН СССР А. Ю. Ишлинский, прочитавший ребятам лекцию. В «Альфе» работают 4 секции: физики, математики, химико-биологическая и гуманитарных наук. Секция физики обычно насчитывает 20—25 слушателей. Занятия ведутся в режиме, приближенном к вузовскому — ежедневно читаются 2 полуторачасовые лекции. Кроме них проводятся лабораторные и практические занятия, семинары. Частыми бывают межсекционные и факультативные лекции.

Из лекционной тематики следует отметить вопросы, вызывающие всегда повышенный интерес — основы теории относительности, введение в квантовую механику, проблемы современной астрофизики, а также направления, традиционные для республики: разные доступные вопросы гидро- и магнитогидродинамики.

Лабораторную аппаратуру для «Альфы» предоставляет Институт физики АН Латвийской ССР, Институт физики твердого тела и лаборатории университета. Проводились опыты с лазерами, намагничивающимися жидкостями, измерялись пространственные и временные вариации естественного радиационного фона при помощи счетчиков Гейгера — Мюллера и другие работы, недоступные школьным лабораториям.

В «Альфа-84» ребята с большим удовольствием в короткий срок освоили программирование на алгоритмическом языке BASIC и потом отрабатывали его применение при решении разных задач на мини-ЭВМ.

Было бы неправильно думать, что слушатели «Альфы» — это «сухари», по уши погруженные в науку. На досуге для ребят организуются спортивные соревнования, экскурсии и походы по району и в близлежащие города («Альфы», как правило, проводятся в живописнейших местах Латвии на базе одной из периферийных школ). А когда альфовцы организуют карнавал или выступают в КВН или на самодеятельном вечере, то становится ясным, что понятия «физик» и «лирик» не только не исключают, но наоборот — дополняют друг друга.

Завершаются «Альфы» традиционными конференциями, на которых лекторы и слушатели могут задавать друг другу любые, самые разнообразные вопросы — несерьезные, полусерьезные и серьезные. Но всегда на один, адресованный школьникам вопрос: «Хотите ли вы еще раз участвовать в «Альфе»?», следует ответ без колебаний: «Да!».

Член совета молодых ученых
и специалистов ЦК ЛКСМ Латвии
Л. Е. Шмитс

Пинг-понг... в умывальнике

(Начало см. на с. 15)

в результате чего возникают колебания шарика.

Однако реальное движение шарика — не простое перемещение от стенки к стенке через центр. Он движется, прижимаясь к стенке сливного отверстия, при этом точка касания *A* перемещается по окружности сечения сливного отверстия, а центр шарика *O* описывает маленькую окружность, изображенную на рисунке 5 штриховой линией. Легко понять, что угловая скорость вращения шарика $\Omega=\omega\frac{R_{отв}-R}{R_{отв}}$, то есть она примерно в десять раз меньше ω. Ее нетрудно измерить с помощью секундомера, подсчитывая число оборотов в секунду меток на шарике (примерно 2 — 3 оборота в секунду).

Возникает, наконец, такой вопрос: по или против часовой стрелки вращается шарик? Прежде чем ответить на него, заметим, что центральное положение шарика в сливном отверстии устойчиво. Чтобы убедиться в этом, закройте кран, а шарик прижмите пальцем сверху. Затем осторожно отпустите палец — шарик останется неподвижным. Это означает, что конкретная ситуация зависит от предыстории, и в принципе возможны три случая: если шарик был неподвижным, он и останется неподвижным, если начальный толчок сдвинул точку касания *A* по часовой стрелке, то шарик будет вращаться против часовой стрелки, и наоборот.

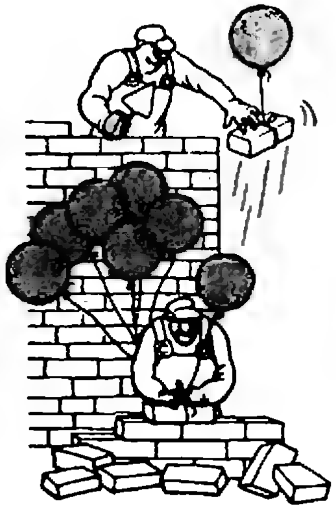
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

..и в плутоватости почасту упражнялись

Иногда слова, напечатанные курсивом, много несправедливее тех, которые напечатаны прямым шрифтом...

Видно, что и в древности немалую к писанию склонность имели и в плутоватости почасту упражнялись.

Козьма Прутков



Иные «исторические» материалы уж столько раз опровергались, что само упоминание их расценивается как шутка. Вот и в «Кванте» (№ 9 за 1984 г., с. 30) был напечатан курсивом эпиграф к статье «Закон Архимеда»:

«...фурвин (мешок) сделал, как мяч большой, надул дымом поганым и вонючим, от него сделал петлю, сел в нее, и нечистая сила подняла его выше березы...

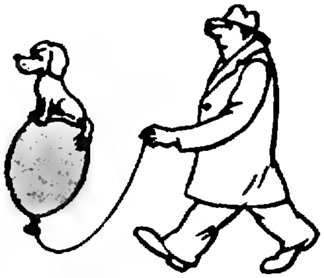
(рассказ о полете подъячего Крякутного в Рязани в 1731 году)».

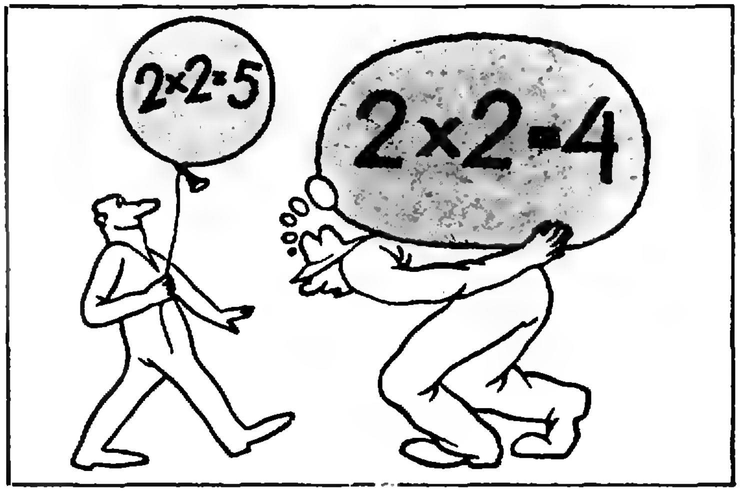
Эти «сведения» были якобы обнаружены «внуком Крякутного» (сплошные кавычки) в начале прошлого века в старинной рукописи. Речь в ней идет о полете на воздушном шаре некоего лица духовного звания, будто бы состоявшемся задолго до полета братьев Монгольфье. Продержавшись более ста лет в ранге правдивого свидетельства, войдя в серьезные издания как факт и даже отразившись на почтовой марке (в 1956 году к «225-летию полета»), эта информация была затем неоднократно опровергнута и в специальных, и в популярных публикациях. Можно рекомендовать, например, такие общедоступные работы, как «История воздухоплавания и авиации в России» (П. Д. Дузь, М.: Просвещение, 1981) или статья «Легенда о велосипеде» (Наука и жизнь, 1983, № 6), в которой рязанский полет упоминается уже вскользь среди других известных легенд.

Поскольку, однако, некоторые читатели «Кванта» восприняли эпиграф всерьез, мы вернулись к этому вопросу.

Заодно отметим, что в разоблачении мистификации важную роль сыграла опять-таки физика: на фотоснимке рукописи в инфракрасных лучах ясно вырисовались буквы, написанные поверх текста позднее!

Редакция использовала этот разговор для того, чтобы попросить художника-карикатуриста А. А. Орехова пофантазировать на тему воздушных «фурвинов». Что он и сделал, изрисовав нам всю эту страницу.





Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\log_6(4\cos^2 x-\cos x-1)=\log_6(4-7\cos x).$$

2. Каждый из двух сосудов содержит водный раствор уксусной кислоты. В первом сосуде содержится 15 % кислоты, а во втором — 75 % воды (по объему). Сколько литров каждого раствора нужно взять, чтобы, смешав их, получить 2 л нового раствора, содержащего не более q % кислоты?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x}{4}+2}=c+\sqrt{\frac{x}{4}-3}.$$

4. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SPQR$ имеет длину h и составляет с боковым ребром SP угол величиной β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро PR, если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$(x^2+13{,}3x+44{,}1)\cdot\sqrt{\log_{0,3}|x+6|}\geqslant 0.$$

2. Пункты R и F находятся на реке, впадающей в озеро, а пункты E и Q — на озере. Пути от пунктов E и Q до устья реки (по озеру) пароход преодолевает за p часов и за $p+5$ часов соответственно, а пути от устья реки до пунктов F и R за 11 часов и 13 часов соответственно. С какой скоростью двигался пароход по озеру, если скорости парохода в стоячей воде и реки постоянны, а пути от E до F и от Q до R равны соответственно 105 км и 131 км.

3. Найдите все значения c, при которых система

$$\begin{cases}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x+c)=0,\\ -4<x-2\end{cases}$$

имеет только одно решение.

4. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $PQRTP_1Q_1R_1T_1$ радиус окружности, описанной около ее нижнего основания $PQRT$, равен r, и боковая грань составляет с плоскостью $PQRT$ угол величины γ. В квадрат, образовавшийся при пересечении данной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости $PQRT$, вписан круг, являющийся основанием прямого конуса с вершиной в точке пересечения диагоналей квадрата $PQRT$, причем секущая плоскость проведена так, что конус имеет наибольший возможный объем. Определите высоту этого конуса, если $|P_1Q_1|=a$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела A и B с массами $m_1=1{,}5$ кг и $m_2=0{,}45$ кг соответственно подвешены на нитях к легкому коромыслу, плечи которого имеют длину $l_1=0{,}6$ м и $l_2=1$ м, причем тело A лежит на полу (рис. 1). На какой минимальный угол α следует отклонить подвес тела B, чтобы после его отпускания тело A оторвалось от пола?

2. Пуля массой $m_1=9$ г, имевшая скорость $\vec{v}_0$ ($v_0=160$ м/с), направленную под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту (рис. 2), пробивает лежавшую на подставках доску массой $m_2=0{,}3$ кг, после чего поднимается на максимальную высоту $H=45$ м над уровнем подставок. На какую высоту подпрыгнет доска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол $\alpha=30^\circ$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите угол максимального отклонения нити.

4. Шайба, скользившая по гладкому полу со скоростью $v_0=12$ м/с, поднимается на трамплин, верхняя часть которого горизонтальна, и соскакивает с него (рис. 3). При какой высоте трамплина h дальность полета шайбы s будет максимальной? Какова эта дальность?

5. Телу массой $m_1=1$ кг, лежащему на длинной горизонтальной доске массой $m_2=2$ кг, сообщили начальную скорость $v_0=2$ м/с (рис. 4). Какой путь пройдет тело относительно доски, если коэффициент трения между ними $\mu=0{,}2$, а трение между доской и плоскостью отсутствует?

6. В закрытом откачанном цилиндре на пружине подвешен скользящий без трения поршень AB, положение равновесия которого находится у дна цилиндра (рис. 5). Под поршень вводится некоторое количество воздуха так, что поршень поднимается на высоту $h_1=10$ см при температуре воздуха $t_1=27$ °С. На какую

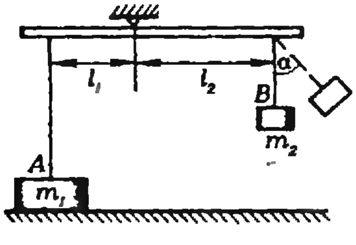


Рис. 1.

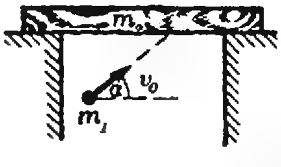


Рис. 2.

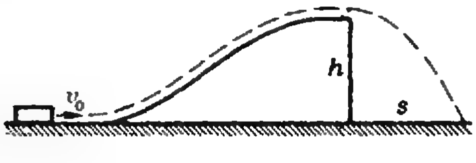


Рис. 3.

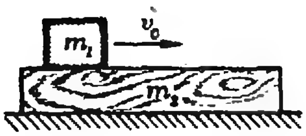


Рис. 4.

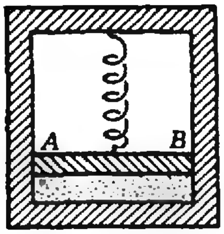


Рис. 5.

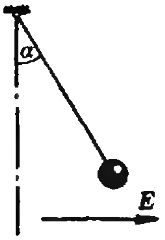


Рис. 6.

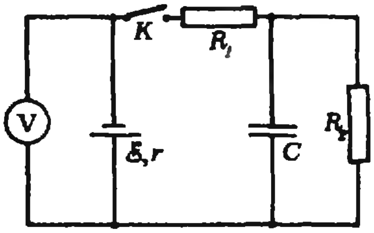


Рис. 7.

высоту поднимется поршень, если количество воздуха под ним увеличить в $n=5$ раз, а температуру воздуха повысить до $t_2=37$ °С?

7. Два одинаковых заряженных шарика соединены нитью длиной $l=5$ см и с помощью двух нитей такой же длины прикреплены к точке подвеса, причем точка подвеса и шарики лежат в вершинах равностороннего треугольника. После того как нить, соединяющую шарики, перерезали, они начали двигаться с ускорением $a=40$ м/с^2. Определите скорость шариков в момент, когда они окажутся на одном уровне с точкой подвеса.

8. Заряженный шарик массой $m=1,5$ г, прикрепленный к невесомой изолирующей нити, находится в однородном горизонтальном электрическом поле, при этом нить отклонена от вертикали на угол $\alpha=30°$ (рис. 6). Затем направление электрического поля мгновенно изменяется на противоположное. Найдите силу натяжения нити в момент максимального отклонения нити от вертикали после переключения поля.

9. Источник тока подключают к цепи, содержащей конденсатор и резисторы с сопротивлениями $R_1=1$ Ом и $R_2=3$ Ом (рис. 7). Сразу после замыкания ключа K подключенный к источнику вольтметр показывает напряжение $U_1=6$ В, а после того как конденсатор зарядится — напряжение $U_2=9,6$ В. Найдите показания вольтметра при разомкнутом ключе. Током через вольтметр пренебречь.

10. Небольшому шарику, который находился на поверхности горизонтально расположенной тонкой собирающей линзы с оптической силой $D=0,5$ дптр, сообщили вертикальную начальную скорость $v_0=10$ м/с. Сколько времени будет существовать действительное изображение шарика в этой линзе?

Публикацию подготовили
Д. Ф. Калиниченко, А. И. Руденко, В. Е. Чижов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$$

и вычислите его значение при $x=1,21$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8x^2-2,5}{16x}+\frac{8x}{16x^2-5}=1.$$

В ответе запишите его больший корень.

3. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения графика функции $y=\sqrt{9-x}-\sqrt{4-x}$ с прямой $y=1$.

4. Решите неравенство

$$\log_2\frac{3x+3}{x+6}<1.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих этому неравенству.

5. Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ на отрезке $[0;\ 2]$.

7. Упростите и вычислите без таблиц

$$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{13\pi}{15}+\sin\frac{23\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{6}.$$

8. Решите уравнение

$$1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

В ответе запишите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[\pi/2;\ 2\pi]$.

9. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найдите площадь треугольника ABC, если длина AM равна 3, а длина BN равна 4.

10. Одна из вершин куба и середины его ребер, выходящих из противоположной вершины, служат вершинами пирамиды. Найдите объем пирамиды, если длина ребра куба равна 6.

Вариант 2

1. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма квадратов ее членов равна 48. Найдите сумму первых четырех ее членов.

2. Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\sqrt{2x-1}-2x$.

3. Решите уравнение

$$\log_5(x-2)+\log_{\sqrt5}(x^3-2)+\log_{0,2}(x-2)=4.$$

4. Решите неравенство

$$(0,5)^{x^2+3x}\geqslant 0,125\cdot 2^{-x}.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

5. Имеется сплав меди с оловом массой 10 кг, содержащий 50 % меди. Сколько килограммов чистого олова нужно прибавить к этому куску, чтобы получившийся сплав имел 40 % меди?

6. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=x^4+2x^2+\frac{1}{(x^2+1)^2}+5.$$

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, если $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{1}{3}$.

8. Решите уравнение

$$\sin\pi x+\cos\pi x-1=0.$$

В ответе запишите сумму корней уравнения, принадлежащих интервалу]0; 4[.

9. Вершины правильного треугольника лежат на трех параллельных прямых, причем внутренняя прямая находится на расстоянии $\sqrt{21}$ и $\sqrt{84}$ от крайних прямых. Найдите длину стороны треугольника.

10. В конус вписан цилиндр наибольшего объема так, что одно из оснований цилиндра лежит на основании конуса, а окружность другого основания лежит на боковой поверхности конуса. Найдите отношение объема конуса к объему цилиндра.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло путь $l=63{,}7$ м. С какой высоты падало тело?

2. Определите силу, действующую на стержень AB, если угол $\alpha=45°$, а масса груза $m=2$ кг (рис. 1).

3. Определите, какой скоростью должно обладать тело в точке D, чтобы переместиться в точку A и там остановиться (рис. 2). Коэффициент трения при движении тела $\mu=0{,}2$, $|AB|=0{,}5$ м, $|DB|=10$ м.

4. Однородный стержень массой $m=6$ кг подвешен на двух нитях одинаковой длины $l=0{,}5$ м каждая (рис. 3). Определите силу натяжения нити, если длина стержня $a=0{,}8$ м.

5. В стеклянной трубке, запаянной с одного конца, находится столбик воздуха, запертый столбиком ртути высотой $h=200$ мм. Если трубку держать вертикально открытым концом вверх, то длина воздушного столбика $l_1=6$ см, а если перевернуть трубку на 180°, то длина воздушного столбика станет $l_2=15$ см. Чему равно атмосферное давление? Температуру считать постоянной.

6. После сгорания горючей смеси температура продуктов сгорания в цилиндре под поршнем повысилась до $t_1=600$ °C, а расстояние между поршнем и дном цилиндра увеличилось до $l=50$ см. На какое расстояние переместился поршень при охлаждении продуктов сгорания в цилиндре до температуры $t_2=90$ °C? Весом поршня и его трением о стенки цилиндра пренебречь. Коэффициент объемного расширения принять равным $\alpha=1/273$ К$^{-1}$.

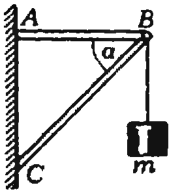


Рис. 1.

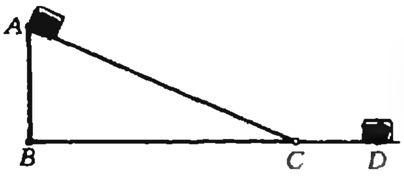


Рис. 2.

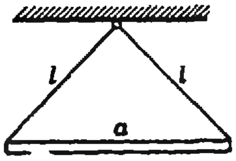


Рис. 3.

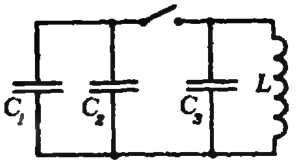


Рис. 4.

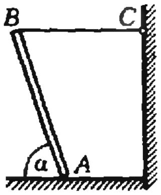


Рис. 5.

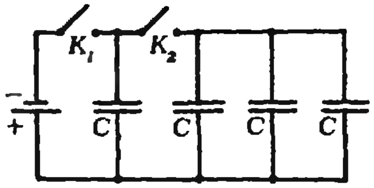


Рис. 6.

7. Конденсатор емкостью $C_1=3$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1=300$ В. Конденсатор емкостью $C_2=2$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_2=200$ В. Конденсаторы соединяют разноименными обкладками. Определите среднюю величину тока, возникающего при соединении конденсаторов, если длительность его протекания $\tau=1$ с.

8. Определите массу медных проводов, необходимых для монтажа двухпроводной линии передачи от источника питания с напряжением $U=2400$ В до потребителя, находящегося на расстоянии $l=5$ км от источника напряжения. Мощность, передаваемая потребителю, равна $W=60$ кВт. Падение напряжения в линии электропередачи составляет 8 %.

9. В схеме, изображенной на рисунке 4, амплитудное значение тока до замыкания ключа равно I_1, а после замыкания ключа — I_2. Определите отношение I_1/I_2, если ключ был замкнут, когда напряжение на конденсаторе было максимальным. Емкость всех конденсаторов одинакова: $C_1=C_2=C_3$, а индуктивность катушки постоянна и равна L. До замыкания ключа конденсаторы емкостью C_1 и C_2 заряжены не были.

10. Сероуглерод с показателем преломления $n=1{,}63$ налит в широкий сосуд до высоты $h=10$ см, считая от дна сосуда. На дне сосуда в центре помещен точечный источник света. Найдите площадь поверхности сероуглерода на границе с воздухом, через которую свет выходит наружу.

Вариант 2

1. Двигаясь равноускоренно, материальная точка в первые два равных последовательных промежутка времени по $t=4$ с каждый проходит пути $l_1=20$ м и $l_2=30$ м. Определите начальную скорость точки.

2. Цепь длиной $l=1$ м лежит на столе так, что ее конец свешивается с края стола. При какой длине свешивающейся со стола части цепи вся цепь начинает скользить по столу, если коэффициент трения цепи о стол $\mu=1/3$?

3. Материальная точка массой $m=1$ кг равномерно вращается по окружности со скоростью $v=10$ м/с. Определите модуль изменения импульса материальной точки за одну четверть периода вращения.

4. Однородный стержень AB опирается на шероховатый пол и удерживается от падения прикрепленной к вертикальной стенке горизонтальной нитью BC (рис. 5). Коэффициент трения между стержнем и полом $\mu=0{,}5$. При каком угле наклона стержня к горизонтали стержень будет находиться в равновесии?

5. В цилиндре, закрытом поршнем, находится $m=0{,}2$ кг углекислого газа. Определите работу, которая совершается при изобарном нагревании газа на $\Delta T=88$ К.

6. Определите давление насыщенного водяного пара при температуре $t=17$ °С, если в комнате объемом $V=50$ м^3 при относительной влажности $\varphi=65$ % и указанной температуре находится $m=0{,}476$ кг паров воды.

7. В схеме, изображенной на рисунке 6, ключ K_1 замыкается и конденсатор заряжается. Затем ключ K_1 размыкается, а замыкается ключ K_2. Найдите ЭДС батареи, если напряжение на первом слева конденсаторе после замыкания ключа K_2 стало равным $U=0{,}5$ В. Емкость всех конденсаторов одинакова.

8. Математический маятник представляет собой шарик массой $m=1$ г, подвешенный на нити длиной $l=36$ см. Чему будет равен период колебаний маятника, если, сообщив шарику положительный заряд $q=6{,}7\cdot10^{-9}$ Кл, поместить маятник в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ ($E=3\cdot10^5$ В/м), силовые линии которого направлены вертикально вниз?

9. Квадратная рамка со стороной $a=50$ см помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно магнитным линиям поля. Определите индукцию магнитного поля, если известно, что при исчезновении магнитного поля в течение $\tau=0{,}01$ с среднее значение ЭДС индукции, возникающей в рамке, $\mathcal{E}=50$ мВ.

10. Пучок параллельных лучей света шириной $b=20$ см выходит из стеклянной пластинки в воздух через плоскую грань пластинки. Определите ширину пучка в воздухе, если угол падения луча на границу стекло — воздух $\alpha=30°$, а показатель преломления стекла $n=1{,}8$.

Публикацию подготовили
В. И. Башкиров, В. А. Карасев

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left[\frac{(\sqrt{3}+x)(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{x^2})^{-1}-(\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{x^2\sqrt{3}})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{3})^{-2}}{(\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{x})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x\sqrt{3}}-2\sqrt[6]{3})}\right]^{-1}+2\cdot\sqrt{3}\log_3\sqrt[6]{3}.$$

2. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases}2x+y>2,\\4x^2-y<4,\\9-2y>0.\end{cases}$$

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{4}x^4$ и постройте ее график.

4. Найдите все корни уравнения

$$\sin^4x+\cos^4x=0{,}5\cdot\sin^2 2x,$$

лежащие в интервале $\left]-\frac{3\pi}{4};\pi\right[$.

5. Площадь прямоугольного треугольника равна S, а его острый угол равен α. Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла α и параллельной противолежащему этому углу катету. Найдите объем тела вращения.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left[(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^{-2}}-\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[4]{x^3}+1)(\sqrt[4]{x}-1)^{-2}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}+1}}\right]^{-3}\frac{(1-x)^2}{x+2\sqrt{x}+1}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{4\log_2^2(2x-1)+\log_2(2x-1)-5}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{16}{9}x^3+4x^2+1$ на отрезке $[-2{,}5;\,0{,}5]$ и постройте ее график на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg}^3x-\frac{1}{\cos^2x}=1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}-\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-1},$$

удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{(3\pi^2-\pi x-4x^2)^{-1}}>\log_{\pi}(1/e).$$

5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью — угол β. Найдите объем параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

Задачи устного экзамена

1. Пусть M — ортоцентр треугольника ABC (то есть точка пересечения высот треугольника ABC). Докажите, что точка M', симметричная точке M относительно любой стороны треугольника ABC, лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

2. Докажите, что функция $y=\cos\sqrt[3]{x}$ не является периодической.

3. Докажите, что при любом $a<4$ уравнение

$$\frac{\sin^2x}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}+\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x}+\frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x}=a$$

не имеет решений.

4. Докажите, что при всех $\alpha\in\left]0;\pi/2\right[$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>1+\operatorname{ctg}\alpha.$$

5. Постройте графики функций

а) $y=\frac{x-1}{|x-1|}$; б) $y=10^{\lg(-x)}$.

6. Найдите значения производных функций

а) $f(x)=2^{|x|}$; б) $f(x)=\frac{x|x-2|}{2(x-2)}$

в точке $x=1$.

7. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\sin^{-4} x+\sin^4 x+2^x+2^{-x}-3}.$$

8. Докажите, что

$$\lg 1-\lg 2+\lg 3-\lg 4+\lg 5-\lg 6+\ldots+\lg 99-\lg 100<-1.$$

9. Упростите выражение

$$\left[2+\lg\frac{x^2}{y^2}-2\lg(-x)+2\lg(-y)\right]^{\lg_2 3}.$$

10. Вычислите без таблиц

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

С 1982 года в Московском энергетическом институте проводится эксперимент по проведению устного экзамена по математике с применением ЭВМ. В 1984 году такой экзамен проводился на одном из факультетов. Мы приводим один из вариантов экзаменационного задания, состоящего из 20 примеров и задач. Абитуриент записывает ответ на специальном бланке. Проверку правильности ответа проводит ЭВМ.

Вариант 1

1. Сколько цифр содержится в числе 2^{100}, если считать, что $\lg 2=0{,}301$?

2. Найдите значение производной функции $f(x)=2\cdot\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$ при $x=1$.

3. Найдите число, 7,5 % которого равно A, где

$$A=\frac{\left(8\frac{7}{55}-6\frac{17}{110}\right)\cdot 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{20}\right):1\frac{7}{8}}.$$

4. Известно, что числа $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение $y=\operatorname{tg} 2x-0{,}21$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна ее боковому ребру. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно $\sqrt{3}$ см.

6. Решите уравнение

$$\frac{x}{2}-2=\frac{x^2}{2(\sqrt{x+1}+1)^2}.$$

7. Найдите наименьший положительный период функции

$$f(x)=5\sin(\pi x-1).$$

8. Какое число больше: первое или второе? 1) $(\log_2 5)^2$; 2) $\log_2 20$. В ответе укажите номер числа.

9. Найдите значение x из пропорции

$$\frac{3^{1/3}\cdot x}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}=\frac{81^{-4/3}\cdot(\sqrt[3]{9})^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\sqrt[3]{81}}.$$

10. Решите уравнение

$$\log_\pi \cos x=x^2.$$

11. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{4}.$$

12. В геометрической прогрессии третий член равен 16, седьмой член равен 1. Найдите первый член этой прогрессии.

13. При каком значении a уравнение $\sin x=\frac{1}{2}(a+2)$ допускает решение $x=\frac{\pi}{6}$?

14. В уравнении $5x^2+bx-28=0$ найдите значение коэффициента b, если известно, что число b целое и что корни уравнения x_1 и x_2 связаны соотношением $5x_1+2x_2=1$.

15. Вычислите без таблиц $(\lg 10^{\sin 1})^2+(\log_3 3^{\cos 1})^2$.

16. Около круга радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция с острым углом 30°. Найдите длину средней линии трапеции.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(\pi x)=0,\\ x^2-x\sqrt{3}=0.\end{cases}$$

18. Найдите наибольший корень уравнения

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

19. Вычислите значение $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если известно, что $\sin 2\alpha=\frac{1}{5}$.

20. Сколько целых значений x удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{3}{x+4}\right|>1?$$

Физика

На одних факультетах экзамен по физике проводится в письменной форме, на других — в устной.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электромагнитная индукция. Поток магнитной индукции. Электродвижущая сила индукции. Правило Ленца.

2. Электрический заряд $+Q$ перемещается в электрическом поле плоского конденсатора по траектории $ABCDA$ (рис. 1). На каких участках работа поля по перемещению заряда отрицательна? положительна? равна нулю? Какова работа по перемещению заряда по всей траектории $ABCDA$?

3. Пушка, стоящая на платформе, стреляет в направлении рельсов под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Масса снаряда $m=50$ кг, начальная скорость снаряда $v_0=600$ м/с. Какую скорость приобретет платформа при выстреле, если ее масса с пушкой составляет $M=5\cdot10^4$ кг? Платформа не заторможена.

4. Луч света падает под углом α на плоскопараллельную пластину, толщина которой d. Вычислите смещение луча при его прохождении сквозь пластину. Показатель преломления стекла n.

5. Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими теплонепроводящими трубками, заполнены при температуре $T_1=10$ К некоторым количеством газообразного гелия. Затем один из сосудов нагрели до $T_2=40$ К, а второй до $T_3=100$ К. Температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз изменилось давление в системе?

Вариант 2

1. Закон Архимеда для жидкостей и газов. Выталкивающая сила. Условие плавания тела.

2. Постройте ход лучей *1* и *2*, преломленных рассеивающей линзой; F_1 и F_2 — фокусы линзы (рис. 2).

3. Два одинаковых проводящих шарика, обладающие зарядами $Q_1=5\cdot10^{-8}$ Кл и $Q_2=1\cdot10^{-8}$ Кл, находятся на расстоянии $l=4$ см друг от друга. Их приводят в соприкосновение и удаляют на прежнее расстояние. Найдите силу взаимодействия до и после соприкосновения шариков. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

4. С какой высоты H падает тело массой m на невесомую пружину жесткостью k, если

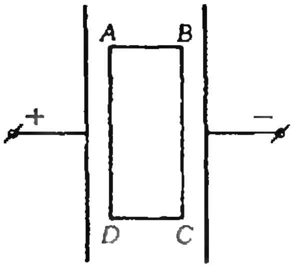


Рис. 1.

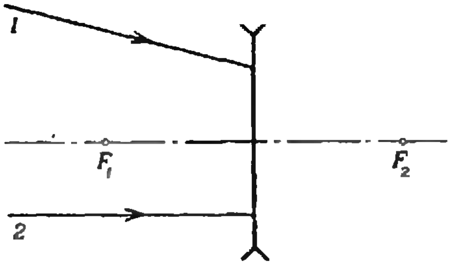


Рис. 2.

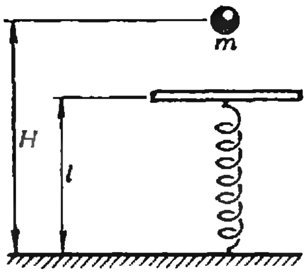


Рис. 3.

максимальная сила давления пружины на пол равна N (рис. 3)? Длина свободной пружины l.

5. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется трансформатор, повышающий напряжение до $U=6\cdot10^3$ В и нагруженный до номинальной мощности $P=10^6$ Вт. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежесуточно на $\Delta W=216$ кВт · ч. Во сколько раз необходимо повысить напряжение в линии, чтобы при передаче потери электроэнергии не превышали $\eta=0{,}1\ \%$?

Задачи устного экзамена

1. Снаряд в верхней точке своей траектории разорвался на два осколка с массами $m_1=3$ кг и $m_2=5$ кг. Скорость снаряда непосредственно перед разрывом равнялась $v_0=600$ м/с, скорость большого осколка сразу после разрыва равнялась $v_2=800$ м/с, а направление ее совпадало с направлением движения снаряда перед разрывом. Определите скорость малого осколка сразу после разрыва.

2. На плоту, состоящем из $n=20$ одинаковых бревен можно перевозить груз максимальной массы $m=1800$ кг. Определите плотность древесины, если объем каждого бревна $V=0{,}3$ м^3, а плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

3. Проводник длиной $l=10$ см, по которому течет ток $I=15$ А, перемещается в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}5$ Тл на расстояние $s=20$ см. Определите максимальную работу, которая совершается при перемещении проводника. Как при этом должен двигаться проводник?

Публикацию подготовили
В. Ф. Сафонов, В. Л. Чудов

Наша обложка

Мы приведем два решения задачи, помещенной на 4 с. обложки «Кванта» № 2. Поскольку наша цель — помочь читателю научиться решать сложные стереометрические задачи, а не дать образцы оформления решений, мы стараемся выделять основные идеи, опуская в то же время некоторые детали рассуждений. Читатель без труда восстановит их самостоятельно; в наиболее важных случаях соответствующие места в тексте помечены так: (?). Для краткости некоторые обозначения, смысл которых ясен из чертежа на обложке или рисунков, в тексте не объясняются.

Итак, пусть $ABCD$ — основание данной пирамиды, S — ее вершина, O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

Первое решение основано на очевидной формуле, связывающей радиус r окружности, вписанной в угол φ, с расстоянием a от точек ее касания со сторонами угла до его вершины (рис. 1):

$$\boxed{a=r\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.}\qquad(1)$$

Рисунок 1 можно рассматривать и как сечение двугранного угла величины φ с вписанной в него сферой радиуса r плоскостью, проходящей через центр сферы перпендикулярно ребру угла; в этом случае величина a в (1) — это расстояние от точки касания сферы с гранью угла до его ребра. Отсюда же видно, что *центр этой сферы лежит на биссекторной плоскости двугранного угла* (?).

Переходя к задаче, заметим, что, поскольку O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды, SO — ось данного конуса и, следовательно, высота пирамиды.

Найдем радиус r_1 сферы, вписанной в трехгранный угол пирамиды с вершиной C. Рассмотрим сечение данной конфигурации плоскостью SAC (рис. 2): она содержит ось SO конуса и центр O_1 сферы (SAC — биссекторная плоскость двугранного угла пирамиды при ребре SC (?)), следовательно — образующую конуса SK, проходящую через точку касания конуса со сферой, и точку касания L сферы с основанием пирамиды ($SAC\perp ABC$). Выразим отрезки, входящие в равенство

$$|OC|=|OK|+|KL|+|LC|.$$

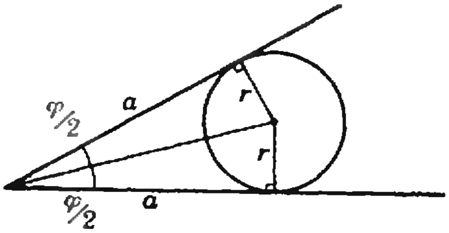


Рис. 1.

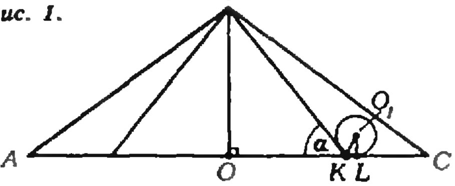


Рис. 2.

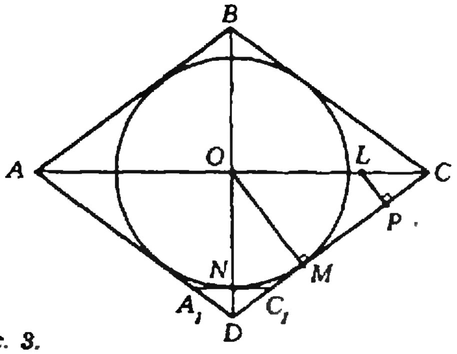


Рис. 3.

через r_1 и данные по условию величины — это даст нам уравнение для r_1:

$|OC|=4;$

$$|OK|=|OM|=\frac{|OC|\cdot|OD|}{|CD|}=\frac{4\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}$$

(OK и OM — радиусы основания конуса (рис. 3), OM — высота прямоугольного треугольника OCD);

$|KL|=r_1\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α — угол между образующей и основанием конуса (см. рис. 2 и формулу (1));

$|LC|=\frac{|CD|\cdot|LP|}{|OD|}$ (рис. 3; $\triangle CLP\sim\triangle CDO$);

$|LP|=r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (формула (1); величина двугранного угла пирамиды при ребре CD равна α (?)).

Итак,

$$4=\frac{12}{5}+r_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{3}r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

или

$$r_1=\frac{24}{5\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{12\sin\alpha}{5(4+\cos\alpha)}=\frac{3}{16},$$

поскольку

$$\sin\alpha=\frac{|SO|}{|SM|}=\frac{1}{\sqrt{1+(12/5)^2}}=\frac{5}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{|OM|}{|SM|}=\frac{12}{13}. \qquad (2)$$

Очевидно, радиус сферы, вписанной в трехгранный угол A, тоже равен 3/16; радиус двух других сфер мы для разнообразия найдем другим способом.

Второе решение использует выражение для радиуса r сферы, вписанной в тетраэдр объема V с площадью полной поверхности S

$$\boxed{r=3V/S.} \qquad (3)$$

(Для доказательства (3) надо представить V как сумму объемов четырех тетраэдров высоты r с общей вершиной в центре вписанной сферы, основаниями которых являются грани данного тетраэдра; вспомните аналогичную формулу из планиметрии.)

Найдем радиус r_2 сферы, вписанной в трехгранный угол D. Проведем через точку ее касания с конусом их общую касательную плоскость. Пусть она пересекает ребра DA и DC в точках A_1 и C_1, тогда $A_1C_1\parallel AC$ (?). Наша сфера вписана в тетраэдр SA_1C_1D; найдем последовательно (см. рис. 2):

высоту его основания A_1C_1D: $|DN|=|DO|-|ON|=|DO|-|OM|=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$;

сторону основания A_1C_1: $|A_1C_1|=\frac{|DN|}{|DO|}\times|AC|=\frac{8}{5}$ ($\triangle A_1C_1D\sim\triangle ACD$);

площадь основания: $S_{A_1C_1D}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$;

объем: $V_{SA_1C_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot 1=\frac{4}{25}$;

сумму площадей ортогональных проекций боковых граней на основание: $S_{A_1C_1O}+S_{A_1DO}+S_{C_1DO}=\frac{1}{2}(|ON|+|OD|)\cdot|A_1C_1|=\frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}+3\right)\frac{8}{5}=\frac{108}{25}$.

Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом α (?) и $\cos\alpha=12/13$ (см. (2)), по формуле для площади ортогональной проекции найдем, что площадь боковой поверхности тетраэдра равна

$$S_{\text{бок}}=\frac{108}{25}\cdot\frac{13}{12}=\frac{117}{25}.$$

Окончательно,

$$r_2=\frac{3V}{S_{A_1C_1D}+S_{\text{бок}}}=\frac{3\cdot 4}{12\cdot 117}=\frac{4}{43}.$$

Ответ: радиусы сфер при вершинах большей диагонали основания равны 3/16, при вершинах меньшей диагонали — 4/43 см.

П. И., В. Н.

Победители шахматного конкурса 1984 года

Победителями конкурса признаны: *Г. Бедный* (Бердичев), *А. Бондаренко* (Миллерово), *Э. Бровченко* (Москва), *М. Германов* (с. Чаши Курганской обл.), *А. Каган* (Ташкент), *М. Карнаухов* (Кропоткин), *И. Кваша* (Новочеркасск), *Г. Леонов* (Курган), *С. Локтев* (Вязники), *В. Мамедов* (Астара), *В. Москаленко* (Ворошиловград), *Г. Пушкарев* (Усолье-Сибирское), *А. Рябов* (Куйбышев), *А. Серебренников* (Москва), *А. Сулейманов* (с. Санджаради Аз. ССР), *А. Чилингарян* (Ереван), *А. Ярцев* (ст. Брюховицкая Краснодарского кр.). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломом и значком журнала «Квант», шахматно-математической литературой с автографами А. Е. Карпова и Е. Я. Гика и получают право на присвоение I разряда по шахматам.

Кроме того, еще 33 читателя по итогам конкурса получают право на присвоение II разряда по шахматам.

Избранные школьные задачи

1. Пусть стороны AD и AB четырехугольника $ABCD$ равны a и b соответственно, а угол между ними равен α (рис. 1). Пусть далее прямые CD и AB пересекаются в точке E. Из прямоугольного треугольника ADE получаем $AE = a/\cos\alpha$. Поэтому $BE = a/\cos\alpha - b$. Из $\triangle BCE$ находим $BC = BE \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BE \cdot \operatorname{ctg}\alpha = (a - b\cos\alpha)/\sin\alpha$. Аналогично, $CD = (b - a\cos\alpha)/\sin\alpha$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD \cdot DC + AB \cdot BC) = (2ab - (a^2+b^2)\cos\alpha)/2\sin\alpha$.

2. $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.

3. Ответ. 24 мили. 6 ч 30 мин вечера. Указание. Одну милю по ровному месту путешественники проходят за $^1/_4$ часа, в гору — за $^1/_3$ часа и под гору — за $^1/_6$ часа. Следовательно, каждую милю пути туда и обратно путешественники проходят за $^1/_2$ часа. Отсюда следует, что расстояние, пройденное путешественниками за 6 часов, равно 24 милям. Если 12 миль они проходят по ровному месту, то на это у них уходит 3 часа, а если в гору, то 4 часа. Следовательно «в среднем» до вершины горы они идут 3,5 часа.

4. Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 2). Проведем прямые, перпендикулярные сторонам AB в точке A и BC в точке C. Пусть D — точка пересечения этих прямых, а прямая BD пересекает AC в точке E. Точка E — искомая. (Для того чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы углы $\hat{A}$ и $\hat{C}$ были острыми).

5. Пусть ABC — данный угол и P — точка внутри него (рис. 3). Через точку P проведем $PD \parallel BC$ и от точки D отложим на луче DA отрезок $DQ = BD$. Прямая QP пересекает сторону BC в точке R. Докажем, что треугольник BQR — искомый. Достроим треугольник BQR до параллелограмма $BRSQ$ и рассмотрим произвольный треугольник BEH, сторона которого проходит через точку P. Треугольник BEH получается из треугольника BQR «отрезанием» треугольника EQP и «добавлением» треугольника RPH, площадь которого больше площади треугольника RPE (E' — точка пересечения RS и EH), которая, в свою очередь, равна площади EPQ.

6. Ответ: В полдень третьего дня пешеход A обгоняет пешехода B на расстоянии в 23 мили от своего отправного пункта, а в конце четвертого дня пути B догоняет A на расстоянии в 34 мили от отправного пункта A. Решение. Пользуясь формулой суммы арифметической прогрессии, нетрудно установить, что через x дней пешеход B пройдет расстояние $(2\cdot 2 + (x-1)2)\cdot 2/2$, а пешеход A — $(2\cdot 10 - (x-1))\cdot x/2$. По условию $(2\cdot 10 - (x-1))x/2 = 14 + (2\cdot 2 + (x-1)2)x/2$. Решая это уравнение, получим $x_1 = 4$, $x_2 = {}^7/_3$. Второй корень уравнения не подходит, так как мы считали, что x — целое число. Однако само наличие этого корня показывает, что в течение 3-го дня пешеход A обгонит пешехода B. Выясним, когда это произойдет. К концу второго дня пешеход A пройдет 19 миль, а B будет находиться на расстоянии 20 миль от пункта, из которого вышел A. Таким образом, в начале третьего дня B опережает A на 1 милю. В течение этого дня A движется со скоростью $^8/_{12}$ миль/ч, а B — со скоростью $^6/_{12} = {}^1/_2$ миль/ч. Поэтому через время $t = 1/\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = 6$ ч пешеход A догонит пешехода B.

7. Пусть d — длина общей хорды двух данных окружностей (рис. 4). Тогда радиус меньшей окружности равен d, а радиус большей — $d/(/2\sin 15^\circ)$. Площадь S_1 красного сегмента равна разности площадей сектора и треугольника, то есть $S_1 = \pi d^2/_6 - d^2\sqrt{3}/_4$. Точно так же площадь S_2 голубого сегмента равна $S_2 = \frac{\pi}{12}\,\frac{d^2}{4\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{4}\,\frac{d^2}{4\sin^2 15^\circ}$. Поскольку $4\sin^2 15^\circ = 2(1-\cos 30^\circ) = 2-\sqrt{3}$, $S_2 = \frac{\pi}{12}d^2(2+\sqrt{3}) - d^2(2+\sqrt{3})/4$. Требуемое отношение равно $(S_1+S_2)/(\pi d^2) = (4+\sqrt{3})/12 - (1+\sqrt{3})/2\pi \approx 0{,}043\ldots$

8. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция, вписанная в данную окружность радиуса r (рис. 5). Проведем через центр O этой окружности диаметр, перпендикулярный основаниям AD и BC и пересекающий их в точках H и K соответственно. Пусть $|BC| = 2x$. Тогда $|AD| = 4x$ и $S_{ABCD} = 3x \cdot |KH|$, где $0 < x < r/2$. Можно считать, что точка O лежит внутри трапеции (почему?), поэтому $|KH| = |KO| + |OH| = \sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2}$, так что $S_{ABCD} = S(x) = 3x(\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2})$. Приравнивая

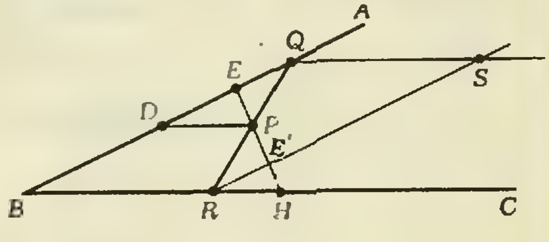


Рис. 3.

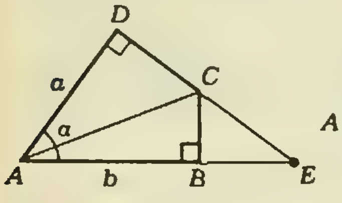


Рис. 1.

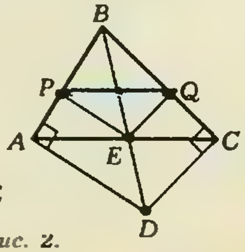


Рис. 2.

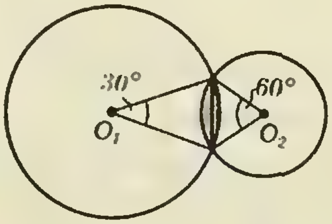


Рис. 4.

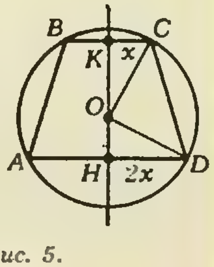


Рис. 5.

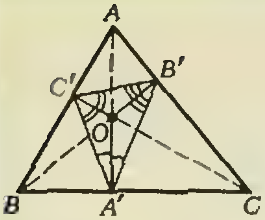


Рис. 6.

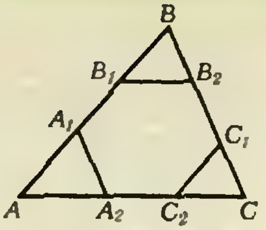


Рис. 7.

к нулю производную функции $f(x)=\frac{1}{3}S(x)=$ $=x(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2})$, получим уравнение

$$f'(x)=\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2}-$$
$$-x^2(1/\sqrt{r^2-x^2}+4/\sqrt{r^2-4x^2})=0,$$

которое после преобразований приводится к виду

$$16x^4-20r^2x^2+3r^4=0,$$

откуда $x^2=(5\pm\sqrt{13})r^2/8$.

Второй корень нас не устраивает, так как $\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{2}>1$, то есть окажется, что $2x>r$.

Итак, критическая точка определяется равенством

$$x_{\text{кр}}=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{8}}.$$

Нетрудно убедиться, что это точка максимума.

9. Ответ: 1 шиллинг 7 пенсов. Решение. Пусть x, y и z — стоимости в пенсах стакана лимонада, бутерброда и бисквита соответственно. Из условия получаем систему

$$\begin{cases} x+3y+7z=14, \\ x+4y+10z=17. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5 и вычтя из него второе уравнение, умноженное на 3, получим $2x+3y+5z=19$.

10. Пусть ABC — данный треугольник, $A'B'C'$ — требуемый (рис. 6). Поскольку перпендикуляры к сторонам AB, AC и BC, проведенные через точки C', B' и A', являются биссектрисами углов треугольника $A'B'C'$, они пересекаются в некоторой точке O, причем $\widehat{C'OB'}=\pi-\hat{A}$. Пусть $\widehat{C'A'B'}=2\alpha$. Тогда $\widehat{C'OB'}=$ $=(\pi+2\alpha)/2=\pi/2+\alpha$. Отсюда получаем, что $\alpha=\frac{\pi}{2}-\hat{A}$, то есть $\widehat{C'A'B}=\widehat{B'A'C}=\hat{A}$. Аналогично, $\widehat{BC'A}=\hat{C}$, $\widehat{C'B'A}=\hat{B}$. Поэтому $\triangle BC'A'\sim$ $\sim\triangle AC'B'\sim\triangle A'B'C\sim\triangle ABC$. Из подобий сразу следует, что

$$|BA'|=\frac{c}{a}|BC'|=\frac{c}{a}(c-|AC'|)=$$
$$=\frac{c}{a}\left(c-\frac{b}{c}|AB'|\right)=\frac{c^2}{a}-\frac{b}{a}(b-|CB'|)=$$
$$=\frac{c^2}{a}-\frac{b^2}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}|CA'|=$$
$$=\frac{c^2}{a}-\frac{b^2}{a}+a-|BA'|,$$

откуда $|BA'|=(a^2+c^2-b^2)/(2a)$. По теореме косинусов $a^2+c^2-b^2=2ac\cos\hat{B}$. Поэтому $|BA'|=c\cos\hat{B}$. Это значит, что (AA') перпендикулярна (BC). Аналогично доказывается, что (CC') и (BB') перпендикулярны (AB) и (AC) соответственно. Итак, вершины треугольника $A'B'C'$ являются основанием высот треугольника ABC.

11. Ответ: $2(p^2-V/p-S^2/p^2)$. Решение. Пусть a, b, c — стороны треугольника. По формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

или

$$S^2/p=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc=$$
$$=p^3-2p^3+(ab+ac+bc)p-V.$$

Таким образом, $ab+ac+bc=S^2/p^2+V/p+p^2$. Поскольку $4p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+$ $+2ac+2bc$, окончательно получаем $a^2+b^2+c^2=$ $=2(p^2-V/p-S^2/p^2)$.

12. Пусть n — число людей, сидящих за столом, и k — число шиллингов у самого «бедного» из них. После каждого тура количество шиллингов у каждого из игроков становится на 1 меньше. Значит, после k туров у самого «бедного» из них вообще ничего не останется и игра прекратится, когда «касса» в следующий раз дойдет до этого игрока. В этот момент в «кассе» будет $nk+n-1$ шиллингов. Наличные суммы могут относиться как 4:1 лишь для первого и последнего игроков. Поэтому либо $nk+n-1=4(n-k)$, либо $4(nk+n-1)=$ $=n-k$.

Первое уравнение приводится к виду $k=3-7/n$, откуда $n=7$, $k=2$.

Второе уравнение не имеет решений, так как из него следует, что $4nk=4-k-3n$, что невозможно.

13. Пусть $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ — искомый шестиугольник (рис. 7). Ясно, что $\triangle BB_1B_2\sim\triangle ABC$. Если k — коэффициент подобия этих треугольников, то $|BB_1|=kc$, $|BB_2|=ka$, $|B_1B_2|=kb$; $|AA_1|=c-|A_1B_1|-|BB_1|=c-k(b+c)$.

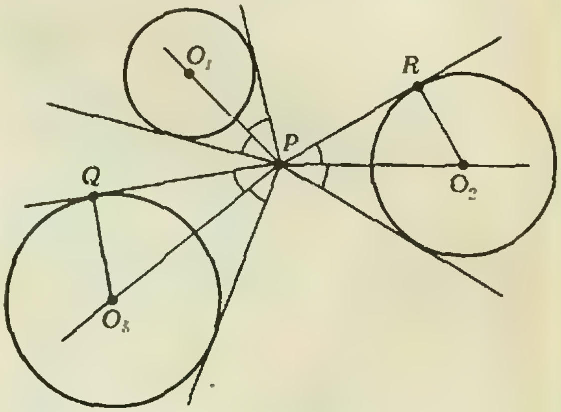


Рис. 8.

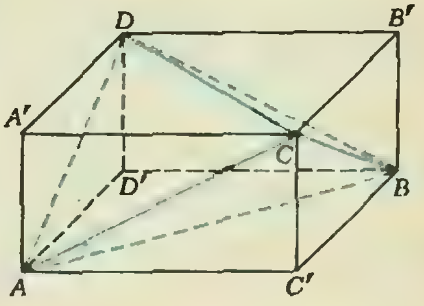


Рис. 9.

С другой стороны, $|A_1A_2|=|AA_1|\cdot\frac{a}{c}=a\cdot\frac{|AA_1|}{c}$, и, следовательно, $kb=a\left(1-\frac{k(b+c)}{c}\right)$, то есть $k=\frac{ac}{ab+bc+ac}$. Отсюда следует, что $|B_1B_2|=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

14. Пусть R_1, R_2, R_3 — радиусы башен. Ширина всех трех башен будет казаться одинаковой, если углы, образуемые касательными к каждой из окружностей, проведенными из искомой точки (рис. 8), будут равны. Из равенства этих углов следует, что $O_3\widehat{P}Q=O_2\widehat{P}R$. Поэтому $\triangle PRO_2\sim\triangle RQO_3$. Это значит, что $\frac{|PO_2|}{|PO_3|}=\frac{R_2}{R_3}$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, есть окружность («Квант», 1984, № 7, с. 37). Точно так же множество точек, из которых окружности с центрами O_2 и O_3 видны под равными углами, тоже являются окружностями. Точки пересечения этих двух окружностей являются искомыми.

15. **Ответ:** $\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}/12$. В данном тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра равны. Пусть $|AB|=|CD|=a$, $|BC|=|AD|=b$, $|AC|=|BD|=c$. Проведем через каждое из ребер плоскость, параллельную противоположному ребру. Полученные 6 плоскостей образуют параллелепипед $AD'BC'A'DB'C$, причем каждая грань (это параллелограмм с равными диагоналями) параллелепипеда является прямоугольником. Следовательно, параллелепипед — прямоугольный, а ребра тетраэдра являются диагоналями его граней (рис. 9). Пусть x, y, z — длины ребер параллелепипеда. По теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=b^2, \\ y^2+z^2=c^2, \end{cases}$$

откуда $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=s^2$, $z^2=s^2-a^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $y^2=s^2-b^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$, $x^2=s^2-c^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$. (Отсюда, в частности, следует, что грани тетраэдра — остроугольные треугольники.) Объем тетраэдра $ABCD$ равен $^1/_3$ объема V параллелепипеда, поскольку $V_{ABCD}=V-(V_{CC'BA}+V_{A'BDA}+V_{CB'DB}+V_{AD'BD})$, а объем каждого из тетраэдров, «отрезанных» от параллелепипеда, равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{2}\cdot h=\frac{1}{6}Sh$, где S — площадь основания, а h — высота параллелепипеда. Поэтому $V_{ABCD}=\frac{1}{3}V=\frac{1}{3}xyz=\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-b^2)}$.

Сколько корней имеет уравнение?

1. $p>1$.
2. 2.
3. $]-\infty;\ 0\,]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
4. $]\frac{10-7\sqrt{7}}{108};\ 0]$.
5. $]\frac{9-\sqrt{17}}{16};\ \frac{1}{3}[\,\cup\,]\frac{1}{3};\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}[$.
6. $a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=1$; $a_3=\frac{3}{2}$.
7. $x_1=\frac{5}{6}\pi+2\pi n$; $x_2=\frac{\pi}{18}+2\pi m$; x_3.
8. $]2;\ \frac{7}{3}[\,\cup\,]\frac{7}{3};\ 3\,]\cup\left\{\frac{7}{2}\right\}$.
9. $k=\frac{1}{3}$.
10. $\{-1\}\cup[-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}[$.
11. $\left\{0;\ \frac{\pi}{3}\right\}$; $]-\infty;\ -1\,[\,\cup[5;\ \infty\,[$.
12. $]5;\ 11^3/_4[$.
13. 4.
14. $]-^1/_4;\ 0\,]$.
15. $a=1/\sqrt[4]{2}$.
16. $[3;\ 5\,[$.
17. $\{-3+\sqrt{a^2+4a+5};\ -3-\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $a<-2$; $\{-3-\sqrt{a^2+4a+5};\ -3-\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $-2\leqslant a<\frac{1}{2}$; $\{-3-\sqrt{29/2}\}$ при $a=\frac{1}{2}$; $\{-3-\sqrt{a^2+4a+5};\ -3-\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $\frac{1}{2}<a\leqslant 3$; $\{-3-\sqrt{a^2+4a+5};\ -3+\sqrt{a^2-6a+10}$ при $a>3$.

Московский инженерно-физический институт
Математика

Вариант 1

1. $x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. При $q<15\,\%$ решений нет; при $15\,\%<q<25\,\%$ $\frac{25-q}{5}<x<2$, $y=2-x$ (x и y — количества литров, взятых из первого и второго сосудов соответственно). При $25\,\%<q\leqslant 100\,\%$ $x+y=2$, $x>0$, $y\geqslant 0$.

3. $x=\frac{c^4+2c^2+25}{c^2}$ при $c\in\,]0;\ \sqrt{5}\,]$; при остальных $c\in\mathbb{R}$ решений нет. Указание. Положив $y=\sqrt{\frac{x}{4}-3}$, приходим к уравнению $\sqrt{y^2+5}=c+y$, откуда $2cy=5-c^2$.

4. $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}h^2\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta$ при $\beta\in\,]0;\ \mathrm{arctg}\sqrt{2}[$; $S=\frac{\sqrt{3}}{4}h^2\,\mathrm{tg}\,\beta\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\beta}$ при $\beta\in[\mathrm{arctg}\sqrt{2};\ \frac{\pi}{2}[$. Указание. Пусть A — середина отрезка PR (рис. 10). Если $A\widehat{S}Q<\frac{\pi}{2}$, то сечение PBR имеет наименьшую площадь при $(AB)\perp(SQ)$. Если же $A\widehat{S}Q\geqslant\frac{\pi}{2}$, то таким сечением служит грань $P\widehat{S}R$. Угол ASQ будет острым, если $S\widehat{A}Q+S\widehat{Q}A>\frac{\pi}{2}$. Пусть $\varphi=S\widehat{A}Q$, $\psi=S\widehat{Q}A$. Ясно, что

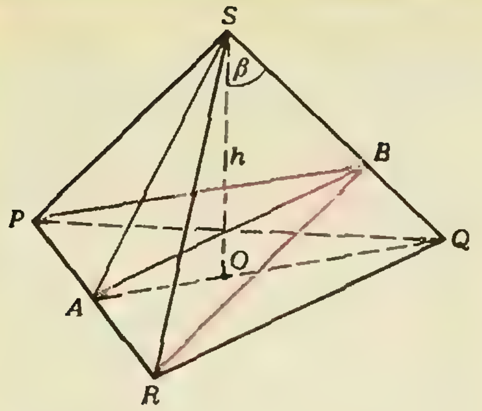


Рис. 10.

$\operatorname{tg}\varphi=2\operatorname{tg}\Psi$. Должно быть $\operatorname{tg}(\varphi+\Psi)<0$, то есть $\frac{3\operatorname{tg}\Psi}{1-2\operatorname{tg}^2\Psi}>0$, откуда $\operatorname{tg}\varphi>\frac{\sqrt{2}}{2}$, а так как $\beta+\Psi=\frac{\pi}{2}$, получим $0<\beta<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $\{-7\}\cup[-6{,}3;\ -6]\cup]-6;\ -5]$.

2. $\frac{76}{55-2p}$ км/ч при $\frac{449}{26}<p<\frac{525}{26}$; при $0<p\leqslant\frac{449}{26}$ и $p\geqslant\frac{525}{26}$ решения нет. **Указание.** Из условия задачи получаем систему $px+11y=105$, $(p+5)x+13y=131$, $0<y<x$.

3. $C\in]-\infty;\ 2]\cup\left\{\frac{2}{3}\pi;\ \ \pi\right\}\cup]4;\ +\infty[$. **Указание.** Уравнение $\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$ на промежутке $[-4;\ -2[$ имеет корень $x=-\frac{2\pi}{3}$. Этот корень будет единственным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: уравнение $x+c=0$ а) не имеет корней на промежутке $[-4;\ 2[$; б) имеет корень, совпадающий с $=\frac{2\pi}{3}$; в) имеет корень, не входящий в область определения функции ctg.

4. $\frac{r\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\gamma$ при $r>\frac{3\sqrt{2}}{4}a$; $\frac{r\sqrt{2}-a}{2}\operatorname{tg}\gamma$ при $\frac{a\sqrt{2}}{2}<r\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}a$. **Указание.** Пусть $ABCD$ — квадрат с центром E, в который вписано основание конуса (рис. 11), O — центр квадрата $PQRT$, K и L — середины отрезков BC и QR соответственно. Из трапеции $OEKL$ получим $|OL|=\frac{r\sqrt{2}}{2}$; $|EK|=\frac{r\sqrt{2}}{2}-x\operatorname{ctg}\gamma$, где $x=|OE|$. Объем конуса равен

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi|OE|\cdot|EK|^2=$$

$$=\frac{\pi}{3}x\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}-x\operatorname{ctg}\gamma\right)^2,$$

причем $x\in]0;\ h[$, где $h=\frac{r\sqrt{2}-a}{2}\operatorname{ctg}\gamma$ — высота данной усеченной пирамиды. Исследуя функцию $V(x)$ на экстремум с помощью производной, получим, что при $x=\frac{r\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\gamma<\frac{r\sqrt{2}-a}{2}\operatorname{tg}\gamma$, высота конуса наибольшего объема равна $x=\frac{r\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\gamma$, а при $x\geqslant h$ функция $V(x)$ возрастает на промежутке $]0;\ h]$.

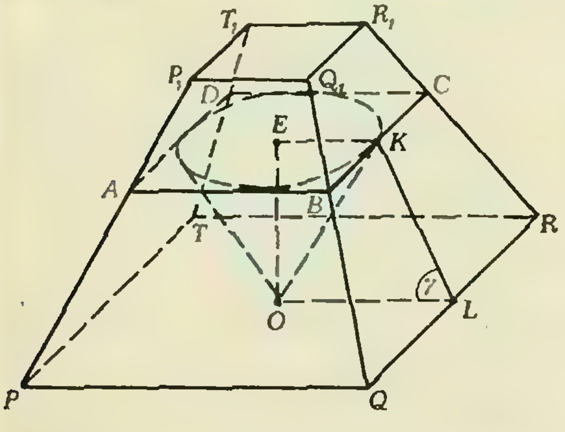


Рис. 11.

Физика

1. Запишем условие равновесия коромысла в момент отрыва тела A (см. рис. 1 в статье):

$$T_2l_2-T_1l_1=0,$$

где $T_1=m_1g$ — сила натяжения левой нити, T_2 — сила натяжения правой нити.
Сила натяжения T_2 будет максимальной в тот момент, когда правая нить принимает вертикальное положение. Запишем для этого момента второй закон Ньютона и закон сохранения механической энергии:

$$T_2-m_2g=\frac{m_2v^2}{l},$$

$$\frac{m_2v^2}{2}=m_2gl(1-\cos\alpha),$$

где l — длина нити, α — искомый угол ее отклонения. Из двух последних уравнений находим

$$T_2=m_2g(3-2\cos\alpha).$$

Подставляя сюда значение силы натяжения из уравнения равновесия коромысла, найдем искомое значение угла α:

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(3-\frac{m_1l}{m_2l_2}\right)=\frac{1}{2},\ \alpha=60^\circ.$$

2. Обозначим через v_{1y} и v_{2y} проекции скоростей пули и доски на вертикальную ось после вылета пули из доски и запишем закон сохранения импульса в проекции на эту ось, а также закон сохранения энергии для пули и доски:

$$m_1v_0\sin\alpha=m_1v_{1y}+m_2v_{2y},$$

$$\frac{m_1v_{1y}^2}{2}=m_1gH,$$

$$\frac{m_2v_{2y}^2}{2}=m_2gh.$$

Отсюда получаем

$$h=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\frac{(v_0\sin\alpha-\sqrt{2gH})^2}{2g}\approx0{,}11\ \text{м}.$$

3. Когда нить отклонена на угол α, составляющие ускорения, направленные вдоль нити и по касательной к траектории шарика, определяются формулами

$$a_{ц}=\frac{v^2}{l},\quad a_{к}=g\sin\alpha,$$

где v — скорость шарика, l — длина нити. Поскольку ускорение шарика в этот момент направлено горизонтально, проекции векторов $\vec{a}_{ц}$ и $\vec{a}_{к}$ на вертикальную ось одинаковы по модулю:

$$a_{ц}\cos\alpha=a_{к}\sin\alpha,$$

или

$$\frac{v^2}{l}\cos\alpha=g\sin^2\alpha,$$

откуда

$$v^2=gl\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Далее запишем закон сохранения энергии для шарика:

$$\frac{mv^2}{2}+mgl(1-\cos\alpha)=mgl(1-\cos\alpha_m).$$

Решая это уравнение относительно $\cos\alpha_m$, получим

$$\cos\alpha_m=\cos\alpha-\frac{v^2}{2gl}=\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}=0{,}73,$$

$$\alpha_m=43^\circ.$$

4. Скорость шайбы на вершине трамплина v можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh.$$

Высота трамплина и дальность полета шайбы связаны с временем полета t формулами

$$h=\frac{gt^2}{2},\quad s=vt.$$

Из записанных выше равенств получим зависимость дальности полета шайбы от высоты трамплина:

$$s=\sqrt{\frac{2h}{g}(v_0^2-2gh)}=2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2-\left(h-\frac{v_0^2}{4g}\right)^2}.$$

Очевидно, что дальность полета будет максимальной при условии

$$h=\frac{v_0^2}{4g}=3{,}6\ \text{м},$$

причем сама максимальная дальность

$$s=\frac{v_0^2}{2g}=7{,}2\ \text{м}.$$

5. Для системы тело — доска выполняется закон сохранения импульса

$$m_1v_0=(m_1+m_2)v,$$

где v — скорость системы после того, как тело перестало скользить относительно доски.

Изменение кинетической энергии тела обусловлено работой силы трения $F_{тр1}$, действующей на тело со стороны доски:

$$\frac{m_1v^2}{2}-\frac{m_1v_0^2}{2}=-F_{тр1}l_1,$$

где l_1 — путь, пройденный телом относительно плоскости. С другой стороны, кинетическая энергия доски увеличивается за счет работы силы трения $F_{тр2}$, действующей на доску со стороны тела:

$$\frac{m_2v^2}{2}=F_{тр2}l_2,$$

где l_2 — путь, пройденный доской относительно плоскости. Складывая почленно два последних уравнения и учитывая, что $F_{тр1}=F_{тр2}=\mu m_1g$, получим

$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}-\frac{m_1v_0^2}{2}=-\mu m_1g(l_1-l_2)=-\mu m_1gl$$

Решая это уравнение совместно с уравнением, описывающим закон сохранения импульса, находим искомое значение пути l:

$$l=\frac{m_1m_2v_0^2}{2\mu g(m_1+m_2)}\approx 0{,}7\ \text{м}.$$

6. В обоих случаях сила давления газа на поршень уравновешивается изменением силы упругости пружины:

$$p_1S=kh_1,\quad p_2S=kh_2,$$

где p_1 и p_2 — давления газа, S — площадь поршня, k — жесткость пружины, h_1 и h_2 — изменения длины пружины. Из этих равенств находим отношение давлений p_1/p_2:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{h_1}{h_2}.$$

С другой стороны, отношение давлений можно получить с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p_1h_1S=\frac{m}{\mu}RT_1,\quad p_2h_2S=n\frac{m}{\mu}RT_2,$$

где m — исходная масса газа под поршнем, откуда

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1h_2}{nT_2h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{T_1h_2}{nT_2h_1},$$

или

$$h_2=h_1\sqrt{\frac{nT_2}{T_1}}\approx 22{,}7\ \text{см}.$$

7. В момент перерезания нити скорость шариков равна нулю, и, следовательно, их центростремительное ускорение также равно нулю. Касательное ускорение шариков обеспечивается проекциями кулоновской силы и силы тяжести:

$$ma=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0l^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}-mg\,\frac{1}{2}.$$

Искомую скорость шариков можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0l}-2mgl\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_02l}+2\,\frac{mv^2}{2}.$$

Решение этих двух уравнений для скорости v дает

$$v=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}\,l(2a-5g)}\approx 0{,}66\ \text{м/с}.$$

8. Запишем условие равновесия шарика в первоначальном положении:

$$qE=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Изменение механической энергии шарика обусловлено работой сил электрического поля:

$$-mgl(\cos\beta-\cos\alpha)=qEl(\sin\alpha+\sin\beta),$$

где β — угол максимального отклонения шарика, l — длина нити. Учитывая записанное выше условие равновесия шарика, имеем

$$\cos\alpha-\cos\beta=\operatorname{tg}\alpha(\sin\alpha+\sin\beta),$$

или

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\operatorname{tg}\alpha\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Последнее уравнение дает

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}=\operatorname{tg}\alpha,\ \frac{\beta-\alpha}{2}=\alpha,\ \beta=3\alpha.$$

В положении максимального отклонения скорость шарика равна нулю, и, следовательно, центростремительное ускорение также равно нулю:

$$0=T-mg\cos\beta-qE\sin\beta.$$

Решая это уравнение, находим искомую силу натяжения:

$$T=mg\cos\beta+qE\sin\beta=mg(\cos\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\beta)=$$
$$=mg(\cos 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin 3\alpha)=$$
$$=mg\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\approx 8{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

9. Непосредственно после замыкания ключа заряд и напряжение на конденсаторе равны нулю. Поэтому ток I_1, протекающий через источник в этот момент времени, равен

$$I_1=\frac{U_1}{R_1}.$$

После того как конденсатор зарядится, ток через него не течет. Следовательно,

$$I_2=\frac{U_2}{R_1+R_2},$$

где I_2 — ток, протекающий через источник после зарядки конденсатора. Напряжения на источнике тока U_1 и U_2 связаны с его ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r формулами

$$U_1=\mathcal{E}-I_1r,\ U_2=\mathcal{E}-I_2r.$$

Исключив из этих уравнений величину r, получим

$$\mathcal{E}=\frac{U_1I_2-U_2I_1}{I_2-I_1}=\frac{U_1U_2R_2}{U_1(R_1+R_2)-U_2R_1}=12\ \text{В}.$$

10. Действительное изображение шарика будет существовать, когда шарик находится выше фокальной плоскости линзы. Максимальная высота подъема шарика H равна

$$H=\frac{v_0^2}{2g}.$$

Время полета шарика τ над фокальной плоскостью можно найти из уравнения

$$H-F=\frac{g(\tau/2)^2}{2},$$

где $F=1/D$ — фокусное расстояние линзы. Отсюда

$$\tau=2\sqrt{\frac{2(H-F)}{g}}=2\frac{v_0}{g}\sqrt{1-\frac{2g}{v_0^2D}}\approx 1{,}5\ \text{с}.$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. —1, 1. 2. 1,25. 3. 1. 4. 10. 5. 64. 6. 4. 7. 0,5. 8. 5. 9. 8. 10. 22,5.

Вариант 2

1. 3,75. 2. 0,625. 3. 3. 4. 5. 5. 2,5. 6. 6. 7. 0,5. 8. 5. 9. 14. 10. 2,25.

Физика

Вариант 1

1. $H=\frac{g}{2}\left(\frac{l}{g}+\frac{\tau^2}{2}\right)^2\approx 240$ м (здесь $\tau=1$ с).
2. $F=mg\operatorname{ctg}\alpha=19{,}6$ Н.
3. $v=\sqrt{2g(|AB|+\mu|DB|)}=7$ м/с.
4. $F=\frac{mgl}{2\sqrt{l^2-a^2/4}}=49$ Н.
5. $p=\varrho gh(l_1+l_2)/(l_2-l_1)=62{,}2$ кПа (здесь $\varrho=13{,}6\cdot 10^3$ кг/м³ — плотность ртути).
6. $\Delta l=l\alpha(t_1-t_2)/(1+\alpha t_1)=0{,}29$ м.
7. $I=C_1C_2(U_1+U_2)/(\tau(C_1+C_2))=6\cdot 10^{-4}$ А.
8. $m=\frac{4Dl^2\varrho W}{(0{,}92\cdot 0{,}08)U^2}\approx 2140$ кг (здесь $D=8{,}9\cdot 10^3$ кг/м³ — плотность, ϱ — $1{,}7\cdot 10^{-8}$ Ом · м — удельное сопротивление меди).
9. $I_1/I_2=\sqrt{3}\approx 1{,}7$.
10. $S=\pi h^2/(n^2-1)\approx 0{,}02$ м².

Вариант 2

1. $v_0=(3l_1-l_2)/(2t)=3{,}75$ м/с.
2. $l'=l\mu/(1+\mu)=0{,}25$ м.
3. $\Delta P=\sqrt{2}mv=14$ Н · с.
4. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2\mu}=45°$.
5. $A=mR\Delta T/M\approx 3320$ Дж (здесь $M=4{,}4\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса углекислого газа).
6. $p_н=\frac{mRT}{MV\varphi/100\,\%}\approx 1961$ Па (здесь $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $M=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).
7. $\mathcal{E}=4U=2$ В.
8. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+qE/m}}\approx 1{,}1$ с.
9. $B=\mathcal{E}\tau/a^2=2\cdot 10^{-3}$ Тл.
10. $b'=b\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\approx 10{,}3$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $f'(x)=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$ при $x>0$, $x\neq\sqrt{3}$.
2. См. рис. 12.
3. Промежутки убывания $]-\infty;\ 0[$ и $]2\sqrt{2};\ +\infty[$. Промежуток возрастания $]0;\ 2\sqrt{2}[$. Точка минимума $x=0$, $f(0)=0$. Точка максимума $x=2\sqrt{2}$, $f(2\sqrt{2})=4$.
4. $\left\{-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right\}$.
5. $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$

Вариант 2

1. $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x>0$, $x\neq 1$.
2. $\left]\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\right[\ \left]\frac{3}{2};\ +\infty\right[$.

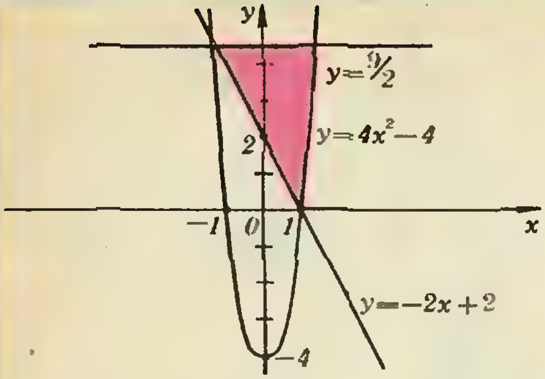


Рис. 12.

3. Промежутки возрастания $]-2,5;\ -1,5[$ и $]0;\ 0,5[$. Промежуток убывания $]-1,5;\ 0[$. $f_{\max}=f(-1,5)=4$. $f_{\min}=-\frac{16}{9}$ при $x=-2,5$.

4. $\left\{-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\}$.

5. $\frac{S\sqrt{S\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}}$.

Задачи устного экзамена

1. **Указание.** Если M' — точка пересечения продолжения высоты CD с описанной окружностью, то $\widehat{M'BA}=\widehat{M'CA}=\widehat{ABM}$.

2. **Указание.** Если данная функция периодична и T ее период, то $\cos\sqrt[3]{T}=1$, $\cos\sqrt[3]{2T}=\cos\sqrt[3]{T}$, а эти два соотношения противоречат иррациональности числа $\sqrt[3]{2}$.

3. **Указание.** При любых положительных a и b имеет место неравенство $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. Поэтому

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}+\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x}+\frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x}\geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{|\sin x|}{|\sin 3x|}+\frac{|\sin 3x|}{|\sin x|}\right)\geqslant 4.$$

4. **Указание.** Сначала докажите, что $2\cos^2\frac{\alpha}{2}>\sin\alpha+\cos\alpha$.

6. а) $f'(1)=2\ln 2$; б) $f(1)=\frac{1}{2}$.

7. $x\neq\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. **Указание.** Воспользуйтесь неравенством $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

8. **Указание.** В левой части неравенства стоит число $\lg a$, где $a=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100}$. Достаточно доказать, что $a<\frac{1}{10}$. Для этого перемножьте неравенства $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, ..., $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$.

9. 3. 10. 1/8.

Вариант 1

1. 31. 2. 0. 3. 200. 4. −0,21. 5. 0,75. 6. 8. 7. 2. 8. 1. 9. 9. 10. 0. 11. 0,5. 12. 64. 13. −1. 14. −13. 15. 1. 16. 8. 17. 0. 18. 2. 19. 0,97. 20. 4.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $A_{AB}>0$; $A_{BC}=A_{DA}=0$; $A_{CD}<0$; $A_{ABCDA}=0$.

3. $v=v_0\frac{m}{M}\cos\alpha\approx 0,52$ м/с.

4. $l=d\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$.

5. $\frac{p_2}{p_1}=\frac{3}{1+(T_1/T_2)+(T_1/T_3)}\approx 2,2$.

Вариант 2

2. См. рис. 13.

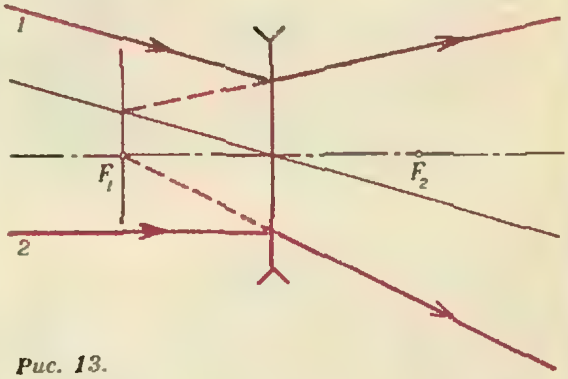


Рис. 13.

3. $F_1=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\approx 2,8\cdot 10^{-3}$ Н; $F_2=\frac{(Q_1+Q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2}\approx 5,1\cdot 10^{-3}$ Н.

4. $H=l+\frac{N}{k}+\frac{N^2}{2kmg}$.

5. $\frac{U'}{U}=\sqrt{\frac{\Delta W}{tP\eta/100\,\%}}=3$ (здесь $t=24$ ч).

Задачи устного экзамена

1. $v_1=((m_1+m_2)v_0-m_2v_2)/m_1\approx 267$ м/с.
2. $\rho=\rho_0-m/(nV)=700$ кг/м^3.
3. $A=IBls=0,15$ Дж; проводник должен перемещаться перпендикулярно линиям магнитной индукции.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. В этой записи, вообще говоря, каждая цифра может играть одну из трех ролей: быть номером буквы, быть первой цифрой двузначного номера буквы или второй его цифрой. Цифра 0 не может выступать ни в первой, ни во второй роли, а цифра 5 — во второй роли. Отсюда первая буква имени имеет номер 20 — Т, а остальные разбиваются на два блока 115 и 33. Блок 115 можно представить тремя способами: 1—1—5, 11—5, 1—15, что соответствует сочетаниям ААД, ИД, АН. А блок 33 — двумя способами: 3—3 и 33, что соответствует сочетаниям ВВ и Я. Таким образом получаем 6 возможных слов: ТААДВВ, ТААДЯ, ТИДВВ, ТИДЯ, ТАНВВ и ТАНЯ. Очевидно, что имя девочки — Таня.

2. Коля купил 3 пирожка, Витя — 6, Женя — 5 пирожков.

3. См. рис. 14.

4. Ясно, что эти числа не могут быть однозначными. Они не могут быть и двузначными, так как из условия следует, что для числа ab должно выполняться соотношение: $10a+$

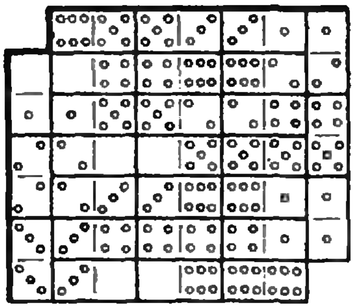


Рис. 14.

$+b=13(a+b)$ или $3a+12b=0$. Для трехзначных чисел из уравнения $100a+10b+c=13(a+b+c)$, то есть $29a=b+4c$ получаем три решения 195, 156 и 117. Четырех- и более значных чисел с таким свойством не существует.

5. Это правило применимо лишь в северных странах. Южнее экватора дело обстоит как раз наоборот, а на экваторе месяц бывает повернут выпуклостью вверх или вниз.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1984, № 11)

Задание 21 (Г. Каспарян, 1936 г.). **1. h5+ Крh6 2. Кf7+ Кр:h5 3. Лe5+ Крh4 4. Кg5 f1Ф+ 5. Кf3+ Крh3 6. Лb5+ Крg2 7. Лh2×.**

Задание 22 (Г. Каспарян, 1956 г.). **1. Фh1+** (1. c6+ Кр:c6 2. Фa6+ Сb6 3. Фc4+ Сc5+! 4. Ф:c5+ Крb7 с ничьей) **1... Крb8** (1... Крa6 2. Фf1+ Крb7 3. Фf3+ Крb8 4. Фf8+ ведет к основному варианту) **2. Фh8+ Крb7 3. c6+! Л:c6 4. Фh1 Крb6 5. Фg1+!** (ферзь начинает победный подъем по «лестнице», не годится 5. Фd5 из-за 5... Сb8! 6. Фb5+ Крa7 7. Ф:c6 пат). **5... Крb7** (5... Крa6 6. Фf1+ Крb7 7. Фf3) **6. Фg2 Крb6 7. Фf2+ Крb7 8. Фf3 Крb6 9. Фe3+ Крb7 10. Фe4 Крb6 11. Фd4+ Крb7 12. Фd5,** и белые выигрывают.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1984, № 12)

Оба этюда составлены классиком шахматной композиции Л. Куббелем в 1924-м году.

Задание 23. 1. Сb3 d3! 2. Сc4! Крc2 3. Сa2 Кр:d2 4. d6. Если теперь черные попытаются провести пешку «d», то они гибнут из-за размена ферзей: 4... Крc1 5. d7 d2 6. d8Ф d1Ф 7. Фc7+! Крd2 8. Фd6+ Крc1 9. Фc5+ Фc2+ 10. Ф:c2+ Кр:c2 11. Кр:g2 Крd2 12. Крf2. Но в распоряжении черных имеется остроумная патовая ловушка: 4... g1Ф+! 5. Кр:g1 Крe3! 6. d7 d2! и после 7. d8Ф b1Ф+ 8. С:b1 d1Ф+! 9. Ф:d1 на доске пат. Выигрывает же **7. d8Л!**

Задание 24. 1. Лe5 Кc8 2. Лg5! Сf7 (e6) 3. Кc6+ Крa8 4. Лb5! (4. Лa5+ Крb7 5. Кd8+ Крb6 с ничьей) **4... Кb6 5. Лa5+ Крb7 6. Кd8+.** Интересен и другой вариант: 1... Крa7 2. Л:e7 Крb6 3. Лe8! Сf7 4. Лf8! Сd5 5. Кb3! С:b3 6. Лb8+.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Виноделова, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, А. А. Орехов, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина
Фото представили:
В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

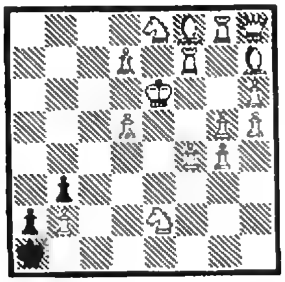
Сдано в набор 18.01.85. Подписано к печати 1.03.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,63. Т-07411.
Тираж 177696 экз. Цена 40 коп. Заказ 91

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

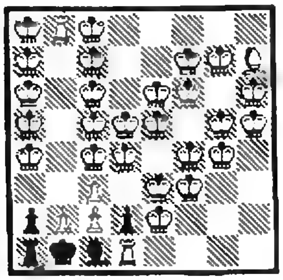
ВОЗВРАЩЕНИЕ ФИГУР

В обычных шахматных задачах полагается, чтобы первый ход был единственным. Однако существует в композиции так называемая тема возврата, где это правило можно нарушать сколько угодно раз, и чем больше вступительных ходов, тем лучше! С некоторыми рекордами такого рода мы сегодня ознакомимся.



А. Эллерман, Д. Оудот. Мат в 2 хода (9 решений).

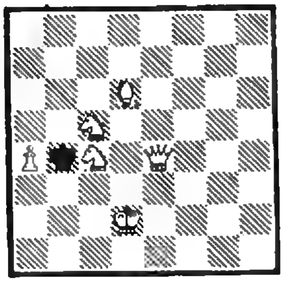
Эта задача — основоположница темы. К цели ведет любое перекрытие диагонали a1 — h8 ладьями, конями и королем. Ответным ходом черный король берет пешку b2, и белая фигура возвращается на место, объявляя мат. Любопытно, что на доске расположился полный комплект белых фигур и пешек, и удаление любой из них нарушит идею — необходимость в возвращении на место некоторых фигур отпадет.



Э. Энкин. Мат в 2 хода (41 решение).

Перед нами «вся королевская рать»! Сорок ходов королей на поля b4, b5, b6, b7, e4, f5, g6, а также маневр Cg8! решают дело. Черный король берет пешку b2 или c2, и возвращение белой фигуры на место приводит к мату.

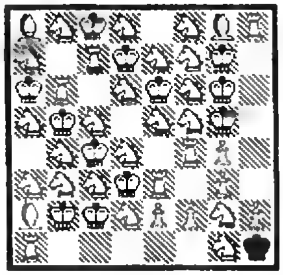
В рамках ортодоксальных задач, в которых не требуется сверхкомплект шахматных фигур, лучшим произведением является такое.



Б. Сидоров. Мат в 2 хода (21 решение).

Пятнадцать отступлений ферзем или шесть слоном и затем возвращение их на место приводит к мату черному королю. Если в первой задаче белые были представлены полным набором фигур, то здесь другой примечательный штрих — замысел осуществлен в жанре миниатюры — на доске всего семь фигур!

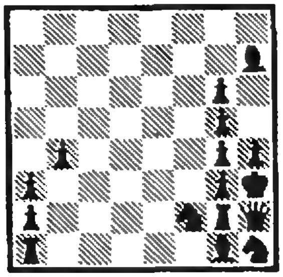
Рекорд же, очевидно, следует искать в «сказочных шахматах».



А. Шуряков, М. Горниславский. Мат в 2 хода (70 решений).

Если в задаче Энкина присутствовала вся королевская рать, то теперь на доске находится еще и целый табун коней... Последняя необычная диаграмма отличается также внешней симметрией относительно диагонали a8 — h1 (несколько небольших нарушений не в счет). После любого из ходов белых королей, ладей, слонов и коней и возвращения их на место мат дается либо по этой диагонали, либо по одной из крайних линий.

В сегодняшней «шахматной страничке» оказалось слишком много белых королей, и поэтому в заключение приводим одну задачу-шутку, в которой белого короля вообще нет на доске, как, впрочем, и остальных белых фигур. Но в отличие от самой первой задачи на сей раз полностью представлена армия черных фигур.

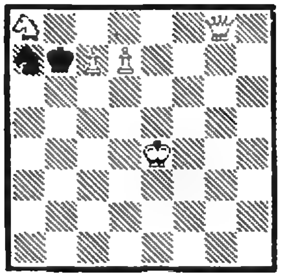


Ф. Бондаренко. Белые начинают и делают ничью.

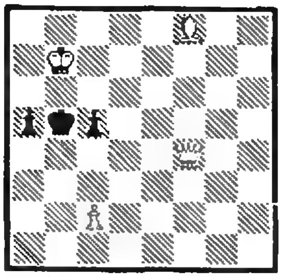
Поразительный случай! Несмотря на то, что у черных уцелели все фигуры, а у белых пока нет даже предводителя, им удается спастись. Оказывается, в данный момент король завершает ход, почему его и не видно. На что же это за спасительный ход?

1.Крb2:a1! Вот в чем дело. Король стоял на b2, и пешка поспешно объявила ему шах. Теперь черные, хотя и имеют самый большой материальный перевес, который только возможен в шахматах, не в состоянии предотвратить пат.

Конкурсные задания

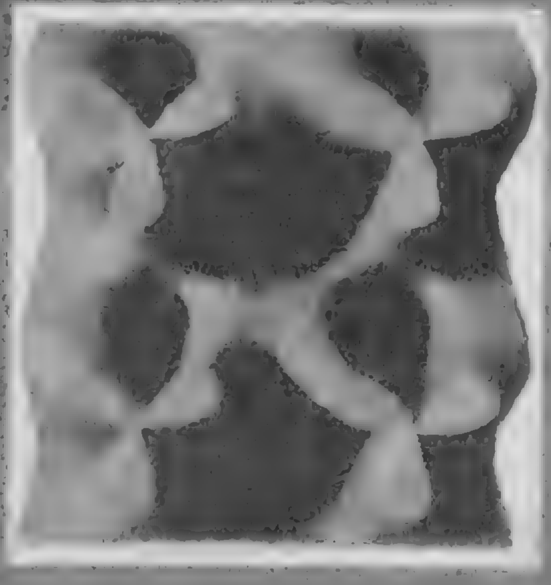


5. Мат в два хода.



6. Мат в два хода.

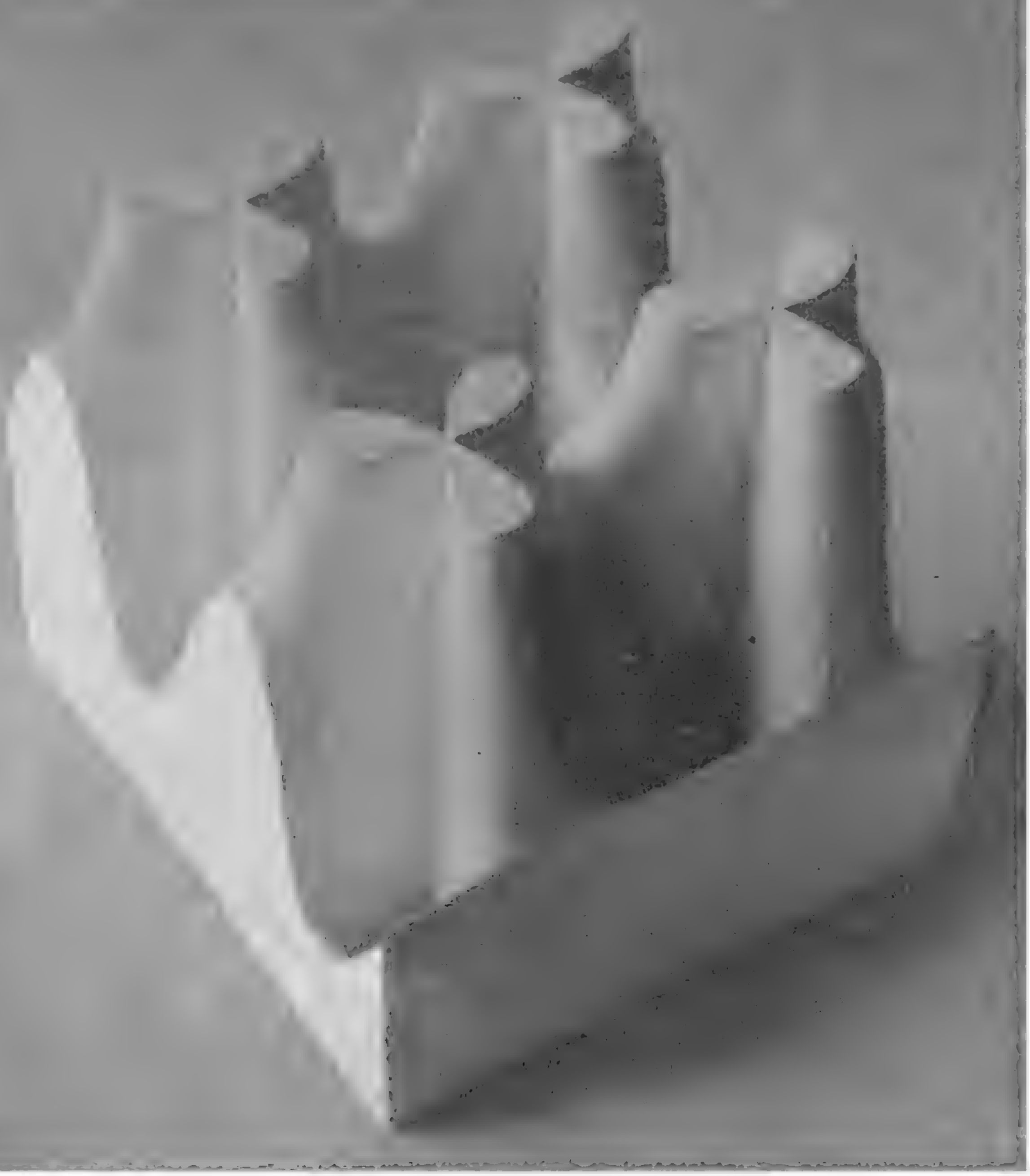
Срок отправки решений — 25 мая 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»).



Здесь показана модель поверхности из уникальной коллекции, хранящейся в Московском государственном университете. Модели коллекции были изготовлены в Германии под руководством известного немецкого математика Феликса Клейна. Изображенная поверхность [illegible] [illegible] интеграла [illegible] рода

[illegible]

в комплексной области. Соответствующие переменные – [illegible] [illegible] функции – [illegible] [illegible] [illegible] механике.

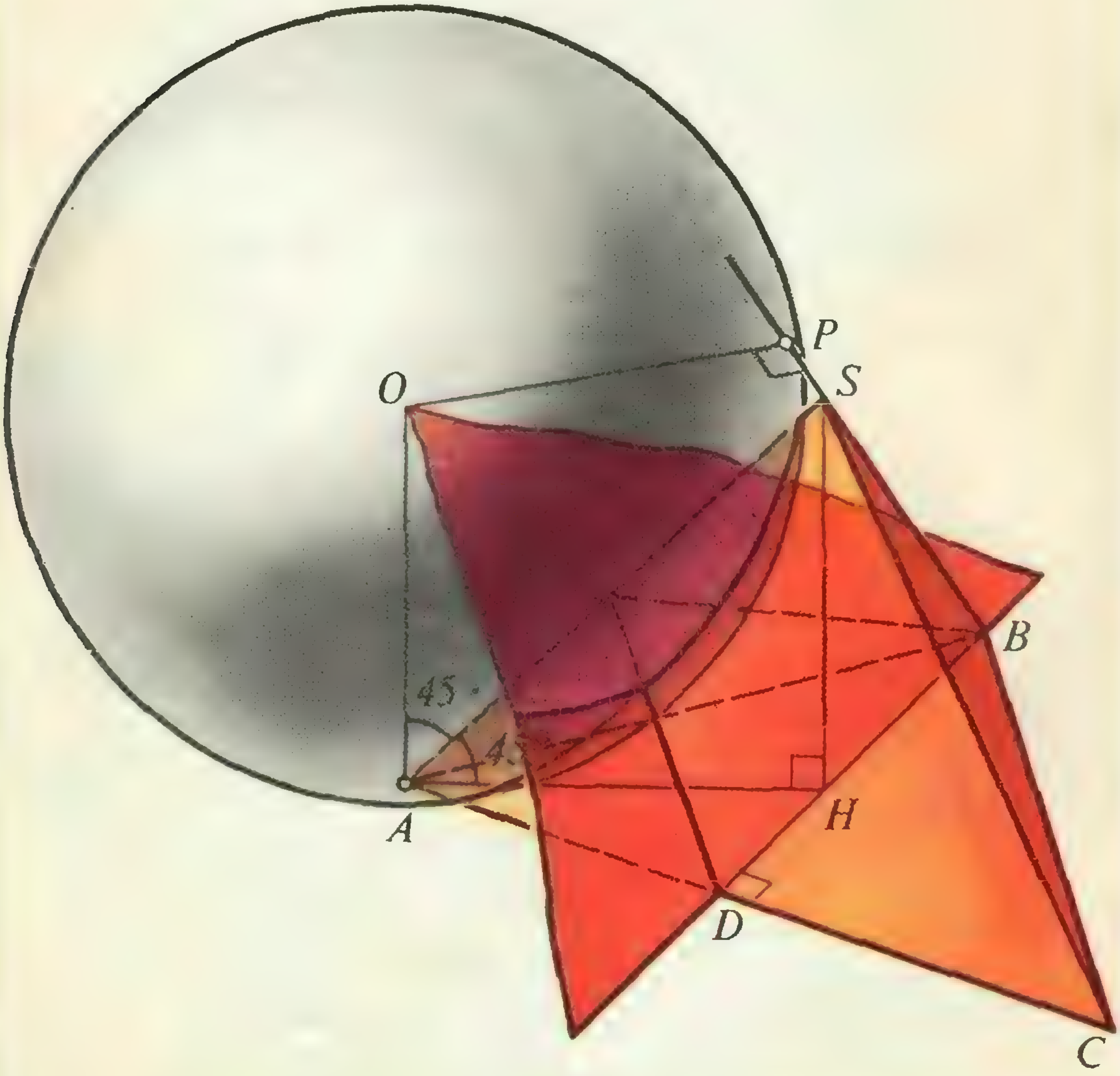


Индекс 70465

Цена 40 коп.

Мы продолжаем начатую в прошлом номере серию чертежей к стереометрическим задачам, цель которой помочь читателям развить пространственное воображение. При самостоятельном решении задач такие картинки надо стараться представлять себе мысленно. (Как правило, точные чертежи можно построить, только решив задачу хотя бы частично, к тому же непосредственно для решения они чаще всего не нужны.) Условие задачи этого номера приводится ниже, а ее решение вы найдете внутри журнала под рубрикой «Наша обложка».

Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.



НОМЕР
4

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **4** 1985

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	День советской науки	Soviet science day
3	*В. Р. Почуев.* Приближенные вычисления и формула Тейлора	*V. R. Pochuev.* Approximate calculations and the Taylor formula
8	*А. Л. Стасенко.* О функциях распределения	*A. L. Stasenko.* On distribution functions
	Новости науки	**Science news**
12	Пульсирующее Солнце	The pulsating Sun
	Математический кружок	**Mathematics circle**
13	*М. Г. Крейн.* Диофантово уравнение А. А. Маркова	*M. G. Krein.* A. A. Markov's Diophantine equation
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
17	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
22	Математика 10	Mathematics 10
27	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*Л. И. Тучинский.* Может ли быть невозможное?	*L. I. Tuchinski.* Can the impossible be?
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
36	Задачи М916—М920; Ф928—Ф932	Problems M916—M920; P928—P932
39	Решения задач М896—М900; Ф908—Ф912	Solutions M896—M900; P908—P912
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
48	*А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин.* Метрические соотношения в треугольнике	*A. A. Bolibrukh, V. M. Uroev, M. I. Shabunin.* Metric relations in the triangle
	Информация	**Information**
53	Заочная физическая школа при МГУ	Moscow university physics correspondence school
54	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(35)*	**Our cover page** *(35)*
	«Квант» улыбается *(47)*	**Kvant smiles** *(47)*
	Смесь *(11, 46)*	**Miscellaneous** *(11, 46)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Фигуры на своих местах *(3-я с. обложки)*	The pieces are at their own places *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1985

Только социализм даст возможность широко распространить и настоящим образом подчинить общественное производство и распределение продуктов по научным соображениям...

В. И. Ленин

День советской науки

Советская наука за несколько десятилетий прошла впечатляющий путь, увенчанный многими, известными всему миру, достижениями. Путь этот можно проиллюстрировать высказываниями наших выдающихся творцов науки. Речь в них идет не только об особенностях науки социализма, но и важнейших чертах советского ученого.

Технический и социальный прогресс теснейшим образом связаны друг с другом. Октябрь послужил основой грандиозных социальных преобразований, в свою очередь, оказавших глубокое влияние на научно-техническую революцию.

Академик М. В. КЕЛДЫШ

Советская наука, далекая от крайностей, сочетает в себе здоровый, сильный практицизм, определяемый задачами социалистического строительства, с той внутренней логикой научного мышления, которая требуется для правильной постановки и решения научных проблем.

Академик С. И. ВАВИЛОВ

Именно прогресс фундаментальных знаний изменяет, казалось бы, установившиеся и незыблемые в науке точки зрения, открывает новые области в науке и технике, коренным образом меняет технологию, приводит к появлению новых материалов и открывает возможности использования совершенно новых, часто неожиданных явлений в областях, совершенно не имевших никакого отношения к первоначальной области исследования.

Академик А. П. АЛЕКСАНДРОВ

... развитие науки — это не столько результат гениального прозрения одиночек, сколько плод организованного и целенаправленного труда многих простых, но очень настойчивых, добросовестных и трудолюбивых людей.

Академик А. И. БЕРГ

В органическом слиянии чистой и прикладной математики, в диалектическом единстве абстрактного и конкретного я вижу наиболее яркую и философски значительную, наиболее принципиальную особенность советской математики.

Академик П. С. АЛЕКСАНДРОВ

... современная физика — это своего рода двуликий Янус. С одной стороны, — это наука с горящим взором, которая стремится проникнуть в глубь великих законов материального мира. С другой стороны, — это фундамент новой техники, мастерская смелых технических идей, опора обороны и движущая сила непрерывного индустриального прогресса.

Академик Л. А. АРЦИМОВИЧ

... исследователь, способный к глубокому философскому анализу, обогащенный пониманием того, что происходит на всем огромном фронте науки, пониманием сущности общественных процессов, знаток и ценитель общечеловеческих культурных ценностей, такой исследователь, кроме всего прочего, шире смотрит на проблемы своей научной области, видит то, что ускользает от взгляда какого-нибудь профессионального аскета.

Академик Р. В. ХОХЛОВ

Наука — общее достояние человечества, и задача подлинного ученого — обогащать этот запас знаний, доступных всем.

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

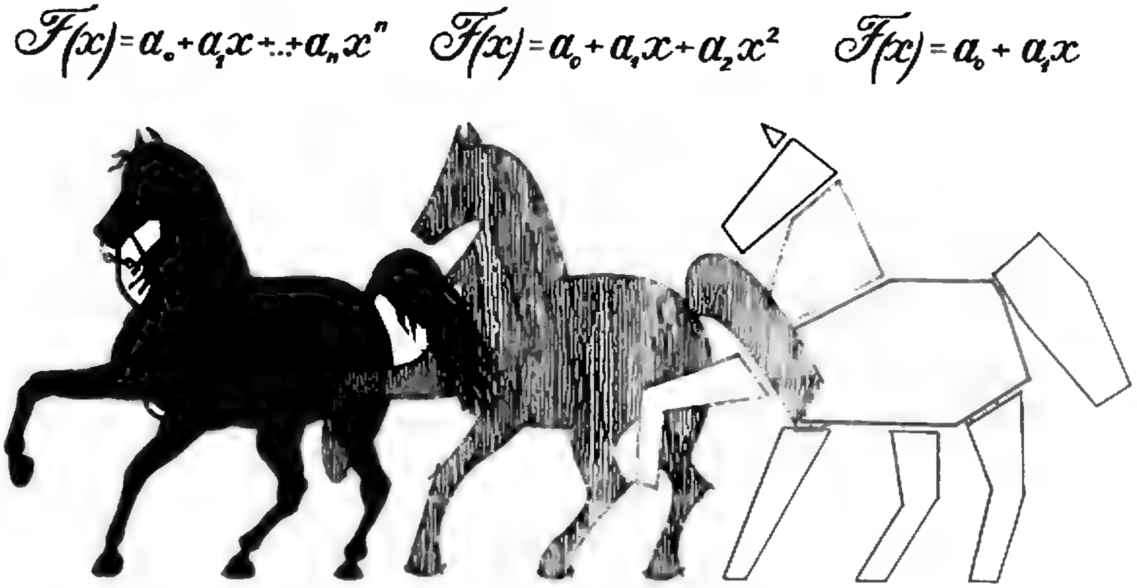
Советский ученый является прежде всего гражданином своей страны, поэтому идеалы его жизни и деятельности совпадают с идеалами, которыми живут все граждане его страны. Его научная работа движется той же целеустремленностью, которой живет вся страна.

Академик П. Л. КАПИЦА

Я верю, что человеческий разум восторжествует и люди не допустят использования достижений науки в целях, не совместимых с гуманизмом и человеческой моралью.

Задача ученых заключается не только в развитии научных исследований, но и в борьбе за их использование на благо общества, на благо всех людей мира.

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ



Приближенные вычисления и формула Тейлора

В. Р. ПОЧУЕВ

Эта статья начинается с простых замечаний о приближенных арифметических вычислениях, которые естественно приводят к замечательной формуле Тейлора. В частных случаях эта формула устанавливается школьными методами, а затем используется для приближенного вычисления значений функций.

Два примера для разминки

Предположим, что нужно вычислить произведение

$$p=1{,}03\times 2{,}01$$

с точностью до 0,001. Это вычисление естественно проделать так

$$p=(1+0{,}03)\cdot(2+0{,}01)\approx$$
$$\approx 2+0{,}06+0{,}01=2{,}07.$$

Здесь мы пренебрегли четвертым слагаемым $0{,}01\times 0{,}03=0{,}0003$, так как оно меньше предписанной точности.

Использованный прием станет более наглядным, если обозначить число 0,01 через x. Тогда наше вычисление — это просто вычисление функции (многочлена)

$$f(x)=(1+3x)(2+x)=2+7x+3x^2$$

при значении $x=0{,}01$, ибо $p=f(0{,}01)$. При написании приближенного равенства $f(x)\approx 2+7x$, мы пренебрегаем членом $3x^2$ более высокой (второй) степени.

Рассмотрим чуть более сложный пример: вычислим с точностью до 0,01 произведение

$$q=2{,}12\times 1{,}97.$$

Обозначая теперь число 0,1 через x, мы видим, что вычислить q — это значит найти значение функции

$$g(x)=(2+x+2x^2)(2-3x^2)$$

при $x=0{,}1$. Раскрывая скобки, получим

$$g(x)=4+2x-2x^2-3x^3-6x^4.$$

Членами с x^3 и x^4 можно пренебречь, так как при $x=0{,}1$, $x^3=0{,}001$ и $x^4=0{,}0001$ находятся за пределами требуемой точности 0,01. Итак,

$$q=g(0{,}1)\approx 4+2(0{,}1)-2(0{,}1)^2=4{,}18.$$

Проанализируем наши действия

Успех вычислений основывался на том факте, что искомое произведение p (или q) было близко к точно известному числу A, а затем представлялось как значение некоторой функции $f(x)$ при малом x, причем $f(0)$ равнялось A.

Так, в первом примере грубая прикидка дает $p\approx 1\cdot 2=2=A_1$, а отклонения сомножителей от единицы и двойки малы. Аналогично, во втором примере грубая прикидка дает $q\approx 2\cdot 2=4=A_2$, и вновь отклонения сомножителей от двоек малы. В первом случае это отклонение сомножителей мерилось в «x-единицах», где x было 0,01, а во втором случае — в других «x'-единицах», где x' было 0,1.

Далее, подбираемая функция $f(x)$ (или $g(x)$) разбивалась на две части — существенную и второстепенную:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ f_1(x)=2+7x,$$
$$f_2(x)=3x^2,\ g(x)=g_1(x)+g_2(x),$$
$$g_1(x)=4+2x-2x^2,\ g_2(x)=-3x^3-6x^4,$$

где существенные части $f_1(x)$ (и $g_1(x)$) были многочленами первой и второй степени, представляющими результат с требуемой точностью, а f_2 и g_2 были пренебрежимо малы.

Введем символ «о малое»

В рассмотренных случаях в математическом анализе часто используется следующая более короткая и более выразительная форма записи:

$$f(x)=2+7x+o(x),$$
$$g(x)=4+2x-2x^2+o(x^2).$$

Здесь символ $o(x)$ (читается «о малое от x») обозначает некоторую функцию от x (точный вид ее нас не интересует), которая стремится к нулю быстрее чем x, то есть такая, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Аналогично, $o(x^2)$ — некоторая функция от x, стремящаяся к нулю быстрее, чем x^2, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0.$$

Вообще $o(x^n)$, при $n\geqslant 1$,— это обозначение для функции от x, обладающей таким свойством:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0.$$

Используя арифметические свойства пределов (см. Алгебра и начало анализа 9—10, п.), легко установить следующие правила, позволяющие преобразовать сложные выражения, содержащие о малое, в более простые:

(а) $o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)$,

(б) $C\cdot o(x)=o(x)$ (если C — константа),

(в) $x\cdot o(x^n)=o(x^{n+1})$,

(г) $x^{n+1}=o(x^n)$, и т. п.

(Например, чтобы установить (а), нужно показать, что сумма двух функций, каждая из которых стремится к нулю, сама стремится к нулю; а это сразу следует из правила о сумме пределов.)

Выведем несколько приближенных формул

Воспользуемся символами $o(x)$, $o(x^2)$, ... и их свойствами для вывода некоторых формул, полезных при приближенных вычислениях.

Пример 1. *Докажем формулу:*

$$\boxed{(1+x)^3=1+3x+o(x).}\qquad (1)$$

(Член $o(x)$ подсказывает нам, что этой формулой можно пользоваться, если квадратом x можно пренебречь в наших вычислениях.)

Доказательство. По формуле куба суммы

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

но $x^2=o(x)$ (правило (г)); $3x^2=o(x)$ (правило (б)); $x^3=o(x)$ (правила (г), (в)). Поэтому

$$(1+x)^3=1+3x+o(x)+o(x)=$$
$$=1+3x+o(x).$$

Таким образом, мы можем написать с точностью до 0,01:

$$(1{,}012)^3\approx 1+3\cdot 0{,}012=1{,}036.$$

Пример 2. *Докажем формулу:*

$$\boxed{\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+o(q^n).}\qquad (2)$$

Доказательство немедленно следует из легко проверяемого тождества

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Воспользуемся формулой (2) для приближенного вычисления дроби $r=201/203$. Представляя эту дробь в виде

$$r=\frac{1+\frac{1}{200}}{1+\frac{3}{200}},$$

рассмотрим функцию

$$h(x)=\frac{1+x}{1+3x};\quad h\left(\frac{1}{200}\right)=h(0{,}005)=r.$$

Возьмем в (2) $n=2$, $q=-3x$; тогда

$$\frac{1}{1+3x}=1-3x+9x^2+o(x^2),$$

$$h(x)=(1+x)\frac{1}{1+3x}=$$
$$=1-2x+6x^2+o(x^2).$$

Таким образом, $r=h(0{,}005)\approx 1-0{,}01+0{,}000150=0{,}990150$.

Упражнения

1. Написать и установить формулу для $(1+x)^7$ с точностью $o(x^2)$.

2. Написать и установить формулу для $1/(1+q)$ с точностью $o(q^n)$.

Приближенное вычисление радикалов

При приближенном вычислении радикалов мы будем различать «хороший» случай и «плохой». В «хорошем» случае под знаком квадратного корня стоит число, мало отличающееся от полного квадрата,— вычисляемое число λ имеет вид $\sqrt{a^2+\alpha}$, где α мало по сравнению с a^2. Для иллюстрации этого случая рассмотрим следующий пример.

Пример 3. *Найдем приближенное значение корня* $\lambda=\sqrt{99}$.

Представим λ в виде

$$\lambda=\sqrt{100-1}=10\sqrt{1-0{,}01}$$

и рассмотрим функцию $r(x)=\sqrt{1+x}$, так что $\lambda=10r(-0{,}01)$. Допустим, что при малых x существует приближенная формула

$$r(x)=a+bx+cx^2+o(x^2). \qquad (3)$$

Найдем a, b и c. Прежде всего, устремляя x к нулю, получаем: $a=1$. Теперь возведем обе части равенства (3) в квадрат:

$$1+x=a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+o(x^2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим $a^2=1$; $2ab=1$; $b^2+2ac=0$. Учитывая, что $a=1$, находим: $b=1/2$; $c=-1/8$. Итак,

$$\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).} \qquad (4)$$

Таким образом,

$$\lambda=10r(-0{,}01)\approx 10(1-0{,}005-0{,}0000125)=10(0{,}9949875)=$$
$$=9{,}949875.$$

Покажем теперь, как нужно действовать в «плохом» случае. В качестве иллюстрации разберем

Пример 4. *Найдем приближенное значение корня* $\mu=\sqrt{2}$.

Ясно, что найденная нами формула (4), дающая $\sqrt{2}$ при $x=1$, для вычисления корня совершенно не подходит, поскольку x не является малым, и мы не можем рассчитывать, что слагаемые в правой части (4) быстро убывают. Чтобы свести дело к «хорошему» случаю, подберем два полных квадрата, отношение которых близко к 2. Такими квадратами являются, например, 25 и 49. Тогда

$$\mu=\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\nu.$$

Вычисление ν — это уже «хороший» случай, так как под знаком радикала стоит число близкое к 1 (полное квадрату). Запишем ν в виде:

$$\nu=(1-0{,}02)^{-\frac{1}{2}}$$

и рассмотрим функцию $S(x)=1/\sqrt{1+x}$. Тогда $\nu=S(-0{,}02)$. Допустим снова, что имеет место формула вида

$$S(x)=a+bx+cx^2+o(x^2).$$

Устремляя x к нулю, получаем $a=1$. Возводим обе части в квадрат и умножаем на знаменатель,

$$1=(1+x)(a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+o(x^2)),$$
$$1=a^2+(a^2+2ab)x+(b^2+2ab+2ac)\times x^2+o(x^2).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим

$$a^2=1,\ a^2+2ab=0,\ b^2+2ab+2ac=0.$$

Учитывая, что $a=1$, находим: $b=-1/2$; $c=3/8$. Итак,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2).} \qquad (5)$$

Таким образом,

$$\mu=\sqrt{2}=(7/5)S(-0{,}02)\approx$$
$$\approx 1{,}4(1+0{,}01+0{,}00015)=1{,}41421.$$

Формула Тейлора для многочленов

Пусть дан многочлен степени n:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n-$$

Тогда имеет место следующая замечательная формула:

$$\boxed{p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{1}{2!}p''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(0)x^n,} \qquad (6)$$

в которой $p^{(n)}$ обозначает n-ую производную функции p, а символ $n!$ (читается «эн факториал») расшифровывается так: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Например, при $n=2$, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, поэтому $p'(x)=2a_2x+a_1$, $p''(x)=2a_2$, значит, $p'(0)=a_1$, $p''(0)=2a_2$ и поэтому, действительно,

$$p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{1}{2}p''(0)x^2=a_0+a_1x+a_2x^2.$$

В общем случае формула (6) проверяется непосредственно. Советую читателю не полениться и проделать эту проверку, начав «для разминки» со случая $n=3$.

Формула Тейлора для функций

Пользуясь правилами (б), и (г), формулу (6) можно переписать в виде

$$p(x)=p(0)+p'(0)x+\frac{p''(0)x^2}{2}+\ldots+\frac{p^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+o(x^{n-1}).$$

Эта формула полезна для приближенных вычислений в том случае, когда x^n пренебрежимо мало. Однако она нас интересует здесь по другой причине: оказывается, эта формула верна не только для многочленов $p(x)$, но и для произвольных функций $f(x)$ (лишь бы они имели производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$ до порядка $n+1$ включительно). Соотношение

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)}\qquad(7)$$

называется *формулой Тейлора (или Маклорена)* по имени двух английских математиков XVII—XVIII веков, хотя по существу была известна еще и Ньютону. Мы не будем доказывать эту формулу в общем виде, а получим такие разложения более простыми средствами, как мы уже это делали ранее.

Формула Тейлора для дробно-рациональных функций (метод неопределенных коэффициентов)

Дробно-рациональной называют всякую функцию, которая представляется в виде отношения двух многочленов. Разберем на конкретном примере, как получить разложение Тейлора для таких функций.

Пример 5. Разложим по формуле Тейлора до $o(x^3)$ функцию

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

Первый способ. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$. Введем новую переменную $t=x+x^2$. По формуле (2), где $q=-t$, можем написать

$$g(x)=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+o(t^3)=$$
$$=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o(x^3)=1-x+x^3+o(x^3).$$

Итак,

$$f(x)=(1+x)(1-x+x^3+o(x^3))=1-x^2+x^3+o(x^3).$$

Второй способ (метод неопределенных коэффициентов). Пусть

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}=a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3).$$

Умножим обе части на знаменатель:

$$1+x=(1+x+x^2)(a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)),$$
$$1+x=a+(a+b)x+(a+b+c)x^2+(b+c+d)x^3+o(x^3).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим $a=1$, $a+b=1$; $a+b+c=0$; $b+c+d=0$. Таким образом, $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=1$, и мы приходим к прежнему результату.

Формула Тейлора для тригонометрических функций

Наша цель — доказать следующие формулы, не пользуясь общей формулой Тейлора (7).

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),}\qquad(8)$$

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4).}\qquad(9)$$

Эти разложения будут получены в несколько шагов.

Первый шаг (нахождение старших членов разложений). Из школьного учебника известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Пусть $o(1)$ обозначает функцию от x, стремящуюся к нулю при $x\to 0$. Теперь эту формулу можно записать в виде

$$\frac{\sin x}{x}=1+o(1).$$

Умножая на x, получим

$$\sin x=x+o(x).$$

Найдем теперь предел

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Так как $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$, получаем

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}+o\,(1).$$

Теперь мы можем написать

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1).$$

Откуда находим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Второй шаг (использование четности и нечетности). Докажем, что в разложении нечетной функции коэффициенты при четных степенях x равны нулю. Пусть $f(x)$ — нечетная функция. Тогда

$$f\,(x)=\frac{f\,(x)-f\,(-x)}{2}=\frac{1}{2}\,[(a_0+a_1x+$$
$$+a_2x^2+\ldots)-(a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots)]=$$
$$=a_1x+a_3x^3+\ldots$$

Аналогично можно доказать, что в разложении четной функции коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю.

Третий шаг (использование тождества и метода неопределенных коэффициентов). Итак, мы можем написать

$$\sin x=x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5).$$

Для нахождения a_3 и a_5 воспользуемся тождеством

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

Подставляя разложения, получаем

$$3x+a_3(3x)^3+a_5(3x)^5+o(x^5)=$$
$$=3(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))-$$
$$-4)(x+a_3x^3+o(x^3))^3,$$
$$3x+27a_3x^3+243a_5x^5+o(x^5)=$$
$$=3x+(3a_3-4)x^3+(3a_5-12a_3)\times$$
$$\times x^5+o(x^5).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим

$$27a_3=3a_3-4, 243a_5=3a_5-12a_3.$$

Тогда

$$a_3=-\frac{1}{6}=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{3!},$$

$$a_5=\frac{1}{120}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{5!}.$$

Аналогично для $\cos x$ напишем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+a_4x^4+o(x^4)$$
$$\cos 2x=2\cos^2 x-1.$$

$$1-\frac{1}{2}(2x)^2+a_4(2x)^4+o(x^4)=$$
$$=2\Big[1-x^2+\Big(2a_4+\frac{1}{4}\Big)x^4+o(x^4)\Big]-1,$$
$$1-2x^2+16a_4x^4+o(x^4)=$$
$$=1-2x^2+\Big(4a_4+\frac{1}{2}\Big)x^4+o(x^4).$$

Откуда

$$a_4=\frac{1}{24}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{4!}.$$

Формулы (8) и (9) доказаны.

Упражнения

3. Вычислите $\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}$, пользуясь представлениями $\sqrt{3}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{25}}=\frac{5}{3}(1+0{,}08)^{1/2}$, $\sqrt{7}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{8}{3}\Big(1-\frac{1}{64}\Big)^{1/2}$ и разложением (7).

4. Улучшите найденное значение $\sqrt{2}$, продолжив формулу (4) до $o(x^4)$.

5. Получите разложение (9) для функции $\cos x$, исходя из тождества $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ и формулы (8).

6. Методом неопределенных коэффициентов найдите разложение функции $y=\operatorname{tg} x$ до $o(x^5)$.

7. Пользуясь тождеством $e^{2x}=(e^x)^2$ и неопределенными коэффициентами, улучшите формулу $e^x=1+x+o(x)$, доведя разложение до $o(x^5)$.

8. Комбинируя разложения (4) и (9), получите формулу

$$\sqrt{\cos x}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^5).$$

О функциях распределения

(или Как поливать огород при помощи ветра)

Доктор технических наук
А. Л. СТАСЕНКО

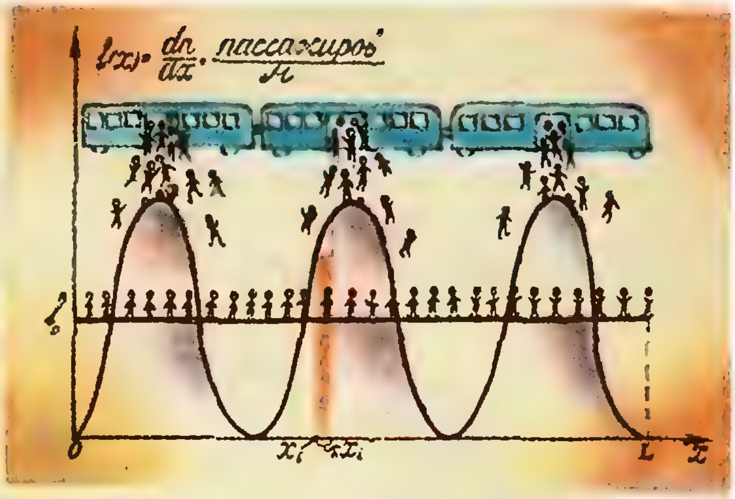


Рис. 1.

> *«На платформе, в ожидании поезда, пассажиры должны размещаться равномерно по длине поезда...»*
> (Из «Правил пользования Московским метрополитеном им. В. И. Ленина»)

Фраза из эпиграфа, «житейский» смысл которой вполне ясен, приводит на память широко распространенное в физике понятие функции распределения. С функциями распределения мы сталкиваемся при решении теоретических и практических задач, в которых рассматриваются системы с большим числом частиц. Чтобы провести аналогию между требованием «Правил» и понятием функции распределения, «переведем» эпиграф на язык математики.

Разобьем платформу (точнее, ту ее часть, возле которой останавливается поезд) последовательно на участки длины Δx, Δx_2, ..., Δx_k, ..., Δx_m. Обозначим числа пассажиров, стоящих в ожидании поезда на каждом из участков, через Δn_1, Δn_2, ..., Δn_k, ..., Δn_m. Тогда «Правила» требуют, чтобы отношение Δn_i к Δx_i было одним и тем же для любого $i=1, 2, ..., k, ..., m$, то есть

$$\frac{\Delta n_i}{\Delta x_i}=f_0=\text{const}. \qquad (1)$$

Мы обозначили это отношение буквой f, чтобы подчеркнуть, что вообще-то это может быть и какая-то функция от x; но в данном случае, при хорошем поведении граждан на платформе, эта функция должна быть постоянной (f_0). На рисунке 1 приведен ее график — прямая линия.

Но вот подошел поезд, и еще до того, как откроются двери вагонов, около них собираются «сгустки» граждан. Тогда их распределение вдоль платформы уже не равномерное, и его можно качественно представить в виде кривой $f(x)$, как на рисунке 1. Если число граждан за время ожидания поезда не изменилось, этот факт должен как-то отразиться на этих двух графиках. Действительно, во время ожидания на каждом участке Δx_i платформы, согласно (1), число граждан было равно

$$\Delta n_i=f_0\cdot\Delta x_i;$$

значит, чтобы найти полное число пассажиров на всей платформе, нужно сложить их количества на каждом участке. Получим

$$N=\sum_{i=1}^{m}\Delta n_i=\sum_{i=1}^{m}f_0\cdot\Delta x_i=$$
$$=f_0\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i=f_0\cdot L, \qquad (2)$$

где L — длина платформы. Как видно из рисунка 1, $f_0 L$ есть площадь прямоугольника высоты f_0 и длины L. И это есть полное число пассажиров N. Когда после подхода поезда их распределение по платформе изменилось и стало некоторой функцией $f(x)$, сумма всех величин $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ — это тоже площадь под кривой $f(x)$ и по-прежнему это полное число граждан N:

$$\sum_i f(x_i)\cdot\Delta x_i=N. \qquad (3)$$

Просто раньше $f(x)$ была постоянной f_0, и в формуле (2) мы ее вынесли за знак суммы, а теперь этого сделать нельзя — на каждом участочке Δx_i

свое число граждан (они перераспределились).

«Ба! — воскликнет математик (он просто обязан так воскликнуть), — да ведь то́, что написано в (1), в пределе, когда отрезки Δx_i становятся все меньше и меньше, переходит в то, что называется производной от n по x:

$$f(x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta n_i}{\Delta x_i} = \frac{dn}{dx},$$

а то, что написано в (3), — в интеграл от $f(x)$ по всей длине L платформы:

$$N = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^L f(x)dx.»$$

И, воскликнув так, он будет совершенно прав.

Итак, распределение граждан по платформе в ожидании поезда можно описать функцией $f(x) = \frac{dn}{dx}$, которую естественно так и назвать: функция распределения пассажиров по длине платформы.

Теперь, возможно, воскликнет читатель: «Да ведь этак можно самую обыкновенную скорость материальной точки, то есть производную от перемещения по времени —

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t},$$

— назвать распределением смещений точки во времени; ускорение —

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

— распределением скоростей во времени; а обыкновенную плотность вещества, то есть производную от массы по объему —

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

— распределением массы по объему!?» Все это так, и все же слово «распределение» несет в физике и в быту свою смысловую нагрузку. Говорят, например, о распределении молекул газа по модулю скорости $\left(\frac{dn}{dv}\ \frac{\text{молекул}}{\text{м/с}}\right)$; о распределении продуктов среди населения $\left(\frac{dm}{dn}\ \frac{\text{кг}}{\text{человек}}\right)$, а не о «производной от массы продуктов по числу граждан»; о распределении школьников по возрасту $\left(\frac{dn}{dt}\ \frac{\text{школьников}}{\text{лет}}\right)$. Наверное, где-то в 10 классе это, последнее, распределение имеет вид, изображенный на рисунке 2: максимум функции $f(t)$ соответствует (приблизительно) 17 годам; маловероятно встретить в 10 классе кого-либо (даже очень способного) из детского сада или в пенсионном возрасте — поэтому функция распределения довольно быстро стремится к нулю по обе стороны от максимального значения.

Очень интересна (особенно, наверное, для десятиклассников) функция распределения абитуриентов по числу задач, решенных ими на вступительных экзаменах. Как правило, эта функция графически может быть представлена либо кривой I, либо кривой II на рисунке 3. Если это кривая I, то ее минимум в точке A легко позволяет установить «цену» удовлетворительной оценки — все, кто слева от точки A, не проходят. Если же это кривая II, то экзаменаторам приходится думать, какое число решенных задач считать достаточным для удовлетворительной оценки.

Важность функций распределения в физике подчеркивает и тот факт,

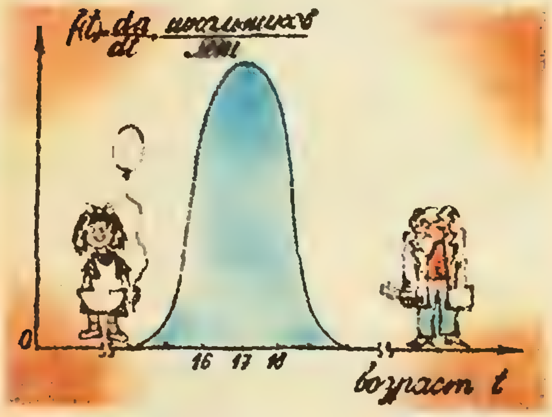


Рис. 2.

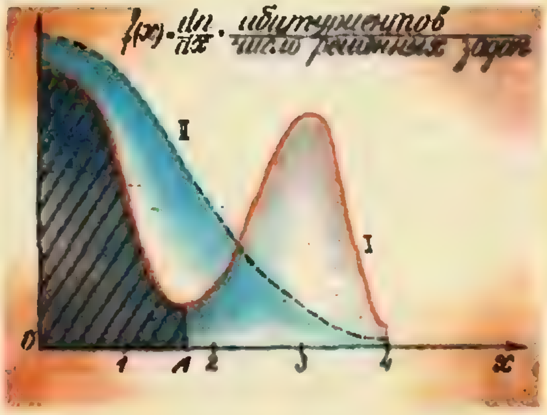


Рис. 3.

что многие из них связаны с именами замечательных ученых: есть, например, распределения Больцмана и Максвелла (молекул газа по скоростям), распределение Планка (квантов излучения по их частотам), распределение Ферми (электронов по энергиям).

Теперь, научившись понимать смысл функции распределения, решим одну полезную задачу. Предположим, нам нужно равномерно полить водой горизонтальный участок земли, скажем, большой огород или поле. Конечно, это можно сделать с помощью ведер или леек, так сказать, «пешком»; можно ездить между грядками на тракторе, оснащенном специальным агрегатом — поперечной трубой с отверстиями и форсунками, в которую подается вода (так устроены «фрегаты», которые часто можно видеть в полях). Но мы попробуем использовать ветер, который почти всегда дует в больших открытых пространствах.

Расположим горизонтальную трубу, снабженную форсунками, на высоте h над землей. По этой трубе под давлением подается вода, которая «распыляется» на капли, летящие во всех направлениях. Радиусы капель могут быть различными, причем, мы можем управлять набором капель, то есть функцией их распределения по собственным радиусам $\left(f(r)=\frac{dn}{dr}\right)$. Наша задача: найти, какой должна быть функция $f(r)$, чтобы орошаемая площадь поливалась равномерно (то есть на любые участки одинаковых площадей попадали одинаковые массы воды).

Прежде всего нам надо разобраться, как будут двигаться вылетающие из трубы капли. Конечно, все они имеют какую-то начальную скорость; но если капли достаточно мелкие, они быстро затормозятся в воздухе и, в отсутствие ветра, осядут почти под самой трубой на узкую полоску земли, параллельную трубе. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим каплю радиуса r, выброшенную из трубы вертикально вниз. Движение капли в дальнейшем происходит под действием силы тяжести mg и силы сопротивления f_c со стороны воздуха. Сила сопротивления f_c зависит от скорости капли и от ее радиуса — она тем больше, чем больше v и чем больше r, в частности, для мелких капель $f_c=bvr$, где b — некоторый коэффициент пропорциональности. (Эту силу называют силой Стокса — по имени английского физика и математика XIX века Дж. Стокса, исследовавшего движение тел в вязкой среде. Такая зависимость $f_c(v, r)$ верна как раз для очень мелких капель, для которых воздух является такой же вязкой средой, как, скажем, мед — для оседающей в нем дробинки.)

Запишем уравнение движения нашей капли:

$$ma=mg-bvr, \text{ или } a=g-\frac{b}{m}vr,$$

где a — ускорение капли. Подставив в выражение для a массу капли $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$, получим:

$$a=g-\frac{3b}{4\pi\rho}v\frac{1}{r^2}.$$

Видно, что модуль ускорения, сообщаемого капле силой сопротивления $\left(\text{величина } \frac{3b}{4\pi\rho}|v|\frac{1}{r^2}\right)$, тем больше, чем меньше размер капли; значит, мелкие капли быстро затормозятся в воздухе и будут падать с постоянной скоростью $v_п$, которую легко определить из условия $a=0$ (или $f_c=mg$):

$$a=0 \Rightarrow v=\frac{4}{3}\pi\rho g\frac{1}{b}r^2=\alpha r^2 \left(\alpha=\frac{4}{3}\pi\rho g\frac{1}{b}\right).$$

Теперь вспомним про ветер и вернемся к нашему огороду.

Пусть ветер дует в направлении, перпендикулярном трубе, с постоянной скоростью u. Можно показать, что и в этом случае, какова бы ни была начальная скорость выбрасываемых мелких капель, все они быстро вовлекутся в горизонтальное перемещение с постоянной скоростью, равной скорости ветра. Так что движение каждой капли мы будем рассматривать как сумму движений в горизонтальном направлении с постоянной скоростью u и в вертикальном направлении с постоянной скоростью $v=\alpha r^2$. Поскольку оба движения капли — падение и перенос ветром — равномерные, все капли будут двигаться по прямым (рисунок 4).

Время движения до земли тем больше, чем меньше радиус капли: $t(r)=\frac{h}{v(r)}=\frac{h}{\alpha r^2}$, так что мелкие капли (радиуса r_1) упадут на землю дальше от источника, чем более крупные (радиуса $r_2>r_1$):

$$x(r)=u\cdot t(r)=u\frac{h}{\alpha r^2}. \tag{4}$$

На какой участок Δx упадут все капли, радиусы которых отличаются от данного r на малую величину Δr? Поскольку, как видно из (4), $\frac{\Delta x}{\Delta r}=-\left(u\frac{2h}{\alpha}\right)\frac{1}{r^3}$ (мы продифференцировали функцию $x(r)$).

$$\Delta x=-\left(u\frac{2h}{\alpha}\right)\frac{1}{r^3}\cdot\Delta r$$

(знак «минус» говорит об уже известном нам факте: если радиус капли больше r ($\Delta r>0$), она упадет ближе к источнику ($\Delta x<0$), и наоборот).

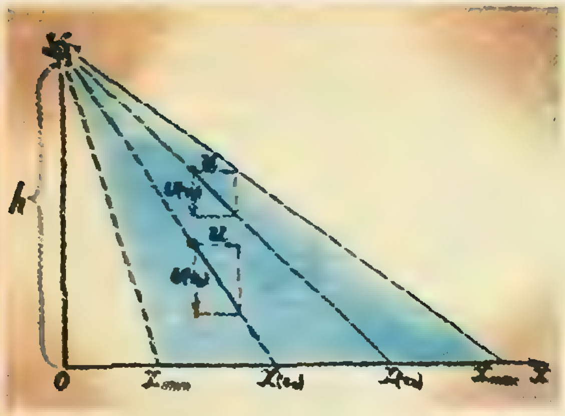


Рис. 4.

Теперь посмотрим, какая масса воды попадет на участок Δx. Пусть число капель, радиусы которых лежат в интервале от r до $r+\Delta r$, равно $\Delta n(r)$. Величину Δr мы выберем столь малой, что массы капель можно считать одинаковыми и равными $m(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\varrho$. Тогда масса воды, которую принесут эти капли на землю, равна

$$\Delta M=m(r)\cdot\Delta n(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\varrho\cdot\Delta n(r).$$

Наконец, сформулируем требование равномерности полива:

$$\frac{\Delta M}{\Delta x}=-\frac{4\pi r^3\varrho u r^3}{6uh}\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=$$

$$=-\frac{2\pi\varrho u}{3uh}r^6\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=C, \qquad (5)$$

где C — константа. Но ведь $\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}$ в пределе ($\Delta r\to 0$) и есть искомая нами функция распределения капель по их радиусам!

Итак, $f(r)=\lim\limits_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta n(r)}{\Delta r}=K\frac{1}{r^6}$, то есть

$$f(r)\sim r^{-6}. \qquad (6)$$

Это очень крутая зависимость. Допустим, мы выбрали два одинаковых интервала радиуса капли Δr вблизи двух различных значений, соответствующих мелким (r_1) и крупным (r_2) каплям. Пусть их радиусы отличаются в два раза: $r_2=2r_1$. Тогда из (6) следует вывод: внутри этого интервала Δr число мелких капель $\Delta n(r_1)$ должно быть в $(r_2/r_1)^6=2^6=64$ раза больше, чем число крупных ($\Delta n(r_2)$).

Теперь, зная длину поливаемого участка $L=x_{max}-x_{min}$ (см. рисунок 4), можно найти с помощью формулы (4) наименьший и наибольший радиусы капель r_{min} и r_{max}, их полное число (формула (2)) и полную массу воды, «выдаваемой» в единицу времени источником (в частности, в постоянную C в формуле (5) вошла и ширина участка — ведь ясно, что полная масса воды должна быть пропорциональна ширине поливаемого участка, но чтобы избавиться от этой тривиальной мысли, можно считать, что мы провели рассуждения в расчете на единицу его ширины, или на единицу длины трубы). Все эти практические расчеты можно сделать, потому что мы нашли характер функции распределения капель по размерам. И не обязательно капель воды для полива: это может быть раствор ядохимикатов для борьбы с вредными насекомыми или сорными травами, или взвесь мелких семян, или капли краски для покрытия больших площадей, или...

Итак, мы нашли ту функцию распределения капель по их размерам, которую должен стараться «обеспечить» конструктор при помощи набора форсунок.

А что мы не учли в своем решении? Многое: ну, например, что ветер дует не всегда равномерно, а порывами; и даже если равномерно, то его скорость по высоте над землей тоже как-то меняется; что капли, особенно мелкие (они долгое время находятся в «полете»), могут испаряться, и т. д. Всякая физическая модель имеет свои рамки, внутри которых она справедлива, а за которыми она требует уточнений, усложнений, а может быть, и совсем «не работает».

Советуем купить

В 1985 году в научно-популярной серии для школьников «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» будут изданы следующие книги:

Вып. 37. Г. С. Воронов. Штурм термоядерной крепости.

Вып. 39. В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. Удивительная гравитация.

Вып. 40. С. С. Хилькевич. Физика вокруг нас.

Вып. 41. Г. А. Звенигородский. Первые уроки программирования.

(Окончание см. на с. 53)

Пульсирующее Солнце

«Солнечный круг, небо вокруг», — каждый знает, что такое Солнце, и может изобразить его. А как устроено Солнце?

«Я сделал шар из ваты, пропитал спиртом и зажег. Недурно горело, а?» — так смоделировал Солнце «великий и ужасный» волшебник Гудвин из книги А. Волкова «Волшебник Изумрудного города». Идея неплохая, но такое солнце, конечно же, потухло бы через несколько минут.

Сегодня физики знают, что в реальном Солнце «горит» термоядерное горючее. Ядра водорода (протоны) объединяются с нейтронами, образуя ядра гелия, при этом выделяется колоссальная энергия. Но это — общий принцип, а многие детали процесса до сих пор установить не удается. Более того, в науке о нашем светиле есть немало противоречий.

Известно, например, что в термоядерных реакциях рождаются нейтрино — самые легкие и неуловимые частички из обширного семейства элементарных частиц. Несмотря на фантастическую неуловимость нейтрино, физики научились их регистрировать, а научившись, решили выяснить, сколько же их летит от Солнца. Оказалось, что зарегистрированный поток нейтрино от Солнца в три раза меньше, чем должен был быть, если рассчитывать его по гипотезе термоядерных реакций. В чем же дело? Есть и другие вопросы. Один из них связан с изменением светового потока, посылаемого Солнцем на Землю; физики считают, что за время существования нашей планеты мощность излучения Солнца должна была бы увеличиться по крайней мере на 20—30 процентов, а геологи и палеоклиматологи (специалисты по климату прошлых эпох) считают, что этого не было.

Все сходились в одном: необходимо пристальное внимание к Солнцу и его тщательнейшее изучение.

Стали присматриваться повнимательнее и, как это часто бывает в науке, вместо ответов на поставленные вопросы обнаружили новые неожиданные противоречия. Началось все с того, что американские физики Р. Дикке и Г. Гольденберг решили проверить, действительно ли Солнце — шар. Из результатов их измерений следовало, что Солнце сплюснуто. Эта «находка» совсем уж не вписывалась ни в какие теории, и ее стали перепроверять в разных странах.

Тщательные исследования в этом направлении были начаты примерно десять лет назад в Крымской астрофизической обсерватории АН СССР. Советские астрофизики под руководством академика А. Б. Северного обнаружили удивительное и неизвестное ранее явление — колебания диаметра Солнца. Оказывается, Солнце периодически расширяется и сжимается, то есть пульсирует. Частота «солнечного пульса» — один раз в 160 минут, а амплитуда пульсаций составляет тысячные доли процента.

Чтобы обнаружить столь незначительные пульсации Солнца, пришлось разработать специальную методику сверхточных измерений. Основана она на эффекте Доплера: если источник света приближается к наблюдателю, частота света увеличивается (длина волны уменьшается), а если удаляется — частота уменьшается (длина волны увеличивается). (Нечто подобное вы могли наблюдать на платформе пригородных поездов: гудок приближающейся электрички более высокого тона, чем гудок удаляющейся.) Направив спектрограф на солнечный диск, ученые обнаружили периодические смещения спектральных линий, причем смещения очень незначительные — на одну миллиардную долю длины световой волны.

В настоящее время пульсации Солнца регулярно наблюдаются во многих районах земного шара. Официальное открытие периодических пульсаций Солнца было зарегистрировано летом позапрошлого года.

Отчего же Солнце пульсирует? На этот вопрос ответить оказалось совсем непросто. Наиболее приемлемое объяснение предложили английские физики. Очевидно, что термоядерные реакции идут лучше всего в центральной части Солнца, где наивысшая температура, и там водород — «термоядерное горючее» — постепенно выгорает. Из-за разности концентраций водород начинает подтекать к центру из внешних слоев. Такой «подток» может привести к возникновению сферической волны от центра к поверхности Солнца. Правда, количественные расчеты, основанные на такой модели, дают период пульсаций 120 минут, но в качестве первого приближения это вполне удовлетворительно.

Вот так пристальное внимание к Солнцу не ответило на стоящие перед учеными вопросы, а привело к открытию целой новой области «солнцеведения» — гелиосейсмологии. Теперь, изучая пульсации поверхности Солнца, можно надеяться на новую информацию об устройстве его внутренних слоев.

А. В. Семенов

Диофантово уравнение А. А. Маркова

Член-корреспондент АН СССР М. Г. КРЕЙН

В этой статье рассказана история одного уравнения в целых числах и приводится его решение. Решение использует лишь простейшие свойства целых чисел и теорему Виета для квадратного трехчлена, и потому доступно восьмиклассникам. Оно основано на ряде задач «на доказательство», разбор которых мог бы составить предмет занятия математического кружка. (Подробные доказательства вы найдете в конце следующего номера журнала.)

В 1879 году в Петербургском университете молодой человек 23 лет защитил магистерскую диссертацию под названием «О бинарных квадратичных формах положительного определителя». В ней решались труднейшие вопросы теории чисел и она определила новое направление в этой теории. Ее автором был будущий знаменитый академик Андрей Андреевич Марков (1856—1922).

В основу диссертации были положены две его статьи, опубликованные в Германии в 1879 и 1880 годах в одном из наиболее известных в мире математических журналов — "Mathematische Annalen". Несмотря на это, прошло более 30 лет, прежде чем на западе «открыли» работы Маркова. В 1913 году крупный немецкий математик Георг Фробениус (1849—1917) опубликовал мемуар под названием «О числах Маркова». В предисловии к нему он написал, что вопреки тому, что исследования А. А. Маркова являются «чрезвычайно замечательными и важными», они, по-видимому, остались мало известными. Г. Фробениус объяснил это сложностью их изложения (А. А. Марков систематически пользовался непопулярным для того времени в этих вопросах аппаратом *непрерывных дробей*)*).

Разумеется, настоящая статья не ставит себе целью дать хоть какое-либо представление о глубоких исследованиях А. А. Маркова. Но дело в том, что в своих построениях А. А. Марков неожиданно пришел к вспомогательному диофантову уравнению (называемому теперь его именем), имеющему вид

$$x^2+y^2+z^2=3xyz. \qquad (1)$$

И вот — сенсация! А. А. Марков получил описание всех решений уравнения (1), пользуясь только средствами школьной математики (среди них существенную роль сыграла теорема Виета для квадратного трехчлена). Но прежде чем разобрать решение уравнения (1), стоит сказать несколько слов вообще

О диофантовых уравнениях

Как известно, *диофантовым уравнением* для целочисленных переменных x, y, ..., w называется уравнение, которое может быть приведено к виду

$$P(x,\ y,\ ...,\ w)=0,$$

где P — некоторый многочлен от указанных переменных с целыми коэффициентами.

Иногда к диофантовым уравнениям приводят сравнительно простые вопросы. Например, решая вопрос о том, каким способом сумму в n копеек можно разменять на монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек, мы придем к диофантову уравнению:

$$x+2y+3z+5w=n^{**}).$$

По-видимому, еще в Древнем Вавилоне родилась задача о построении прямоугольного треугольника с попарно соизмеримыми сторонами. Соизмеримость сторон означает, что найдется такой масштаб, в котором катеты и гипотенуза будут выражаться натуральными числами x, y и z, но тогда

---

*) О непрерывных (или цепных) дробях можно прочитать в «Кванте», 1983, № 5, с. 16 и № 6, с. 26.

**) О решении этого уравнения см. «Квант», 1984, № 5, с. 11.

$$x^2+y^2=z^2.$$

Таким образом, вавилонская задача сводится к задаче построения всех троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих предыдущему уравнению. Пифагорейцы нашли способ построения всех его решений. Но, возможно, этот способ был найден еще раньше в Вавилоне и Индии. Так или иначе, решения (x, y, z) уравнения $x^2+y^2=z^2$ принято называть *пифагоровыми тройками* *).

Задача об отыскании всех решений даже простого на вид диофантова уравнения, как правило, сложная. Известно, что нет единообразного способа (общего алгоритма) для выяснения даже того, имеет ли диофантово уравнение решения в целых числах, или нет **). Поиски решений конкретных диофантовых уравнений продолжаются и в наши дни; здесь с помощью сложного аппарата современной алгебраической геометрии в самые последние годы достигнуты значительные успехи ***). Однако интересующее нас уравнение Маркова (1) решается элементарно — вернемся к нему.

Родословное дерево уравнения Маркова

Упорядоченная тройка целых чисел (a, b, c) называется *решением* диофантова уравнения с переменными x, y, z, если это уравнение при $x=a$, $y=b$, $z=c$ превращается в верное числовое равенство. Числа a, b, c решения (a, b, c) будем называть *координатами* решения. Для уравнения Маркова (1) мы условимся рассматривать только те решения, у которых нет нулевых координат, иными словами, тройку $(0, 0, 0)$ мы будем исключать из решений (легко видеть, что если равна нулю одна из координат решения уравнения (1), то и остальные координаты решения равны нулю).

Левая часть (1) положительна для любого решения (a, b, c), поэтому либо все a, b, c положительны, либо два из них отрицательны. В последнем случае переход от (a, b, c) к $(|a|, |b|, |c|)$ приводит к решению уравнения (1) с положительными координатами. Обратно, если все координаты решения (a, b, c) положительны, то, изменив знак у каких-либо двух координат, мы снова получим решение. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности мы будем рассматривать только решения (a, b, c) с положительными координатами.

Из симметричности уравнения (1) следует, что если (a, b, c) — решение уравнения (1), то решениями будут:

$$(a, b, c), (c, a, b), (b, c, a),$$
$$(b, a, c), (a, c, b), (c, b, a),$$

то есть вместе с (a, b, c) решениями будут все тройки, получаемые различными перестановками координат данного решения.

Ввиду этого мы можем условиться все шесть решений уравнения Маркова, получающихся друг из друга перестановками, считать одним решением, то есть считать, что для решения существенны лишь значения координат, а не их порядок.

Уравнение Маркова имеет очевидное решение $(1, 1, 1)$. Сейчас мы выясним, как, зная какое-либо решение, можно находить другие решения. Если (a, b, c) — решение уравнения Маркова, то можно утверждать, что a есть корень квадратного уравнения

$$\Phi_a(x) = x^2+b^2+c^2-3bcx=0.$$

Но по теореме Виета это уравнение будет иметь еще один корень $x=a'$, такой, что

$$a+a'=3bc,\ aa'=b^2+c^2. \qquad (2)$$

Очевидно, $a'>0$ и (a', b, c) также является решением уравнения (1). Оно называется *соседним решением по координате* a. Очевидно, если (a', b, c) — соседнее решение для (a, b, c), то (a, b, c) является соседним по координате a' решением для (a', b, c).

Аналогично вводятся решения, соседние по координате b и по координате c.

Найдем решение, соседнее по координате 1 решению $(1, 1, 1)$. Для этого нужно решить квадратное уравнение

---

*) О пифагоровых тройках и о решении некоторых других диофантовых уравнений см.: А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах, 4-е изд. — М.: Наука, 1973. О. Оре. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980. — (Серия: Библиотечка «Квант»).

**) См. «Квант», 1970, № 7, с. 39.

***) См. «Квант», 1983, № 3, с. 19.

$$x^2+1^2+1^2-3\cdot 1\cdot 1\cdot x=0.$$

Кроме корня $x=1$, это уравнение имеет корень $x=2$. Таким образом, получено еще одно решение (2, 1, 1). В дальнейшем решения (1, 1, 1) и (2, 1, 1) будут играть существенную роль. Назовем их, следуя Маркову, *сингулярными*.

Сингулярные решения выделяются из множества всех решений следующим свойством.

Задача 1. Если у решения (a, b, c) уравнения Маркова две из координат равны, то в этом и только этом случае решение является сингулярным. Докажите это.

Первое сингулярное решение (1, 1, 1) имеет только одно соседнее решение. Второе сингулярное решение имеет два соседних: одно из них — (1, 1, 1), другое (соседнее по координате 1), получается из уравнения

$$2^2+y^2+1^2=3\cdot 2\cdot y\cdot 1$$

и имеет вид (2, 5, 1). В свою очередь, решение (2, 5, 1) имеет три соседних: одно, естественно (2, 1, 1) и два новых — (13, 5, 1) и (2, 5, 29). Вообще, каждое несингулярное решение (a, b, c) порождает три соседних

$$(a', b, c),\ (a, b', c),\ (a, b, c'),$$

где (сравните с (2))

$$a'=3bc-a,\quad b'=3ac-b,\quad c'=3ab-c.$$

Задача 2. Если решение (a, b, c) несингулярно, то одно из его соседних решений имеет ме́ньшую максимальную координату, а два других — бо́льшую. Докажите это.

Теорема Маркова. *Любое решение уравнения* (1) *соединяется цепочкой соседних решений с сингулярным решением* (1, 1, 1).

Доказательство. Пусть (a, b, c) — решение уравнения Маркова, отличное от сингулярного. Тогда у него есть соседнее решение (a_1, b_1, c_1) с меньшей максимальной координатой (задача 2). Если это решение также несингулярно, то оно порождает решение (a_2, b_2, c_2) с еще меньшей максимальной координатой, и так далее. Так как из натуральных чисел нельзя образовать бесконечную убывающую последовательность, то этот процесс должен закончиться, и закончится он тогда, когда мы придем к некоторому решению (a_n, b_n, c_n), у которого есть равные координаты, то есть (задача 1) к сингулярному. Если оно (1, 1, 1), то теорема доказана, если же это решение (2, 1, 1), то остается вспомнить, что соседним решением для (2, 1, 1) по координате 2 будет (1, 1, 1). Теорема доказана.

Из теоремы Маркова следует, что, отправляясь от сингулярного решения (1, 1, 1), и последовательно переходя к соседним решениям с большим максимумом координат, мы получим все решения уравнения Маркова. При этом получается такая таблица — *родословное дерево* (см. рисунок). Эта таблица позволяет для данного N ($\geqslant 1$) конечным числом действий найти все решения уравнения Маркова, координаты которых не превосходят N.

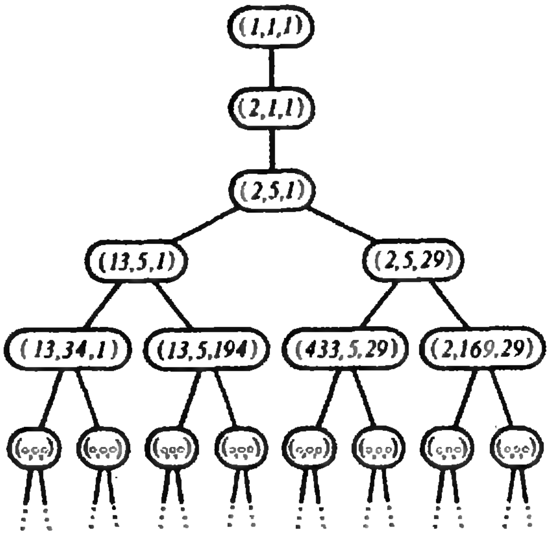
Задача 3. Докажите, что у каждого решения уравнения Маркова координаты попарно взаимно просты.

Исключительность уравнения Маркова

Поставим следующий вопрос, который, на первый взгляд, может показаться странным. *Если сумма квадратов трех натуральных чисел делится на их произведение, то каким может быть частное?*

Этот вопрос равносилен следующему: при каких натуральных k диофантово уравнение

$$X^2+Y^2+Z^2=kXYZ \tag{3}$$



имеет ненулевое решение? При $k=3$ это уравнение совпадает с уравнением Маркова. Легко видеть, что при $k=1$ уравнение (3) имеет решения, например (3, 3, 3). Проанализировав уравнение (3), Гурвиц и Фробениус пришли к разительному результату: уравнение (3) имеет решения только при $k=3$ и $k=1$. Этот результат также может быть получен элементарными средствами.

Начнем со случая $k=1$. При этом окажется, что отыскание решений уравнения (3) для $k=1$ сводится к отысканию решений уравнения Маркова.

Задача 4. Пусть A, B, C — натуральные числа. Тогда остаток от деления числа $A^2+B^2+C^2$ на 3 равен количеству неделящихся на 3 чисел среди A, B, C, если их меньше трех, и равен нулю в противном случае. Докажите это.

Задача 5. Все решения (A, B, C) уравнения

$$X^2+Y^2+Z^2=XYZ \qquad (4)$$

получаются по формулам

$$A=3a, \ B=3b, \ C=3c, \qquad (5)$$

где (a, b, c) — произвольное решение уравнения Маркова

$$x^2+y^2+z^2=3xyz. \qquad (6)$$

Докажите это.

Обратимся к случаю $k=2$.

Задача 6. Пусть A, B, C — натуральные числа. Тогда остаток от деления числа $A^2+B^2+C^2$ на 4 равен количеству нечетных чисел среди A, B, C. Докажите это.

Задача 7. Докажите, что уравнение (3) не имеет решений при $k=2$.

Теорема. *Уравнение* (3) *имеет ненулевое решение только при* $k=1$ *и* $k=3$.

Доказательство. При $k=1$ решения находятся в соответствии с задачей 5. При $k=2$ уравнение (3) не имеет решений в силу задачи 7. Остается рассмотреть случай $k>3$.

Допустим, что при некотором $k>3$ уравнение (3) имеет решение (a, b, c). Покажем, что координаты a, b, c этого решения попарно различны. Пусть, например, $b=c$; тогда $a^2=kab^2-2b^2=(ka-2)b^2$, так что $a=bd$, где d — целое. Отсюда $b^2d^2=(kbd-2)b^2$, $d^2=kbd-2$, $2=d(kb-d)$. Таким образом, 2 делится на d и, стало быть, $d=1$ или 2. В обоих случаях $kb=3$, что противоречит условию $k>3$.

Итак, у любого решения уравнения (3) при $k>3$ координаты попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что $a>b>c$. Для решения (a, b, c) с помощью квадратного трехчлена

$$\Psi_a(x)=x^2+b^2+c^2-kxbc$$

образуем соседнее по координате a решение (a', b, c). Так как

$$\Psi_a(b)=2b^2+c^2-kb^2c<3b^2-kb^2c\leqslant 3b^2-kb^2<0,$$

мы видим, что b лежит между корнями a и a' многочлена $\Psi_a(x)$, то есть $a>b>a'$. Поэтому у решения (a', b, c) максимальная координата меньше максимальной координаты решения (a, b, c). Итак, по каждому решению (a, b, c) можно построить решение (a_1, b_1, c_1) с меньшей максимальной координатой. Это построение можно повторить, получив решение (a_2, b_2, c_2) с еще меньшей максимальной координатой. Так как у каждого решения координаты попарно различны, этот процесс можно продолжать неограниченно и получить бесконечную последовательность решений уравнения (3) со все меньшими и меньшими максимальными координатами. Но это невозможно, так как координаты — натуральные числа. Теорема доказана.

Следствие. *Для любого решения* (a, b, c) *уравнения Маркова числа* a, b, c *попарно взаимно просты.*

Доказательство. Если, например, a и b имеют общий делитель d (>1), то в силу уравнения (1), число d будет делителем и числа c. Следовательно, найдутся натуральные X, Y, Z такие, что $a=dX$, $b=dY$, $c=dZ$, и в силу (1) будем иметь $X^2+Y^2+Z^2=3dXYZ$, а это противоречит только что доказанной теореме.

Непосредственным обобщением уравнения Маркова на случай n переменных $(n\geqslant 3)$ является уравнение

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=nx_1x_2\ldots x_n. \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что ряд изложенных предложений переносится на этот случай (существует сингулярное решение $x_1=1$, $x_2=1$, ..., $x_n=1$, для всякого решения существуют соседние решения и т. д.). Однако автору неизвестно, чтобы где-нибудь была изложена достаточно полная теория уравнения (7). Поиски такой теории могли бы стать основой небольшого самостоятельного исследования.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «О простых машинах» предназначена восьмиклассникам, «Диа- и парамагнетики» — девятиклассникам, «Опыты Резерфорда и явление радиоактивности» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

О простых машинах

Равновесие тел и работа сил. На первый взгляд кажется, что понятия «равновесие» и «работа» несовместимы друг с другом. Ведь сила совершает работу только тогда, когда она приложена к движущемуся телу; равновесие же, как будто, связано с отсутствием движения. Однако связь между равновесием тела и работой приложенных к нему сил существует. Поясним это на примере рычага.

Рычаг — одна из самых древних простых машин. Как известно, для равновесия рычага необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных к нему сил была равна нулю:

$$F_1d_1=F_2d_2,\ \text{или}\ \frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}. \qquad (1)$$

Здесь F_1 и F_2 — модули приложенных к рычагу сил, d_1 и d_2 — плечи этих сил (рис. 1).

Условие равновесия можно, однако, выразить и иначе. Будем считать, что точка опоры рычага O — это закрепленная ось (точнее — ее проекция на плоскость чертежа), около которой наш рычаг может поворачиваться. При повороте точки a и b приложения сил будут двигаться по дугам окружностей с центром в точке O.

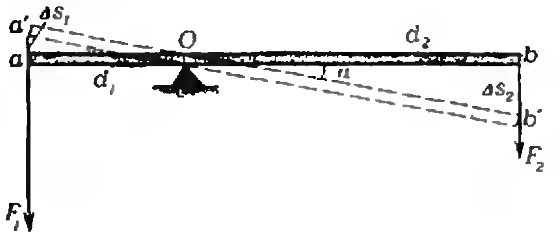


Рис. 1.

Представим себе, что рычаг повернулся на некоторый малый угол α. Тогда можно считать, что точки приложения сил совершили малые перемещения $\overrightarrow{\Delta s_1}$ и $\overrightarrow{\Delta s_2}$ соответственно.

Из подобия треугольников $aa'O$ и $bb'O$ следует, что $d_2/d_1=\Delta s_2/\Delta s_1$. Поэтому вместо равенства (1) можно написать

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1},\ \text{или}\ F_1\Delta s_1=F_2\Delta s_2. \qquad (2)$$

Величина $F_1\Delta s_1$ — это работа силы $\vec{F}_1$ на малом перемещении $\overrightarrow{\Delta s_1}$, причем знак этой работы отрицательный, так как вектор перемещения $\overrightarrow{\Delta s_1}$ направлен противоположно вектору $\vec{F}_1$. Точно так же $F_2\Delta s_2$ — это работа силы $\vec{F}_2$ на малом перемещении $\overrightarrow{\Delta s_2}$, но эта работа положительная. Отсюда следует, что *при равновесии рычага алгебраическая сумма работ приложенных к рычагу сил при малых перемещениях точек их приложения равна нулю.*

Реальные, и необязательно малые, движения концов рычага (точек приложения сил) происходят по дугам окружностей. Но их всегда можно мысленно разбить на малые участки, практически совпадающие с отрезками прямых. Умножив силу на проекцию каждого такого малого перемещения на направление силы, мы получим работу силы на этом перемещении. Общая работа будет равна сумме работ на всех участках:

$$F_1s_1=F_2s_2,\ \text{или}\ \frac{F_1}{F_2}=\frac{s_2}{s_1}. \qquad (3)$$

Таким образом, в основе действия рычага лежит следующее правило: *отношение приложенных сил равно*

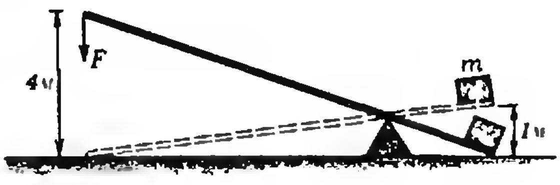


Рис. 2.

обратному отношению перемещений точек их приложения.

В нем, в этом правиле, оказывается, и заключен «секрет» действия рычага. Если, например, с помощью рычага поднимают груз (рис. 2), то положительная работа силы $\vec{F}$ (работа на «входе») равна отрицательной работе силы тяжести $m\vec{g}$ (работа на «выходе»). Но из рисунка 2 видно, что перемещение поднимаемого груза меньше перемещения того конца рычага, к которому приложена сила $\vec{F}$. Согласно формуле (3), модуль силы тяжести, приложенной к грузу, во столько же раз больше F. Отношение силы «на выходе» к силе «на входе» (по модулю) называют передаточным числом рычага (иногда его называют также механической выгодой рычага). Рычаг позволяет, как говорят, «выигрывать» в силе. Но за всякий выигрыш надо платить. И платой служит «проигрыш» в перемещении: перемещение «на входе» во столько же раз больше перемещения «на выходе», во сколько раз сила «на выходе» больше силы «на входе».

Это правило, применимое не только к рычагу, но и ко всем другим простым машинам, известно как «золотое правило механики».

Еще одна простая машина — наклонная плоскость. Формула (3) справедлива не только для рычага. Еще одним устройством, тоже называемым простой машиной, служит гладкая наклонная плоскость. Если, например, нужно поднять груз массой m на высоту h, то при равномерном движении по вертикали к грузу нужно было бы приложить силу, равную силе тяжести груза mg. Но если двигать этот груз равномерно по наклонной плоскости длиной l, то для этого достаточно силы, во столько раз меньшей mg, во сколько раз l больше h. Выигрыш в силе (передаточное число) равно, следовательно, отношению l/h. Но $l/h=1/\sin\varphi$, так что выигрыш в силе для наклонной плоскости равен $1/\sin\varphi$, где φ — угол наклона плоскости к горизонту.

Наклонная плоскость, как и рычаг, использовалась человеком с незапамятных времен. Издавна известны также и разновидности наклонной плоскости — клин и винт. Клин представляет собой сложенные вместе основаниями две наклонные плоскости, винт — наклонную плоскость, обернутую вокруг стержня. В качестве примера винтового устройства на рисунке 3 показан домкрат. Из рисунка 3 видно, что для подъема груза на высоту h (шаг винта) конец рукоятки, к которому приложена сила, должен пройти путь, равный $2\pi R$, где R — расстояние от оси винта до конца рукоятки. Ясно, что выигрыш в силе в этом случае равен отношению $2\pi R/h$. Сила «на входе», следовательно, в $2\pi R/h$ раз меньше силы «на выходе».

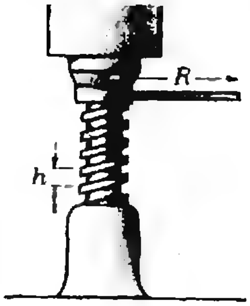


Рис. 3.

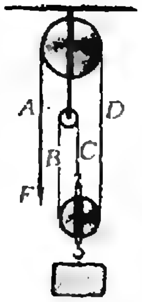


Рис. 4.

Разновидность рычага — блок. Еще один важный вид простых машин связан с блоком. Сам по себе неподвижный блок представляет собой разновидность рычага, но рычага равноплечного, никакого выигрыша в силе не дающего. Но различные системы подвижных и неподвижных блоков известны как устройства, позволяющие не хуже рычагов и наклонных плоскостей заменять большие силы на малые.

На рисунке 4 показана типичная система блоков — полиспаст. Сила F, приложенная к свободному концу каната A, передается через блоки канатам B, C и D. Каждый из них действует на груз тоже с силой F. Вместе они действуют с силой $3F$. Таким образом, сила «на выходе» втрое превосходит силу «на входе». Однако при подъеме груза, скажем на 1 метр, каждая веревка B, C и D укорачивается на 1 метр, поэтому свободный конец каната A нужно удлинить на 3 метра. Это — «плата» за выигрыш в силе.

* * *

Таким образом, основа всей «техники» простых машин — рычаги и наклонные плоскости. С древнейших времен они, их разновидности и комбинации облегчали труд человека (выигрыш в силе!). Несмотря на их почтенный возраст (тысячелетия!), они не утратили своего значения и в наши дни. Но теперь простые машины приводятся в движение не мускульной силой человека или животных, а настоящими машинами — двигателями (электрическими, тепловыми, гидравлическими и т. д.).

Диа- и парамагнетики

Как известно, индукция магнитного поля в веществе может усиливаться или ослабляться по сравнению с вакуумом. В первом случае вещество называют парамагнетиком, во втором — диамагнетиком.*) В чем же причина пара- и диамагнетизма?

Кратко природу парамагнетизма можно объяснить так. В атомах (или молекулах) электроны движутся по замкнутым траекториям (орбитам). Эти мельчайшие электрические токи, называемые молекулярными, создают магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля из-за теплового движения атомов плоскости орбит ориентированы беспорядочно, поэтому индукция собственного магнитного поля, создаваемого всеми атомами, в среднем равна нулю.

Когда же вещество помещают во внешнее магнитное поле, плоскости орбит электронов (подобно рамкам с током) частично поворачиваются, так, чтобы векторы индукции создаваемых ими полей складывались с вектором индукции внешнего поля. В результате суммарная магнитная индукция оказывается больше индукции внешнего поля.

Природа диамагнетизма более сложная. Чтобы ее понять, вспомним явление электромагнитной индукции («Физика 9», § 92, 93). При изменении магнитного потока через электрический контур в нем возникает индуцированный электрический ток. Согласно правилу Ленца, этот ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока. В контуре, не обладающем электрическим сопротивлением, например в сверхпроводящем контуре или в «контуре», образуемом электроном, движущимся в атоме по своей орбите, индуцированный ток не затухает. Он сохраняется до тех пор, пока существует внешнее магнитное поле. Магнитное поле индуцированного тока направлено противоположно внешнему полю, так что суммарная магнитная индукция в веществе уменьшается.

В каждом веществе проявляются оба эффекта. С одной стороны, внешнее магнитное поле ориентирует орбиты электронов и вследствие этого усиливается. С другой стороны, оно изменяет скорость движения электронов по орбитам и вследствие этого, в соответствии с законами электромагнитной индукции, ослабляется.

Уменьшение магнитного поля обычно очень мало́, и поэтому диамагнетизм заметно проявляется лишь в тех веществах, атомы которых собственного магнитного поля не создают (и в которых, следовательно, нет парамагнитного эффекта).

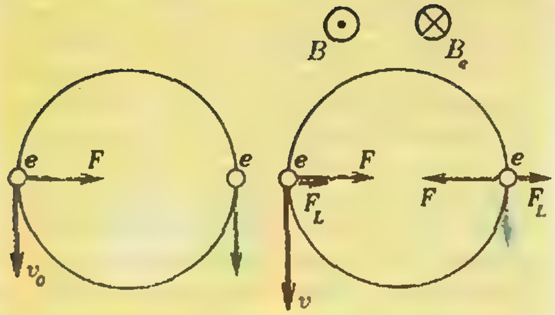
Простейший диамагнитный атом можно представить себе следующим образом: два электрона вращаются вокруг ядра по одной орбите, но в противоположных направлениях. В этом случае создаваемые электронами магнитные поля компенсируют друг друга, и поворот плоскости орбиты не приводит к усилению магнитного поля. А вот диамагнитный эффект проявляется в полной мере. Рассмотрим его подробнее.

Пусть каждый электрон в атоме в отсутствие внешнего манитного поля движется по круговой орбите радиусом R со скоростью v_0. При включении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, которое изменяет скорость движения электрона. Предположим, что теперь она равна v. Если считать, что вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости орбиты, то на электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, равная по модулю $F_L = evB$.

Запишем второй закон Ньютона для движения электрона по орбите до и после включения магнитного по-

---

*) Наряду с пара- и диамагнитными веществами существуют еще ферромагнетики. О них рассказывается в школьном учебнике («Физика 9», § 90).



ля (см. рисунок):

$$\frac{mv_0^2}{R}=F,\quad \frac{mv^2}{R}=F\pm evB,$$

где F — сила электрического притяжения элетрона к ядру. Вычитая эти уравнения одно из другого, получаем

$$v^2-v_0^2=\pm\frac{R}{m}evB,$$

причем выбор знака «+» или «—» определяется направлением скорости электрона.

В слабом магнитном поле изменение Δv модуля скорости электрона мало́, и его можно найти приближенно, считая $v^2-v_0^2=(v+v_0)(v-v_0)\approx\approx 2v\Delta v$. В результате имеем

$$\Delta v=\pm\frac{eBR}{2m}.$$

Как видно, один электрон в нашем двухэлектронном атоме в магнитном поле начинает вращаться чуть быстрее, другой — чуть медленнее, и так, что при этом происходит ослабление внешнего поля.

Величина $\omega_L=\Delta v/R=eB/(2m)$ имеет размерность частоты. Ее называют ларморовской частотой — по имени английского физика Дж. Лармора. Хотя мы рассмотрели лишь частный случай, можно доказать общую теорему (теорему Лармора): в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ движение электрона будет таким же, как и без поля, но с добавочным вращением вокруг вектора $\vec{B}$ с частотой ω_L.

Важно, что эта теорема и выражение для ω_L остаются справедливыми и при использовании для описания движения электрона законов квантовой механики.

Опыты Резерфорда и явление радиоактивности

Опыты Резерфорда, о которых рассказывается в § 93 «Физики 10», двояко связаны с явлением радиоактивности. С одной стороны, в этих опытах для бомбардировки атомов тяжелых элементов использовались положительно заряженные быстрые альфа-частицы, испускаемые радиоактивными веществами. Радиоактивность, таким образом, дала «инструмент» для опытов. С другой стороны, результаты опытов Резерфорда, приведшие к созданию планетарной модели атома, позволили подойти к объяснению самого явления радиоактивности, до того бывшего в высшей степени загадочным.

Из опытов Резерфорда выяснилось, что атом любого элемента состоит из положительно заряженного *ядра*, размеры которого в десятки или даже сотни тысяч раз меньше размеров атома, и отрицательно заряженных электронов, образующих *электронную оболочку*. При этом оказалось, что электрический заряд ядра, если его выразить через заряд электрона, принятый за единицу, равен порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. В символической записи ядер их заряд выражается порядковым номером, который записывается в виде нижнего индекса при символе элемента. Верхний же индекс обозначает массу ядра, выраженную в атомных единицах массы. Например, ядра атомов железа и золота символически записываются так:

$${}^{56}_{26}\mathrm{Fe};\quad {}^{197}_{79}\mathrm{Au}.$$

Радиоактивность — явление ядерное. В какой же части атома — ядре или электронной оболочке — происходят процессы, приводящие к испусканию радиоактивных излучений (альфа-, бета- и гамма-излучений)?

Нетрудно понять, что все дело в атомном ядре. Это видно, во-первых, из того, что один из видов излучения — альфа-излучение — это поток быстрых *положительно заряженных* частиц, а таких частиц в электронной оболочке просто нет. Правда, другой вид излучения — бета-излучение, состоящее из электронов,— в принципе мог бы исходить и из электронной оболочки. Однако, и это во-вторых, энергия бета-частиц столь велика (она достигает миллионов электронвольт), что электронная оболочка такую энергию сообщить явно не может. Известно, например, что при химических реакциях, в которых атомы участвуют своими электронными оболочками, энергия, приходящаяся на один атом, равна примерно 1 эВ. Энергия квантов видимого света, которые несомненно возникают в электронной оболочке, тоже около 1 эВ. Только энергия квантов рентгеновских лучей (они также испускаются электронной оболочкой) может достигать тысяч и даже десятков тысяч электронвольт. Миллионов же электронвольт электронная оболочка «своим» электронам сообщить не может.

Таким образом, и альфа- и бета-частицы могут испускаться только в результате каких-то процессов в атомном ядре. То же можно сказать и о гамма-излучении.

Радиоактивные превращения. Итак, радиоактивные излучения испускаются ядрами атомов радиоактивных элементов. Заряд же ядра равен порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Тогда из закона сохранения электрического заряда прямо следует, что когда какое-нибудь ядро испускает заряженную частицу, заряд ядра должен измениться. А это значит, что оно *превращается* в ядро атома другого элемента, занимающего другую клетку таблицы.

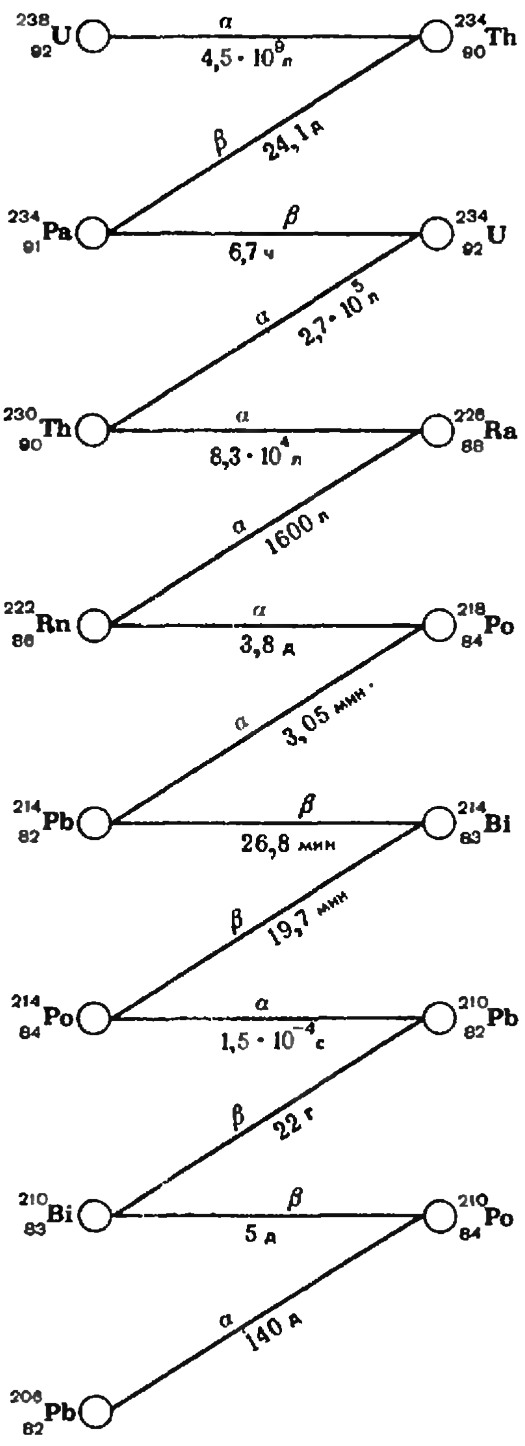
Как выяснилось, альфа-частица обладает положительным электрическим зарядом, вдвое бо́льшим заряда электрона, и массой, вчетверо большей атомной единицы массы. Поэтому ядро, испустившее альфа-частицу, превращается в ядро атома элемента, у которого порядковый номер на две единицы меньше исходного, а масса меньше на четыре единицы. Если, например, радиоактивный элемент полоний с порядковым номером 84 и относительной атомной массой 218 испускает альфа-частицу, то он превращается в ядро атома элемента, занимающего клетку номер 82 таблицы (это свинец) с относительной атомной массой 214:

$$^{218}_{84}\text{Po}\rightarrow{}^{214}_{82}\text{Pb}+\alpha.$$

Поскольку α-частица представляет собой ядро атома гелия, этот процесс можно записать иначе:

$$^{218}_{84}\text{Po}\rightarrow{}^{214}_{82}\text{Pb}+{}^{4}_{2}\text{He}.$$

Происходит, как говорят, *распад* ядра полония на две части,— ядро свинца и ядро гелия.



Несколько иначе обстоит дело при испускании ядром бета-частицы, то есть быстрого электрона. Оно приводит не к уменьшению заряда ядра, а к его увеличению на одну единицу и, следовательно, к превращению его в ядро атома, порядковый номер которого на единицу больше исходного. Что касается массы, то она при таком превращении практически не изменяется, так как масса электрона в тысячи раз меньше массы любого ядра. С испусканием бета-частицы распадается, например, радиоактивный свинец ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$:

$${}^{214}_{82}\mathrm{Pb} \to {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} + \beta, \text{ или } {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} \to {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} + {}^{0}_{-1}e.$$

Все такие превращения происходят так, что суммы нижних и верхних индексов по обе стороны стрелки, обозначающей превращение, равны друг другу.

Радиоактивные ряды. Если радиоактивное излучение сопровождается превращением ядер атомов в другие ядра, то естественно возникает вопрос — почему же до сих пор существуют радиоактивные вещества? Если, например, радий (порядковый номер 88), испускающий альфа-частицы, превращается в элемент с номером 86, то почему он не исчез с лица Земли? Наверное, потому, что он сам есть продукт распада какого-то другого элемента, превращающегося в радий.

Раз радиоактивные элементы до сих пор существуют на Земле, значит, есть, по крайней мере, один радиоактивный элемент, который распадается настолько медленно, что за время существования Земли он не успел исчезнуть. Он-то, этот элемент, и «виноват» в том, что существуют и он сам, и тот элемент, в который он превращается (так сказать, его «сын»), и тот элемент, в который превращается этот «сын», и т. д.

Физики выяснили, что такие очень медленно распадающиеся элементы действительно существуют. Один из них — уран с порядковым номером 92 и относительной атомной массой 238. Он служит родоначальником одного из рядов (семейств) радиоактивных элементов, приведенного на рисунке. Над линиями в этом ряду, обозначающими превращения, указаны испускаемые частицы, а под ними — периоды полураспада, то есть промежутки времени, в течение которых распадается половина первоначального числа радиоактивных ядер. В результате четырнадцати последовательных распадов уран превращается в конце концов в свинец с относительной атомной массой 206. Это — стабильный (не радиоактивный) свинец, в отличие от свинца с массами 214 и 210.

Изотопы. Приведенный здесь радиоактивный ряд показывает, что существуют атомы одного и того же химического элемента с различными относительными атомными массами. Так, ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$, ${}^{210}_{82}\mathrm{Pb}$, ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ — это ядра атомов свинца, поскольку у всех трех ядер один и тот же заряд и, значит, они занимают одну и ту же клетку в таблице Менделеева. Такие атомы — с одинаковым зарядом ядра, но с разными массами — получили название изотопов. Как химические элементы они не отличимы друг от друга. Но свойства их ядер, например радиоактивные, совершенно различны.

В рассмотренном радиоактивном ряду есть не только изотопы свинца, но и урана, тория, полония, висмута. Вообще, если ядро испытывает последовательно одно альфа-превращение и два бета-превращения, то в результате непременно появляется изотоп исходного элемента.

Математика 10

Откуда взять уравнение

В статье «Многофигурная стереометрическая задача» («Квант», 1983, № 2) мы видели, что при решении геометрических (в особенности, стереометрических) задач уравнения, связывающие отдельные элементы фигур, оказывают нам неоценимую услугу. Где же искать уравнения? На первый взгляд кажется, что сколько задач — столько вариантов уравнений, но это не совсем так. Нет, например, двух одинаковых грибов, но все грибы делятся на небольшое количество видов, и опытный грибник не будет обшаривать каждый квадратный сантиметр леса: он знает, как выглядит то место, где можно ожидать тот или иной вид грибов, и будет осматривать только подходящие места, экономя тем свое время. Аналогично можно утверждать, что 99 % уравнений

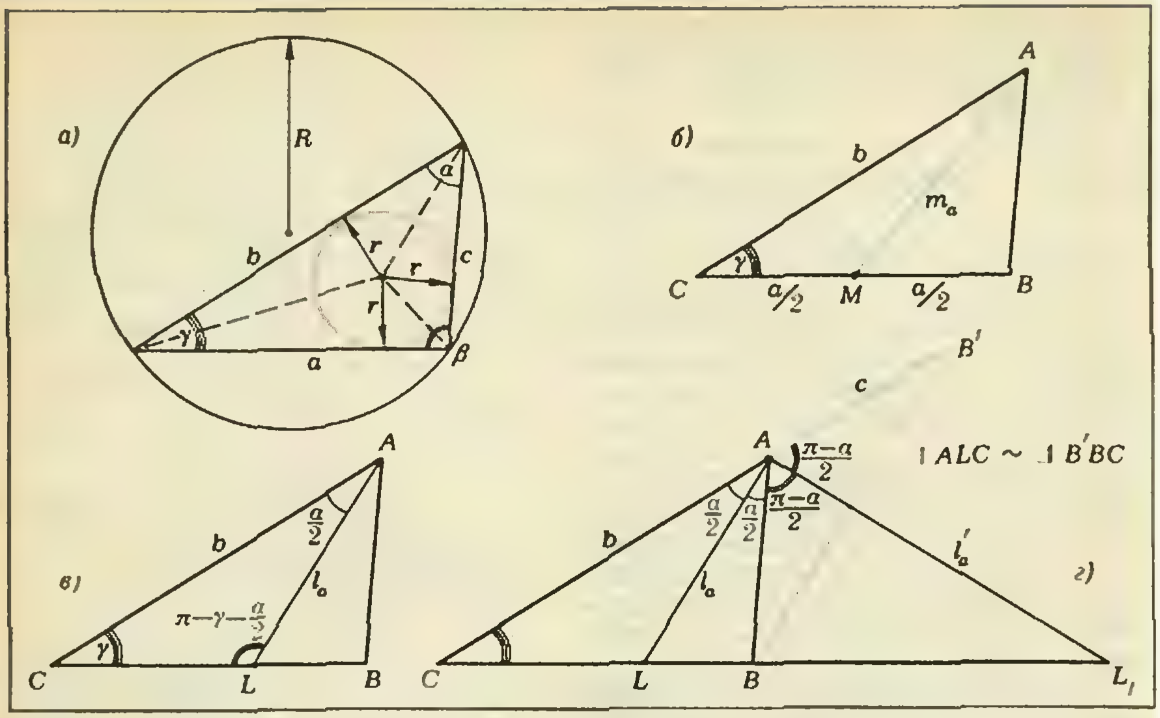


Рис. 1.

«растут» на чертеже во вполне определенных местах (оставшийся процент зависит от неисчерпаемой фантазии авторов задач), и учащийся должен знать, как выглядит фрагмент чертежа, где можно ожидать уравнение, и какие уравнения там следует искать.

Основными поставщиками уравнений служат треугольники и окружности (с хордами, касательными, секущими) и их стереометрические аналоги: тетраэдры (треугольные пирамиды) и сферы. Вспомогательными элементами служат частично правильные четырехугольники (параллелограммы, ромбы, прямоугольники, квадраты) и их стереометрические аналоги (параллелепипеды, призмы). Планиметрические фигуры более богаты на уравнения и более обозримы, поэтому всегда следует стремиться получать планиметрические фрагменты чертежа. Рассмотрим основные соотношения, поставляемые нам треугольниками, тетраэдрами, окружностями и шарами.

1. Треугольник определяется, вообще говоря, 3-мя своими элементами (не всякими). Если 3 заданных элемента полностью определяют треугольник, то через них можно выразить *все остальные* элементы, для чего полезно знать основные соотношения в треугольниках. Обозначим: a, b, c — длины сторон, α, β, γ — углы, S — площадь, r, R — радиусы вписанной и описанной окружности, h_a, m_a, l_a — высота, медиана и биссектриса, проведенные из угла α (рис. 1, *а*). Тогда можно выписать следующие соотношения:

а) $a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma=2R$ (теорема синусов);

б) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (теорема косинусов);

в) $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{(a+b+c)}{2}\cdot r=$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}}$$

(формула Герона);

г) $h_a=\frac{2S}{a}=b\sin\gamma$;

д) $\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{|BL_1|}{|L_1C|}=\frac{c}{b}$ (рис. 1, *г*);

е) $m_a^2=a^2/4+b^2-ab\cos\gamma$

(по теореме косинусов из $\triangle ACM$, рис. 1, *б*);

ж) $l_a=\frac{b\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$

(по теореме синусов из $\triangle ACL$, рис. 1, *в*).

Соотношения а) — д) являются основными, их следует запомнить. Соотношения е) — ж) являются вспомогательными: они выражают длины медианы и биссектрисы через основные элементы треугольника путем применения теоремы синусов или косинусов к «половинке» треугольника. (Есть и более симметричные выражения для длин медианы и биссектрисы.)

Отметим, что школьники часто говорят, например, что теорема косинусов позволяет третью сторону *выразить через* первые две и угол между ними. Это не совсем верно: такая формулировка предполагает, что нам известны две стороны и угол между ними, а мы хотим вычислить третью, поэтому и применяют эту теорему в основном в этом случае. Более точно было бы сказать, что теорема косинусов *связывает значения* трех сторон и одного из углов: эта формулировка значительно расширяет сферу ее применения. А разрешить формулу теоремы косинусов можно относительно *любого* из входящих в нее значений.

Предположим, что эти соотношения мы запомнили (их всего 7). Посмотрим, как их можно применять. Пусть треугольник задан длинами сторон, а найти надо радиус вписанной окружности. В наших соотношениях мы имеем связь r с a, b, c, S ($S=r(a+b+c)/2$) и связь S с a, b, c (формула Герона), откуда, исключая S, получим:

$$r=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Теперь пусть треугольник задан длиной одной стороны и двумя прилежащими углами, найти надо r. Если вы сразу увидели уравнение (рис. 2) $r\,\mathrm{ctg}(\gamma/2)+r\,\mathrm{ctg}(\beta/2)=a$, то это прекрасно, но если «геометрическое зрение» вам отказало, то пользуясь приведенными для предыдущего случая рассуждениями и добавив к ним соотношения а) (теорема синусов), можно получить выражения для b и c, и задача сводится к предыдущей. После страницы алгебраических преобразований получим тот же ответ (попробуйте сделать это самостоятельно). Этим еще раз подчеркивается тот факт, что геометрическая идея всегда предпочтительнее, но в крайнем случае алгебра с тригонометрией выручат, хотя и ценой дополнительной нетворческой работы.

2. Тетраэдр по существу представляет собой некоторую пространственную композицию треугольников

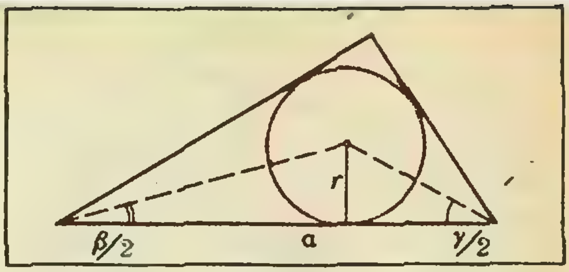


Рис. 2.

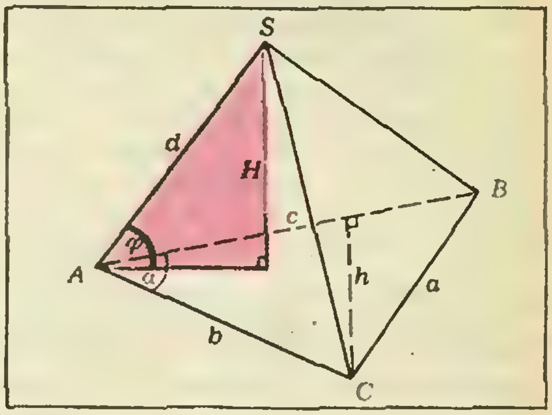


Рис. 3.

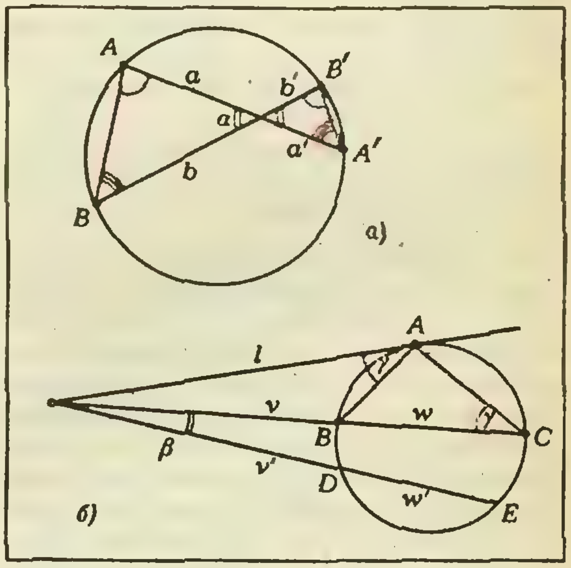


Рис. 4.

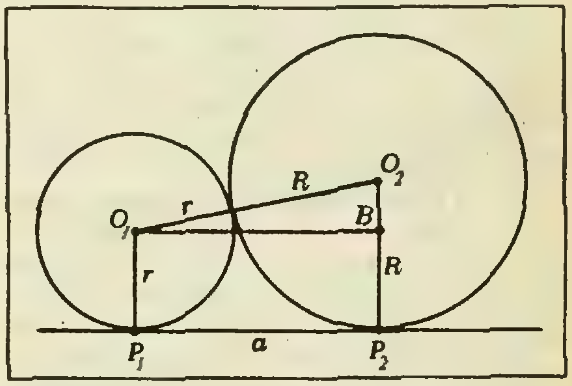


Рис. 5.

(рис. 3), поэтому ничего принципиально нового в составление уравнений не вносит. Следует только научиться связывать плоские углы трехграниого угла с двугранными и с углами наклона одного из ребер к плоскости, образованной двумя другими.

Проще всего для этого воспользоваться соотношениями для трехгранного угла $OABC$:

а) $\sin\alpha/\sin A=\sin\beta/\sin B=\sin\gamma/\sin C$ (теорема синусов);
б) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C$ (первая теорема косинусов);
в) $\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$ (вторая теорема косинусов).

Здесь A, B, C — величины двуграиных углов OA, OB, OC трехгранного угла, а α, β, γ — соответственно противолежащие им плоские углы*).

Единственный новый момент в пространственных фигурах — это их объем, соответственно появляются и формулы объема тетраэдра (рис. 3):

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H=$$
$$=\frac{1}{6}chH=\frac{1}{6}cb\sin\alpha\cdot d\sin\varphi.$$

3. **Окружность** (круг) и **сфера** (шар) дают множество соотношений, когда они связаны с другими окружностями и шарами или с прямыми и плоскостями. Соотношения эти абсолютно одинаковы и для окружностей и для сфер, они связывают длины отрезков или углы с дугами.

а) Расстояние между центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности — при внутреннем;
б) пересекающиеся хорды: $aa'=bb'$ (рис. 4, *а*, из подобия треугольников);
в) пересекающиеся хорды: $\alpha=(\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{A'B'})/2$ (рис. 4, *а*);
г) касательные и секущие: $v\cdot(v+w)=l^2$ (рис. 4, *б*, из подобия треугольников), откуда следует, что $v\cdot(v+w)=v'\cdot(v'+w')$ и что все касательные, проведенные из одной точки, равны;
д) касательные и секущие: $\beta=\dfrac{\overset{\smile}{CE}-\overset{\smile}{BD}}{2}$, $\gamma=\dfrac{\overset{\smile}{AB}}{2}$ (рис. 4, *б*). (В соотношениях между углами и дугами знак «=» означает «измеряется».)

Кроме этого имеются соотношения между радиусом (диаметром) и длиной окружности, площадями и объемом:

а) длина окружиости: $l=2\pi R=\pi D$, длина дуги: $l_\alpha=R\cdot\alpha$;
б) площадь круга: $S=\pi R^2=\frac{\pi}{4}D^2$, площадь сектора: $S_\alpha=R^2\cdot\frac{\alpha}{2}$;
в) площадь поверхности шара: $S_{\text{ш}}=4\pi R^2$;
г) объем шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Несколько полезных соотношений поставляет нам конус, но они легко выводятся из соотношений для окружностей и треугольников.

Теперь посмотрим, как из перечисленных выше соотношений строятся уравнения. Для их построения важную роль играют два принципа.

Принцип 1. Для получения уравнения надо один и тот же элемент выразить *двумя* способами.

Принцип 2. Для получения уравнения в треугольнике надо использовать *четыре элемента* (линейных или угловых).

Пример 1. Типичная для многих задач связка фигур (рис. 5): два касающихся круга или шара и общая касательная. Касание окружностей дает расстояние между центрами, касание с прямой дает перпендикулярность радиусов к этой прямой (радиус — часть секущей, стягивающей дугу в 180°). Треугольников здесь нет, значит, *их надо построить*. Проведя прямую O_1B, мы получаем прямоугольник и треугольник. Прямоугольник позволяет *перенести* размер a с P_1P_2 на отрезок O_1B, и размер r — на отрезок BP_2, после чего мы получаем треугольник O_1O_2B, в котором имеются 4 элемента, включающие константы и интересующие нас величины: 3 стороны и прямой угол. Любой из этих элементов, например $|O_1O_2|$, можно выразить *двумя* способами: непосредственно $(r+R)$ и по теореме Пифагора. В итоге получаем уравнение

$$(r+R)^2=a^2+(R-r)^2 \text{ или } a=2\sqrt{Rr}.$$

Рассмотрим теперь пример комплексного использования рассмотренных выше идей.

---

*) Доказательство этих соотношений можно найти в «Кванте», 1984, № 12, с. 25—26.

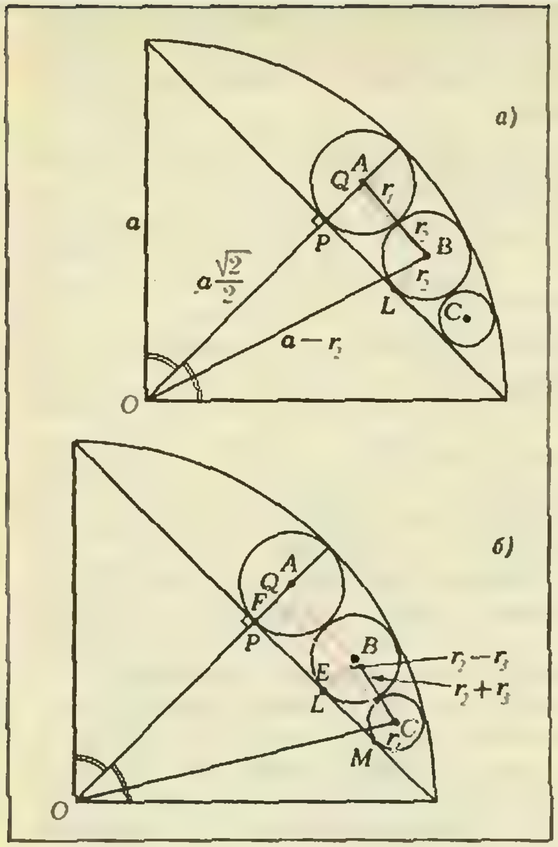


Рис. 6.

Пример 2. Имеются фигуры, показанные на рисунке 6, *а*. Надо найти радиус самой малой окружности (с центром в C).

Радиус r_1 определяется тривиально: $r_1=a(1-1/2)/2$. Для определения r_2 мы имеем длины отрезков AB, AO и BO, что недостаточно для составления уравнения. Поэтому мы *строим* 2 треугольника QAB и QBO и прямоугольник $QPLB$, проводя перпендикуляр QB к отрезку AO. Прямоугольник позволяет перенести размер r_2 на отрезок QP, после чего получаем картину, аналогичную примеру 1. Длина QB выражается двумя способами:

$$|QB|^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=$$
$$=(a-r_2)^2-(a/\sqrt{2}+r_2)^2.$$

Из уравнения можно получить r_2. Объектом для выражения двумя способами в следующей связке (рис. 6, *б*) является отрезок FC. Вспомогательное построение (выделено красным) дает несколько прямоугольников, позволяющих перенести размеры: отрезка QB — на FE, r_3 — на EL и FP. Отрезок EC определяется из треугольника BEC. Уравнение

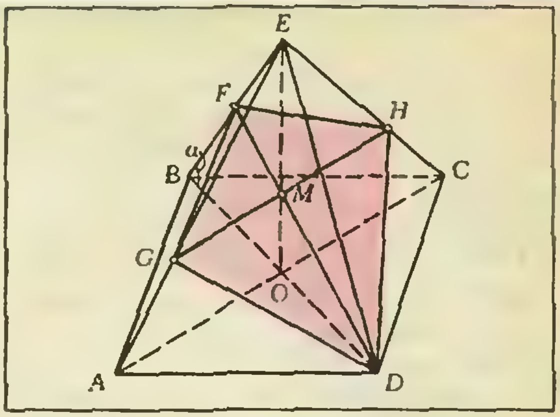


Рис. 7.

$$-(a\frac{\sqrt{2}}{2}+r_3)^2+(a-r_3)^2=$$
$$=(\sqrt{4r_1r_2}+\sqrt{4r_2r_3})^2$$

можно разрешить относительно r_3, так как значение r_2 найдено ранее.

Другие примеры планиметрических задач на составление уравнений можно найти в статье «Метрические соотношения в треугольнике», помещенной в этом номере «Кванта».

В заключение рассмотрим стереометрическую задачу.

Пример 3. Правильную четырехугольную пирамиду $EABCD$ пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения $DGFH$ в два раза меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра (рис. 7).

Обозначим через a длину стороны квадрата, O — его центр, α — величину угла EBD. Пирамида правильная, поэтому искомое отношение $|OE|/|BE|$ равно $\sin\alpha$. По условию площадь четырехугольника $DGFH$ равна $a^2/2$. Для получения уравнения выразим ее через a и α другим способом. Проведя диагональ сечения FD, мы разбиваем сечение на 2 *треугольника*, площади которых легко вычислить, так как отрезки второй диагонали GM и MH являются высотами этих треугольников (докажите самостоятельно!). Поэтому $S=\frac{1}{2}|GH|\cdot|FD|$

Из *треугольника* DFB получаем, что $|DF|=a\sqrt{2}\sin\alpha$. Далее, можно доказать, что $GH\parallel AC$, значит, *треугольники* GEH и AEC подобны, откуда

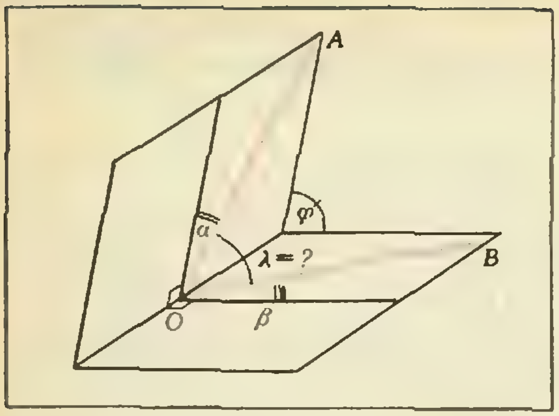


Рис. 8.

$$\frac{|GH|}{|AC|}=\frac{|EM|}{|EO|},\quad \frac{|GH|}{a\sqrt{2}}=\frac{|EO|-|MO|}{|EO|},$$

$$|GH|=\left(1-\frac{|MO|}{|EO|}\right)a\sqrt{2}.$$

Очевидно, что $|MO|=(a/\sqrt{2})\operatorname{ctg}\alpha$ и $|EO|=a/\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, следовательно,

$$\frac{|MO|}{|EO|}=\frac{(a/\sqrt{2})\operatorname{ctg}\alpha}{(a/\sqrt{2})\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

поэтому

$$|GH|=a\sqrt{2}(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)=\frac{a\sqrt{2}(2\sin^2\alpha-1)}{\sin^2\alpha}$$

и

$$S=\frac{a^2(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}.$$

В итоге получаем уравнение

$$\frac{a^2(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}=\frac{a^2}{2},$$

равносильное уравнению $4\sin^2\alpha-\sin\alpha-2=0$. Из двух корней уравнения $4x^2-x-2=0$ выбираем положительный: $x_1=(1+\sqrt{33})/8$, поскольку α — угол в треугольнике и $\sin\alpha>0$.

В этой задаче мы опять вспомогательными построениями *построили* ряд треугольников, которые позволили провести нам нужные вычисления.

Задачи

1. Убедитесь, что уравнения в задачах из статьи в «Кванте», 1983, № 2 получены методом, полностью совпадающим с приведенной схемой.

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна h. Точки пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса r. Найдите объем пирамиды.

3. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при нижнем основании AB равен 60°, а периметр трапеции равен 30.

4. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$ см, длина хорды CD равна $\sqrt{7}$ см. Найдите радиус окружности.

5. В треугольнике ABC угол A равен α, а противолежащая ему сторона равна a. Найдите две другие стороны, если известно, что сторона a есть среднее геометрическое радиусов вписанного и описанного кругов этого треугольника.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка E — середина ребра AA_1. На продолжении ребра DA взята точка F так, что $|FA|=a/2$. Найдите радиус меньшей из сфер, проходящих через точки E и F и касающихся плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

7. В правильной четырехугольной пирамиде центр вписанного шара делит высоту пирамиды в отношении $p:q$ $(p<q)$. Определите угол наклона ребра к основанию.

8. Через точку O, лежащую на ребре двугранного угла величины φ, проведена прямая OA, лежащая в одной из граней угла и образующая угол α с ребром двугранного угла, и прямая OB, лежащая в другой грани и образующая с ребром угол β. Найдите угол λ между этими прямыми (рис. 8).

9. Возьмите произвольные 6 элементов, задающие (неправильный) тетраэдр и вычислите все остальные его элементы.

Л. Ф. Штернберг

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Какое из чисел больше

$$\frac{5555555553}{5555555557}\ \text{или}\ \frac{6666666664}{6666666669}\,?$$

2 (Задача Ньютона). Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 60 коров съели бы всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву за 100 дней?

3. По виду графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ определите знаки коэффициентов a, b и c (рис. 1).

4. Медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части. Найдите углы треугольника.

5. а) Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой величины дуги, заключенной между его сторонами, и величиной дуги, заключенной между продолжениями его сторон, а угол с вершиной вне круга — полуразностью величин дуг, заключенных между его сторонами (рис. 2):

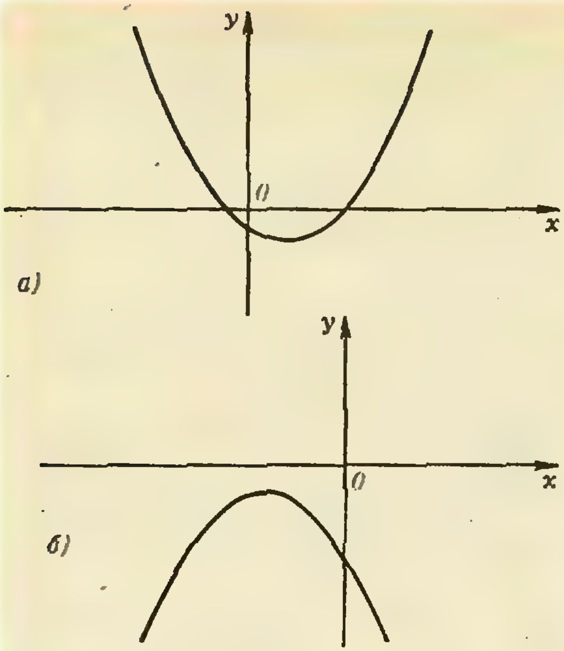


Рис. 1.

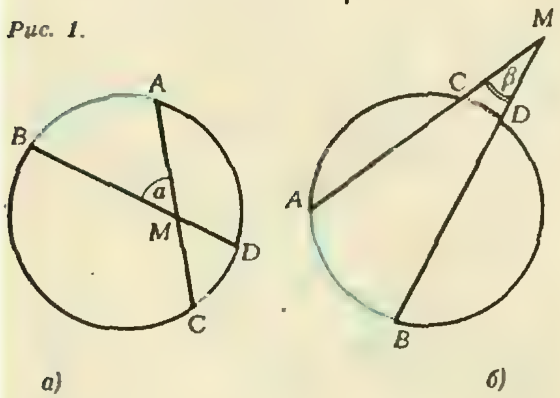


Рис. 2.

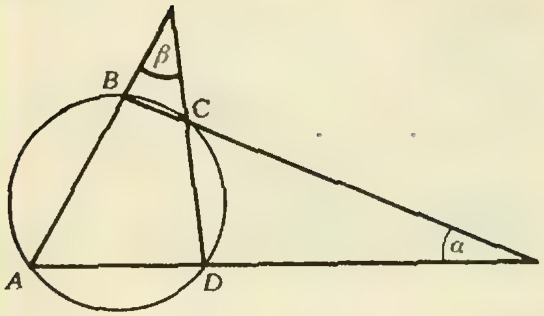


Рис. 3.

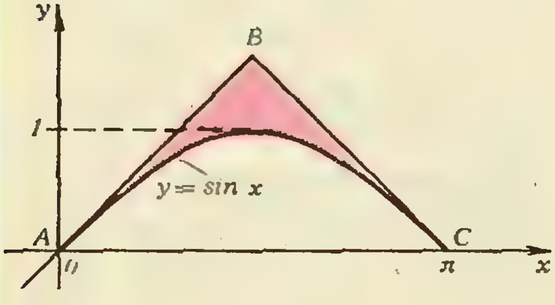


Рис. 4.

$$\alpha=\frac{1}{2}(\smile AB+\smile CD), \qquad (1)$$

$$\beta=\frac{1}{2}(\smile AB-\smile CD). \qquad (2)$$

При решении задач б) и в) можно воспользоваться формулами (1) и (2).

б) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы α и β между продолжениями противоположных сторон (рис. 3). Найдите углы четырехугольника.

в) В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности, точка A_1 — точка пересечения прямой AO с описанной окружностью. Докажите, что $|BA_1|=|OA_1|=|CA_1|$.

Девятый класс

6. Вычислите произведение

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{1}{99\cdot 101}\right).$$

7. Найдите уравнение общей касательной к параболам

$$y=x^2+4x+8 \text{ и } y=x^2+8x+4.$$

8. Ортогональной проекцией прямого угла AOB на плоскость α является снова прямой угол. Докажите, что либо (AO), либо (BO) параллельна плоскости α.

9. Найдите произведение:

а) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15}$.

10. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $|AD|=a$ и $|BC|=b$ проведен отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям и делящий ее на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

Десятый класс

11. Плоскость, проведенная через центр вписанного в конус шара параллельно основанию, делит этот конус на две части одинакового объема. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

12. Решите уравнения:

а) $(x^2-x+1)^2+2(x^3+1)=(x+1)^2$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x^2-1}=8\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

13. Найдите площадь, ограниченную одной «полуволной» синусоиды $y=\sin x$ и касательными, проведенными к графику синуса в точках с абсциссами 0 и π (рис. 4).

14. Известно, что $\log_7 12=a$, $\log_{12} 24=b$. Найдите $\log_{54} 168$.

15. а) Приведите пример, показывающий, что две высоты тетраэдра (или их продолжения) могут не пересекаться.

б) В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что если прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, то и прямые CC_1 и DD_1 тоже пересекаются.

Публикацию подготовил *Б. М. Ивлев*

Квант для младших школьников

Задачи

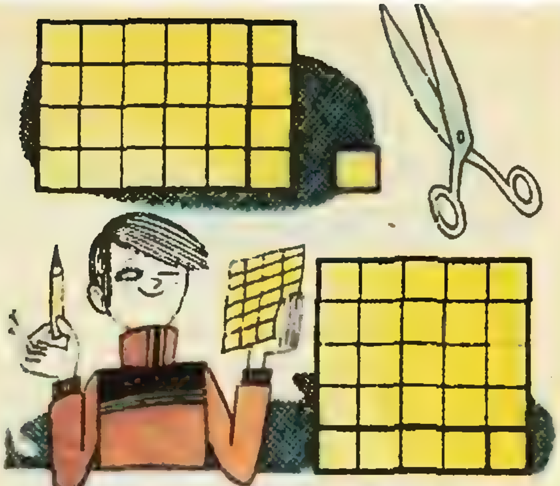
1. Существует ли трехзначное число, делящееся на 11, у которого первая цифра больше второй, а вторая — больше третьей?

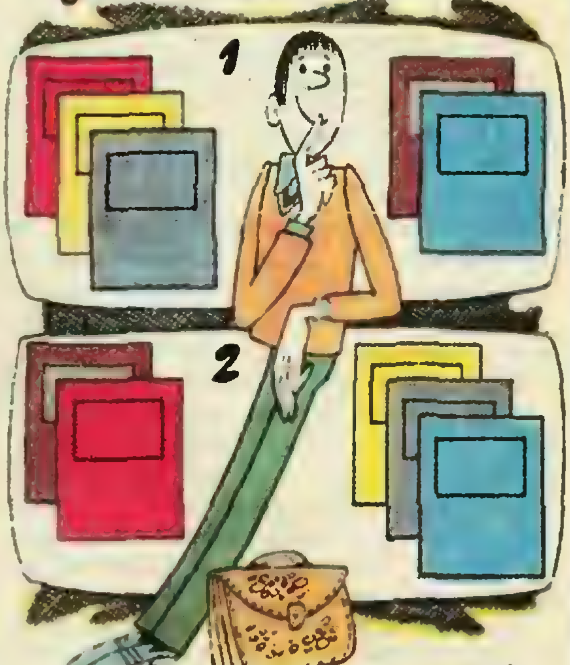
2. Числа 2,75 и 8 обладают тем свойством, что произведение равно сумме составляющих их цифр: $2{,}75 \cdot 8=2+7+5+8=22$. Найдите еще хотя бы одну такую пару чисел.

3. Нетрудно разрезать большой прямоугольник 4×6 на рисунке на две части так, чтобы из них и квадратика 1×1 можно было сложить квадрат 5×5 (см. рис.). Но попробуйте каждую из этих двух фигур разрезать на две одинаковые части так, чтобы *вновь из них* можно было сложить квадрат 5×5.

4. Пять тетрадей: синяя, желтая, серая, коричневая и красная в некотором порядке лежали в стопке. Их выложили на стол. Сначала верхнюю, потом следующую за ней и т. д. В результате получили две стопки, изображенные на рисунке 1. Затем тетради собрали в стопку в прежнем порядке, а потом вновь выложили на стол, снимая также тетради сверху стопки. На этот раз получились две стопки, изображенные на рисунке 2. В каком порядке тетради лежали в стопке?

5. Однажды я с двумя приятелями гулял за городом. Мы обратили внимание на «гудящие» телефонные провода. Я спросил у друзей, почему гудят провода. «Потому, что по ним идет разговор»,— сказал один. «Да нет, — засмеялся другой, — просто из-за того, что по ним идет ток. Ведь провода высоковольтной передачи тоже гудят». А как думаете вы?





Эти задачи нам предложили: *Д. Г. Поляк, М. В. Варга, Н. К. Антонович, В. В. Произволов, А. П. Савин.*

Может ли быть невозможное?

Доктор технических наук
Л. И. ТУЧИНСКИЙ

> *«Осознай то, что уже знаешь»,*
> *и ты научишься летать.»*
> **Ричард Бах.** Чайка по имени
> Джонатан Ливингстон

Ответ на вопрос, поставленный в заголовке, может быть, по-моему, только один: конечно, может. Собственно говоря, мы привыкли к тому, что на наших глазах совершаются невозможные вещи, и даже не удивляемся им. Мы считаем само собой разумеющимся, что с аэродромов взлетают самолеты, что в космосе работают люди, что сто́ит нажать на кнопку телевизора — и моментально увидишь происходящее за тысячи километров, что существуют машины, умеющие считать и играть в шахматы, и многое другое.

А ведь если бы сто лет назад спросить у любого просвещенного человека, может ли человек полететь на Луну или увидеть, что происходит в другом городе, он бы удивленно посмотрел на вас и, наверное, усомнился в здравости вашего рассудка. Действительно, тогда это было невозможно, а сейчас это обыденно.

Все это я говорю к тому, что никогда не следует категорически утверждать: это невозможно, этого не может быть. А, собственно, почему? Только потому, что этого не может быть никогда? И, главное, не думайте, что невозможное может сделать кто-то другой, но только не вы. «Может тот, кто думает, что может» — гласит латинская пословица.

Давайте для примера решим вместе одну задачу из разряда «невозможных». Эта задача из области материаловедения. Есть такая наука, которая занимается разработкой материалов, изучением их структуры и свойств.

Мы редко задумываемся о том, что без новых материалов не было бы полетов в космос, телевидения, лазеров, сверхпроводников, самолетов, машин... Когда в космос поднимается очередной аппарат, мы в первую очередь думаем о героизме космонавтов, о блистательной работе конструкторов и не подозреваем, сколько материаловедческих вопросов пришлось решить, чтобы этот запуск стал возможным. И так во многих делах. Труд материаловедов обычно остается в тени, но это вовсе не означает, что он менее важен или менее интересен, чем труд других специалистов. Большинство же материаловедческих проблем сводится к решению физических задач. И вот одна из них, поставленная жизнью.

Требуется создать материал, способный работать при температуре, превышающей температуру его плавления. Что значит работать? Это значит, что детали (например, со́пла ракеты), изготовленные из этого материала, должны иметь достаточную жесткость и прочность, чтобы выдерживать силы, действующие на них, практически не изменяя своей формы и размеров.

На первый взгляд задача абсурдна. Что значит — материал должен работать при температуре более высокой, чем его температура плавления? Что он должен нести нагрузку, находясь в жидком состоянии, или, как любят выражаться материаловеды, в жидкой фазе? Но жидкость не только нагрузки не может нести, она и формы не держит. Если нагреть деталь выше температуры плавления материала, из которого она изготовлена, она расползется, станет бесформенной, и от нее останутся одни воспоминания. Все это так, и все-таки...

И все-таки задачу решить можно, и ваших знаний по физике вполне достаточно для этого. Но сначала несколько слов в качестве информации к размышлению.

Один из самых перспективных путей развития материаловедения — создание композиционных материалов, или композитов. Они включают в себя два или более материала и приобретают в результате такого объединения новые свойства. Типичный пример композита — железобетон (бетон, армированный металлическими прутьями), в котором объединяются свойства бетона и стали. Или материал, полученный из порошков меди и графита, обладающий наряду с хорошей электропроводностью малым трением, что позволяет использовать его для скользящих контактов. Сегодня создано множество самых разнообразных композитов, их число с каждым годом растет, и это позволяет успешно справляться с решением проблем, ранее считавшихся неразрешимыми. Поэтому при анализе конкретных задач всегда полезно продумать вариант с применением композитов. Вот, пожалуй, и вся необходимая нам материаловедческая информация.

Что? У вас мелькнула мысль? Вы считаете, что если сделать композит из двух компонентов, один из которых легкоплавкий, а другой — тугоплавкий, то такой материал сможет работать при температуре более высокой, чем температура плавления легкоплавкого компонента? Но не выше же температуры плавления тугоплавкого компонента!

Должен вас огорчить. Я имел в виду работу материала именно при температурах бóльших, чем температура плавления самого тугоплавкого компонента. Ну, не готовы ли вы заявить, что это из области фантастики?

Нет, это вполне реально. Такие материалы существуют, они успешно применяются в новой технике.

Что же это за материалы? Их называют псевдосплавами. Сегодня в космической технике широко используются псевдосплавы вольфрам — медь, вольфрам — серебро, молибден — медь и другие. Прежде чем рассказать, как они устроены и работают, давайте вспомним кое-что из школьной физики.

При изучении агрегатных состояний вещества вы узнали, что процесс плавления чистых кристаллических веществ происходит при постоянной (для данного давления) температуре $T_{пл}$, называемой температурой плавления. Плавление твердого тела может происходить, только если к нему непрерывно подводить тепло. Количество теплоты, которое необходимо подвести для плавления к единице массы твердого тела при постоянной температуре $T_{пл}$, называется удельной теплотой плавления λ. Подобным образом происходит кипение жидкости. Температура жидкости и сосуда, в котором она кипит, не повышается, однако все время жидкость превращается в пар. Количество теплоты L, необходимое для превращения единицы массы жидкости в пар при температуре кипения $T_{кип}$, называется удельной теплотой испарения, или парообразования.

Почему в процессе плавления и кипения температура не повышается? Потому что подводимое извне тепло тратится на увеличение внутренней энергии кристаллов (при плавлении) и жидкости (при кипении). Внутренняя энергия жидкости больше внутренней энергии кристалла, а внутренняя энергия пара больше внутренней энергии жидкости.

Когда не существовало холодильников, люди в жару хранили воду в пористых сосудах. Вода медленно просачивалась сквозь поры, испарялась с наружных стенок, охлаждая стенки сосуда и его содержимое...

Внимание! Вот он, ключ к решению задачи. «Осознай то, что уже знаешь...» Ведь это же нам давно известно: плавящиеся твердые тела и испаряющиеся жидкости отбирают тепло у соприкасающихся с ними тел. Этот эффект и лежит в основе работы псевдосплавов, используемых при высоких температурах.

Представьте себе, что нам нужно изготовить сопло ракетного двигателя. Температура газов, образующихся при сгорании твердого топлива и истекающих из сопла, достигает 4000 °С. Это выше, чем температура плавления самого тугоплавкого металла — вольфрама (3380 °С). Что же сделать, чтобы сопло из вольфрама могло надежно работать при таких температурах?

Давайте поступим так. Изготовим сопло не из сплошного, монолитного, а из пористого вольфрама. Это можно сделать методами порошковой металлургии, когда вольфрамовый порошок прессуют и спекают. В результате таких операций получают вольфрам в виде пористой губки. Изменяя режимы прессования и спекания, можно регулировать количество и размеры пор. Далее этот пористый вольфрам надо пропитать легкоплавким металлом — медью или серебром. То, что получится, и будет псевдосплав вольфрам — медь или вольфрам — серебро.

(Окончание см. на с. 34)

Задачи и задачки

1. Когда расходуется больше энергии — при запуске спутника вдоль меридиана или вдоль экватора?

---

2. Лыжник скатывается с горки (не отталкиваясь палками) до полной остановки. Вернуться к месту старта он может двумя способами: в кресле канатного подъемника или же стоя на лыжах и пользуясь подъемником как буксиром. Каково соотношение между затратами энергии на подъем лыжника в двух случаях? Трение в блоках подъемника отсутствует.

---

3. Гитару вынесли на мороз. Ее струны натянулись сильнее, значит, увеличилась их упругая энергия. За счет чего произошло это увеличение?

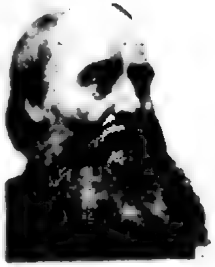
---

4. Одну и ту же порцию горючего сжигают в примусе на уровне моря и в Гималаях, на высоте 8000 метров. Когда выделится больше энергии?

---

5. Что вносит больший вклад в энергию вылетающей стрелы — корпус лука или тетива?

КАЛЕЙДОСКОП



$$\Pi = mgh$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Pi = k\frac{x^2}{2}$$

$$E = K + \Pi$$

$$E = W_э + W_м$$

$$E = mc^2$$

$$W_э = \frac{CU^2}{2}$$

$$W_м = \frac{LI^2}{2}$$

$$E = h\nu$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT$$

Заключается ли наш труд в создании науки путем связывания воедино уже известных фактов или в поисках объяснений непонятных явлений путем постановки ряда опытов — принцип сохранения энергии остается надежным руководителем.

Дж. К. Максвелл

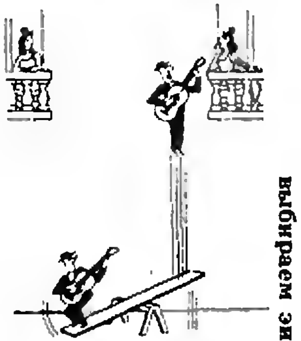
А так ли уж хорошо знакомо вам понятие

ЭНЕРГИЯ
?

КАЛЕЙДОСКОП

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Некоторые выпуски нашего «Калейдоскопа» мы хотим посвятить обсуждению основных физических понятий. Каких именно — решать и вам, школьникам. Ждем ваших предложений, а пока первой темой выбираем энергию.



Так иллюстрируется закон сохранения энергии в книге Дж. Орира «Популярная физика» (рисунок вверху).

---

8. Если охлаждать чугунную сферу, полностью залитую водой и закупоренную, ниже 0 °С, вода разорвет ее. Где источник энергии, необходимой для разрыва?

---

9. Перед тем как взлететь, ночная бабочка довольно долго подрагивает крылышками. Зачем?

---

10. Колебания стрелки магнитоэлектрического прибора быстро затухают, если его клеммы замкнуты. Куда девается энергия колебаний?

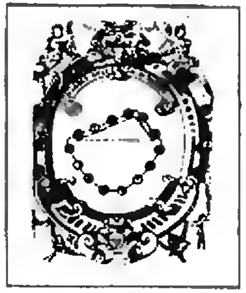
---

11. Маленький железный предмет «подпрыгивает», если к нему поднести сверху магнит. Сколько

Задачи и задачки

поднимаются вверх стратостаты и шары-зонды?

7. Звук, издаваемый камертоном, слаб. Однако камертон, закрепленный на резонаторе, звучит несравненно громче. Откуда же берется «лишняя» энергия?



...первый до сих пор известный достоверный документ об «осуществлении» идеи вечного двигателя относится еще к XII веку, а в 1910 году в одно из московских научных учреждений был представлен на «рассмотрение» «проект» вечного двигателя, буквально повторяющий идею шестивековой давности.

...если энергию, производимую при разговоре 100 000 человек, превращать без потерь в электрическую, то ее едва хватит для того, чтобы поддерживать горение лампочки карманного фонарика.

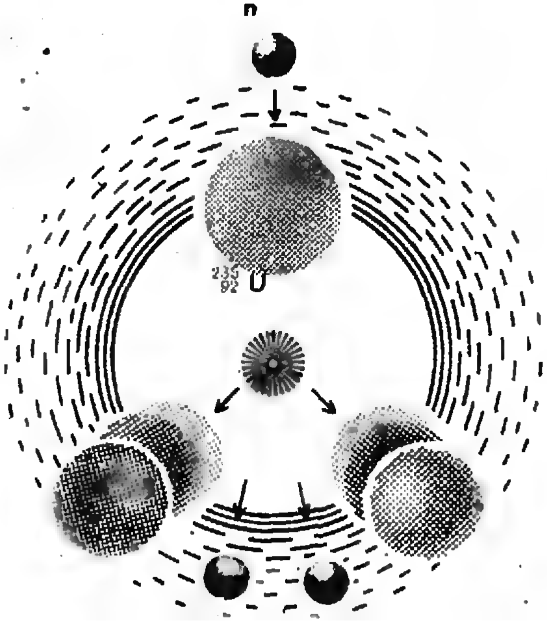
Любопытно, что

Задачи и задачки

квант 4/85

История развития этого понятия и практического применения различных видов энергии тесно переплетена с историей всей физики и с биографиями выдающихся ученых. (Кстати, узнаете ли вы их на портретах?) Чтобы перекинуть «энергетический» мостик между самыми различными явлениями, потребовались многолетние усилия мысли и кропотливые эксперименты. Венчало их установление одного из фундаментальнейших законов природы — закона сохранения энергии.

Предлагаем вам еще раз поразмышлять над этим важным понятием, укрепить знакомство с ним и попробовать свои силы в решении нескольких задач. Как вы сразу заметите, главное в них — умело обращаться с энергией.



квант 4/85

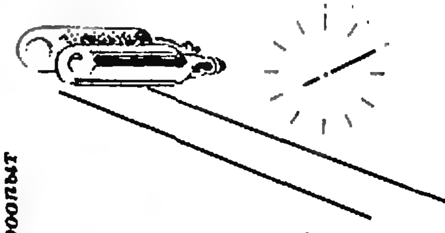
Что читать об энергии в «Кванте»

Микроопыт

Зада

бы мы ни проводили этот опыт, «сила» магнита не ослабевает и он вновь и вновь совершает работу. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

Заполните одну бутылку водой, а другую такую же — песком. Дайте им скатиться с наклонной



плоскости без проскальзывания. Какая из бутылок скатится быстрее? Почему?

«Законы сохранения при ядерных превращениях» — 1982, № 7;

«Энергия и громкость звука» — 1983, № 12;

«Работа, энергия и архимедова сила» — 1984, № 3;

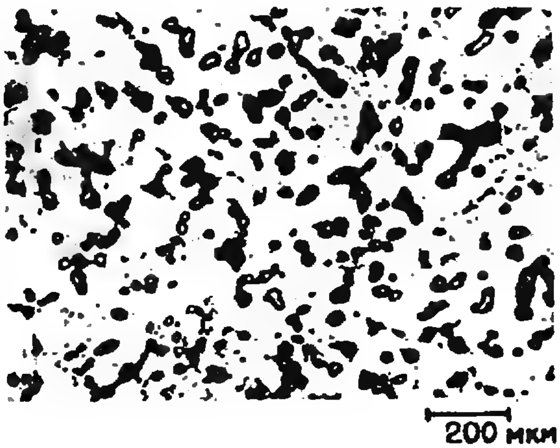
«Механическая работа и механическая энергия» (будет опубликована в № 5 за 1985 г.).

(Начало см. на с. 30)

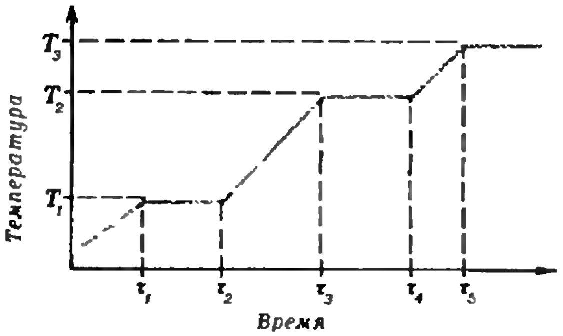
Почему он называется псевдосплавом? Потому что это не настоящий сплав, у которого кристаллическая решетка состоит из разнородных атомов. Здесь перемешивания компонентов на атомном уровне не происходит. Вольфрам с медью или серебром не растворяются друг в друге, их невозможно сплавить, можно только механически смешать. В данном случае мы получили псевдосплав со структурой, представляющей собой вольфрамовый каркас, поры которого заполнены медью (серебром).

Что же будет происходить с таким материалом при нагревании? Приближенная картина, например, в псевдосплаве вольфрам — медь, будет такой. Вначале температура композита станет расти (см. рисунок) до тех пор, пока не достигнет температуры плавления меди ($T_1 = 1083$ °C). Подвод тепла к псевдосплаву не вызовет повышения его температуры в течение времени, определяемого интервалом (τ_1, τ_2).

После того как вся медь расплавится, температура псевдосплава вновь начнет повышаться. Но при температуре кипения меди $T_2 = 2595$ °C вновь произойдет остановка, и пока вся медь не испарится, температура псевдосплава не повысится (интервал времени (τ_3, τ_4)). Температура газов, образующихся при сгорании топлива, может превышать температуру плавления вольфрама, но он плавиться не будет, потому что у него отнимает тепло кипящая медь, температура которой ниже температуры плавления вольфрама.



Фотография типичной микроструктуры псевдосплава. На сером фоне вольфрамового каркаса видны медные включения неправильной формы.



Конечно, сколь угодно долго такое положение сохраняться не будет. После того как вся расплавленная медь перейдет в пар, температура псевдосплава вновь начнет повышаться, и, когда она достигнет значения T_3, равного температуре плавления вольфрама (3380 °C), материал расплавится. Собственно говоря, расплавится не псевдосплав (его уже фактически не будет), а вольфрамовый каркас, который без меди работать при такой температуре не может. Вольфрам оказывается сильным до тех пор, пока есть у него пусть более слабый, но верный друг — медь, способная принести себя в жертву, испариться до последнего атома, чтобы облегчить судьбу своего друга.

Однако для дружбы между материалами, как и между людьми, нужна совместимость. Например, в высокотемпературных псевдосплавах хорошими друзьями вольфраму оказываются медь или серебро, но плохими — никель или железо. Дело в том, что медь и серебро отдают себя в жертву, не причиняя вольфраму вреда, а никель и железо не согласны погибать в одиночку. С повышением температуры они начинают интенсивно разъедать вольфрам. От этого резко падает прочность каркаса, он становится неработоспособным. Друзей нужно уметь выбирать.

Теперь давайте прикинем, что эффективнее отнимает тепло у материала — плавление или испарение. Очевидно, тот процесс, который требует бóльших затрат тепла для протекания. Найдем в справочнике, чему равны удельная теплота плавления и испарения. Для подавляющего большинства материалов затраты на испарение 1 грамма вещества оказываются во много раз больше, чем на плавление. Например, для воды $\lambda = 335$ Дж/г, а L=2260 Дж/г, для меди λ=176 Дж/г, а L=5240 Дж/г. Таким образом, основную работу по спасению вольфрама от расплавления медь выполняет при своем испарении. Оно должно идти все время, пока материал находится в зоне мощных тепловых потоков.

Обычно в ракетах требуется, чтобы материал «продержался» в пределах нескольких минут, а этот ресурс сопла из псевдосплава вполне могут осилить. Возможны различные варианты деталей, позволяющие увеличить срок их службы. Например, можно представить себе соединенный с псевдосплавом резервуар с расплавленной медью — из него происходит подпитка медью, компенсирующая ее испарение из материала. Это, правда, уже технические детали, которые очень важны, но к принципиальному решению задачи отношения не имеют.

На самом деле в псевдосплавах происходят более сложные процессы, чем те, что я обрисовал. Материал неравномерно прогревается по толщине, в нем могут возникать большие термические напряжения, способные иногда вызвать появление трещин. Интенсивность испарения будет зависеть от размера и структуры пор, химической чистоты компонентов и ряда других факторов. Но это тоже частности. Важно, что мы нашли принципиальный путь решения задачи. Мы заставили материал работать в среде, температура которой выше температуры его плавления.

Оказывается, и невозможное возможно.

Наша обложка

Ложка и ... фонтан

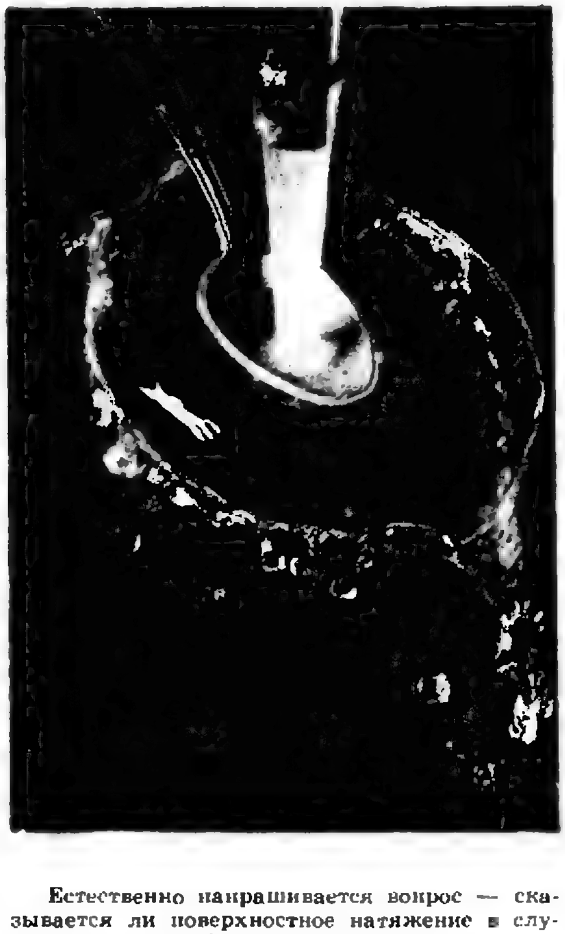
Посмотрите на фотографии, представленные на первой странице обложки и здесь на рисунке. Такие фонтаны каждый из вас может легко воспроизвести у себя дома.

Для этого не очень сильную струю воды (например, из водопроводного крана) аккуратно направьте на ложку (отрегулируйте напор воды так, чтобы не забрызгать себя и окружающих). Отразившись от ложки, струя и образует фонтан.

Обратите внимание на одну особенность наших фонтанов.

Как известно, тело, брошенное под углом к горизонту, летит по параболе. Поэтому струи обычных фонтанов, городских и дворцовых, также образуют параболы. Однако в нашем случае это явно не так — траектории, по которым двигаются капли воды, более сильно, чем параболы, изогнуты в направлении вертикальной оси системы. Более того, возможно так подобрать условия опыта, что в некотором месте траектории становятся вертикальными, а затем как бы прижимаются к оси системы.

Объяснить это можно, учитывая явление поверхностного натяжения в жидкости. Если сделать мысленный горизонтальный разрез нашего фонтана (в непосредственной близости к ложке), то в сечении вода будет представлять собой кольцо. Это кольцо оказывается как будто бы зажатым между двумя поверхностными пленками, которые действуют на отдельные участки кольца с силами, направленными к центру. Вот эти-то силы и приводят к более существенному искривлению траекторий частиц воды, чем при их свободном движении.



Естественно напрашивается вопрос — сказывается ли поверхностное натяжение в случае обычных фонтанов? Оказывается, да, только гораздо менее заметно. А вот почему это так — попробуйте объяснить сами.

А. А. Лапидес

задачник Кванта

Задачи

М916 — М920; Ф928 — Ф932

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М916, М917» или «Ф928». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М916. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

А. А. Азамов

М917. а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Считается, что номера билетов изменяются от 000000 до 999999 включительно; билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр.)

С. Ю. Оревков

М918*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа — 3, 4 и 5.

В. В. Прасолов

М919. а) Докажите равенство

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx+\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

б)* Докажите неравенство

$$9<\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx+\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx<9{,}0001.$$

Ю. И. Ионин

М920. а) Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$x^3+y^3+z^3=x^2y^2z^2$$

в натуральных числах.

б)* Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

имеет натуральное решение лишь при $n=1$ и $n=3$ и найдите все эти решения.

Р. А. Мазов

Ф928. Два одинаковых гладких полуцилиндра, общая масса которых m, подвешены на нерастяжимой невесомой нити так, как показано на рисунке 1. Чему равны сила натяжения нити и сила давления одного полуцилиндра на другой?

Л. Г. Маркович

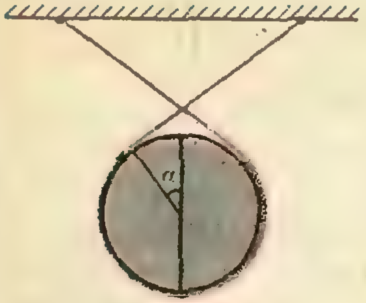


Рис. 1.

Ф929. Известно, что охлаждая сосуд с водой и одновременно откачивая газ из сосуда, можно довести воду до кипения. Возможно ли закипание жидкости при охлаждении замкнутого сосуда с жидкостью и газом?

Л. А. Ашкинази

Ф930. Плотности поверхностного заряда на прямоугольных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$. Расстояние между пластинами много меньше размера пластин. Определите напряженность электрического поля в точке A (см. рисунок 2).

О. Я. Савченко

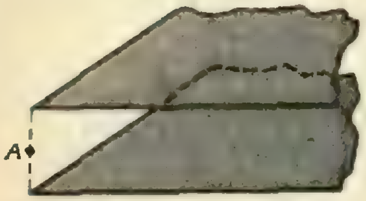


Рис. 2.

Ф931. Точечный источник расположен на расстоянии $2F$ от линзы с фокусным расстоянием F. На расстоянии $3F$ от линзы расположен экран (рис. 3). За линзой установлена круглая пластинка радиуса R, пропускающая свет неравномерно (радиус пластинки не меньше радиуса линзы). При этом пятно, получающееся на экране, имеет равномерную максимально возможную освещенность. Как распределена «пропускная способность» пластинки вдоль ее радиуса?

А. А. Лапидес

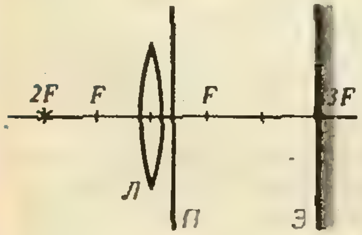


Рис. 3.

Ф932. Настройка гитары состоит в следующем: зажимая в определенном месте вторую струну, добиваются, чтобы она звучала в унисон с первой, далее так же настраивают другие струны. Может ли человек, у которого абсолютно отсутствует музыкальный слух (то есть умение различать звуки по высоте), настроить гитару?

И. И. Мазин

Problems

M916—M920; P928—P932

M916. Perpendiculars are drawn from the three midpoints of the sides of an acute triangle to the two other sides. Prove that the area of the hexagon thus obtained is half of that of the triangle.

A. A. Azamov

M917. a) What is the length of the longest possible series of unlucky ticket numbers? b) How many such longest series are there? (It is assumed that the ticket numbers range from 000000 to 999999 inclusively; a ticket number is called lucky if the sum of its first three digits equals that of the last three.)

S. Yu. Orevkov

M918*. The radius of a triangle's incircle is 1, the lengths of its sides are integers. Prove that these integers are 3, 4 and 5.

V. V. Prasolov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solu-

tions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the calendar year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

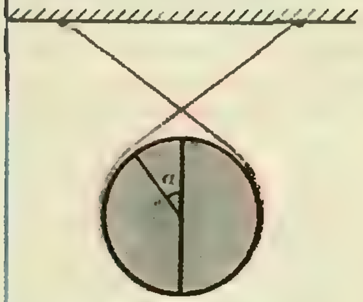


Fig. 1.

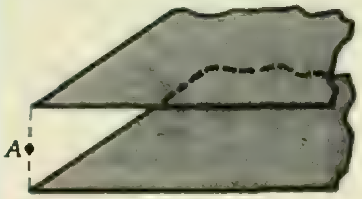


Fig. 2.

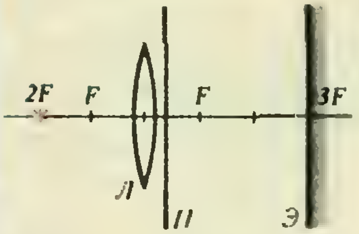


Fig. 3.

M919. a) Prove the relation

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

b)* Prove the inequality

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001$$

Yu. I. Ionin

M920. a) Find at least one solution of the equation

$$x^3+y^3+z^3=x^2y^2z^2$$

in natural numbers.

b)* Prove that the equation

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

has natural solutions only when $n=1$ and $n=3$ and find all these solutions.

R. A. Mazov

P928. Two identical half cylinders of total mass m hang on an inelastic weightless string as shown on Fig. 1. What is the tension in the string and the force exerted by one half cylinder on the other?

L. G. Markovich

P929. It is known that water contained in a vessel can be brought to the boiling point while cooling the vessel and pumping out gas from it. Can boiling be acheived in cooling a closed vessel containing liquid and gas?

L. A. Ashkinazi

P930. The densities of charge on the rectangular plates of a flat capacitor are $+\sigma$ and $-\sigma$. The distance between the plates is much less than their size. Determine the tension of the electric field at the point A (see Fig. 2).

O. Ya. Savchenko

P931. A point source is located at the distance $2F$ from a lens Л of focal distance F. A non-uniformely transluscent round plate П of radius no less than that of the lens is placed behind the latter. A screen Э is placed at the distance $3F$ from the lens (Fig. 3). The spot obtained on the screen has the largest possible luminosity. How is the "transparency" of the plate distributed along its radius?

A. A. Lapides

P932. A guitar is tuned as follows: the second string is pressed in a definite spot and stretched until it sounds in unison with the first one, then the following strings are tuned in a similar way. Can a person who has no ear for music (i. e. is incapable of distinguishing a higher note from a lower one) tune a guitar?

I. I. Mazin

Решения задач

М896 — М900; Ф908 — Ф912

М896. *Про выпуклый четырехугольник ABCD известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.*

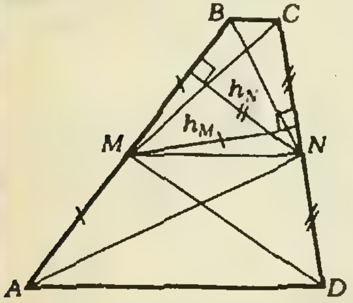


Рис. 1.

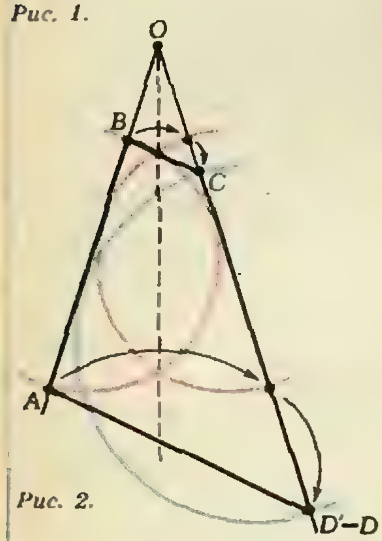


Рис. 2.

Первое решение. Пусть M и N — середины сторон AB и CD, h_M и h_N — расстояния от точек M и N до прямых CD и AB, a и b — длины сторон AB и CD (рис. 1). Очевидно, прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда каждая из них параллельна средней линии MN четырехугольника, то есть когда $S_{MNB}=S_{MNC}$ и $S_{MNA}=S_{MND}$. (Буквой S, как обычно, обозначены площади соответствующих треугольников.) А поскольку $S_{MNA}=$ $=S_{MNB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\cdot h_N=\frac{ah_N}{4}$ и, аналогично, $S_{MNC}=$ $=S_{MND}=\frac{bh_M}{4}=\frac{ab}{8}$ (по условию $h_M=a/2$), прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда $h_N=b/2$, то есть когда окружность с диаметром CD касается AB.

Второе решение. Допустим сначала, что прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 2). Выполним последовательно симметрию относительно биссектрисы угла AOD и гомотетию с центром O и коэффициентом OC/OB (так, чтобы точка B перешла в C). При этом точка A перейдет в некоторую точку D' на луче OD, а окружность с диаметром AB — в окружность с диаметром CD', которая, очевидно, касается прямой AB. Прямые BC и AD' параллельны, так как $OC:OB=OD':OA$. Поэтому для завершения доказательства остается заметить, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда $D=D'$.

Случай $AB\parallel CD$ рассматривается аналогично: надо только за ось симметрии взять прямую, равноудаленную от AB и CD, а гомотетию заменить параллельным переносом.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

◆

М897. *Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число*

$$(x+y)^7-x^7-y^7$$

делится на 7^7, а число $(x+y)\,xy$ не делится на 7.

Ответ: одна из искомых пар — $x=1$, $y=18$.

Преобразуем данное выражение:

$$(x+y)^7-x^7-y^7=$$
$$=7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6=$$
$$=7xy\,(x^5+3x^4y+5x^3y^2+5x^2y^3+3xy^4+y^5)=$$
$$=7xy\,(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)=$$
$$=7xy\,(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Для того чтобы это выражение делилось на 7^7, необходимо, чтобы x^2+xy+y^2 делилось на 7^3 (по условию $xy\,(x+y)$ не делится на 7). Положим $x=1$ и попробуем найти такое y, чтобы $1+y+y^2=$ $=7^3=343$. Это квадратное уравнение имеет корни $y_1=18$ и $y_2=-19$, таким образом, одно из решений задачи — (1; 18).

Можно показать, что все пары целых чисел (x, y), для которых x^2+xy+y^2 делится на 7^3 (то есть решения нашей задачи), описываются формулами: $(343n+k,\ 343m+18k)$, $(343n+18k,$

$343m+k)$, $(343n-19k,\ 343m+k)$, $(343n+k,\ 343m-19k)$, где n, k, m — произвольные целые числа.

А. П. Савин

◆

M898*. *Для нечетных натуральных чисел $a<b<c<d$ выполнены условия: $ad=bc$, $a+d=2^k$ и $b+c=2^m$, где k и m — некоторые натуральные числа. Докажите, что*

а) $a=1$;

б) для каждого $m\geqslant 3$ существует, причем только один, набор чисел a, b, c, d, k, удовлетворяющий этим условиям.

а) Установим сначала, что $k>m$. Используя данные соотношения, получим:

$$2^k-2^m=a+d-(b+c)=$$
$$=a-b+d-\frac{ad}{b}=\frac{d}{b}(b-a)-(b-a)=$$
$$=(b-a)\left(\frac{d}{b}-1\right)>0$$

(поскольку $b>a$, $d>b$), следовательно, $k>m$.

Докажем теперь, что $a+b=2^{m-1}$. Равенство $ad=bc$ можно переписать в виде $a(2^k-a)=b(2^m-b)$, то есть $b^2-a^2=2^mb-2^ka=2^m(b-2^{k-m}a)$. Таким образом, произведение чисел $b+a$ и $b-a$ делится на 2^m (мы видели, что 2^{k-m} — целое число). В то же время их сумма равна $2b$, а b — нечетное число, поэтому оба эти числа не могут одновременно делиться на 4. А так как эти числа четные, одно из них должно делиться на 2^{m-1} (а другое — только на 2^1). Но $b-a<b<(b+c)/2=2^{m-1}$, поэтому на 2^{m-1} делится $a+b$. Учитывая неравенство $a+b<b+c=2^m$ заключаем, что $a+b=2^{m-1}$.

Таким образом, $b=2^{m-1}-a$, следовательно, $c=2^m-b=2^{m-1}+a$, а $ad=bc=2^{2m-2}-a^2$, то есть $a(a+d)=2^{2m-2}$. Поскольку a — нечетное число, последнее равенство возможно только при $a=1$.

б) Из полученных в конце пункта а) соотношений следует, что числа a, b, c, d и k удовлетворяют условию задачи тогда и только тогда, когда $a=1$, $b=2^{m-1}-1$, $c=2^{m-1}+1$, $d=2^{2m-2}-1$, $k=2m-2$ при $m\geqslant 3$.

А. П. Савин

◆

M899. *Назовем округлением нецелого числа x замену его на одно из двух ближайших целых чисел ($[x]$ или $[x]+1$).*

а) Докажите, что в любом равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ все нецелые слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.

б) В таблицу из m строк и n столбцов записаны некоторые числа, причем суммы их по строкам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и по столбцам $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые числа. Докажите, что все нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам не изменятся.

в) Пусть теперь суммы $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ не обязательно целые. Докажите, что нецелые числа в таблице мож-*

а) Прежде всего, заметим, что утверждение задачи достаточно доказать для равенства вида

$$x_1+\ldots+x_m=0. \qquad (*)$$

(Общий случай сведется к этому, если перенести все слагаемые из правой части в левую и учесть, что округления числа $-y_i$ совпадают с округлениями y_i, взятыми со знаком минус, поскольку $-[y_i]-1\leqslant -y_i\leqslant -[y_i]$.)

Будем округлять числа x_i в равенстве $(*)$ поочередно: одно из них будет округляться, а какое-то другое мы одновременно изменим на такую же величину в противоположном направлении — при этом данное равенство не нарушится. Надо только позаботиться, чтобы округления изменяемых чисел оставались прежними. После не более чем $m-1$ таких шагов мы округлим все числа в равенстве $(*)$, причем оно останется верным.

Итак, пусть в равенстве $(*)$ есть нецелые числа. Очевидно, их, по крайней мере, два, скажем, x_i

но округлить так, что их суммы по строкам и столбцам будут округлением соответствующих сумм $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

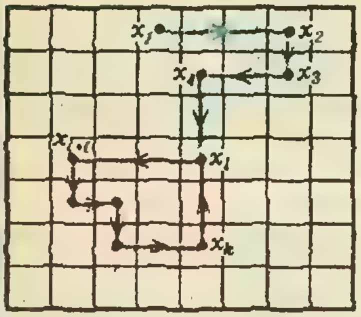


Рис. 1.

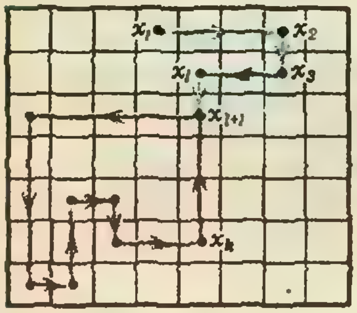


Рис. 2.

и x_j. Допустим, что расстояние d от x_i до ближайшего целого x_i' не больше такого же расстояния для x_j. Заменим x_i на x_i', а x_j на $x_j'=x_j+(x_i-x_i')$. При этом число округленных слагаемых увеличится, их сумма останется нулевой, а округления числа x_j' будут такими же, как у x_j, так как $[x_j]\leqslant x_j'\leqslant[x_j]+1$.

б), в) Будем действовать по тому же плану, как в пункте а). Припишем к i-й строке число $-a_i$, $i=1, \ldots, m$, под j-м столбцом — число $-b_j$, $j=1, \ldots, n$, а в правом нижнем углу этой расширенной таблицы поставим сумму всех данных чисел $s=a_1+\ldots+a_m=b_1+\ldots+b_n$. Очевидно, достаточно доказать утверждение б) (или в)) для новой таблицы, то есть при условии, что суммы чисел по всем строкам и столбцам равны нулю. Чтобы это условие сохранилось при округлении очередного числа, нам надо будет вместе с этим числом изменить целую цепочку чисел, причем их округления должны остаться прежними. Опишем построение такой цепочки.

Возьмем в таблице какое-нибудь нецелое число x_1; в одной строчке с ним обязательно есть еще одно нецелое число x_2, в одном столбце с x_2 — нецелое x_3, в одной строчке с x_3 — нецелое x_4 и т. д. (см. рисунки 1, 2). В какой-то момент мы непременно придем к числу, которое стоит в одном ряду (строке или столбце) с числом, встречавшимся ранее. Пусть x_k — первое такое число и пусть оно стоит, скажем, в одном столбце с x_l ($l<k$).

Предположим, что x_{l+1} стоит в одной строке с x_l (рис. 1). Тогда рассмотрим цепочку чисел $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k$. Любые два последовательных числа в этой цепочке стоят в одном ряду (следующим за x_k считаем x_l), причем на каждом шагу цепочка «поворачивает на 90°», поэтому в одной строке, а также в одном столбце с любым из них стоит еще ровно одно, а общее количество чисел в цепочке четно. Выберем то из них, которое стоит ближе всего к целому числу (если таких несколько, то любое из них), пусть это число x_i, а ближайшее целое число равно x_i+d. Заменим x_i на его округление x_i+d и, двигаясь по цепочке, будем к каждому следующему числу поочередно добавлять $-d$ или d (x_{i+1} заменим на $x_{i+1}-d$, x_{i+2} — на $x_{i+2}+d$ и т. д.). Когда мы пройдем всю цепочку, получится новая таблица с нулевыми суммами по строкам и столбцам, округления всех нецелых чисел в ней будут такими же, как раньше, а количество целых чисел возрастет.

Если окажется, что x_{l+1} стоит в одном столбце с x_l (рис. 2), то точно такое же рассуждение надо провести с цепочкой $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_k$.

После нескольких повторений этой операции все числа в таблице станут целыми.

Для задачи в) мы попутно доказали, что сумма построенных нами округлений чисел исходной таблицы является округлением их суммы.

А. П. Савин

От редакции. Нашим читателям, видимо, будет интересно узнать, что решением задачи М899 (неожиданно для ее автора и для редакции) заинтересовались работники одного из всесоюзных проектных институтов, занимающиеся разработкой комплекса программ ЭВМ, планирующего распределение рабочего времени сотрудников по хоздоговорным темам.

◆

М900. *Может ли проекция на плоскость выпуклого многогранника с 6 гранями быть: а) 8-угольником? б) 9-угольником? в)* Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?*

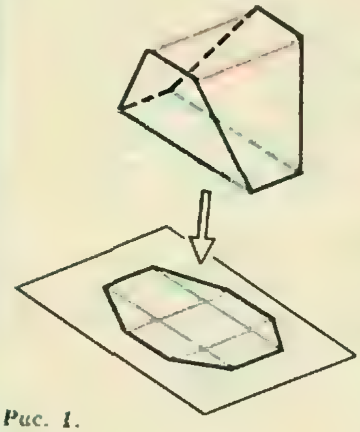


Рис. 1.

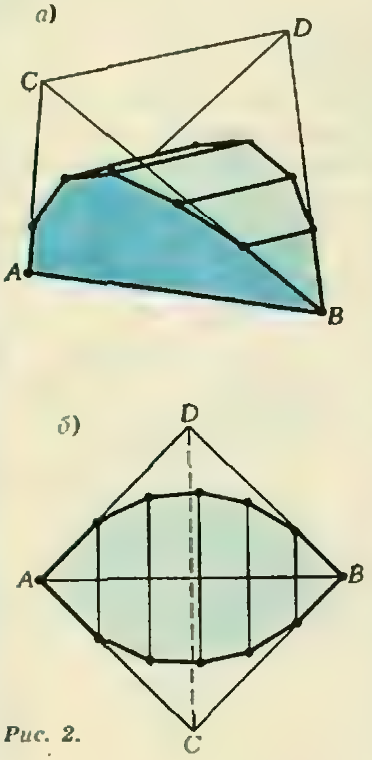


Рис. 2.

а) Ответ: может; см. пример на рисунке 1.

б) Ответ: не может. Доказательство приводится ниже (пункт в)) сразу для общего случая.

в) Ответ: $2n-4$ стороны. Пример n-гранника с $(2n-4)$-угольной проекцией можно получить, срезая у правильного тетраэдра $ABCD$ ребро CD призматической поверхностью с $n-4$ гранями, образующие которой параллельны CD (рис. 2, *а*). Ортогональная проекция этого многогранника на плоскость, параллельную ребрам AB и CD, имеет $2n-4$ стороны (рис. 2, *б*). Докажем, что большего числа сторон получить нельзя.

Мы можем предположить, что направление проектирования не параллельно ни одной из граней данного многогранника (иначе можно слегка повернуть многогранник; при этом число вершин проекции может лишь увеличиться). Обозначим его проекцию через П. Ребра многогранника, проектирующиеся на стороны многоугольника П, образуют замкнутый контур, который разбивает поверхность многогранника на два куска. Ребра, лежащие внутри одного куска, окрасим красным цветом, внутри другого — синим. Соответственно окрасим и проекции ребер. В дальнейшем будем рассматривать только проекцию.

Заметим, что из каждой вершины многоугольника П выходит по крайней мере одно красное или синее ребро. Оценим число $m_{\text{к}}$ тех его вершин, из которых выходит хотя бы одно красное ребро. Пусть $p_{\text{к}}$ — число красных ребер; они задают некоторое разбиение многоугольника П. Число многоугольников в этом разбиении обозначим через $n_{\text{к}}$, а число их вершин, лежащих внутри П, — $q_{\text{к}}$ (рис. 3). Из каждой такой вершины выходит не менее трех красных ребер, поэтому число концов красных ребер $2p_{\text{к}}$ не меньше $m_{\text{к}}+3q_{\text{к}}$, то есть

$$m_{\text{к}}+3q_{\text{к}}\leqslant 2p_{\text{к}}. \qquad (1)$$

Ниже мы докажем, что

$$p_{\text{к}}=n_{\text{к}}+q_{\text{к}}-1. \qquad (2)$$

Подставляя это выражение для $p_{\text{к}}$ в (1), получаем: $m_{\text{к}}\leqslant 2n_{\text{к}}-q_{\text{к}}-2\leqslant 2n_{\text{к}}-2$. Складывая это неравенство с аналогичным неравенством для «синего» разбиения и учитывая, что число m вершин многоугольника П не превосходит $m_{\text{к}}+m_{\text{с}}$ и что $n_{\text{к}}+n_{\text{с}}$ — это число n граней данного многогранника, получим нужную оценку:

$$m\leqslant m_{\text{к}}+m_{\text{с}}\leqslant 2\,(n_{\text{к}}+n_{\text{с}})-4=2n-4.$$

Формула (2), по сути дела, эквивалентна известной формуле Эйлера для «плоского графа», составленного из красных ребер (читателям нашего журнала может быть более знакома формула Эйлера для выпуклого многогранника: В—Р+Г=

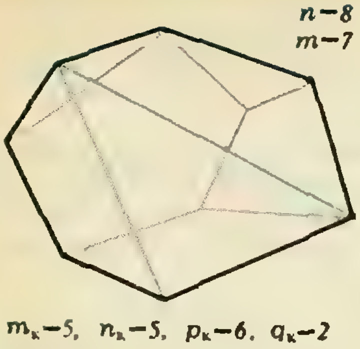


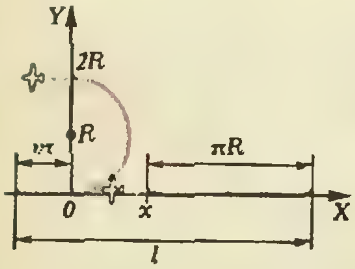
Рис. 3.

$=2$, где В, Р и Г — количества его вершин, ребер и граней *)). Мы выведем (2), следуя одному из многочисленных доказательств формулы Эйлера.

Подсчитаем двумя путями сумму σ всех углов всех многоугольников «красного» разбиения. Сумма углов при вершинах многоугольника П равна $(m-2)\pi$, а сумма углов при $q_к$ «внутренних» вершинах — $2q_к\pi$. Следовательно, $\sigma=(m-2+2q_к)\pi$. С другой стороны, сложив суммы углов каждого из многоугольников разбиения, то есть величин вида $(k-2)\pi$, где k — число сторон многоугольника, мы найдем, что $\sigma=(N-2n_к)\pi$, где N — сумма чисел сторон всех этих многоугольников, равная $m+2p_к$. Таким образом, $m-2+2q_к=m+2p_к-2n_к$, откуда вытекает (2).

М. Д. Ковалев

Ф908. *Самолеты летят по одной прямой навстречу друг другу с одинаковой скоростью v. Предельная дальность обнаружения — l. Один самолет после обнаружения другого совершает разворот, не меняя значения скорости, и летит параллельно второму самолету, который продолжает лететь со скоростью $\vec{v}$. Потеряют ли самолеты друг друга из виду после разворота, если ускорение при повороте равно a? Спустя какое время после обнаружения надо начинать разворот, чтобы в конце разворота расстояние между самолетами оказалось наименьшим?*



◆

Радиус разворота найдем из уравнения $a=v^2/R$:

$$R=v^2/a.$$

Время, за которое происходит разворот, —

$$T=\pi R/v.$$

Направим ось X по начальной скорости первого самолета, а начало координат возьмем в начальной точке разворота. Если разворот начат через время τ после обнаружения, то координата x второго самолета к концу разворота будет

$$x=l-2vt-vT=l-\pi R-2v\tau;$$

к этому моменту координата y первого самолета будет $y=2R$ (см. рисунок). Поэтому расстояние между самолетами после разворота определяется равенством

$$L^2=x^2+y^2=(l-\pi R-2v\tau)^2+4R^2.$$

Понятно, что значение $L(\tau)$ минимально при минимально возможном значении $|x(\tau)|$ (y не зависит от τ). В связи с этим возникают два случая: при $l\geqslant\pi R$ наименьшее $L=2R$ достигается при $x=0$, то есть когда

$$\tau=\frac{l-\pi R}{2v}=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{v}-\frac{\pi v}{a}\right);$$

при $l<\pi R$ значение L минимально при $\tau=0$ и равно

$$L=\sqrt{4R^2+(l-\pi R)^2}.$$

В случае $l\geqslant\pi R$ наименьшее значение $L=2R$ заведомо меньше предельной дальности обнаружения. Найдем, при каком наименьшем $l=l_0$ самолеты останутся еще в пределах видимости после разворота, то есть когда

$$L^2=4R^2+(l_0-\pi R)^2=l_0^2.$$

Разрешая это уравнение относительно l_0, получим

$$l_0=\frac{4+\pi^2}{2\pi}R=\frac{4+\pi^2}{2\pi}\frac{v^2}{a}.$$

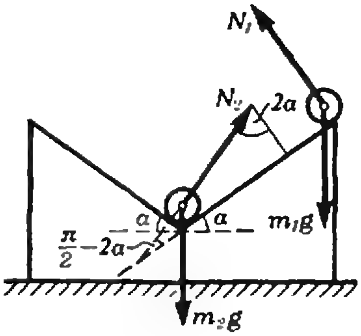
Итак, при $l\geqslant l_0$ самолеты не потеряют друг друга из виду. В противоположном случае ($l<l_0$) после разворота они окажутся вне пределов обнаружения.

И. И. Воробьев

---

*) См., например, статью М. Шубина «Топология и рельеф местности» («Квант», 1982, № 8, с. 14).

Ф909. *На невесомой горке, образованной двумя гладкими плоскостями, каждая из которых составляет угол α с горизонтальной плоскостью (см. рисунок), находятся два шарика. Горка может без трения скользить по горизонтальной плоскости. Верхний шарик, масса которого m_1, отпускают. При каком условии нижний шарик, масса которого m_2, начнет после этого «забираться» на горку?*



Ясно, что если второй шарик будет достаточно легким, он начнет подниматься на горку. Найдем его предельную массу m_2^0, при которой он еще не начал подниматься, но уже перестал давить на правую наклонную плоскость.

Поскольку горка невесомая, при этом условии сумма горизонтальных проекций сил давления, действующих на горку со стороны шариков, должна быть равна нулю. Это означает, что (см. рисунок)

$$N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \alpha, \text{ то есть } N_1 = N_2.$$

Кроме того, поскольку второй шарик не поднимается, проекции ускорений шариков на нормаль к правой наклонной плоскости должны быть одинаковые (и равны проекции ускорения горки на это направление). Как видно из рисунка, угол между силой $\vec{N}_2$ и правой наклонной плоскостью равен $90° - 2\alpha$, и, следовательно последнее условие можно записать в виде

$$\frac{m_1 g \cos \alpha - N_1}{m_1} = \frac{m_2^0 g \cos \alpha - N_2 \cos 2\alpha}{m_2^0}.$$

Отсюда находим:

$$m_2^0 = m_1 \cos 2\alpha.$$

Таким образом, нижний шарик будет «забираться» на горку, если выполнено условие $m_2 < m_1 \cos 2\alpha$.

А. И. Буздин

◆

Ф910. *На цилиндр радиуса R одето равномерно растянутое резиновое кольцо массы m. Длина кольца в нерастянутом состоянии равна πR, жесткость резины — k. Цилиндр начинают раскручивать с постоянным угловым ускорением β. Через какое время кольцо начнет проскальзывать относительно цилиндра, если коэффициент трения кольца о цилиндр равен μ? Чему будет равна при этом угловая скорость кольца?*

Рассмотрим маленький элемент кольца, который виден из центра кольца в угле $\Delta\alpha$ (см. рисунок). Масса этого элемента $\Delta m = \frac{m}{2\pi} \cdot \Delta\alpha$. На него действуют сила $\vec{N}$ нормальной реакции со стороны цилиндра, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и силы натяжения со стороны соседних участков кольца (силой тяжести мы пренебрегаем). Так как кольцо растянуто равномерно, силы натяжения по абсолютной величине одинаковы и равны $T = k\pi(2R - R) = k\pi R$. Равнодействующая всех этих сил сообщает элементу кольца ускорение $\vec{a}$. Проекция $\vec{a}$ на направление радиуса — это центростремительное ускорение $a_{\text{ц}}(t)$ в данный момент времени, а проекция $\vec{a}$ на направление касательной к цилиндру — это тангенциальное ускорение $a_\tau(t)$ в данный момент. Поскольку линейная скорость $v(t)$ связана с угловой скоростью $\omega(t)$ соотношением $v(t) = \omega(t) \cdot R = \beta R t$ ($t = 0$ — начало вращения),

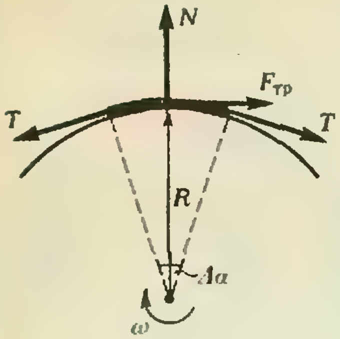
$$a_{\text{ц}}(t) = \frac{(v(t))^2}{R} = \beta^2 R t^2,$$

$$a_\tau(t) = (v(t))' = \beta R.$$

Пусть проскальзывание кольца начинается через время τ после начала вращения. Согласно второму закону Ньютона, при $0 < t < \tau$

$$2T \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} - N(t) = \Delta m \cdot a_{\text{ц}}(t) = \frac{m}{2\pi} \cdot \Delta\alpha \cdot \beta^2 R t^2, \tag{1}$$

$$F_{\text{тр}} = \Delta m \cdot a_\tau(t) = \frac{m}{2\pi} \cdot \Delta\alpha \cdot \beta R \tag{2}$$



(мы учли, что $\Delta\alpha$ настолько мало, что $\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\approx\frac{\Delta\alpha}{2}$).

Все это время $F_{тр}$ — сила трения покоя. По мере роста скорости сила $N(t)$ уменьшается. Соответственно уменьшается максимальное значение $\mu\cdot N(t)$ силы трения покоя; в момент времени τ оно сравняется со значением $F_{тр}=\Delta m\cdot\beta R$ — начнется проскальзывание.

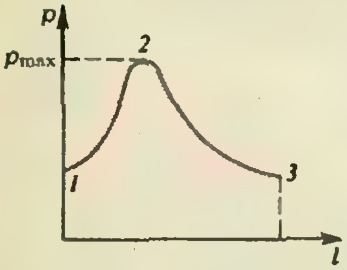
Подставляя в (1) и (2) $t=\tau$ и $F_{тр}=\mu\cdot N(\tau)$, находим значение τ:

$$\tau=\sqrt{\left(\frac{2\mu k\pi^2}{m}-\beta\right)/\mu\beta^2}.$$

А. А. Лапидес

◆

Ф911. *На рисунке приведен график изменения давления пороховых газов в стволе ружья по мере продвижения пули в стволе. Определите скорость сгорания пороха (в кг/с) при давлении p_{max}, если скорость пули в этот момент равна v. Площадь поперечного сечения ствола равна s. Температуру пороховых газов считать постоянной. Известно, что пороховые газы, образующиеся при сгорании массы пороха M, в объеме V_0 создают давление p_0.*



Изменение давления пороховых газов в стволе происходит за счет изменения массы сгорающего пороха и за счет изменения объема, занимаемого газами, по мере продвижения пули. По первой причине должно происходить увеличение давления, по второй — уменьшение. Как видно из рисунка, на участке 1—2 преобладает первая тенденция, а на участке 2—3 — вторая. В момент времени τ, когда давление равно p_{max}, увеличение давления за счет сгорания пороха компенсирует уменьшение давления за счет продвижения пули.

Запишем уравнение состояния газов в тот момент времени τ, когда давление их равно p_{max}:

$$p_{max}V=\frac{m}{\mu}RT,$$

где m — масса сгоревшего к этому времени пороха, V — объем пространства в стволе за пулей. Пусть за малый промежуток времени $\Delta\tau$, в течение которого давление можно считать постоянным и равным p_{max}, сгорает масса пороха Δm. Объем запульного пространства за это время увеличился на

$$\Delta V_1=vs\cdot\Delta\tau$$

($\Delta\tau$ настолько мало, что скорость v пули можно считать постоянной). Давление газов за время $\Delta\tau$ не изменилось; это означает, что газ, образовавшийся при сгорании массы Δm пороха, при давлении p_{max} занимает как раз объем ΔV_1, то есть

$$p_{max}\cdot\Delta V_1=\frac{\Delta m}{\mu}RT,\text{ или } p_{max}vs\cdot\Delta\tau=\frac{\Delta m}{\mu}RT.$$

Из последнего равенства находим скорость сгорания пороха в момент времени τ:

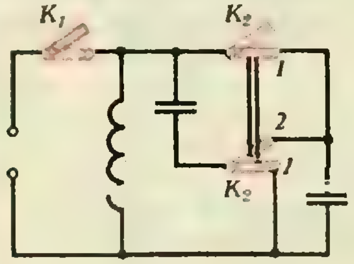
$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=p_{max}vs\,\frac{\mu}{RT}.$$

Из условия задачи известно, что $p_0V_0=\frac{M}{\mu}RT$. Отсюда находим, что $\frac{RT}{\mu}=\frac{p_0V_0}{M}$, и окончательно получаем

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=\frac{Mp_{max}sv}{p_0V_0}$$

Л. Г. Маркович

Ф912. *В катушке из сверхпроводящего провода создают постоянный ток, подключив ее к источнику тока через ключ K_1 (см. рисунок). После этого к концам катушки подключают батарею из двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Ключ K_1 размыкают, после чего ток начинает течь через конденсаторы, заряжая их. В момент времени, когда напряжение на конденсаторах максимально, а ток равен нулю, двойной ключ K_2 перебрасывают из положения 1 в положение 2, так что конденсаторы оказываются включенными последовательно, а напряжение на катушке удваивается. Поскольку индуктивность катушки не изменилась, а напряжение возросло, максимальный ток через катушку, а значит, и запасенная энергия будут больше первоначальных. Найдите ошибку в приведенных рассуждениях.*



При обоих положениях ключа K_2 система представляет собой колебательный контур. Индуктивность, входящая в контур, в обоих случаях одна и та же, а емкость — разная: в положении 1 $C_1=2C$, а в положении 2 $C_2=\frac{1}{2}C$. Соответственно различны частоты собственных колебаний в контуре:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{LC_1}}=\sqrt{\frac{1}{2LC}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{1}{LC_2}}=\sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

Поэтому индуктивное сопротивление в цепи при различных положениях ключа K_2 оказывается различным:

$$X_{1L}=\omega_1 L=\sqrt{\frac{L}{2C}},\quad X_{2L}=\omega_2 L=\sqrt{\frac{2L}{C}},$$

то есть

$$X_{2L}=2X_{1L}$$

— индуктивное сопротивление в положении 2 больше, чем в положении 1, в 2 раза.

Следовательно, увеличение напряжения на катушке в 2 раза «компенсируется» увеличением индуктивного сопротивления, а амплитудное значение тока в катушке остается неизменным:

$$I_{1m}=\frac{U_m}{X_{1L}},\quad I_{2m}=\frac{2U_m}{X_{2L}}=\frac{2U_m}{2X_{1L}}=I_{1m}.$$

Соответственно, энергия, запасенная в катушке, в обоих случаях одна и та же.

Д. В. Павлов

Формула площади сегмента

Площадь сегмента AnB (рис. 1) можно найти по формуле

$$\boxed{S_{\text{сегм}}=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha-\frac{R^2}{2}\sin\alpha,}\qquad(1)$$

где центральный угол α выражен в градусах; или, если этот же угол в радианах равен ϱ, по формуле

$$\boxed{S_{\text{сегм}}=\frac{R^2}{2}(\varrho-\sin\varrho).}\qquad(2)$$

Формулу (1) легко вывести: площадь сегмента AnB равна разности площадей сектора $OAnB$ ($\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, то есть площадь сектора в один градус, умноженная на количество градусов) и треугольника OAB ($(R^2/2)\sin\alpha$).

Эта полезная формула замечательна тем, что она верна не только для случая, когда $\alpha<180^\circ$ (как на рисунке 1), но и при любых α, в том числе $\alpha>180^\circ$ (рис. 2, 3). Действительно, при $\alpha>180^\circ$ (рис. 2) к площади сектора $OAnB$ нужно прибавить площадь треугольника OAB, но в этом случае $\sin\alpha<0$ и формула (2) снова дает правильный ответ! Случай $\alpha=180^\circ$ тоже подходит под формулу (2), так как тогда $\sin\alpha=0$, а площадь вырожденного треугольника OAB равна нулю (рис. 3).

При переходе через угол $\alpha=180^\circ$ знак синуса изменяется с плюса на минус; на рисунке это как раз отвечает тому, что заштрихованные фигуры нужно не вычитать, а складывать. Подобный же эффект наблюдается в теореме косинусов, когда знак меняется при переходе через угол $\gamma=90^\circ$.

Б. С. Эппель

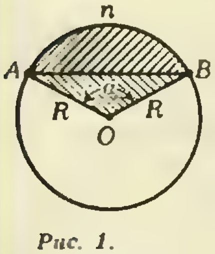


Рис. 1.

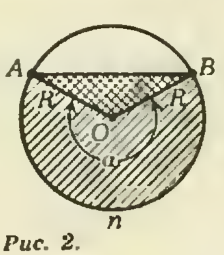


Рис. 2.

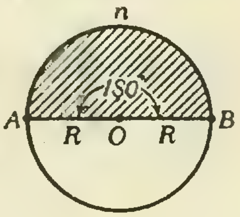


Рис. 3.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Рыбная ловля глазами ученого

Это было давно, когда я только кончил институт и приехал работать в будущую Дубну — маленький поселок Иваньково, окруженный со всех сторон водой. Естественно, что обилие воды вокруг привело к всеобщему увлечению водным туризмом и рыбалкой.

Я предпочитал байдарку, но рыбы вокруг было так много, что друзья уговорили меня посвятить рыбалке целый отпуск, чему немало содействовало решение нашего административного директора приобрести для отдыха сотрудников института старый списанный пароход. Я купил в Москве самый дорогой спиннинг, с трудом нашел в одном из магазинов редкую в то время безынерционную спиннинговую катушку и запасся всевозможными блеснами, от набора для начинающего рыболова до блесен для ловли тайменя.

Наконец, ключи от каюты на «Санта-Марии» (так назывался среди дубненцев наш пароход) были в моем кармане. Три недели каждый день с восхода солнца и до вечера я бросал блесну. Я уже знал все коряги на дне Московского моря, на которых навечно оставались мои блесны. Но улов не радовал. За три недели я поймал 3 рыбы: одну щуку и двух окуней, причем окуни зацепились за крючок плавниками. Выходило, что рыбу не интересовали ни блёсны на тайменя, ни блёсны начинающего спиннингиста. Зацеплялась она за мой крючок случайно.

На этом я закончил рыбалку и занялся расчетами. Если взаимодействие крючка с рыбой происходило случайно, то вероятность такого столкновения, как в ядерной физике, можно было характеризовать величиной, называемой сечением процесса. Естественно было предполагать, что сечение взаимодействия крючка с рыбой σ равно средней площади проекции одной рыбины на плоскость, перпендикулярную направлению движения блесны. Зная средний размер пойманных мною рыб и прикинув длину свободного пробега блесны λ (средний путь, пройденный блесной в воде до столкновения с очередным окунем), $\lambda \approx 5\cdot 10^6$ см, я вычислил из результатов трехнедельных экспериментов среднюю плотность рыбы в Московском море:

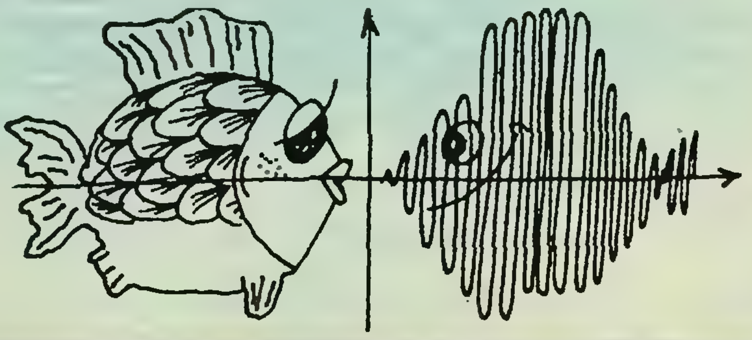
$$n=\frac{1}{\lambda\sigma}=\frac{1}{5\cdot 10^6\text{ см}\cdot 30\text{ см}^2}=10^{-8}\text{ см}^{-3}.$$

Проверить эту цифру было несложно. Рядом с «Санта-Марией» располагалась Конаковская рыболовецкая артель. На следующее утро с баркаса бригадира артели я оценил объем воды, прочесываемой неводом ($V \approx 10^{11}$ см^3), и сосчитал количество попавшихся в невод рыб ($N \approx 10^3$). Плотность рыб

$$n=\frac{N}{V}=10^{-8}\text{ см}^{-3}$$

совпала с оценкой из данных по блеснению. Эксперимент был закончен. Доказано, что мой новый спиннинг с безынерционной катушкой рыб не привлекал.

В. А. Свиридов



Метрические соотношения в треугольнике

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

Опыт проведения экзаменов в вузы показывает, что многие абитуриенты не обладают достаточными навыками в решении геометрических задач. Самые простые планиметрические задачи порой становятся камнем преткновения даже для тех абитуриентов, которые успешно справляются с вопросами по алгебре и тригонометрии. Причем это относится не только к задачам, для решения которых необходимо проявить определенную изобретательность, но и к задачам, решаемым с применением стандартных теорем и формул школьного курса, таких, как теорема косинусов, теорема синусов, формулы площади треугольника и др.

В настоящей статье рассматриваются задачи, в основном предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ. Из большого материала авторы отобрали задачи, при решении которых используются основные метрические соотношения между элементами треугольника.

Выпишем эти соотношения. Рассмотрим треугольник ABC и введем следующие обозначения: $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, r — радиус вписанной окружности, h_a — длина высоты, опущенной на сторону BC, S — площадь треугольника. Тогда

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R \quad \text{(теорема синусов)}, \qquad \text{(I)}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A} \quad \text{(теорема косинусов)}, \qquad \text{(II)}$$

$$S=\frac{1}{2}h_a a, \qquad \text{(III)}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}, \qquad \text{(IV)}$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\,r. \qquad \text{(V)}$$

Эти формулы абитуриент должен знать, уметь их доказывать, а также применять их при решении задач. Есть и другие формулы, знание которых уже не предусмотрено программой для поступающих, но которые часто бывают полезны при решении задач. Например, формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{(VI)}$$

где $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника или формула

$$S=\frac{abc}{4R}, \qquad \text{(VII)}$$

которая легко получается, подставляя значение $\sin\widehat{A}$, найденное из теоремы синусов (I), в формулу (IV).

Начнем с задач на применение теоремы синусов.

1. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Определите величину угла ADB.*

Решение. Пусть α — искомый угол, O — точка пересечения отрезков AD и CE (рис. 1). В $\triangle ADC$ биссектриса CO является одновременно высотой, значит, $\triangle ADC$ — равнобедренный и $\widehat{DAC}=\widehat{ADC}=\pi-\alpha$, $\widehat{A}=\widehat{C}=2\alpha-\pi$, $\widehat{BAD}=\widehat{A}-\widehat{DAC}=3\alpha-2\pi$. В треугольнике $\widehat{ABD}$ согласно условию $|BD|=1/2|AB|$. Применяя теорему синусов, получаем $\frac{|AB|}{\sin\alpha}=\frac{|BD|}{\sin(3\alpha-2\pi)}$, откуда $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin 3\alpha}$, $2\sin 3\alpha=\sin\alpha$, $2\sin\alpha\,(3-4\sin^2\alpha)=\sin\alpha$, $\sin^2\alpha=5/8$. Но из условия задачи следует, что $\widehat{DCO}=\alpha-\pi/2>0$, с другой стороны, $\alpha<\pi$, то есть $\pi/2<\alpha<\pi$, поэтому $\sin\alpha=\sqrt{10}/4$, $\alpha=\pi-\arcsin\sqrt{10}/4$.

Ответ: $\pi-\arcsin\sqrt{10}/4$.

2. *В равнобедренном треугольнике ABC длина высоты BD, опущенной на основание, равна h, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.*

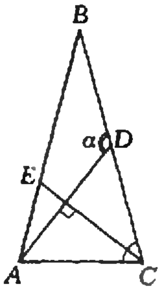


Рис. 1.

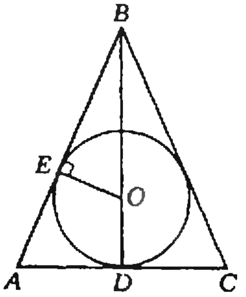


Рис. 2.

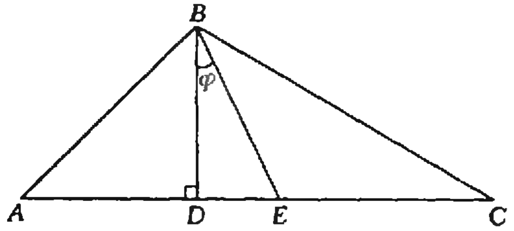


Рис. 3.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, E — точка касания окружности с отрезком AB, $|AC| = b$ (рис. 2). По теореме синусов радиус R описанной окружности равен $\frac{b}{2\sin\widehat{B}}$. Из $\triangle BOE$ находим $\sin\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{r}{h-r}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b}{2h}$, отсюда

$$b = 2h\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} \text{ и } R = \frac{h\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\widehat{B}} =$$

$$= \frac{h}{2\cos^2\frac{\widehat{B}}{2}} = \frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$$

Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

3. *Углы при вершинах A и C треугольника ABC соответственно равны $\pi/4$ и $\pi/6$. Найдите угол между высотой BD и медианой BE этого треугольника.*

Решение. Обозначим $|AB| = c$, $|AC| = b$, $\widehat{DBE} = \varphi$ (рис. 3). Тогда $|AD| = c\cos\widehat{A} = c\sqrt{2}/2$, $|DE| = |BD| \times \times \operatorname{tg}\varphi = (c\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi)/2$. Следовательно, $b/2 = |AE| = |AD| + |DE| = c\sqrt{2} \times \times (1 + \operatorname{tg}\varphi)/2$. По теореме синусов для $\triangle ABC$ получаем $\frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$, где

$$\sin\widehat{B} = \sin(\pi - \widehat{A} - \widehat{C}) = \sin(\widehat{A} + \widehat{C}) = \\ = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \\ \times (1 + \sqrt{3}).$$

Отсюда находим

$$\frac{c}{1/2} = \frac{4c(1+\operatorname{tg}\varphi)}{1+\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \qquad (1)$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

При решении следующих задач используется теорема косинусов.

4. *Биссектрисы AD и CF треугольника ABC пересекают стороны BC и AB в точках D и F соответственно. Найдите длину отрезка FD, если $|AC| = 6$, $|AF| = 2$, $|CD| = 3$.*

Решение. Обозначим $|BD| = x$, $|BF| = y$ (рис. 4). Воспользуемся важным свойством биссектрисы: биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон. Таким образом, $|AB|/|AC| = x/3$, $|BC|/|AC| = y/2$ или $(2+y)/6 = x/3$, $(x+3)/6 = y/2$, откуда $x = 9/5$, $y = 8/5$, $|AB| = 18/5$, $|BC| = 24/5$. Для вычисления $|DF|$ воспользуемся теоремой косинусов для $\triangle FBD$.

$$|DF|^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\widehat{B}, \qquad (2)$$

где $\cos\widehat{B}$, в свою очередь, найдем из соотношения $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cos\widehat{B}$. Подставляя най-

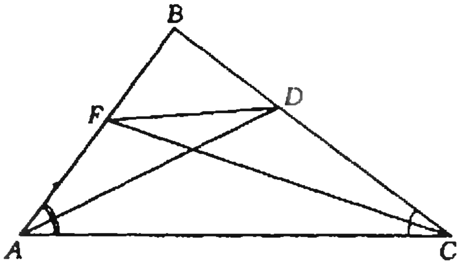


Рис. 4.

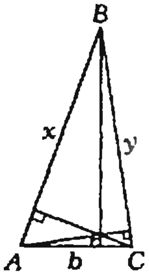


Рис. 5

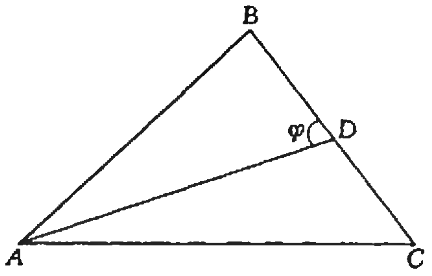


Рис. 6.

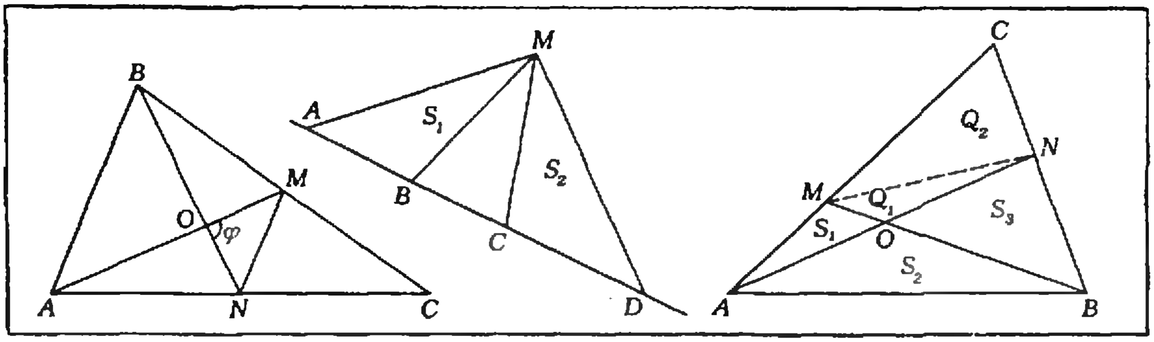


Рис. 7. *Рис. 8.* *Рис. 9.*

денные значения длин сторон $\triangle ABC$, получаем $36=\frac{18^2}{25}+\frac{24^2}{25}-\frac{2\cdot18\cdot24}{25}\times\cos\widehat{B}$, откуда $\cos\widehat{B}=0$, $\widehat{B}=\pi/2$, $|DF|=\sqrt{145/5}$.

Ответ: $\sqrt{145/5}$.

5. *В треугольнике ABC: $\widehat{B}=\arccos\frac{7}{8}$, $|AC|=b$, а высота, опущенная из вершины B, равна сумме двух других высот. Найдите площадь треугольника ABC.*

Решение. Пусть $|AB|=x$, $|BC|=y$ (рис. 5). Тогда по теореме косинусов

$$b^2=x^2+y^2-2xy\cos\widehat{B}=x^2+y^2-\frac{7}{4}xy. \tag{3}$$

Далее, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_x=\frac{2S}{x}$, $h_y=\frac{2S}{y}$, где S — площадь $\triangle ABC$, а h_b, h_x, h_y — его высоты. Так как по условию задачи $h_b=h_x+h_y$, то $\frac{1}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ или $x+y=\frac{xy}{b}$, откуда $x^2+y^2=\frac{(xy)^2}{b^2}-2xy$. Отсюда и из уравнения (3) получаем уравнение относительно $z=xy$:

$$b^2=\frac{z^2}{b^2}-2z-\frac{7}{4}z,$$

откуда $z=xy=4b^2$. Поэтому $S=\frac{xy\sin\widehat{B}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

Замечание к теореме косинусов. С помощью теоремы косинусов легко получить формулу, выражающую длину медианы через длины сторон треугольника. Обозначим $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$, длину медианы AD через m_a, $\widehat{BDA}=\varphi$ (рис. 6). По теореме косинусов для треугольников ABD и ADC получаем:

$$a^2/4+m_a^2-am_a\cos\varphi=c^2,$$
$$a^2/4+2m_a^2-am_a\cos(\pi-\varphi)=b^2.$$

Складывая эти уравнения и используя то, что $\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$, находим $a^2/2+2m_a^2=c^2+b^2$, откуда

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}. \tag{4}$$

6. *В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $|BC|^2+|AC|^2=5|AB|^2$. Найдите угол между медианами AM и BN.*

Решение. Обозначим $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$, $\widehat{NOM}=\varphi$, $|AM|=m_a$, $|BN|=m_b$ (рис. 7). Поскольку в точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то согласно формуле (4), получаем:

$$|OM|=\frac{m_a}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

$$ON=\frac{m_b}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}.$$

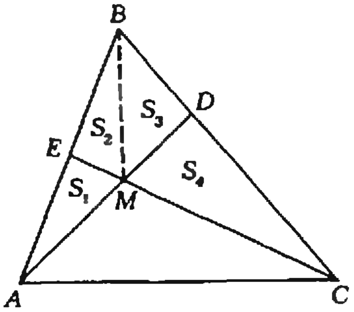


Рис. 10.

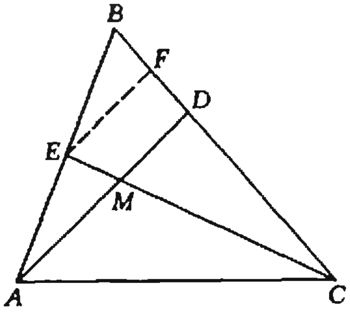


Рис. 11.

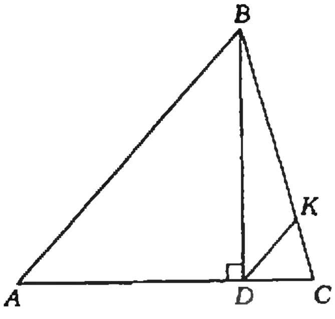


Рис. 12.

По теореме косинусов для $\triangle NOM$ с учетом того, что $|MN|=\frac{c}{2}$, находим $\frac{m_a^2}{9}-\frac{m_b^2}{9}-\frac{2m_am_b}{9}\cos\varphi=\frac{c^2}{4}$ или $2b^2+$ $+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2-8m_am_b\cos\varphi=$ $=9c^2$, откуда $8m_am_b\cos\varphi=a^2+b^2-5c^2$. Значит, $\varphi=\pi/2$.

Ответ: $\pi/2$.

Рассмотрим несколько задач, в которых применяются различные формулы для вычисления площади S треугольника ABC.

Используя формулу (III), легко доказать следующее утверждение: если отрезки AB и CD лежат на одной прямой, не проходящей через точку M, и S_1 и S_2 — площади треугольников MAB и MCD соответственно (рис. 8), то

$$S_1/S_2=|AB|/|CD|. \qquad (5)$$

7. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O (рис. 9). Найдите площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON соответственно S_1, S_2, S_3.*

Решение. Пусть $S_{\triangle MON}=Q_1$, $S_{\triangle CMN}=Q_2$. Из (5) следует, что $S_1/Q_1=|AO|\,/\,|ON|=S_2/S_3$, откуда $Q_1=S_1S_3/S_2$. Аналогично $Q_2/(Q_1+$ $+S_3)=|CN|/|NB|=(Q_2+Q_1+S_1)\,/$ $/\,(S_2+S_3)$, откуда $Q_2=(Q_1^2+Q_1S_1+$ $+Q_1S_3+S_1S_3)/(S_2-Q_1)$. Подставляя в последнюю формулу найденное значение Q_1, получаем Q_2.

Ответ: $\frac{S_1S_3(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

8. *В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $|BD|:|CD|=1:2$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?*

Первый способ решения основан на сравнении площадей треугольников. Пусть M — точка пересечения $[AD]$ и $[CE]$ (рис. 10). Обозначим S_1, S_2, S_3, S_4 площади треугольников AEM, EMB, MBD, CMD соответственно. Используя формулу (5), получаем:

$$S_1=S_2,\ S_4=2S_3,$$

$$S_{\triangle ABD}=2S_1+S_3=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle EBC}=3S_3+S_1=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

Отсюда $S_{\triangle ABC}=3\,(2S_1+S_3)=2\,(3S_3+$ $+S_1)$, или $3S_3=4S_1$. Теперь легко найдем искомое отношение: $|AM|:|MD|=$ $=S_{\triangle ABM}:S_{\triangle BMD}=2S_1:S_3=3:2$.

Второй способ. Проведем через точку E прямую EF, параллельную (AD) и пересекающую сторону BC в точке F (рис. 11). Тогда $[EF]$ — средняя линия в треугольнике ABD и поэтому $|EF|=\frac{1}{2}|AD|$ и $|BF|=|FD|=$ $=\frac{1}{6}|BC|$. Из подобия треугольников CMD и CFE следует, что

$$\frac{|MD|}{|EF|}=\frac{|CD|}{|CF|}=\frac{\frac{2}{3}|BC|}{\frac{5}{6}|BC|}=\frac{4}{5}.$$

Отсюда $|MD|=\frac{4}{5}|EF|=\frac{2}{5}AD$, то есть $|AM|:|MD|=3:2$.

Ответ: 3:2.

9. *В треугольнике ABC через основание D высоты BD параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая $[BC]$ в точке K. Найдите $|BK|:|KC|$, если $S_{\triangle DBK}:S_{\triangle ABC}=3:16$.*

Решение. По теореме Фалеса $|BK|:|KC|=|AD|:|DC|$ (рис. 12). Обозначим $|BK|/|KC|=x$, по формуле (5) получаем:

$$S_{\triangle DBK}/S_{\triangle DBC}=|BK|/|BC|=x/(1+x),$$

$$S_{\triangle ABC}/S_{\triangle DBC}=|AC|/|DC|=x+1.$$

Следовательно, $S_{\triangle DBK}/S_{\triangle AOC}=$ $=x/(1+x)^2$. Решая уравнение $x/(1+x)^2=3/16$, находим $x_1=3$, $x_2=1/3$.

Ответ: 3 или 1/3.

10. *Все стороны треугольника меньше 1 см. Докажите, что площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$ см^2.*

Решение. Заметим, что хотя бы один из углов треугольника не превосходит 60°, в противном случае их сумма была бы больше 180°. Пусть, например, угол C между сторонами AC и BC треугольника меньше 60°. Вычисляя площадь треугольника по формуле (IV), получаем оценку: $S=$ $=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}<\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см^2).

11. *На стороне AC треугольника ABC взята точка N, а на стороне BC — точка M так, что $|CN|:|NA|=5$. Площади многоугольников NMC и $ANBM$ относятся как 5:6. Найдите $|CM|:|MB|$.*

Решение. Пусть $|CM|/|BC|=k$ (рис. 13). По формуле (IV) получаем: $S_{\triangle NMC}=\frac{1}{2}|NC|\cdot|CM|\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{5}{6}|AC|\cdot k\,|BC|\sin\widehat{C}=\frac{5}{6}kS_{\triangle ABC}$, откуда $S_{ABMN}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle NMC}=$

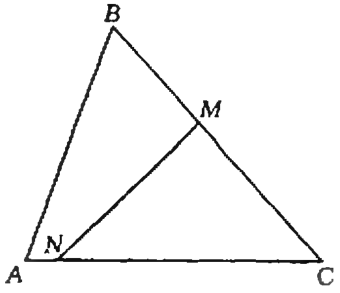


Рис. 13.

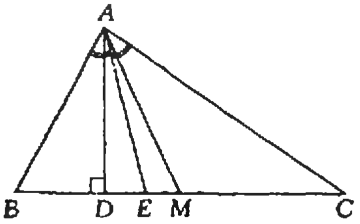


Рис. 14.

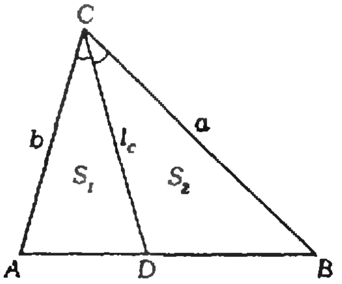


Рис. 15.

$=\left(1-\frac{5}{6}k\right)S_{\triangle ABC}$. Согласно условию $\frac{\left(1-\frac{5}{6}k\right)}{\frac{5}{6}k}=\frac{6}{5}$, следовательно, $k=6/11$ и $|CM|:|MB|=6:5$.

Ответ: 6:5.

12. *В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AE и высота AD. Площадь треугольника AEM равна $1/14$ площади треугольника ABC, а площадь треугольника ADM равна $7/50$ площади треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Обозначим $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ (рис. 14). Из формулы (5) вытекает, что $|EM|=a/14$, $|DM|=7a/50$. Отсюда $|BD|=|BM|-|MD|=9a/25$, $|CD|=16a/25$, $|BE|=|BM|-|EM|=3a/7$, $|CE|=4a/7$. По свойству биссектрисы треугольника получаем:

$$|BE|/|EC|=c/b,\ c/b=3/4. \tag{6}$$

Из треугольников BAD и ACD находим длину катета AD:

$$|AD|^2=c^2-(9/25)^2a^2=b^2-(16/25)^2a^2. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (6)—(7), получаем: $b=4/5a$, $c=3/5a$, следовательно, $b^2+c^2=a^2$. Отсюда легко выразить искомые углы.

Ответ: $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=\arcsin(4/5)$, $\hat{C}=\arcsin(3/5)$.

13. *Пусть l_c — длина биссектрисы угла C треугольника ABC* (рис. 15). *Докажите, что тогда*

$$l_c=2ab\cos\frac{\hat{C}}{2}/(a+b). \tag{8}$$

Решение. Для доказательства формулы (8) достаточно выразить площади S_1, S_2, S треугольников ACD, CDB, ABC по формуле (IV):

$$S_1=\frac{bl_c}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2},\quad S_2=\frac{al_c}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2},$$

$$S=\frac{ab}{2}\sin\hat{C}, -$$

и воспользоваться равенством $S_1+S_2=S$.

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E делят боковые стороны в отношении $|BD|:|DA|=|BE|:|EC|=3$. Найдите углы треугольника, если $(AE)\perp(CD)$.

2. Прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($|AB|=|BC|$) и центр вписанной в него окружности, пересекает сторону BC в точке D. Найдите отношение $|AD|/|AB|$, если $\hat{B}=\alpha$.

3. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($|AB|=|BC|$) и центр описанной около него окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите $|AD|$ и радиус описанной окружности, если $|AB|=c$, $\widehat{ABC}=\alpha$.

4. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C, $|AB|=c$, $|AC|=b$. Найдите $|BC|$.

5. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает продолжение стороны BC в точке M. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N. Известно, что $|AN|/|NC|=1/2$, $|MC|/|MB|=1/5$. Найдите углы треугольника ABC.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так что $|BD|=|DE|=|EC|$. Найдите площадь треугольника ADE, если $|AB|=2$, $|AC|=3$, $|BC|=\sqrt{7}$.

7. Точка L лежит на стороне AC треугольника ABC. Отрезок BL пересекает медиану CM в точке O. Известно, что площадь треугольника BMO равна 3 см^2, а площадь четырехугольника $AMOL$ равна 4 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

8. На сторонах AB и BC треугольника выбраны точки M и N. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOM и CON равны тогда и только тогда, когда прямые MN и AB параллельны.

9. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC расположены соответственно точки M и N так, что $|AM|:|BM|=3:2$, $|CN|:|BN|=5:2$. Прямая MN пересекает высоту BD треугольника в точке O. Найдите отношение $|DO|/|BO|$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла C. Известно, что $|AD|=3$ см, $|BD|=1$ см. Найдите высоту, опущенную из вершины угла C.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису, если $|AB|:|AC|=3:2$?

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ) объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите также два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач* *отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и высылаются обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. «Точка встречи». Вертикально вверх с интервалом времени τ выброшены из одной и той же точки два шарика со скоростью v каждый. Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

2. «Монета на клине». На клине с углом α лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

3. «Лошадиная сила». Какую мощность развивает лошадь при движении саней, если она равномерно тянет их в гору со скоростью u? Масса саней m, коэффициент трения μ, угол наклона горы α.

4. «Сверхсветовая скорость». Два стержня пересекаются под углом 2α и движутся с одинаковыми скоростями v перпендикулярно самим себе. Какова скорость точки пересечения стержней? Может ли она превысить скорость света?

5. «Связанные заряды». Три заряда q_1, q_2 и q_3, связанные друг с другом двумя нитями длиной l, находятся на одной прямой. Чему равны силы натяжения нитей?

6. «Неизвестная формула». Найдите формулу соединения азота с кислородом, если $m=1$ г его в газообразном состоянии в объеме $V=1$ л создает при температуре $t=17$ °C давление $p=314$ гПа.

7. «Черный ящик». К ящику с двумя клеммами подключили амперметр, резистор сопротивлением $R=1$ Ом и источник постоянного напряжения $U_1=5$ В (соединение последовательное). Амперметр показал ток $I_1=1$ А. Когда включили другой источник напряжения $U_2=20$ В, амперметр показал ток $I_2=2$ А. Что находится внутри ящика?

Советуем купить

(Начало см. на с. 11)

Вып. 42. Л. В. Тарасов. Лазеры: действительность и надежды.

Вып. 43. М. В. Волькенштейн. Энтропия и информация.

Вып. 44. Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский. Математика и спорт.

Вып. 45. Л. Б. Окунь. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, Z$ (элементарное введение в физику элементарных частиц).

Вып. 46. Я. Е. Гегузин. Пузыри.

Вып. 47. Л. С. Марочник. Свидание с кометой.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Частоты x, y генов a, b соответственно преобразуются в результате одного тура отбора в новые частоты

$$x' = \frac{x(kx+y)}{kx^2+2xy+ky^2},\quad y' = \frac{y(x+ky)}{kx^2+2xy+k},$$

генов a, b следующего поколения. Определить первоначальные частоты, если известно, что коэффициент приспособленности $k=1/2$, а в следующем поколении на каждые 40 генов a приходятся 33 гена b.

2. Решить уравнение

$$\cos 3x = -\cos x \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

3. При каком значении $b \in [0;\ 1]$ максимальная абсолютная погрешность приближенной формулы

$$\sqrt{x} \approx b\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{x^2}{8}\right)+ +(1-b)\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}x-\frac{x^2}{64}\right)$$

на промежутке $[1;\ 4]$ будет наименьшей?

4. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник. Найти на окружности точку, для которой сумма расстояний до двух ближайших вершин треугольника есть данная величина L.

5. Шар радиуса R и окружность радиуса $5/4\,R$ имеют общий центр O. Точка A расположена в пространстве так, что $|AO|=5R/4$ и множество точек данной окружности, которые можно соединить с A прямой, не пересекающейся с шаром, есть дуга, соответствующая центральному углу α. Найти угол между $[OA]$ и плоскостью, содержащей данную окружность.

Вариант 2

(математико-механический факультет)

1. На промежутке $[\frac{1}{4},\ 10]$ определить наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y=\sqrt{x}$ по следующему правилу: если $(k-1)^2 < x < k^2$ ($k=1, 2, \ldots$), то

$$\sqrt{x} \approx \frac{3}{8}k+\frac{3x}{4k}-\frac{x^2}{8k^3}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 4x(2+\sin 14x)=2\operatorname{ctg} 3x \cdot \cos 4x.$$

3. При каком условии на коэффициенты a, b линейная замена

$$\begin{aligned} x &= aY+bZ,\\ y &= aZ+bX,\\ z &= aX+bY \end{aligned}$$

оставляет неизменной кубическую форму

$$Q(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz?$$

4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a, а сумма меньшего основания и боковой стороны равна $3a/4$. Найти меньшее основание.

5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$, ребро которого равно a, проведена плоскость, параллельная CD. Известно, что сечение AEF тетраэдра плоскостью есть треугольник периметра p. Найти $|BE|$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. При столкновении двух частиц, движущихся навстречу друг другу, в результате слипания и последующего расщепления рождается серия новых частиц общей массы M. Известно, что новые частицы разлетаются в различных направлениях, составляющих угол α с направлением движения одной из первоначальных частиц, но с одинаковыми скоростями, равными скорости второй из первоначальных частиц, причем эта вторая частица до столкновения имела импульс P. Определить наименьшую из возможных скоростей сближения сталкивающихся частиц.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{9}\right)+\dfrac{3x}{y(x+9)}=0,\\ (y-2)^{-1}=(y-2)^{-\log_x(x+8)}. \end{cases}$$

4. Вершины одного квадрата лежат на границе второго квадрата. Найти отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно p.

5. В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найти объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и по величине двугранного угла α при боковом ребре пирамиды.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Два слитка серебра с медью имеют одинаковый вес. Каждый из них сплавляют с таким количеством меди, какое имеется в другом. В результате получаются два новых слитка, отношение весов которых равно $6/7$, а отношение проб — $7/8$. Каковы пробы обоих первоначальных слитков? (Проба сплава есть отношение веса благородного металла к общему весу сплава.)

2. Решить уравнение

$$x-\log_3\sqrt{31-9x}=1-\log_3\sqrt{1+3^{2(1-x)}}.$$

3. Для каких a в множестве решений неравенства

$$x+\sqrt{x^2-2ax}>1$$

содержится промежуток $\left[\frac{1}{4},\ 1\right]$?

4. Решить уравнение

$$2(\cos^4 x+\sin x\sin 2x+\sin^4 x)=\cos x-\sin^2 2x+4\cos 2x.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а длина стороны основания равна a. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом φ к плоскости основания.

Вариант 5

(геологический и географический факультеты)

1. Велосипедист отправился с некоторой постоянной скоростью из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 75 км. Затем он выехал обратно с той же скоростью, но через 2 часа после выезда из пункта B был вынужден остановиться на 45 минут. После этого велосипедист продолжил путь, увеличив скорость на 5 км/ч. Найти первоначальную скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, что и на путь от A до B.

2.1 (Для геологического факультета). Решить уравнение

$$\cos 3x-\sin 6x+\sin 2x-\cos 7x=0.$$

2.2 (Для географического факультета). На промежутке $[0;\pi]$ решить уравнение

$$\cos 3x-\sin 6x-\cos 7x-2\sin 2x=0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2+\log_x 9}\cdot\log_{1/3} x<2.$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ $[AC]$ перпендикулярна к боковой стороне $[CD]$. Найти $|BC|$, если известно, что $|AD|=a$, $|AB|^2+|BC|^2=11a^2/16$.

5. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от вершины трехгранного угла точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого ребра?

Вариант 6

(биолого-почвенный факультет)

1. Расстояние между двумя городами равно 480 км. Пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 ч скорее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 км/ч, а скорость товарного — на 2 км/ч, то пассажирский поезд проедет все расстояние на 5 ч быстрее товарного.

2.1 (Для отделения биологии). Решить уравнение

$$\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

2.2 (Для отделения почвоведения). Решить уравнение

$$3\sin^2 x+5\cos^2 x=2(1+\sin 2x).$$

3.1 (Для отделения биологии). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{3x-5}}(3-x)=-2+\log_{3-x}(14x-3x^2-15).$$

3.2 (Для отделения почвоведения). Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3^2 x+1}=9^{2-\log_3 x^2}.$$

4. Через данную точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых от сторон угла этой прямой, была наименьшей. Вычислить это наименьшее значение суммы.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b, а угол между ними равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. На рисунке 1 изображены два одинаковых кубика массой M каждый. К середине невесомой нити, прикрепленной к ним в точках A и B, приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. При каких значениях F верхний кубик будет неподвижен, если нижний жестко закреплен на поверхности? Коэффициент трения между кубиками μ, а $\widehat{ACB}=2\alpha$.

2. Поршни двух одинаковых неподвижных цилиндров жестко скреплены между собой так, что объемы под поршнями одинаковы (рис. 2). В одном цилиндре находится кислород, а во втором — азот. Массы газов равны. В начальный момент равны и их температуры. Затем температура кислорода повышается в два раза, а его давление меняется по закону $pV^2=\text{const}$. Температура азота остается неизменной. Определите относительные изменения внешнего давления, давления газов и объемов, которые они занимают. Молярная масса кислорода $M_1=32$ кг/кмоль, а азота $M_2=28$ кг/кмоль. Газы считать идеальными, а поршни — невесомыми.

3. Каким условиям должны удовлетворять значения ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннего сопротивления r источника тока, чтобы их можно было определить, имея в распоряжении два одинаковых вольтметра с пределом измерения U и внутренним сопротивлением R?

4. В обычном бытовом зеркале предметы кажутся искаженными, если смотреть в зеркало издали. Если же зеркало находится близко от наблюдателя, то предметы не кажутся искаженными. Объясните, почему?

5. Теоретический вопрос: кипение.

Вариант 2

1. Однородное тело массой M в виде параллелепипеда со сторонами a и b покоится на горизонтальной поверхности (рис. 3). Груз какой массы необходимо подвесить к нити, перекинутой через блок, чтобы началось скольжение тела по поверхности? Коэффициент трения о поверхность μ. Радиус блока, а также массы блока и нити пренебрежимо малы.

2. Поршни двух одинаковых цилиндров жестко связаны так, что объемы под поршнями равны между собой (см. рис. 2). В сосудах находится идеальный газ, причем во втором цилиндре его масса в N раз больше, чем в первом, а начальные температуры равны. Внешнее давление меняют в n раз. Чтобы оставить объемы, занимаемые газами, неизменны-

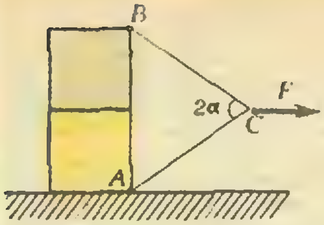


Рис. 1.

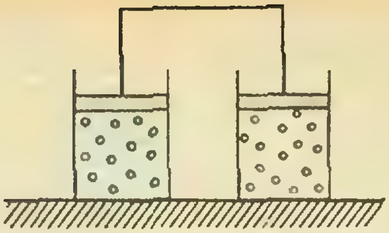


Рис. 2.

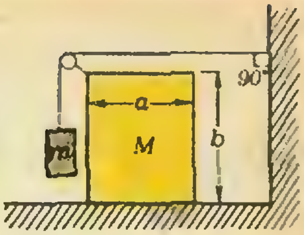


Рис. 3.

ми, пришлось изменить температуру. Как изменилась температура газа во втором цилиндре, если в первом она изменилась в m раз? Поршни можно считать невесомыми.

3. Каким условиям должны удовлетворять ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r двух одинаковых источников тока, чтобы их можно было определить, используя один вольтметр с пределом измерения U и внутренним сопротивлением R?

4. Узкий параллельный пучок света от лазера, распространяющийся в воде, фокусируется на экран, находящийся на расстоянии F от собирающей линзы. На пути пучка до линзы на расстоянии a от нее оказывается пузырек воздуха в виде сферы радиуса r, который много меньше расстояния a, но много больше радиуса пучка. Куда следует переместить экран, чтобы вновь увидеть на нем точку?

5. Теоретический вопрос: фотоэффект.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Тело плавает в воде так, что под водой находится 1/3 часть его объема. Какая часть тела окажется погруженной в воду, если сосуд с водой, в котором плавает тело, будет двигаться вверх с ускорением a?

2. Стеклянный баллон был взвешен трижды: а) откачанный, б) заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении, в) заполненный неизвестным газом при давлении $p=1{,}5$ атм. Показания весов соответственно были равными $m_1=200$ г, $m_2=204$ г, $m_3=210$ г. Температура оставалась постоянной. Определите молярную массу газа.

3. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса идеального газа при температуре $t=30$ °С, занимающая при давлении $p=2$ атм объем $V=8$ л. На сколько понизилась температура газа, когда объем его уменьшился при неизменном давлении настолько, что при этом была совершена работа $A=50$ Дж?

4. В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $\vec{v}$ ($v=2\cdot10^7$ м/с), направленной параллельно обкладкам конденсатора. На какое расстояние от своего первоначального направления сместится электрон за время полета внутри конденсатора, если расстояние между пластинами $d=2$ см, длина конденсатора $L=5$ см и разность потенциалов между пластинами $U=200$ В? Отношение заряда электрона к его массе составляет $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

5. От источника с напряжением $U=750$ В необходимо передать мощность $P=5$ кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери мощности в ней не превышали 10 % от передаваемой мощности, то есть мощности, дошедшей до потребителя?

6. Две линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см находятся на расстоянии $l=15$ см друг от друга. При каких условиях эта система дает действительное изображение предмета?

7. Красная граница фотоэффекта для материала фотокатода $\lambda_{\max}=700$ нм. Отношение скоростей вылетающих электронов при освещении светом с длинами волн λ_1 и λ_2 равно $k=3/4$. Определите λ_2, если $\lambda_1=600$ нм.

Публикацию подготовили
А. Е. Кучма, В. Ф. Осипов, В. Н. Скребов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический и радиофизический факультеты)

1. Упростите выражение:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}:\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^{-6}}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{(x^2-3x-10)\lg^2(x-3)}.$$

3. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной длины $\sqrt{3}$, ребро SA имеет длину 6. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее боковые грани имеют равные площади.

4. Докажите, что для углов A, B, C остроугольного равнобедренного треугольника справедливы неравенства

$$1<\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}<\frac{11}{5}.$$

Вариант 2

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$2\log_2 x-2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0.$$

3. Найдите область определения, множество значений и интервалы монотонности функции

$$f(x)=\left(\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x}}-3\sqrt{x}\right)^{0{,}5}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{x^{-1}}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\cdot\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^{-1}.$$

4. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, длина которой равна $\sqrt{2}$. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что $ASC=ASB=\frac{\pi}{6}$, $SAB=\frac{\pi}{4}$.

Физика

Задачи устного экзамена

Задачи 2, 4 предлагались на вступительных экзаменах на физико-механический факультет, 5 — на радиофизический, 6, 8 — на электромеханический, 1, 7 — на гидротехнический и 3 — на вечерний факультет.

1. Первую треть пути велосипедист едет со скоростью $v_1=2{,}0$ м/с, вторую — со скоростью $v_2=3{,}0$ м/с, а последнюю треть — со скоростью $v_3=5{,}0$ м/с. Найдите среднюю скорость велосипедиста.

2. Вдоль невесомого резинового шнура длиной l_0 соскальзывает металлическая шайба. Сила трения, действующая между шнуром и шайбой, постоянна и по модулю равна f. Жесткость шнура k. Найдите выделившееся при этом количество теплоты. Какая часть работы силы трения, действующей на шнур, превратится в тепло?

3. Плотность пара равна $\rho=2{,}4$ кг/м^3 при температуре $T=295$ К и давлении $p=10^5$ Па. Найдите массу одного киломоля и одной молекулы пара, считая его идеальным газом. Универсальную газовую постоянную считать равной $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

4. Стеклянная пластинка целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого при отсутствии пластинки равна C_0. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластинку из конденсатора.

5. В схеме, изображенной на рисунке 1, известны ЭДС $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ источников, сопротивления R и R_0 резисторов, а также емкость C конденсатора. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найдите заряд на обкладке *1* конденсатора.

6. Две электрические лампочки включили в сеть сначала последовательно, а затем параллельно (рис. 2). Сопротивление первой лампочки равно $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Какая из лампочек потребляет бо́льшую мощность и во сколько раз в первом и втором случаях?

7. Два математических маятника начинают колебаться одновременно. За одно и то же время первый маятник совершает $N_1=16$, а второй $N_2=8$ колебаний. Найдите отношение длин маятников.

8. Угол падения света на границу двух сред (при переходе его из первой среды во вторую) $\alpha=30°$. Абсолютный показатель преломления второй среды $n_2=2{,}40$. Найдите абсолютный показатель преломления первой среды, если угол между отраженным и преломленным лучами $\delta=90°$.

Публикацию подготовили *Ю. Н. Волгин, Ю. О. Максимов, Б. П. Попов, С. П. Преображенский, Б. А. Чихачев*

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найдите область определения выражения

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}:\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}\right)^{-1}$$

и упростите его.

2. Решите уравнение

$$\log_3(2x+21)-\log_3(4-x)=2^{\log_2 11-1}.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(\pi-\beta)\cdot(1+\operatorname{ctg}\beta)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)(1+\operatorname{tg}\beta)}=\cos\beta-\sin\beta.$$

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке N. Отрезок MN является диаметром большей окружности. Хорда MK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Докажите, что NC является биссектрисой $\angle MNK$.

5. В правильной треугольной пирамиде величина плоского угла при вершине равна α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания равно l. Найдите объем пирамиды.

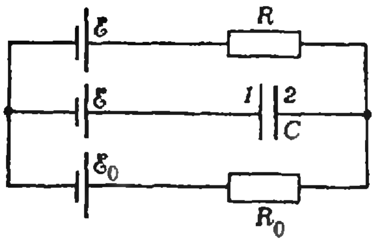


Рис. 1.

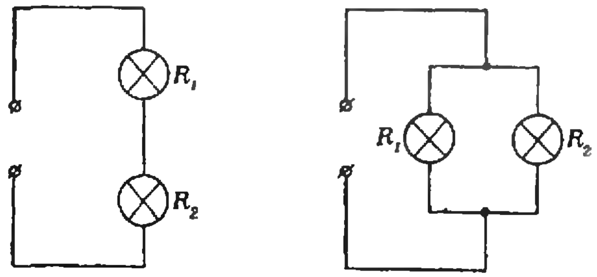


Рис. 2.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-1}-2a^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1+a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6}<1.$$

3. Решите уравнение

$$1+\log_2(x^2-1)=\frac{1+\log_2 x\cdot\log_3 2}{\log_3 2}.$$

4. Докажите справедливость равенства

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

5. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину d и составляет с боковым ребром призмы угол α.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите без таблиц

$$\frac{\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}.$$

2. Найдите область определения функции

$$y=\lg(x^2-x-2)+\frac{x^2-9}{x-3}.$$

3. Вычислите

$$16^{0,5\log_4 25-1}\cdot 5^{\log_{\frac{1}{5}} 5}.$$

4. Решите уравнение

а) $81x=3^{2-\log_3 x}$; б) $5^x-5^{3-x}=20$;

в) $\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x))=1$.

5. Решите неравенство

а) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$; б) $(3x-1)\log_2 x>0$;

в) $(0,4)^{4x^2-2x-2}<(0,4)^{3+2x}$;

г) $\log_{\frac{1}{2}}\log_3 x>1$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=4x^3-6x^2$ на промежутке $[0;\ 3]$.

7. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, все боковые ребра пирамиды имеют равные длины. Докажите, что вершина пирамиды проектируется в середину гипотенузы ее основания.

8. Что больше: объем шара радиуса 1 дм или объем правильного тетраэдра с ребром 4 дм?

9. Найдите объем воронки, развертка боковой поверхности которой представляет собой полукруг радиуса R.

10. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению длин ее оснований.

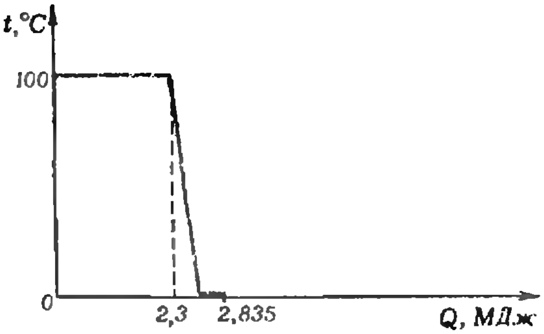
Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло некоторый путь. Чему равно отношение средней скорости движения тела на второй половине пути к средней скорости на первой половине?

2. Над сосудом с водой укреплены две колбы горлышком вниз так, что горлышки находятся в воде. Колбы частично заполнены водой. При этом уровень воды в них различный. Объясните наблюдаемое явление. Каким образом можно изменить уровень воды только в одной из колб?



3. График, приведенный на рисунке, иллюстрирует процесс превращения водяного пара в лед. Используя график, определите, каково первоначальное количество водяного пара и какое его количество превратилось в лед.

4. Луч света падает под углом $\alpha=30^\circ$ на поверхность воды, налитой в аквариум. На дне аквариума находится плоское зеркало. Во сколько раз изменится расстояние между входящим и выходящим лучами, если воду заменить другой жидкостью, показатель преломления которой будет в два раза больше, чем у воды? Уровень жидкости прежний.

Математический факультет

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела. После того как они повстречались, первое тело через $t_1=10$ с прибыло в пункт B, а второе, проехав $s=100$ м за $t_2=40$ с, прибыло в пункт A. Определите скорости движения тел, если движение было равномерным и прямолинейным.

2. Герметически закрытая консервная банка заполнена водой. В крышке, дне и боковой стенке банки сделали по одному малому отверстию. Как, закрыв лишь одно из отверстий, прекратить вытекание воды из банки?

3. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}=30$ В и внутренним сопротивлением $r=6$ Ом замкнули на два резистора, соединенных параллельно. При этом на первом резисторе выделяется количество теплоты в три раза больше, а на втором — в шесть раз больше, чем на внутреннем сопротивлении источника. Какой ток протекает через каждый резистор и через источник?

Индустриально-педагогический факультет

1. К висящей вертикально пружине, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз: сначала к ее свободному концу, а затем — к середине. Во сколько раз деформация пружины в первом случае будет больше, чем во втором?

2. Имеются две двойные одинаковые по размерам оконные рамы. Расстояние между стеклами у них одинаковое. Во второй раме посередине сделана сплошная горизонтальная перемычка. Будут ли различаться данные рамы по теплопередаче? Ответ объясните.

3. Имеется гильза из фольги, подвешенная на шелковой нити, и две пластины на изолирующих ручках: одна из эбонита, другая из плексигласа. Как экспериментально определить, заряжена гильза или нет, если ее заряд будет много меньше заряда, образующегося при трении друг о друга имеющихся в распоряжении пластинок?

Публикацию подготовили
Л. А. Бирюков, З. И. Новосельцева

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{4}{7}$; $y=\frac{3}{7}$. Указание. По условию, $\frac{x'}{y'}=\frac{40}{33}$ (*), $x+y=1$. Подставляя в (*) $k=1/2$, получим после упрощения систему $\frac{x(x+2y)}{y(2x+2y)}=\frac{40}{33}$, $x+y=1$.

2. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2}$ (k, $l\in Z$). Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}.$$

3. $\frac{7}{47}$. Указание. Исследуйте разность между левой и правой частями приближенного равенства с помощью производной.

4. Искомая точка находится на расстоянии $\frac{L\pm\sqrt{12R^2-3L^2}}{2}$ до одной из двух ближайших вершин треугольника ($\sqrt{3}R\leqslant L\leqslant 2R$).

5. $\arccos\left(\frac{7}{25}\frac{1}{\cos\alpha/2}\right)$ при $0<\alpha<2\arccos 7/25$.

Вариант 2

1. $\frac{7}{64}$. Указание. На промежутках $\frac{1}{4}\leqslant x<1$; $1\leqslant x<4$; $4\leqslant x<9$; $9\leqslant x\leqslant 10$ исследуйте с помощью производной разность между левой и правой частями приближенного равенства.

2. $x=\frac{\pi}{14}(2k+1)$ ($k\in Z$).

3. $a^3+b^3=1$. Указание. Подставив в выражение $x^3+y^3+z^3-3xyz$ вместо x, y и z их выражения через X, Y, Z, получим

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3)(X^3+Y^3+Z^3-3XYZ).$$

4. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$.

5. $|BE|=\frac{2a-p+2\sqrt{(p+a)(p-2a)}}{3}$, если $2a<p<3a$; $|BE|=0$, если $p=2a$; $|BE|=a$, если $p=3a$.

Вариант 3

1. $\frac{4P}{M}(1+\cos\alpha)$. Указание. Пусть m_1 и m_2 — массы частиц ($m_1+m_2=M$), а v_1 и v_2 — скорости, с которыми они движутся. Из закона сохранения импульса следует, что

$$m_1v_1-P=\frac{MP\cos\alpha}{M-m_1}.$$

С другой стороны,

$$v_2=\frac{P}{M-m_1}.$$

Поэтому

$$v_1+v_2=\frac{MP(1+\cos\alpha)}{(M-m_1)m_1}.$$

Поскольку наибольшее значение знаменателя достигается при $m_1=m_2=\frac{M}{2}$, наименьшая скорость сближения равна $\frac{4P}{M}(1+\cos\alpha)$.

2. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in Z$).

3. $\{(9, 3)\}$. **4.** Отношение большего из отрезков к меньшему равно $k=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$, если $\frac{1}{2}\leqslant p<1$. При $p=1$ квадраты совпадают.

5. $\frac{\sin^4\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}R^3$ при $\frac{\pi}{3}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Вариант 4

1. 0,6; 0,8.

2. $x=\frac{3}{2}$.

3. $a<-1$. Указание. Пусть $f_a(x)$ — левая часть неравенства. Должно быть $f_a(1)>1$, $f_a\left(\frac{1}{4}\right)>1$. Отсюда следует, что $a<-1$, но при $a<-1$, все x из промежутка $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ удовлетворяют исходному неравенству.

4. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ ($k, l\in Z$).

5. $\frac{1}{6}\frac{\sin^2\alpha\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\varphi)}$.

Вариант 5

1. 15 км/ч. **2.** 1.

2. 2. $\{0, \frac{\pi}{2}; \pi\}$.

3. $]\frac{1}{9}, \frac{1}{3}]\cup]1, +\infty[$. **4.** $\frac{3}{4}a$.

5. $\frac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha/2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha/2-1}7$.

Вариант 6

1. 40 км/ч; 30 км/ч. **2.1.** $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=2l\pi|$ k, $l\in Z$.

2.2. $\{\operatorname{arctg}3+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi|k\in Z\}$.

3.1. $\{8/3\}$. **3.2.** $\{2, 32\}$.

4. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, где a, b — длины сторон параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, вторая — с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

5. $5\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На рисунке 1 изображены силы, действующие на верхний кубик: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$

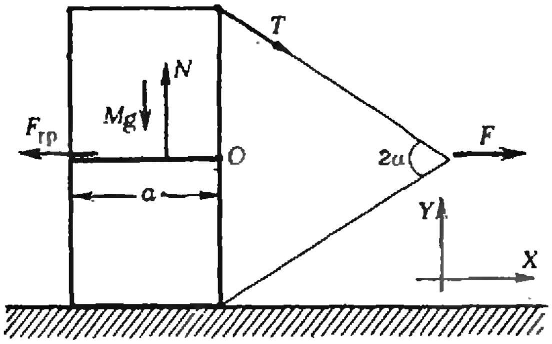


Рис. 1.

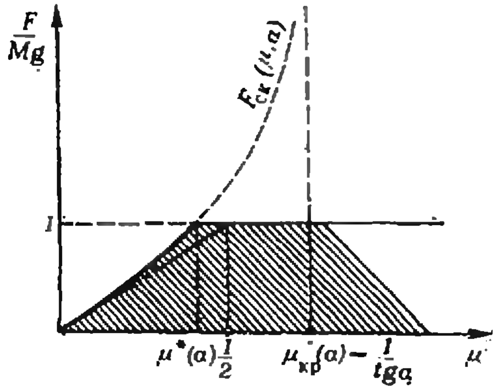


Рис. 2.

и сила натяжения нити $\vec{T}$. Очевидно, что под действием этих сил кубик может не только двигаться поступательно, но и поворачиваться. Поэтому необходимо проанализировать обе возможности.

1) Поступательное движение.

Уравнение поступательного движения имеет вид:

$$\vec{N}+M\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}_{тр}=M\vec{a},$$

или (в проекциях на оси координат)

$$N-Mg-T\sin\alpha=Ma_y,$$
$$T\cos\alpha-F_{тр}=Ma_x.$$

Поскольку кубик должен находиться в покое, ускорение $\vec{a}=0$, то есть $a_x=a_y=0$, откуда получаем

$$N=Mg+T\sin\alpha,$$
$$F_{тр}=T\cos\alpha=F/2.$$

Поскольку $0\leqslant F_{тр}<\mu N$, окончательно имеем:

$$F<\frac{2\mu Mg}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \qquad (1)$$

Так как $F>0$, это условие является ограничением только при $1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha>0$. Если же $\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\geqslant 1$, то наступает «заклинивание», то есть при любом значении F кубик не сможет двигаться поступательно.

2) Вращение.

Кубик может опрокинуться, поворачиваясь относительно оси, проходящей через точку O, в которой при опрокидывании будет приложена сила реакции опоры $\vec{N}$. Максимальное значение силы натяжения нити, при котором кубик еще не опрокинется, можно найти из условия равенства нулю суммы моментов сил

$$Mg\,\frac{a}{2}-Ta\cos\alpha=0.$$

Учитывая, что $T\cos\alpha=F/2$, получим

$$F=Mg.$$

Очевидно, что опрокидывания не произойдет, если

$$F<Mg. \qquad (2)$$

Рассматривая совместно условия (1) и (2), находим, что при

$$\mu<\mu^*(\alpha)=\frac{1}{2+\mathrm{tg}\,\alpha}$$

кубик с ростом F раньше начнет скользить, а при выполнении противоположного неравенства — опрокидываться.

Полученный ответ можно наглядно представить графически. Рисунок 2 соответствует случаю фиксированного α, для которого $0<\mathrm{tg}\,\alpha<2$. Допустимые значения параметров F/Mg и μ лежат в заштрихованной области (физический смысл имеет область $\mu\leqslant 1$). При $\alpha\to 0$ значение $\mu^*\to 1/2$ и $\mu_{кр}(\alpha)\to\infty$. При $\mathrm{tg}\,\alpha>2$ величина $\mu_{кр}$ лежит в интервале $\mu^*(\alpha)<\mu_{кр}(\alpha)<1/2$.

2. Условие равновесия невесомых поршней достаточно очевидно — удвоенное внешнее давление равно сумме давлений газов в сосудах. Используя это условие, а также уравнение состояния идеального газа

$$pV=\frac{m}{M}RT,$$

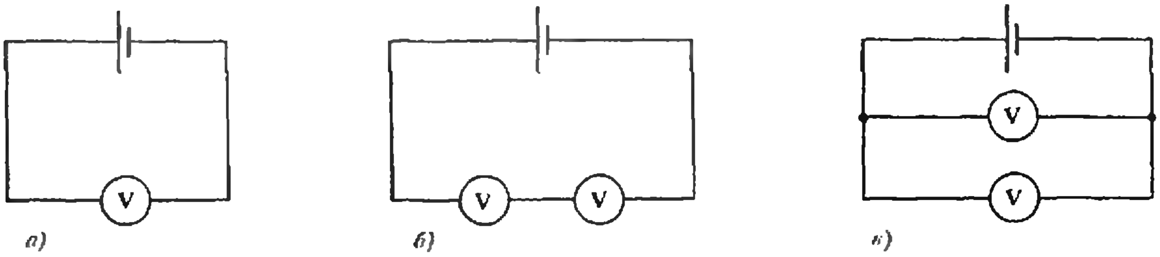
получим для начального состояния

$$p_1=\frac{2M_2p_0}{M_1+M_2}=\frac{14}{15}\,p_0 \text{ и}$$
$$p_2=\frac{M_1}{M_2}\,p_1=\frac{16}{15}\,p_0,$$

где p_0 — внешнее давление, p_1, p_2 — давления кислорода и азота в сосудах, а M_1 и M_2 — их молярные массы. Так как в процессе нагрева $pV^2=\mathrm{const}$, то, используя уравнение состояния идеального газа, можно показать, что

$$TV=\mathrm{const},$$

откуда имеем



а) б) в)

Рис. 3.

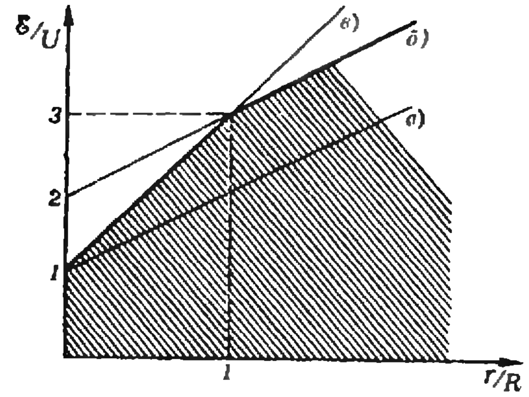


Рис. 4.

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V'-V}{V}=\frac{T}{T'}-1=-\frac{1}{2}.$$

Здесь V, T — объем, занимаемый кислородом, и его температура до нагрева, а V' и T' — значения тех же величин после нагрева.

Давление кислорода p_1' после нагрева найдем из уравнения газового состояния:

$$p_1'=\frac{p_1VT'}{V'T}=\frac{56}{15}p_0.$$

Аналогично для азота, учитывая, что его температура остается неизменной, получим:

$$p_2'=\frac{V}{V'}p_2=\frac{32}{15}p_0.$$

Относительные изменения давления газов в сосудах равны

$$\frac{\Delta p_1}{p_1}=\frac{p_1'-p_1}{p_1}=3,\quad \frac{\Delta p_2}{p_2}=\frac{p_2'-p_2}{p_2}=1.$$

Условие равновесия поршней после нагрева

$$2p_0=p_1'+p_2'$$

дает возможность вычислить внешнее давление и, в конечном счете, его относительное изменение:

$$\frac{\Delta p_0}{p_0}=\frac{p_0'-p_0}{p_0}=2.$$

3. Возможны три способа включения приборов, показанные на рисунке 3.

Необходимо, чтобы напряжение на каждом из вольтметров не превосходило предельного. Отсюда вытекают следующие ограничения:

а) $\mathcal{E}<U(1+r/R)$,
б) $\mathcal{E}<U(2+r/R)$,
в) $\mathcal{E}<U(1+2r/R)$.

Для определения $\mathcal{E}$ и r следует провести два измерения. Указанные неравенства дают возможность выбрать две схемы, обеспечивающие наиболее широкий диапазон допустимых параметров. Анализ удобно провести графически. На рисунке 4 прямые а), б) и в) — графики правых частей соответствующих неравенств. Заштрихованная область — область разрешенных значений $\mathcal{E}$ и r. Видно, что для определения $\mathcal{E}$ и r всегда лучше производить измерения по схеме б) и в).

Пусть $U_1=\mathcal{E}/(2+r/R)$ — показания вольтметров в схеме б), а $U_2=\mathcal{E}/(1+2r/R)$ — в схеме в), тогда

$$\frac{r}{R}=\frac{2U_1-U_2}{2U_2-U_1},\quad \mathcal{E}=\frac{3U_1U_2}{2U_2-U_1}.$$

4. В зависимости от расстояния между глазом наблюдателя и зеркалом размеры участка зеркала, формирующего изображение, меняются. Путем построения хода лучей можно убедиться, что по мере удаления глаза эти размеры увеличиваются. Если на малом расстоянии они по порядку величины равны диаметру зрачка, то с увеличением расстояния приобретают порядок размеров рассматриваемого объекта или зеркала (меньший из двух). Поскольку бытовое зеркало не является идеально плоским, то на большом участке его поверхности неизбежно наличие неровностей, которые и служат причиной возникающих искажений.

Вариант 2

1. Тело будет скользить по поверхности, если выполняется условие

$$2\left(\frac{b}{a}-1\right)<\frac{M}{m}<\frac{1}{\mu}-1,$$

что возможно в случаях, когда

$$b>a \text{ и } \mu<\frac{1}{2b/a-1}$$

или $\quad b<a \quad (0<\mu<1)$.

2. Температура газа во втором цилиндре изменилась в

$$x=\frac{n(N+1)-m}{N}$$

раз; при этом должно выполняться условие $x>0$, то есть

$$n(N+1)>m.$$

3. Возможные варианты включения приведены на рисунке 5. Область разрешенных значений параметров источников показана на рисунке 6. В области $r>R$, величины $\mathcal{E}$ и r определяются по формулам

$$\mathcal{E}=\frac{U_1U_2}{2(U_2-U_1)},\quad \frac{r}{R}=\frac{2U_1-U_2}{2(U_2-U_1)},$$

где U_1 и U_2 — показания вольтметра в схемах, изображенных на рисунках 5, *а* и 5, *б* соответственно. В области $r<R$ имеем

$$\mathcal{E}=\frac{U_1U_3}{2U_1-U_3},\quad \frac{r}{R}=\frac{2(U_3-U_1)}{2U_1-U_3},$$

где U_3 — показание вольтметра в схеме на рисунке 5, *в*.

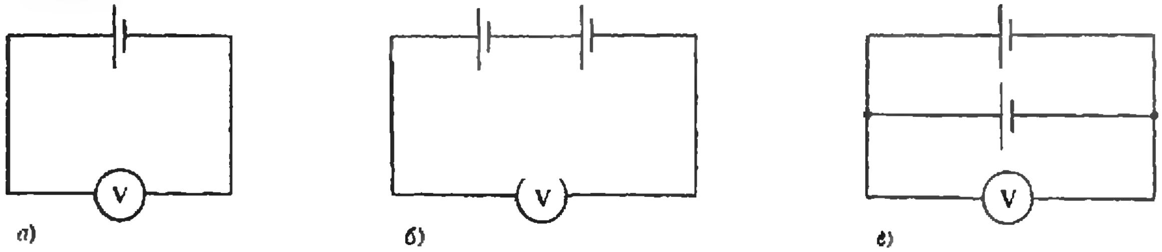


Рис. 5.

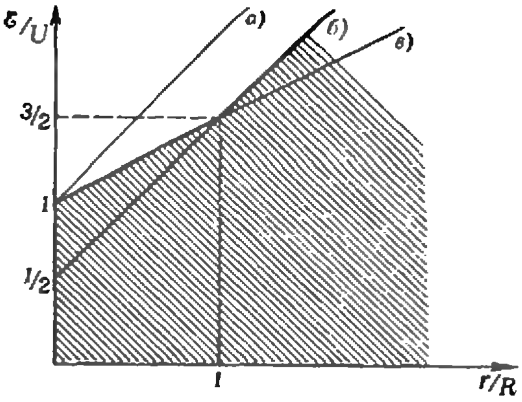


Рис. 6.

4. Так как показатель преломления воздуха меньше показателя преломления воды, действие пузырька эквивалентно действию рассеивающей линзы, которая параллельный пучок лучей преобразует в расходящийся. Если точка пересечения продолжений расходящихся лучей окажется от линзы на расстоянии, большем фокусного, экран следует удалить от линзы. Если же указанное расстояние окажется равным или меньшим фокусного, получить сфокусированное изображение на экране невозможно.

Задачи устного экзамена

1. Глубина погружения тела не изменится.

2. $M_г = M_в \dfrac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \dfrac{p_0}{p} = 48$ кг/кмоль (здесь $M_в = 29$ кг/кмоль — молярная масса воздуха, $p_0 = 1$ атм — нормальное атмосферное давление).

3. $\Delta T = \dfrac{AT}{pV} = 9{,}5$ К.

4. $x = \dfrac{UL^2}{2dv^2} \dfrac{e}{m} \approx 6 \cdot 10^{-3}$ м.

5. $R = \dfrac{U^2}{P} \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \approx 9$ Ом (здесь $\alpha = 0{,}1$).

6. Предмет должен находиться на расстоянии $d < F/3 = 10$ см от первой линзы.

7. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{k^2 \lambda_{\max}}{\lambda_{\max} - (1 - k^2)\lambda_1} \approx 540$ нм.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $a^{-\frac{1}{15}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$ при $b > 0$, $a > 0$.
2. $[5; +\infty[\cup \{4\}$.
3. 2,25; $0{,}75\sqrt{11}$; $0{,}25\sqrt{105}$. **Указание.** Вершина S проектируется либо в центр вписанной окружности, либо в центр одной из вневписанных окружностей *).
4. **Указание.** Задача сводится к исследованию функции $f(x) = 2\sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos 2x}$ при $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Вариант 2

1. $\{\sqrt[4]{2}; 2\}$; 2. $x_1 = \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(k, n \in Z)$.

3. $D(f) =]0; 1[\cup]1; +\infty[$; $E(f) =]0; +\infty[$.

4. $(1+\sqrt{3})/6$; $(\sqrt{1+\sqrt{3}})/3$. **Указание.** Возможны два случая: 1) $\triangle ABC \cong \triangle ASC$ и 2) $\widehat{ACS} = \widehat{CAS} = \dfrac{5\pi}{12}$, $\widehat{ABS} = \dfrac{7\pi}{12}$, поскольку, по теореме синусов $\dfrac{\sin \widehat{ACS}}{|AS|} = \dfrac{\sin \widehat{ASC}}{|AC|} = \dfrac{\sin \widehat{ABS}}{|AS|}$, то есть $\sin \widehat{ACS} = \sin \widehat{ABS}$. Поэтому либо $\widehat{ACS} = \widehat{ABS} = \dfrac{7\pi}{12}$ и тогда $\triangle ABS \cong \triangle ASC$, либо $\widehat{ACS} = \pi - \widehat{ABS} = \dfrac{5\pi}{12}$ и тогда имеет место случай 2.

Физика

1. $v_{ср} = \dfrac{3}{1/v_1 + 1/v_2 + 1/v_3} \approx 2{,}9$ м/с.

2. $Q = f(l_0 - f/(2k))$; работа силы трения, действующей на шнур, превращается в тепло наполовину.

3. $M = \dfrac{\varrho RT}{p} 10^3 \approx 58{,}8$ кг/кмоль;

$m_0 = \dfrac{M}{10^3 N_A} \approx 9{,}7 \cdot 10^{-26}$ кг

(здесь $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — постоянная Авогадро).

4. $A_{мех} = (\varepsilon - 1)C_0U^2/2$ (здесь ε — диэлектрическая проницаемость стекла).

5. $q = \dfrac{C(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})R}{R_0 + R}$.

6. В первом случае первая лампочка потребляет в 1,5 раза бóльшую мощность, чем вторая, а во втором случае вторая лампочка потребляет в 1,5 раза бóльшую мощность, чем первая.

7. $l_1/l_2 = (N_2/N_1)^2 = 1/4$.

8. $n_1 = n_2/\mathrm{tg}\,\alpha \approx 4{,}15$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Выражение определено при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ и равно $\dfrac{a+b}{a-b}$ при $a > b$ и $\dfrac{a+b}{b-a}$ при $a < b$.

2. $\{3\}$.

4. **Указание.** Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (рис. 7). Так как $\widehat{MCO_2} = \widehat{MKN} = 90°$, прямые CO_2 и KN параллельны. Поэтому $\hat{1} = \hat{2}$, но $\hat{1} = \hat{3}$, поскольку треугольник O_2CN — равнобедренный.

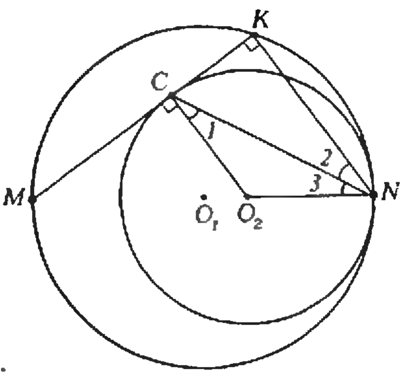


Рис. 7.

---

*) Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.

5. $v_{п}=\dfrac{l^3}{3\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

Указание. Пусть в пирамиде $SABC$ точка D — середина BC. DK — общий перпендикуляр AS и BC, O — основание высоты, $|BC|=x$. Найдите x из соотношения $|KD|\cdot|AS|=|SO|\cdot|AD|$, предварительно выразив AD, SO, AS через l, x и α.

Вариант 2

1. 1. 2. $]-\infty;\ -\frac{1}{2}[\cup]2;\ \infty[$. 3. $\{2\}$.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin\alpha\sin 2\alpha$.

Задачи устного экзамена

1. $\frac{1}{4}$.
2. $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ \infty[$.
3. $\frac{5}{16}$.
4. а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $\{2\}$; в) $\{2\}$.
5. а) $]14;\ \infty[$; б) $]0;\ \frac{1}{3}[\cup]1;\ \infty$; в) $]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{6}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{6}}{2};\ \infty[$; г) $]0;\ \sqrt{3}[$.
6. $y_{\min}=y(1)=-2$;
$y_{\max}=y(3)=54$.
8. Объем правильного тетраэдра с ребром 4 больше объема шара радиуса 1.
9. $\frac{\pi R^3}{24}\sqrt{3}$.

Физика

Физический факультет

1. $v_{ср\,2}/v_{ср\,1}=\sqrt{2}+1\approx 2{,}4$.

2. Различие в уровнях воды объясняется различием давления воздуха в колбах (давление больше там, где уровень ниже). Для изменения уровня воды в одной из колб необходимо изменить давление воздуха в ней, нагрев или охладив колбу, например с помощью тряпочки, смоченной горячей или холодной водой.

3. $m_1=1$ кг; $m_2\approx 0{,}35$ кг.

4. Расстояние между лучами уменьшится примерно в 2,2 раза.

Математический факультет

1. $v_1=s/t_2=5$ м/с; $v_2=s/\sqrt{t_1t_2}=2{,}5$ м/с.

2. Закрыв одно из отверстий (любое), нужно поворачивать банку до тех пор, пока два других отверстия не окажутся на одном горизонтальном уровне.

3. $I_r=\dfrac{\mathcal{E}}{10r}=1/2$А; $I_{R1}=1/6$А; $I_{R2}=1/3$А.

Индустриально-педагогический факультет

1. Деформация пружины в первом случае в 2 раза больше, чем во втором.

2. Теплопередача осуществляется за счет излучения, теплопроводности и конвекции. Два первых процесса для обеих рам происходят одинаково. Конвекция же для второй рамы будет затруднена, поэтому вторая рама будет лучше сохранять тепло в помещении.

3. Нужно потереть пластины друг о друга, расположить их параллельно (с целью создания однородного электростатического поля) и поместить между ними гильзу. Если гильза отклонится от положения равновесия, значит, она заряжена.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (А. Казанцев, 1949—1950 гг.). 1. Кс2 Сg7 2. с7 Лс6 3. а7 Л:с2 4. Сd2 а2 5. а8Ф а1Ф 6. Ф:а1 С:а1 7. с8Ф+! Л:с8 8. Сс3! Лb8 9. Сb2! Лd8 10. Сd4! Ле8 11. Се5! Несмотря на лишнюю ладью и полную беззащитность взбесившегося слона, черные вынуждены повторять ходы, смиряясь с ничьей!

Задание 2 (А. Казанцев, 1953 г.). 1. Лb7! Фе5 2. Сd1+ Кра5 3. b4+ Кра6 4. Се2+! Ф:е2 5. Крb8! Фе5+ 6. Крс8 Фе8+ 7. Крс7 С:d5 8. а8Ф+!! Ф:а8 9. Лb6+ Кра7 10. b5 Сb7 11. Ла6+! С:а6 12. b6×!

А. Карпов об этом этюде сказал так: «Этюд заслуживает самой высокой похвалы. В нем удивительно изящный финал, которому предшествует увлекательная вступительная игра».

Квант для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. Если 16 блокнотов стоят x рублей и на 1 рубль можно купить x блокнотов, то один блокнот стоит $x:16$ и $1:x$, то есть $x/16=1/x$, откуда $x^2=16$, то есть $x=4$, а один блокнот стоит $1:4=0{,}25$ рубля.

2. Обозначим путь, пройденный на лыжах сегодня, через x, а вчера — через y. Тогда позавчера был пройден путь $y+3$ км. Из второго соотношения следует, что $y+40=y+3+x$. Отсюда $x=37$ км.

3. В многоугольнике, у которого каждая сторона либо вертикальна, либо горизонтальна, число сторон четно, так как его стороны последовательно чередуются: вертикальная — горизонтальная — вертикальная — ... — горизонтальная.

4. В этом высказывании нарушен закон сохранения энергии.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. $1+2=3$
$-1+2+3=4$
$12-3-4=5$
$1+2-3-4+5+6=7$
$1+2+3-4+5-6+7=8$
$12+3+4-5-6-7+8=9$.

2. На первом месте 6«Г», на втором 6«А», на третьем 6«Б» и на четвертом 6«В».

3. 6, 2 и 1.

4. $1+2+3+\ldots+12+14=92$.

5. Воздух, находящийся в горячем стакане, нагревается от его стенок, расширяется и начинает выходить из-под стакана. Образуется «воздушная подушка», из-за чего резко уменьшается трение, и стакан начинает скользить по столу в сторону наклона стола, даже если этот наклон почти не заметен.

Наша обложка

(см. «Квант» № 3)

Задача с четвертой страницы обложки третьего номера является хорошей иллюстрацией того, что чересчур подробный чертеж может даже несколько затруднить поиск решения. Из чертежа на обложке третьего номера надо увидеть, что искомый угол равен по величине плоскому углу ADO, где O — центр шара (прямая DA перпендикулярна BD (линии пересечения плоскостей) по условию, а DO — по теореме о трех перпендикулярах (проекция прямой DO на плоскость ABC есть прямая DA)); после этого можно избавиться от лишних деталей чертежа (рис. 8) и перейти к решению.

Первое решение. Пусть φ — величина искомого угла; тогда $\operatorname{tg}\varphi = OA : DA = 2R : a$, где R — радиус шара, a — длина ребра основания пирамиды. Выразим R через a, составив и приравняв два выражения для расстояния OS от центра шара до вершины пирамиды. Из прямоугольного треугольника OPS (P — точка касания прямой BS с шаром) имеем

$$OS^2 = OP^2 + PS^2 = R^2 + (a-b)^2 \qquad (1)$$

($PS = PB = BS = BA - BS = a - b$, где b — длина бокового ребра пирамиды; отрезки BP и BA равны как касательные, проведенные к шару из одной точки).

Из треугольника OAS, в котором угол OAS равен 45° (AO — перпендикуляр к плоскости ABC, а прямая AS наклонена к ней под углом 45°), по теореме косинусов получаем второе равенство:

$$OS^2 = OA^2 + AS^2 - 2OA \cdot AS \cdot \cos 45^\circ = R^2 + b^2 - Rb\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Теперь выразим b через a из прямоугольных треугольников AHS и AHD (SH — высота пирамиды):

$$b = AS = AH\sqrt{2} = AD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

подставим это выражение в (1) и (2) и приравняем правые части этих соотношений:

$$R^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 a^2 = R^2 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}Ra,$$

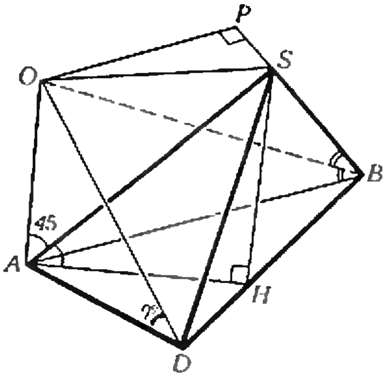


Рис. 8.

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2R}{a} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3} - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Второе решение. Пусть $\angle ABO = \angle SBO = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BO}}{BA \cdot BO} = \frac{\vec{BS} \cdot \vec{BO}}{BS \cdot BO}. \qquad (3)$$

Имеем:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BO} = \vec{BA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AO}) = \vec{BA}^2 \quad (\angle BAO = 90^\circ).$$

Аналогично,

$$\vec{BS} \cdot \vec{BO} = (\vec{BH} + \vec{HS}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AO}) = \vec{BH} \cdot \vec{BA} + \vec{HS} \cdot \vec{AO} = BH \cdot BA \cdot \cos 30^\circ + HS \cdot AO.$$

Подставляя эти выражения в (3) и пользуясь тем, что $\angle HBS = 45^\circ$, получим ответ.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. Й. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
А. В. Бондин, Е. В. Винодарова, В. В. Губин, М. Б. Дубах, Н. Н. Лахтунов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

Фото представили:
В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

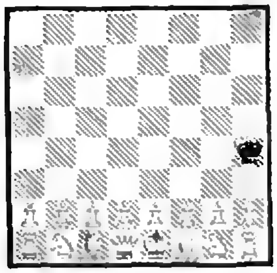
Сдано в набор 16.02.85. Подписано к печати 27.03.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×10 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,53. Т-07435
Тираж 178 412 экз. Цена 40 коп. Заказ 397

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ФИГУРЫ НА СВОИХ МЕСТАХ

Любителям головоломок хорошо известна задача С. Лойда, в которой все фигуры белых занимают исходные места.



Мат в 3 хода.

1. d4! Kph5 2. Фd3 и 3. Фh3×, 1... Kpg4 2. e4+ Kph4 3. g3×. Заметим, что h4 — единственное поле, на котором одинокий черный король умудряется получить мат так быстро.

Рассмотрим еще ряд примеров на ту же тему — в них все фигуры белых, присутствующие на доске, расположены на своих первоначальных полях. Этот жанр шахматной композиции довольно привлекателен; может быть, дело в том, что работа композитора в этом случае как бы вдвое упрощается!?

Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpe4. Мат в 3 хода.

Эту трехходовку составил гроссмейстер П. Бенко, один из немногих шахматистов-практиков, всерьез занимающихся композицией. Решает «дебют слона» — **1. Cc4! Kpe5 2. Фd5+ Kpf6 3. Фg5×, 1... Kpf5 2. Фf3+ Kpe5 3. Фf4× (2... Kpg6 3. Фf7×).**

В следующих двух позициях белые фигуры расположены на тех же местах, а черного короля сопровождает слон или пешка.

А. Шуряков. Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpg3, Ch5. Мат в два хода.

Не проходит 1. Фd4 с попыткой 2. Фf4× (1... Cg4 2. Фf2×). Это так называемая иллюзорная игра, черные отвечают 1... Kph2! и мата нет. Решает **1. Фd2!** с той же угрозой 2. Фf4×, и теперь 1... **Kph4 (Cg4) 2. Фg5 (f2)×.**

В. Лашманов. Белые: Kpe1, Фd1, Cc1, Cf1; черные: Kpa5, п. b5. Мат в 2 хода.

К цели ведет **1. Фd6!** Черные в цугцванге, мат не грозит, но 1... Kpa4 2. Фa3×, 1... b4 2. Фa6×.

В рассмотренной позиции черную пешку можно снять с доски (1. Фd6! Kpa4 2. Фa3×), но тогда пропадает тема цугцванга и исчезает второй симпатичный мат с поля a6.

А. Шуряков придумал сразу два квартета-близнеца.

а) Белые: Kpe1 Фd1, Cf1; черные: Kpe3.

б) Белые: Kpe1, Фd1, Cc1; черные: Kpc3.

Мат в 4 хода.

При помощи белопольного слона мат ставится на краю доски: **1. Фa4 Kpf3 2. Фd4 Kpg3 3. Фe4 Kph2 4. Фg2×**, а при чернопольном — в центре: **1. Фa4 Kpd3 2. Cb2 Kpe3 3. Фg4 Kpd3 4. Фe2×.**

Рекорд принадлежит следующей задаче-малютке.

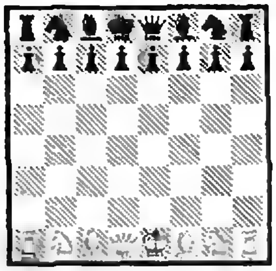
М. Гориславский. Белые: Kpe1, Фd1; черные: Kph2. Мат в 2 хода.

В этой двухходовке на своих местах стоят белый король и ферзь. **1. Kpf2** и **2. Фh5×.** Очевидно, одну белую фигуру оставлять на своем месте бесполезно...

В. Антипов. Белые: Kpe1, Фd1, Kg1; черные: Kph1, Cf1, п. h2. Мат в 3 хода.

Король и ферзь опять на своих местах, в роль слона взял на себя конь. Черного короля сопровождает слон и пешка. **1. Kh3!** Черные в цугцванге. 1... Ce2 2. Фd5+ Cf3 3. Ф:f3×, 1... C:h3 (или любой другой ход слона) 2. Kpf2+ Cf1 3. Ф:f1×, 1... Kpg2 2. Фg4+ Kph1 3. Kf2×.

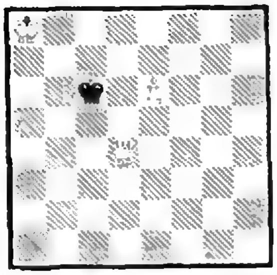
И в заключение задача-головоломка, придуманная ирландским писателем лордом Э. Дансэни.



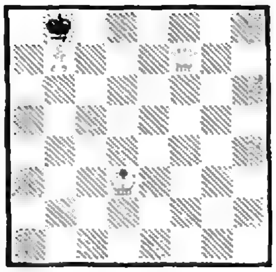
Мат в 4 хода.

Ключом к разгадке служит то обстоятельство, что король и ферзь черных стоят не на своих местах. Значит, они уже перемещались, а тогда двигались и пешки. Но пешки назад не ходят, из чего мы заключаем, что произошла путаница и доску нужно развернуть на 180°. Теперь решение не вызывает труда: **1. Kd7! Kf3!** (при трех других возможных ходах коней следует 2. Ke5 и мат на d3 или f3) **2. Kc5! Ke5! 3. Ф:e5** и **4. Kd3×.** Как выяснилось, белые фигуры в данном случае занимали не свои места, а чужие.

Конкурсные задания

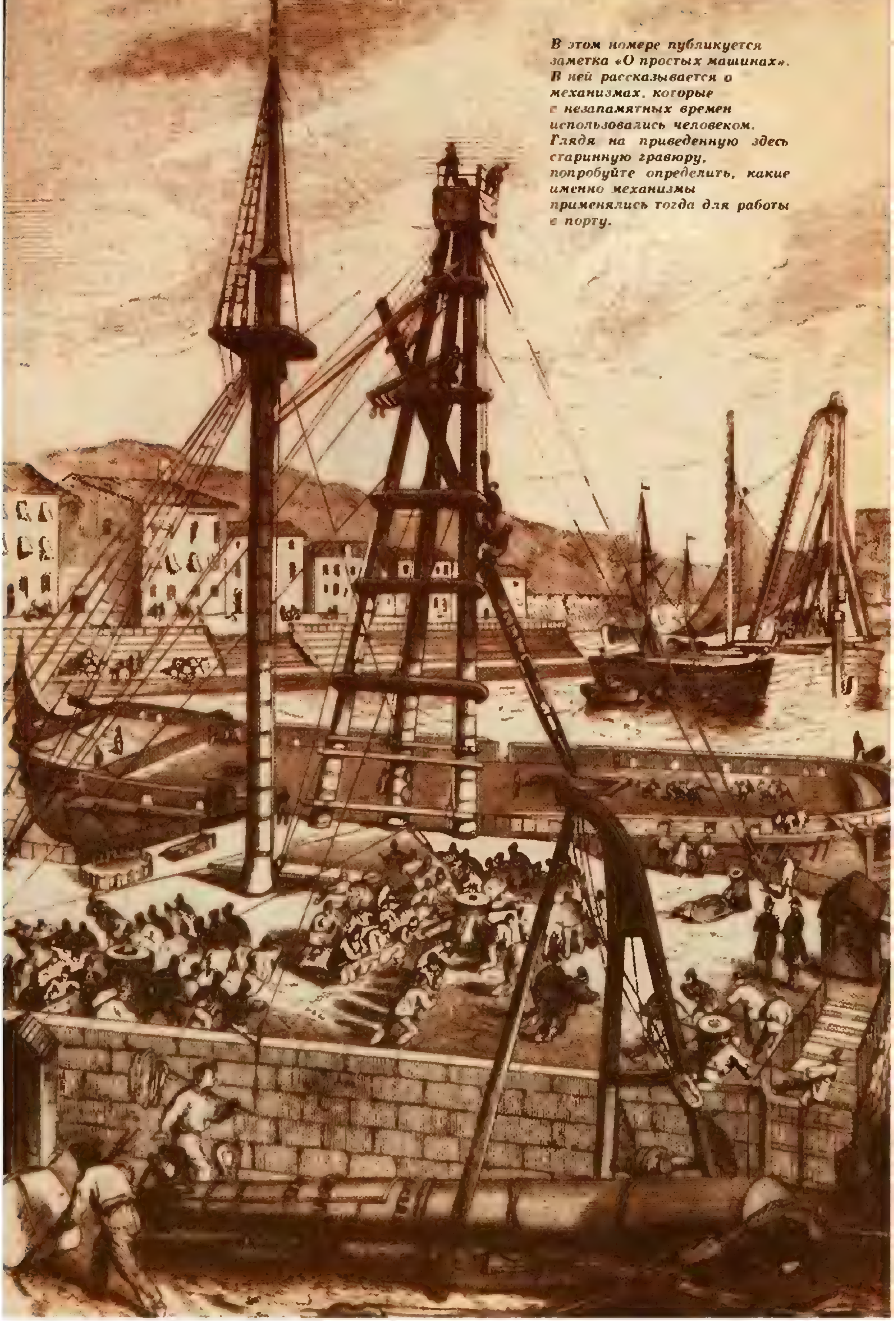


7. Мат в 3 хода.



8. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 июня 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).



В этом номере публикуется заметка «О простых машинах». В ней рассказывается о механизмах, которые с незапамятных времен использовались человеком. Глядя на приведенную здесь старинную гравюру, попробуйте определить, какие именно механизмы применялись тогда для работы в порту.

Цена 40 коп.

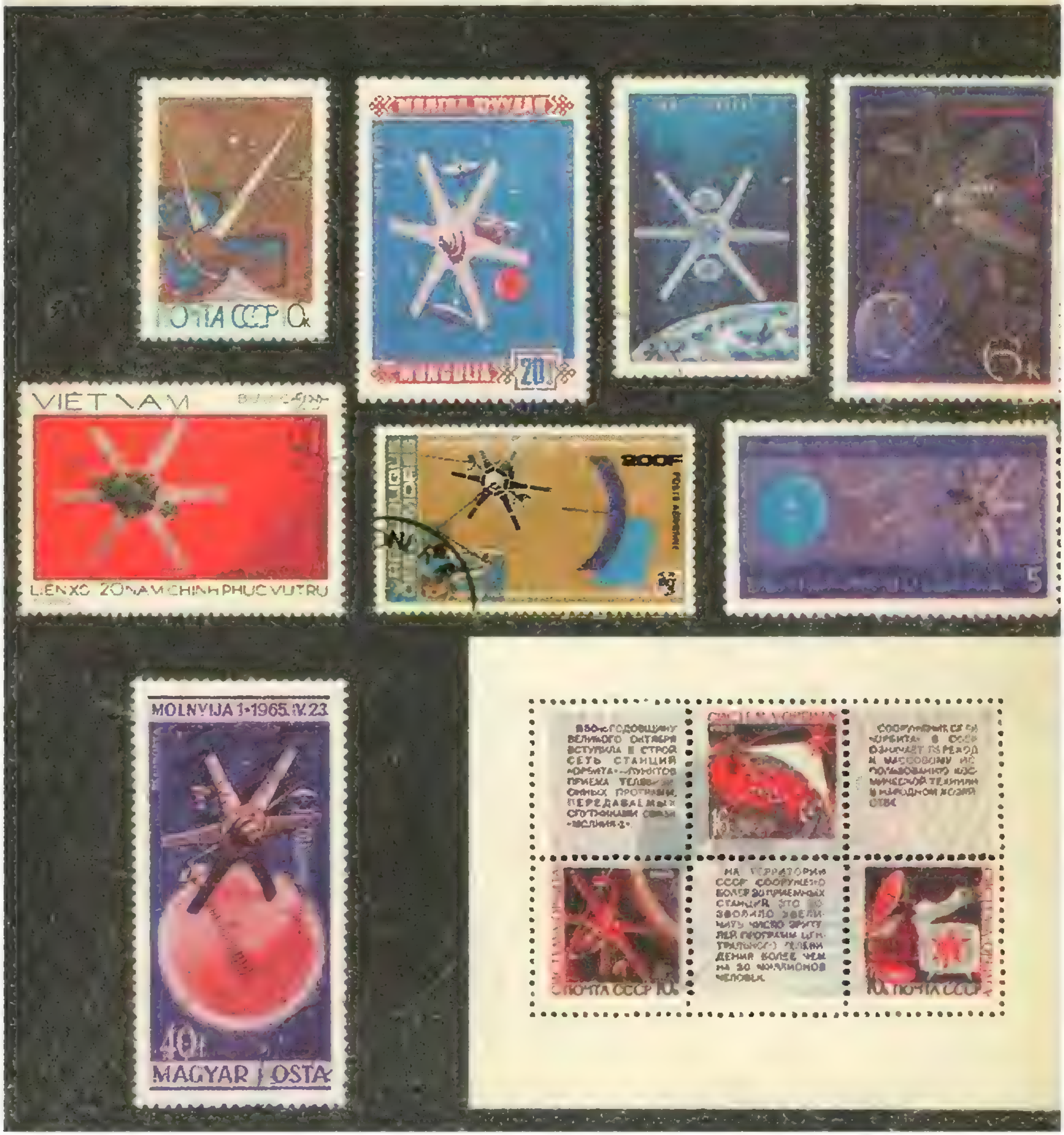
Индекс 70465

ЮБИЛЕЙ КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

20 лет назад, 23 апреля 1965 года, в нашей стране был выведен на орбиту первый искусственный спутник связи «Молния-1», и вскоре с его помощью начались передачи программ Центрального телевидения, а также телефонных разговоров, телеграфных и фототелеграфных сообщений из Москвы во Владивосток и обратно. Такие спутники выводятся на сильно вытянутые эллиптические орбиты с максимальным удалением от поверхности Земли около 40 000 км и периодом обращения около 12 часов. В течение 6—8 часов они видны со всей территории нашей страны, и их ретранслирующие устройства передают разнообразную информацию между весьма удаленными друг от друга пунктами. Спутники связи «Молния» позволили создать систему космической телевизионной связи «Орбита».

Создание космической связи явилось крупным событием в истории отечественной науки и техники. Оно было отмечено выпуском специальных знаков почтовой оплаты как в нашей стране, так и за рубежом. На приведенной здесь подборке воспроизведены марки и почтовый блок с изображением советских спутников связи серии «Молния».

В. Рудов



НОМЕР
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант **5** 1985

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	**40 лет Великой Победы**	**Forty years since V-day**
3	*И. К. Кикоин* Физики — фронту	*I. K. Kikoin*. Physicists — for the front
9	*Б. В. Гнеденко.* Математика и математики в Великой Отечественной войне	*B. V. Gnedenko.* Mathematics and mathematicians in the Great Patriotic War
	* * *	* * *
16	*Л. С. Марочник.* Свидание с кометой	*L. S. Marochnik.* Date with a comet
22	*В. В. Трофимов.* Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки	*V. V. Trofimov.* Princess Dido, isoperimeters and soap films
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
28	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
34	Математика 10	Mathematics 10
50	Избранные школьные задачи	Selected school problems
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
37	Задачи	Problems
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
15	Призеры конкурса «Задачник «Кванта»	Kvant problem solving contest prizewinners
38	Задачи М921—М925; Ф933—Ф937	Problems M921—M925; P933—P937
41	Решения задач М901—М904; Ф913—Ф916	Solutions M901—M904; P913—P916
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
46	*О. Ю. Овчинников.* Механическая работа и механическая энергия	*O. Yu. Ovchinnikov.* Mechanical work and mechanical energy
51	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
	Информация	**Information**
21	Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция	Leningrad young astronomer's expedition
56	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь (*55*)	**Miscellaneous (55)**
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Вычисления на шахматной доске *(3-я с. обложки)*	Chess board computations *(3rd cover page)*

Залп легендарных «Катюш» (см. фотографию на первой странице обложки) — символ сокрушительного наступления наших войск, приведшего к победе в Великой Отечественной войне. Это также и символ героического труда ученых, инженеров и рабочих, создававших оружие победы. О работах ученых, проведенных накануне и в годы войны, читайте в статьях «Физики — фронту» и «Математика и математики в Великой Отечественной войне».

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы «Квант», 1985.

40 лет Великой Победы

Исполнилось сорок лет с того дня, когда народы всего мира торжественно отпраздновали победу над гитлеровским фашизмом. Дорогую цену пришлось заплатить им за эту победу. Решающий вклад в разгром фашистских полчищ, покоривших почти все страны Европы и подчинивших себе всю их экономическую мощь, внес советский народ. История знает, что не было в те годы другой страны, способной на такой подвиг. Более двадцати миллионов советских людей погибли в этой войне, которую мы справедливо называем Великой Отечественной, и среди них много совсем молодых, стоявших, как и наши читатели, на пороге своей жизни. Война всколыхнула весь народ — на фронт стремились все. Юноши и девушки, не достигшие призывного возраста, всеми правдами и неправдами старались попасть в действующую армию. Особенно много школьников боролось в тылу врага, в подпольных организациях и партизанских отрядах. Молодогвардейцы Краснодона, юные разведчики в отрядах Ковпака, Федорова, Попудренко, герои крымских катакомб, сироты, усыновленные воинскими частями,— память о них навсегда останется в наших сердцах.

Огромную помощь в те годы наша армия получила от ученых. С первых же дней войны они повсюду переключились на разработку проблем, связанных с укреплением обороны страны. Благодаря их усилиям у нашей армии появились такие виды оружия, которые по своим характеристикам намного превосходили оружие врага,— реактивная артиллерия («Катюши»), танки «Т-34», самолеты «Ил-2», «Як-3», «Пе-2», противотанковые орудия с усовершенствованными снарядами. Советская наука с честью выдержала суровую проверку войной.

Советский Союз является главным оплотом мира. Благодаря миролюбивой политике нашего народа в Европе сорок лет не было никаких войн. Борясь за мир, мы твердо помним, что его не выпрашивают, а добиваются.

Агрессивные империалистические силы угрожают нам новой войной. Они расходуют колоссальные средства на совершенствование оружия массового уничтожения и увеличение его запасов, пытаются перенести гонку вооружений в космическое пространство. Но послевоенные годы убедительно показали, что советские ученые вместе со всем народом способны решать самые сложные оборонные проблемы и быстро ликвидировать все надежды империалистов на военное превосходство. Так было с атомным и термоядерным оружием, ракетными вооружениями, многозарядными боеголовками и т. п. Так недавно произошло и с крылатыми ракетами. В этом залог нашей безопасности и безопасности всего человечества.

Народы мира давно уже ведут активную борьбу против агрессивных планов империалистов и в первых рядах этих борцов мы неизменно видим нашу великую Родину.

Эта статья оказалась последней из тех, которые академик И. К. Кикоин готовил для нашего журнала. Диктовал он ее, находясь в больнице. И в те дни его постоянно интересовали дела и публикации «Кванта». Он считал необходимым рассказать школьникам о работах ученых-физиков, проведенных накануне и во время войны, работах, целью которых было одно — помочь фронту, способствовать нашей победе. Сам И. К. Кикоин был как очевидцем, так и непосредственным участником многих из этих работ, в начале 40-х годов он возглавил одно из ведущих направлений в решении атомной проблемы, став ближайшим соратником академика И. В. Курчатова.

Физики — фронту

Академик И. К. КИКОИН

Великая Отечественная война всколыхнула весь советский народ, в том числе и людей, занимающихся наукой, и, конечно, физиков. Всем понятно, что значительную роль в создании современного оружия играет техника, основой которой служит физическая наука.

Разумеется, крупные военно-научные проблемы решаются заранее, и это требует немалого времени. Однако некоторые вопросы, связанные с усовершенствованием военной техники, нужно и можно было решать и во время войны, в относительно короткие сроки.

Из крупных разработок, подготовленных до войны и потребовавших нескольких лет, прежде всего следует назвать радиолокацию. Сама идея радиолокации очень проста. Она заключается в том, что электромагнитные волны, достигая металлических объектов, отражаются от них, и по отраженным волнам можно, по крайней мере принципиально, определить положение объекта в любой момент времени. Само это явление обнаружил основоположник радиотехники А. С. Попов, заметивший, что проходящие корабли мешали передаче радиосигналов. От идеи до технического ее воплощения лежал огромный путь, который еще предстояло пройти. Дело в том, что радиоволны, достигшие поверхности металлического объекта, отражаются назад в ничтожной степени, потому что часть из них поглощается, остальные же рассеиваются объектом во все стороны. В приемник отраженных радиоволн попадает лишь малая часть энергии, первоначально направленной на изучаемый объект, скажем, самолет. И вот эту ничтожную часть надо было суметь зарегистрировать.

Первая попытка технического решения этой задачи относится к началу тридцатых годов. Затем в течение нескольких лет техника развивалась, совершенствовалась, и уже в 1939 году нашей армией был принят на вооружение РУС — радиоулавливатель самолетов. Вскоре была решена задача совмещения в одной станции источника электромагнитных волн и приемника отраженных волн. Она была названа РЛС — радиолокационной станцией, и, насколько мне известно, научный приоритет, то есть первенство, в ее разработке принадлежит именно советским физикам.

Нынешние РЛС сильно отличаются от тех, что применялись в начале Великой Отечественной войны, по той простой причине, что тогда еще не была разработана полупроводниковая техника, все делалось на лампах — и генераторы, и приемники. На полупроводниковые системы перешли уже во время войны. Такие радиолокаторы можно было уже тогда устанавливать и на самолетах, а не только на земле. Это позволило вести ночной бой, то есть «видеть» вражеский самолет в темноте.

Успешное использование радиолокаторов для обнаружения движущихся военных объектов — самолетов, кораблей и т. д.— сыграло огромную роль в военном деле и способствовало нашей победе.

Примерно такая же судьба сложилась у метода защиты военных кораблей от вражеских магнитных мин. Напомню вкратце саму идею таких мин и как можно было от них защищаться.

Известно, что Земной шар создает вокруг себя магнитное поле. Оно небольшое по величине, всего около десятитысячной доли теслы. Однако его достаточно, чтобы ориентировать стрелку компаса по своим силовым линиям. Если в этом поле находится массивный предмет, например корабль, и железа (вернее, стали) в нем много, несколько тысяч тонн, то магнитное поле концентрируется и может увеличиться в несколько десятков раз.

С одной стороны, для навигации с использованием компаса в качестве указателя направления движения корабля это мешает. Корабль искажает истинное направление земного магнитного поля, приходится учитывать влияние стального корпуса на компас.

Но, с другой стороны, это усиленное кораблем магнитное поле может проявиться и таким образом. Оно способно привести в действие какой-нибудь механизм, поворачивающийся под влиянием магнитной силы и замыкающий электрическую цепь. В эту цепь можно включить детонатор, погруженный во взрывчатое вещество мины. Такие магнитные мины отличаются от обычных, на которые корабль непосредственно натыкается и этим вызывает взрыв, тем, что лежат на дне моря и взрываются на расстоянии — под действием лишь магнитного поля корабля.

Было известно, что эти мины разрабатывались во многих странах, и, вероятно, находились в распоряжении военно-морских сил фашистской Германии. Задача по борьбе с магнитными минами была поставлена за несколько лет до начала войны в Ленинградском физико-техническом институте. Требовалось «размагнитить» корабли, чтобы ликвидировать усиленное ими магнитное поле. Каким путем?

На корабле специальным способом располагали большие катушки из проводов, по которым пропускался электрический ток. Он порождал магнитное поле, компенсирующее поле корабля, то есть поле прямо противоположного направления. К началу войны проблема была научно разрешена, и ее надо было перевести на технические рельсы, то есть создать такие устройства на действующих кораблях советского флота.

Это было очень быстро организовано. Все боевые корабли подвергались в портах «антимагнитной» обработке и выходили в море размагниченными. Тем самым были спасены многие тысячи жизней наших военных моряков. Понятно, что для такой работы потребовались знания физиков, хорошие физические лаборатории, что и предопределило ее успех.

Перед войной была решена еще одна задача, казалось бы, не имевшая непосредственного отношения к военным действиям, однако ее решение оказало существенное влияние на технику.

В военное время расходуется очень много алюминия — для самолетов, меди — для снарядов. Эти материалы получают электролитическим путем. И если их производят в больших количествах, то через электролитическую ванну проходят токи, достигающие десятков тысяч ампер. Так вот, на одном из алюминиевых заводов, который запускали перед войной, и предполагалось использовать такие большие токи. Обычный способ измерения токов шунтами не годился, шунты были рассчитаны максимум на 10 тысяч ампер. Чтобы ток можно было регулировать, надо было придумать способ его измерения, не имея шунтов.

Тут без физических знаний нельзя было обойтись. Ясно, что когда по проводнику проходит такой большой ток, то созданное им магнитное поле тоже довольно велико. Измерив поле, мы узнаем, каков ток. К сожалению, форма проводов была не цилиндрической, это был ряд прямоугольных шин, сложенных параллельно. И связь магнитного поля с током, протекающим по такому проводнику, было очень трудно установить, готовых формул не было.

Тем не менее физикам удалось провести расчеты и разработать прибор, который сперва на модели, а потом непосредственно на заводе позволял промерять поле и ток. Таких приборов нужно было немного, всего несколько десятков экземпляров, и их изготовили прямо в лаборатории в течение сравнительно небольшого времени.

Перед самым началом войны завод был отрегулирован, пущен, впервые на нем применяли гигантские токи, а продукция его шла на авиазаводы. И здесь помощь физиков оказалась очень полезной.

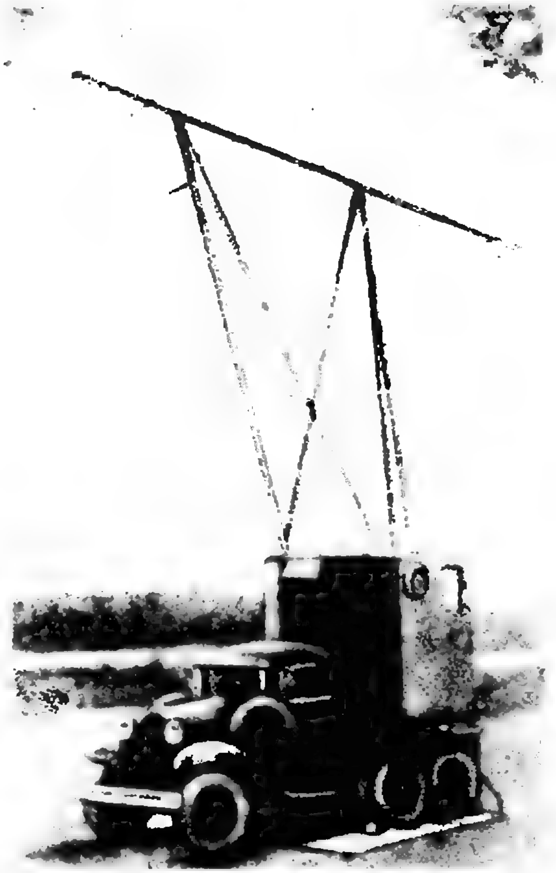
До сих пор речь шла о «заблаговременных» работах. Однако я упоминал о вопросах, которые можно было решать и во время войны.

Например, на одном из крупных уральских заводов, выпускавшем артиллерийские снаряды, значительная часть продукции браковалась. Снаряды не должны были разрываться до вылета из ствола орудия. Поэтому каждый из них проверялся, и если имелся хоть маленький дефект, снаряд браковали: военные приемщики действовали по строгим инструкциям.

Группа уральских физиков, побывавших на этом заводе, заметила сравнительно большие склады с негодной продукцией и заинтересовалась, действительно ли это брак, который может привести к преждевременному разрыву снарядов. По каким признакам велась отбраковка? Оказалось, что на глаз, по внешнему виду снаряда. Однако известно, что сталь, из которой делали снаряды, легко намагничивается, и сколько-нибудь значительный дефект может быть обнаружен чисто магнитным путем. Магнитная характеристика изделия очень чувствительна ко всяким нарушениям его целостности, стабильности структуры.

И вот ученые исследовали магнитные характеристики бракованных снарядов и выяснили, что многие поверхностные, видимые глазом дефекты в толщу снаряда не проходят. Никакого вреда, никакого уменьшения прочности снаряда они не вызывают. Предложили вместо внешнего осмотра производить отбраковку, пользуясь приборами, которые позволяли снять своего рода топографию магнитного поля снаряда. По этой картине силовых линий магнитного поля можно было судить, есть ли заслуживающие внимания дефекты.

Такие приборы были разработаны, и ими стали пользоваться непосредственно на предприятиях. Этому помогли крупные достижения наших физиков, специалистов по магнетизму. На заводах, изготовлявших снаряды, им были очень благодарны, поскольку значительная часть ранее забракованных снарядов была возвращена в число действующих. Практически увеличение выпуска снарядов произошло бесплатно, за счет уменьшения кажущегося брака.

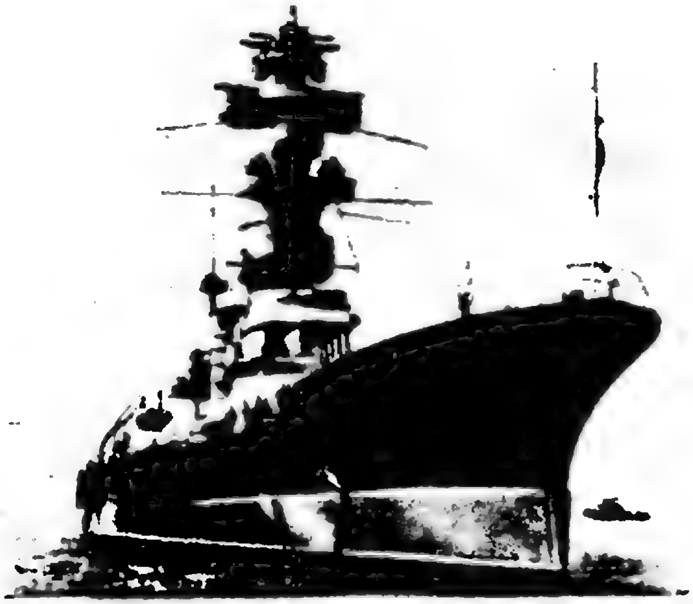


Станция дальнего обнаружения РУС-2 (приемная установка).

Метод стал широко распространяться, и сейчас, как вы, наверное, слышали, существует специальная техническая наука, называемая магнитной дефектоскопией. Она позволяет обнаруживать дефекты в готовых изделиях по их магнитным характеристикам.

Тот же самый принцип — исследование магнитного поля стальных изделий — был использован на одном из уральских заводов, выпускавших танковые двигатели. Важнейшая часть двигателя — коленчатый вал, шейки которого вращаются в подшипниках. Эти шейки должны быть очень точно изготовлены. Они делаются из калёной стали и шлифуются на специальных станках.

Тогда еще не было станков с числовым управлением, все делалось вручную, и рабочий-шлифовщик часто останавливал станок и измерял диаметр шейки. Ведь если он снимет лишний слой стали, уменьшит размеры — деталь пойдет в брак. Из-за таких частых остановок производи-



Линкор «Марат» был первым из крупнейших кораблей Военно-Морского Флота СССР, оборудованных размагничивающей системой.

тельность станка, естественно, использовалась не полностью.

Уральские физики придумали неплохой способ непрерывного измерения диаметра шейки без остановки шлифовального станка. Для этого вблизи обтачиваемой шейки ставился небольшой прибор, реагирующий на магнитное поле шейки. Оно, разумеется, зависит от расстояния между прибором и поверхностью шейки. По мере сошлифовывания, уменьшения диаметра детали, менялись и показания прибора. Нужно было только наблюдать за его стрелкой и по достижении ею определенной метки на шкале останавливать станок и снимать деталь — всё без промежуточных измерений.

Такие приборы непрерывного действия были установлены в больших цехах, где изготовлялись коленчатые валы. Производительность шлифовальных станков резко возросла. Значит, увеличилось число выпускаемых двигателей и, соответственно, танков. Это прямо способствовало росту военной техники на полях сражений. Так во время войны в течение нескольких месяцев была решена очень важная задача.

Еще один пример. Перед знаменитой битвой на Курской дуге в 1943 году немцы стали выпускать новые типы танков — «Пантеры» и «Тигры». Это были танки с резко усиленной броней, которую обычные снаряды пробивали с трудом или вообще не пробивали. За несколько месяцев до битвы нашим войскам удалось захватить несколько таких танков и установить, насколько прочна их броня. Чтобы пробить ее, надо было придумать снаряды с улучшенными характеристиками. Эта задача была поручена нашим металловедам в одном из институтов Москвы.

Хорошо известно, что для увеличения твердости стали следует добавить в нее вольфрам. Однако он плавится при очень высокой температуре, обычная технология выплавления такой стали очень трудна. Организовать в массовом масштабе выплавку вольфрамистой стали было невозможно, промышленность не была к этому подготовлена. И вот сотрудники института предложили изготовить головки снарядов из металлического порошка с добавкой порошка вольфрама. Мелкий порошок довольно хорошо спекается при большой температуре. С помощью методов порошковой металлургии такие головки были сделаны, и они оказались необычайно прочными.

Испытания, проведенные с новыми снарядами, показали, что они с легкостью пробивают самую толстую броню «Тигров» и «Пантер». Массовое производство снарядов с головками из вольфрамистой стали было налажено довольно быстро. И когда на Курской дуге наши артиллеристы встретились с немецкими танками, стало ясно, что планы гитлеровского командования, связанные с неуязвимостью новой техники, провалились. Советские снаряды «внесли» свой вклад в сокрушительное поражение немецких войск.

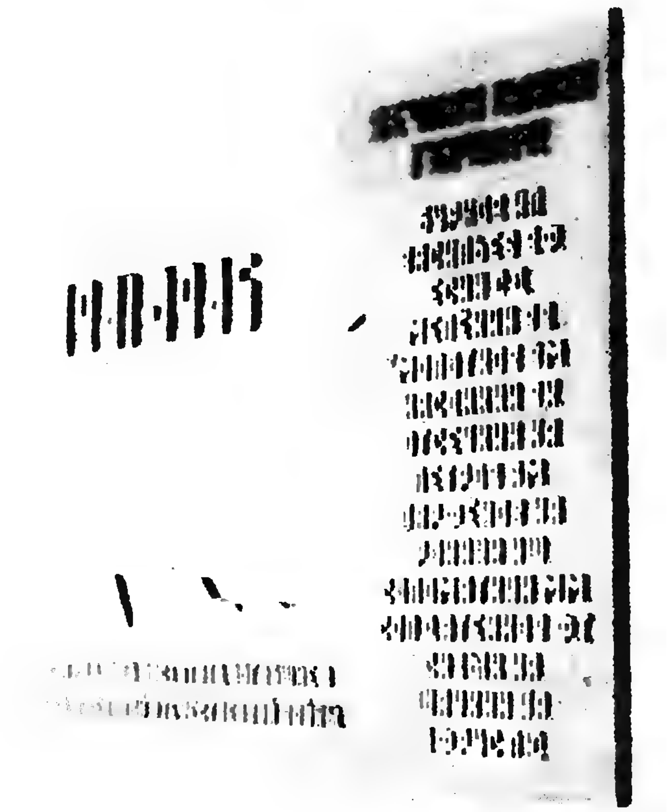
Ну и, конечно, физики не остались в стороне от задачи упрочения брони наших танков. В Советском Союзе физика твердого тела получила широкое развитие, особенно в Ленинградском физико-техническом институте. Директор ЛФТИ академик А. Ф. Иоффе с сотрудниками занимались изучением специальных сталей, в том числе и таких, из которых делается броня.

Поэтому неудивительно, что знания и опыт этих физиков были использованы во время войны. Броня наших танков была в значительной степени усилена и отвечала, пожалуй, самым высоким требованиям науки и техники военного времени. Таким образом, специалисты в области физики металлов непосредственно участвовали в создании грозного оружия Советской Армии, наших бронетанковых сил.

Думаю, что будет интересен короткий рассказ о сухопутных магнитных минах. В начале войны к ученым обратились представители инженерных войск с просьбой выяснить, нельзя ли разработать подобную мину не для кораблей, а для танков. Танк, конечно, весит много меньше корабля, десятки тонн. Возможно, его магнитное поле не очень велико. Надо было проверить.

Эта работа была сделана на Урале. Физикам предоставили несколько танков. Провели измерения магнитного поля под ними на разных глубинах. Оказалось, что поле довольно заметное, и можно было попробовать применить магнитный механизм для подрыва танков. Однако, ставилось важное дополнительное требование: сама мина должна содержать как можно меньше металла. Ведь к тому времени уже были разработаны миноискатели.

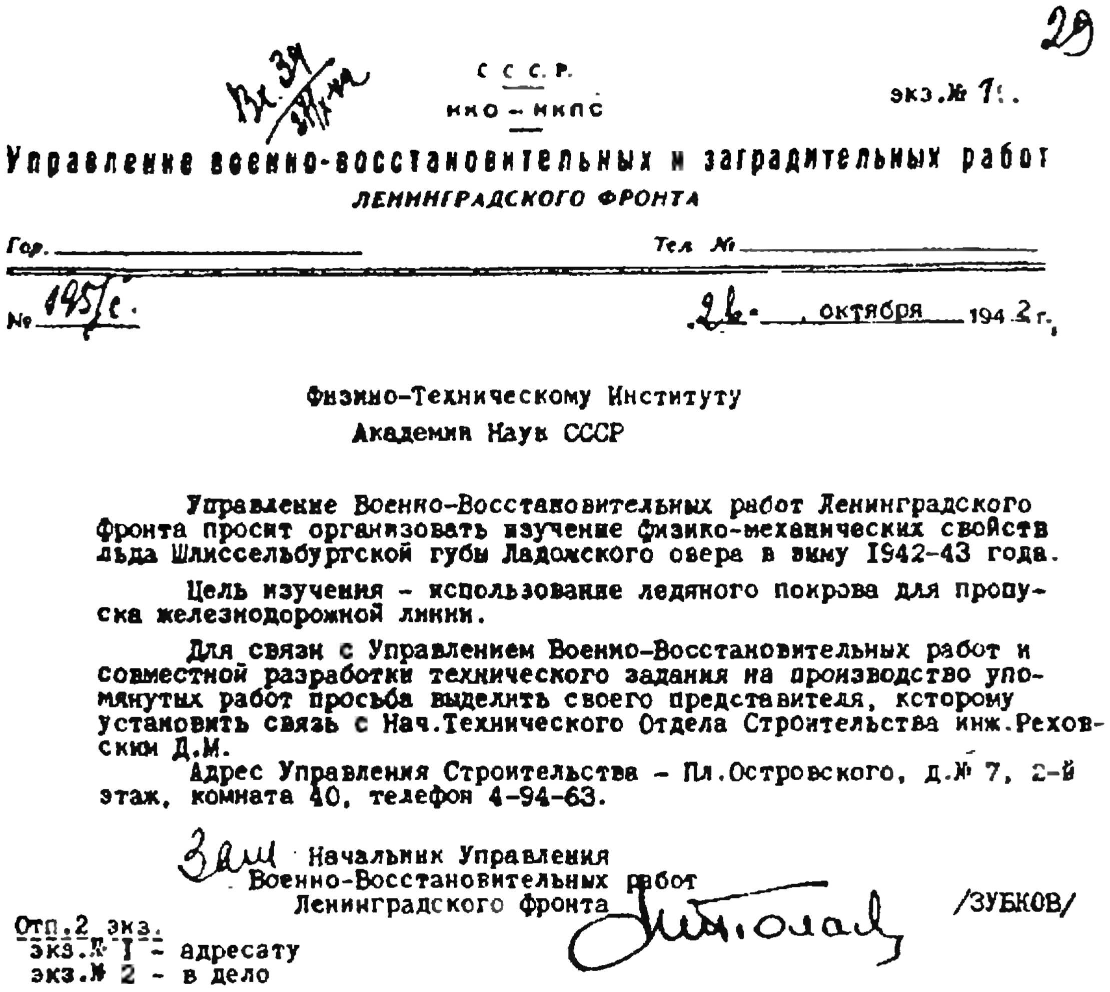
Потребовалось придумать специальный сплав для своеобразной стрелки «компаса», замыкающей цепь, содержащую небольшую батарейку, сплав,легко намагничивающийся под действием поля танка. В результате работы суммарное количество металла ограничивалось 2—3 граммами на одну мину, а магнитик из сплава был настолько хорош, что позволял подорвать не только танк, но и автомашину. Что уж говорить о паровозах...



Памятная доска, установленная в Институте физических проблем им. С. И. Вавилова АН СССР.

Нельзя не сказать и о физической задаче огромной важности, которую решили физики, оставшиеся во время блокады в Ленинграде. Как известно, довольно долго единственным путем, связывающим город со страной, была Дорога Жизни, проложенная по льду Ладожского озера. Вопрос заключался в том, можно ли и в каких масштабах проводить по дороге грузы ранней зимой или весной, когда озеро только что замерзло или лед начинал подтаивать. Нужно было непосредственно измерять прочность льда, указывать, какой груз он может выдержать.

Ленинградские физики вместе с гидрологами и моряками проделали замечательную работу, с блеском решив эту задачу. Они нашли способ определения прочности ледяного покрова. Прямо на месте, в разных точках Ладожского озера днем и ночью проводились измерения. Именно ими практически руководствовались, выясняя, на каком расстоянии, с каким грузом должны двигаться машины. Без этих указаний было бы много аварий, погибло бы много людей, город недополучил бы продовольствия и боеприпасов. Это пример добросо-



29

Вх.39 / 3/XI-42

С С С Р.

НКО – НКПС

экз.№ 1.

Управление военно-восстановительных и заградительных работ

ЛЕНИНГРАДСКОГО ФРОНТА

Гор. ________ Тел № ________

№ 145/с. 26 октября 1942 г.

Физико-Техническому Институту
Академии Наук СССР

Управление Военно-Восстановительных работ Ленинградского Фронта просит организовать изучение физико-механических свойств льда Шлиссельбургской губы Ладожского озера в зиму 1942-43 года.

Цель изучения – использование ледяного покрова для пропуска железнодорожной линии.

Для связи с Управлением Военно-Восстановительных работ и совместной разработки технического задания на производство упомянутых работ просьба выделить своего представителя, которому установить связь с Нач.Технического Отдела Строительства инж.Реховским Д.М.

Адрес Управления Строительства – Пл.Островского, д.№ 7, 2-й этаж, комната 40, телефон 4-94-63.

Зам Начальник Управления
Военно-Восстановительных работ
Ленинградского Фронта /ЗУБКОВ/

Отп.2 экз.
экз.№ 1 – адресату
экз.№ 2 – в дело

Письмо Управления военно-восстановительных и заградительных работ Ленинградского фронта в Физико-технический институт АН СССР об организации изучения свойств льда Ладожского озера для прокладывания железнодорожной линии.

вестной и интенсивной работы в сложных условиях.

Конечно, можно было бы еще рассказать о помощи, которую оказали физики фронту. Но думаю, что приведенных примеров достаточно, чтобы убедительно показать, как ученые содействовали успеху наших вооруженных сил.

Трудно в небольшой статье говорить и о других науках, занятых военным делом. Упомяну только, что советская школа физико-химиков, возглавляемая академиком Н. Н. Семеновым, долгое время занималась изучением процессов горения и взрыва. Во время войны этим ученым пришлось использовать накопленный багаж знаний для прямых военных целей, активно способствовать нашей исторической победе.

После войны немцы признали, что наши наука и техника были на высоте требований, которые предъявило время. И действительно, советские ученые, в частности физики, самым непосредственным образом исполнили свой патриотический долг помощи фронту.

Математика и математики в Великой Отечественной войне

Академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Сорок лет прошло со дня победы советского народа в Великой Отечественной войне. Неисчислимые жертвы понесла страна во имя независимости, свободы и общественных идеалов: миллионы погибших и раненых, страдания от голода, тысячи разрушенных городов и деревень, сотни тысяч угнанных на фашистскую каторгу. Несмотря ни на что советский народ выстоял и победил.

На защиту Родины

С первых дней войны математики принимали участие в защите страны: призывались в армию, записывались в народное ополчение, шли на фронт добровольцами. В самые тяжелые для страны дни они показали себя верными сыновьями Родины, способными на самопожертвование и готовыми отдать жизнь во имя свободы Отчизны. И действительно, многие из тех, кто ушел на фронт, не возвратились и не приступили к своей любимой работе. Среди погибших было много талантливых математиков, подававших большие надежды, способных внести большой вклад в прогресс наших знаний.

В ту пору я работал в Московском университете, был доцентом кафедры теории вероятностей и ученым секретарем Института математики МГУ. Как только стало известно о нападении фашистской Германии на наше Отечество, всюду на заводах и в учреждениях прошли митинги, и возникло общенародное движение по записи в народное ополчение. На нашем механико-математическом факультете в ополчение записались практически все студенты и аспиранты и подавляющее большинство ассистентов, доцентов и профессоров, в том числе и те, кто по возрасту и состоянию здоровья был освобожден от воинской службы. Позднее некоторые ополченцы были вычеркнуты из списков, так как они имели профессорские звания или степени доктора. В эту категорию попал и я, поскольку к тому времени мной была защищена докторская диссертация. В результате мне пришлось не с оружием в руках защищать страну, а участвовать в создании этого оружия, а также в разработке методов рационального его использования.

Большое число математиков, как мы уже отмечали, были мобилизованы или ушли на фронт добровольцами. Они храбро воевали и честно исполняли свой гражданский долг. Несомненно, что при этом страна потеряла огромное число талантливой молодежи, которая могла бы стать гордостью отечественной науки. Об этом мы можем судить, во-первых, по тому, что среди возвратившихся после участия в сражениях Великой Отечественной войны значительное число стало крупными учеными — профессорами, членами-корреспондентами и академиками Всесоюзной и республиканских академий наук. Достаточно назвать такие имена как академики Ю. В. Линник, Ю. А. Митропольский, Г. Г. Черный, Н. П. Еругин, О. С. Парасюк, чтобы убедиться в этом. А во-вторых, каждый из университетов потерял многих молодых ученых, уже сумевших проявить себя и обещавших в будущем очень многое, но не вернувшихся с войны. Так, Московский университет потерял талантливых молодых математиков Г. М. Бавли, М. В. Бебутова, Н. Б. Веденисова, В. Н. Засухина и многих, многих других. Они могли бы стать гордостью нашей науки, но война прервала и зачеркнула развитие так славно начатого ими научного пути.

В народном ополчении: бой под Ельней

Помимо преподавателей, аспирантов и студентов, получивших мобилизационные извещения уже в первые дни войны и попавших в регулярные воинские части, механико-математический факультет Московского университета дал 213 человек в 8-ю Краснопресненскую дивизию народного ополчения. Все они были зачислены в 975-й артиллерийский полк этой дивизии и после короткого обучения уже в августе заняли оборонительный рубеж на ржевско-вяземском направлении. Вместе со всеми наши товарищи создавали оборонительный рубеж: рыли окопы, противотанковые рвы, минные поля, устанавливали орудия. Но на фронте не все происходит так, как предполагает обороняющийся. В начале октября положение на ельнинском направлении резко обострилось, поскольку немцы сосредоточили здесь большие свежие силы и начали наступательную операцию. В связи с этим командование фронтом передало 8-ю Краснопресненскую дивизию из 32-й в 24-ю армию и срочно перебросило ее с подготовленных позиций в район деревни Уварово, расположенной несколько южнее Ельни. К сожалению, подготовленных позиций там не оказалось и пришлось задерживать врага буквально «с марша». Дивизия выполнила боевую задачу: она задержала врага на несколько дней и тем самым оказала значительную помощь обороне Москвы. По сохранившимся сведениям это сражение дорого обошлось оккупантам: около 45 тысяч солдат и офицеров они потеряли под Ельней в результате стойкой обороны советских солдат. Но и мы заплатили за это дорогую цену: около трети ополченцев 8-ой дивизии погибли в этих боях. Среди них были аспиранты или уже защитившие диссертации А. И. Герчиков, М. Е. Глезерман, В. Н. Засухин, И. Р. Лепехин, Х. М. Мильштейн, С. С. Кудашев, С. Я. Карнов, А. Т. Павлов, М. И. Песин и ряд других. Трудно переоценить тяжесть этой потери для страны и для советской науки, а нам, преподавателям факультета, знавшим их лично, ценившим их способности и увлеченность наукой, эта потеря особенно горька.

Академик и директор Института механики МГУ Г. Г. Черный рассказывал, что 975-й артиллерийский полк 5 октября отбивал ожесточенные атаки наседавшего со всех сторон противника. Одно за другим выходили из строя орудия. Когда был отдан приказ об отходе на новую позицию, из них осталось лишь шесть. Отходить к лесу пришлось по открытому полю под огнем противника; еще четыре орудия были выведены из строя. Расчеты оставшихся двух орудий изготовились к бою, а пехота залегла рядом, на опушке, в наспех вырытых окопчиках. В это время разведка донесла, что вблизи от леса движется большая колонна противника — машины с солдатами, самоходные орудия, минометы, боеприпасы. Было принято немедленное решение — атаковать наличными средствами беспечного противника. Наводчиком одного из орудий был Г. Г. Черный, другого — также мехматовец И. Степанов. Тщательное прицеливание, залп и оба снаряда разорвались в колонне. Дальше бешеный огонь по противнику, разбитые машины, мотоциклы, уничтоженные солдаты. Однако растерянность врага прошла, и в ответ полетели снаряды и мины. Дуэль длилась до тех пор, пока у наших оставались снаряды.

Медсестры, летчицы и артиллеристы

Многие студентки после прохождения двухмесячных курсов медсестер были направлены в госпитали, медсанбаты и непосредственно на передовую. Кроме того, студентки университета откликнулись на призыв известной летчицы Героя Советского Союза Марины Расковой и стали штурманами и летчицами, в частности, 46-го гвардейского полка ночных бомбардировщиков. Летали эти летчицы на тихоходном и незащищенном от огня самолете «У-2», но наносили противнику весьма значительный ущерб. Пяти летчицам выпускницам мехмата было присвоено звание Героя Советского Союза. Вот их имена: Е. Руднева, Е. Пасько, Р. Гашева, А. Зубкова, Е. Рябова. Еще три выпускника факультета были Героями Советского Союза — Г. Барыков, Г. Волохов, Л. Ратушная.

Герой Советского Союза Екатерина Рябова перед боевым вылетом.

Добровольцем пошел в Армию и профессор А. А. Ляпунов и, как многие мехматовцы, стал артиллерийским офицером. Он не только храбро воевал, но и вносил много ценного в правила стрельбы. Но здесь он использовал свой опыт математика, которому свойственно искать самые лучшие решения. Его предложения позволили увеличить эффективность стрельбы. За работы в области кибернетики, теории множеств и программирования А. А. Ляпунов уже после войны был избран член-корреспондентом АН СССР.

Математики нашей страны в период тягчайших испытаний проявили себя как подлинные патриоты, проявляли величайшее мужество, были храбрыми и расчетливыми воинами.

Математические задачи — для фронта

Мы должны преклоняться перед выдержкой, самоотверженностью и верностью Отчизне, которую проявляли математики-воины. Однако нельзя забывать и о другом вкладе математиков в победу советского народа над сильным и коварным врагом. Этот вклад состоит в использовании тех специфических знаний и умений, которыми обладают математики. Значение этого фактора особенно важно в наши дни, когда война стала, в первую очередь, соревнованием разума, изобретательности и точного расчета. Дело в том, что для военных действий привлекаются все достижения естествознания, а вместе с ними и математика во всех ее проявлениях. Создание атомного и ракетного оружия потребовало не только использования физических законов, но и обширных математических расчетов, создания новых математических моделей и даже новых ветвей математики. Без таких предварительных математических исследований не создается ни одна техническая система и, чем она сложнее, тем разнообразнее и шире ее математический аппарат. Для примера, крейсер представляет собой такую сложную техническую систему. Прежде чем начать его постройку, необходимо выявить геометрические обводы корпуса судна, чтобы при движении не создавались дополнительные сопротивления и чтобы одновременно он был послушен управляющим воздействиям руля. Предварительно необходимо обеспечить живучесть корабля, надежность его управления, рассчитать влияние на остойчивость расположения различного рода масс — машин, орудий, торпедных аппаратов и пр. Но и этого мало — требуется обеспечить связь со всеми боевыми единицами корабля, то есть создать эффективную систему управления кораблем и его оружием.

Мы перечислили лишь ничтожную долю тех задач, которые должен решить математик, прежде чем корабль можно начать строить. Но серьезные задачи необходимо решать и в период его эксплуатации — штурманские расчеты, расчеты стрельб и т. д.

Совершенствование военной техники

В период Великой Отечественной войны техника была разнообразной и сложной. Она также требовала широкого использования математических

Академик М. А. Лаврентьев за изучением пробивного действия взрывчатых веществ (1944 г.).

расчетов для ее изготовления и эксплуатации. Увеличение скорости полета самолетов требовало не только повышения мощности двигателей, но и выбора оптимального профиля фюзеляжа и крыльев, а также решения многих других вопросов. В России над этими вопросами еще с прошлого века работал ряд ученых и в первую очередь Н. Е. Жуковский (1847—1921), названный В. И. Лениным отцом русской авиации. Он закономерно считается основоположником новой математической науки — *аэродинамики*, в которой ему удалось создать ряд сильных методов исследования и решить многочисленные актуальные задачи, основать большую научную школу, состоящую из ближайших учеников по университету и старейшему высшему техническому заведению Москвы — Московскому высшему техническому училищу. Жуковский заложил основы Военно-воздушной академии, получившей впоследствии его имя, а также Центральный аэрогидродинамический институт. Это научное учреждение долгие годы работало под руководством одного из ближайших учеников и сотрудников Н. Е. Жуковского — С. А. Чаплыгина (1869—1942) и объединила многих выдающихся исследователей — М. В. Келдыша (1911—1978), В. В. Голубева (1884—1954), М. А. Лаврентьева (1900—1980) и др. Теоретический отдел разрабатывал многие важные проблемы, в том числе и для военной авиации. Многие из этих разработок пригодились и были широко использованы для создания новых систем истребителей, штурмовиков и бомбардировщиков, обладавших повышенной маневренностью, скоростью, надежностью.

Большое значение получили теории двух явлений — *штопора* и *шимми* (или *флаттера*), представлявших в ту пору основную опасность для авиаторов. Как правило, самолет, попавший в состояние штопора или шимми (особые вибрации самолета, приводившие к его разрушению) уже не могли из него выйти. Теорию этих явлений создал М. В. Келдыш (впоследствии президент Академии наук СССР, главный теоретик космонавтики). Однако он пошел дальше и на основании теории сделал заключения о том, как устранять эти явления. В результате практика полетов получила надежное средство для борьбы с шимми и штопором и за все время войны практически не было в нашей авиации гибели самолетов и летчиков по этим причинам. Переоценить результаты этих исследований невозможно, поскольку они помогли не только сохранить жизнь летчиков и самолеты, но и позволили летать на больших скоростях.

Теория стрельбы

Традиционная область деятельности ученых нашей страны — исследование артиллерийских систем.

Этим занимались М. В. Остроградский (1801—1862) и П. Л. Чебышёв (1821—1894), и последующие поколения ученых. Проблемы пристрелки, разработанные еще в XIX веке в связи с появлением новых типов артиллерии потребовали в период Великой Отечественной войны дополнительных исследований и составления таблиц. Стрельба с самолета по самолету и по наземным целям также привела к математическим задачам, которые нужно было срочно решить. Ими занимались упорно как специалисты в области артиллерии, так и математики. Проблемы бомбометания привели к необходимости составления таблиц, позволяющих находить оптимальное время для сброса бомб на цель, область, которую накроет бомбовой удар. Такие таблицы были составлены еще до начала войны, но для самолетов, обладающих большими скоростями. Во время войны выявилась полезная возможность использования тихоходных учебных самолетов для ночных бомбежек. Были созданы специальные полки ночных бомбардировщиков, но для них не было своевременно создано таблиц бомбометания. Возникла срочная задача производства соответствующих расчетов. Таблицы были созданы и они оказали несомненную помощь нашим летчикам и летчицам.

Интересная задача возникла у моряков в связи с желанием увеличить вероятность попадания в цель при торпедном залпе. Возникла идея за счет искусственного рассеивания увеличить эту вероятность. Этой задачей занялся один из крупнейших наших математиков академик А. Н. Колмогоров. Ему удалось найти полное решение задачи и довести его до практического использования. Несомненно, что какую-то долю успехов наших моряков следует отнести и на счет этой решенной Колмогоровым задачи. Позднее его выводы были перенесены и на проблемы, связанные со стрельбой зенитной артиллерии по самолетам. Вообще нужно сказать, что актуальная математическая задача, решенная в одной практической ситуации, очень быстро находит и другие применения, порой очень далекие от первоначального направления исследований.

Статистический контроль в военном производстве

Имеется еще один аспект работы советских математиков на помощь фронту, о котором нельзя умалчивать — это работа по организации производственного процесса, направленная на повышение производительности труда и на улучшение качества продукции. Здесь мы столкнулись с огромным числом проблем, которые по самому их существу нуждались в математических методах и в усилиях математиков. Мы затронем здесь лишь одну проблему, получившую наименование контроля качества массовой промышленной продукции и управления качеством в процессе производства. Эта проблема со всей остротой возникла перед промышленностью уже в первые дни войны, поскольку прошла массовая мобилизация и квалифицированные рабочие стали солдатами. Им на смену пришли женщины и подростки без квалификации и рабочего опыта.

Я вспоминаю такой случай: мне пришлось быть на одном из приборостроительных заводов в Свердловске. Он изготовлял крайне необходимые приборы для авиации и артиллерии. У станков я увидел практически только подростков 13—15 лет. Увидел я также огромные кучи бракованных деталей. Сопровождавший меня мастер пояснил, что эти детали выходят за пределы допуска и поэтому непригодны для сборки. А вот если бы удалось собрать из этих «запоротых» деталей пригодные приборы, мы бы смогли сразу же удовлетворить потребности на месяц вперед.

Слова мастера не давали мне покоя. В результате общения с инженерами завода родилась мысль разбить детали на 6 групп по размерам, которые уже было бы возможно сопрягать между собой. В шестую группу входили детали совершенно непригодные для сборки. Исследования показали, что так собранные приборы оказались вполне пригодными для дела. Они обладали одним недостатком: если какая-либо деталь выходила из строя, то ее можно было заменять лишь деталью той же группы, из деталей которой собран прибор. Но в ту пору и для тех целей, для которых были предназначены приборы, можно было обойтись заменой приборов, а не деталей. Нам удалось успешно использовать «завалы» испорченных подростками деталей.

Задача *контроля качества изготовленной продукции* состоит в следующем. Пусть изготовлено N изделий, они должны удовлетворять некоторым требованиям. Скажем, снаряды должны быть определенного диаметра, не выходящего за пределы отрезка $[D_1, D_2]$, иначе они будут непригодны для стрельбы. Они должны обладать определенной кучностью при стрельбе, иначе будут затруднения при стрельбе по цели. И если с первой задачей справиться легко — нужно замерить диаметры изготовленных снарядов и отобрать те из них, которые не удовлетворяют требованиям, то с другим требованием положение значительно сложнее. Действительно, чтобы проверить кучность стрельбы, необходимо провести стрельбы. А что же останется после испытаний? Испытания нужно произвести так, чтобы подавляющая часть продукции осталась пригодной для дальнейшего использования. Мы столкнулись с основным требованием: по испытанию малой части изделий научиться судить о качестве всей партии. Методы, которые были для этой цели предложены, получили название *статистических*. Их теория берет свое начало с одной работы 1848 года академика М. В. Остроградского. Позднее этой задачей занимались профессор В. И. Романовский (1879—1954) в Ташкенте и его ученики. Во время войны их совершенствованием занялся А. Н. Колмогоров и его ученики.

Задача, о которой только что было рассказано, обладает одним дефектом в самой ее постановке: партия продукции уже изготовлена и нужно сказать, можно ее принять или же следует ее отвергнуть? Но, спрашивается, зачем же изготовлять партию, чтобы ее затем браковать? Нельзя ли так организовать производственный процесс, чтобы уже при изготовлении поставить заслон для изготовления некачественной продукции? Такие методы были предложены и получили название *статистических методов текущего контроля*. Время от времени со станка берутся несколько (скажем пять) только что изготовленных изделий и замеряются параметры их качества. Если все эти параметры находятся в допустимых пределах, то производственный процесс продолжается, если же хотя бы одно изделие выходит за пределы допуска, то подается сигнал о необходимой переналадке станка или о смене режущего инструмента. Какое отклонение параметра от номинала допустимо, чтобы вся партия была изготовлена качественно? Это требует специальных расчетов.

После окончания войны выяснилось, что аналогичные исследования проводили математики США. Они подсчитали, что результаты их работы принесли за годы войны стране миллиардную экономию. То же самое можно сказать и о работах советских математиков и инженеров.

* * *

До сих пор нет сводного труда, который бы показал как много математики дали фронту для победы, как их исследования помогали совершенствовать оружие, которое использовали воины в боях*). Этот пробел следует восполнить как можно быстрее, поскольку многих из тех, кто это делал, уже нет в живых, поскольку человеческая память несовершенна и многое забывается. А нам никак нельзя забывать о том, что подвиг народа в Великой Отечественной войне не ограничивается только славными делами фронтовиков, что основы победы ковались и в тылу, где руками рабочих и их разумом, руками и разумом инженеров и ученых создавалась и совершенствовалась военная техника. Нельзя нам забывать и того, что по многим параметрам к концу войны наши танки, самолеты, артиллерийские орудия стали совершеннее тех, которые противопоставлял нам враг. Нельзя забывать, что в конце войны мы вынуждены были вплотную заняться созданием собственного атомного оружия, а для этого пришлось объединить интеллектуальные усилия физиков, химиков, технологов, математиков, металлургов и самостоятельно пройти тот путь, который уже был пройден США и их западными союзниками. Мы его прошли сами, тогда как в США работали лучшие ученые со всей Европы — Англии, Франции, Италии, Дании, Германии (эмигранты), Польши, Венгрии и, конечно, самих Соединенных Штатов Америки.

---

*) Есть, однако, книга на более общую тему (см. [3]).

Со времени Победы прошло сорок лет. Советские математики многое дали восстановлению и развитию народного хозяйства, а также прогрессу теоретической математики. К сожалению, и теперь положение в мире таково, что страна, а вместе с ней и математики, вынуждены уделять внимание разработке проблем обороны. Однако это не самоцель, а вынужденная необходимость. Каждый же из нас мечтает о том времени, когда человечество забудет о войнах и о подготовке к ним.

Литература

1. Б. В. Гнеденко. Математика и оборона страны. (Математика в школе, 1978, № 2)

2. Б. В. Гнеденко. Математика и контроль качества продукции. (М.: Знание, серия «Математика и кибернетика», № 11)

3. Б. В. Левшин. Советская наука в годы Великой Отечественной войны. (М.: Наука, 1983)

4. И. Пирогов, И. Тюлина. Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны. («Квант», 1980, № 5, с. 10)

Призеры конкурса «Задачник «Кванта»

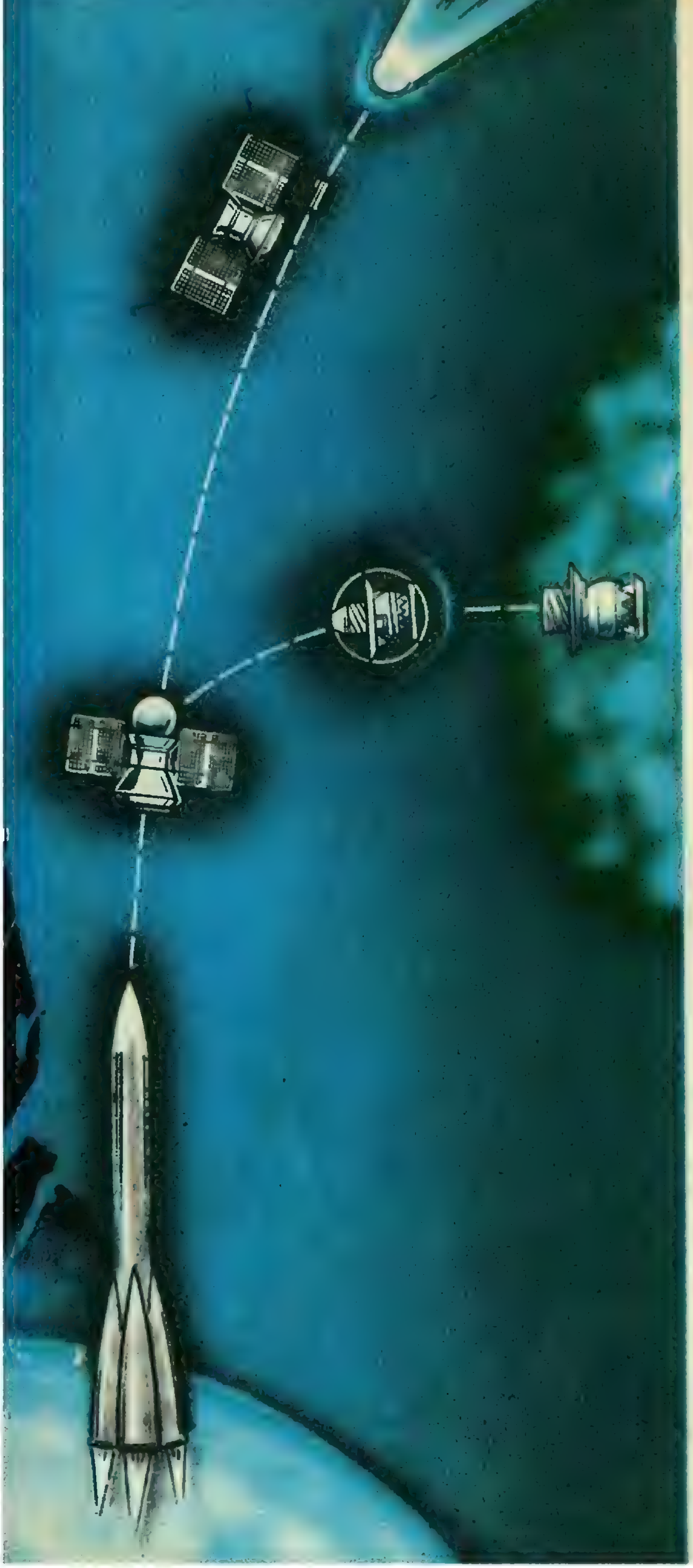
По итогам проверки решений задач из Задачника «Кванта» (в дополнение к списку победителей конкурса, опубликованному в «Кванте» № 3 за 1985 год) награждаются Дипломом и значком журнала «Квант»

По математике

Н. АГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
Р. АЛЕКСЕЕВ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
Я. АЛИЕВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
А. БАРАБАШ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. БАТЫРЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
Р. ВИДГОП — Баку, с. ш. № 175, 9 кл.
Г. ГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
В. ГОРОДНИЦКИЙ — Днепропетровск, с. ш. № 43, 10 кл.
Н. ГРИГОРЬЕВА — Андропов, с. ш. № 33, 9 кл.
Л. ИВАНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
П. КИРИЛИН — Дубна, с. ш. № 10, 10 кл.
А. КИСЕЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.
С. КЯРАС — Молетай, с. ш. № 2, 10 кл.
С. МИНАЕВ — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.
В. ПОРОШИН — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
Т. РАДЬКО — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 9 кл.
Е. РОМАНОВ — Димитровград, с. ш., № 25, 10 кл.
С. СТАРЦЕВ — Уфа, с. ш. № 11, 10 кл.
В. СУДАКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
М. ТЕЙТЕЛЬ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ЧЕРЕВАТЫЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
С. ШЕЙНИН — Молодечно, с. ш. № 7, 9 кл.

По физике

В. БАРЗЫКИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
О. ВАСИЛЬЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
И. ГАВРИК — Часов-Яр, с. ш. № 17, 10 кл.
В. ГАЛУХИН — Рязань, с. ш. № 14, 10 кл.
В. ГУСЕВ — Красноярск, с. ш. № 3, 10 кл.
И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. КЛИМАЧЕВ — Минск, с. ш. № 116, 10 кл.
С. МАШКЕВИЧ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
К. МОСЕЙЧЕВ — Зеленоград, с. ш. № 609, 10 кл.
С. МЯГЧИЛОВ — Свердловск, с. ш. № 16, 9 кл.
С. НИКОНЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ПЕРЕПЕЛИЧНЫЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Ю. РЫБАЛОЧКА — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
А. СОМОВ — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
Г. СПИВАК — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
В. ТАРТАКОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. ТЕРЕЗ — Симферополь, с. ш. № 7, 9 кл.
А. УМНОВ — Миасс, с. ш. № 6, 10 кл.
Л. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
В. ФУРМАН — Ташкент, с. ш. № 19, 10 кл.
Г. ШВЕЦ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.



Свидание с кометой

Доктор физико-математических наук
Л. С. МАРОЧНИК

Вступление от редакции

В июльском номере нашего журнала за 1982 год была опубликована статья Л. С. Марочника «Кометы». В ней рассказывалось о том, что представляют собой кометы, что в физике комет ясно и что не ясно на сегодняшний день, чем интересны для ученых кометы, на какие вопросы они, по мнению исследователей, могут дать ответы.

В той статье была рассказана «биография» одной из самых знаменитых комет — кометы Галлея; биография довольно драматическая, с ней связаны имена многих замечательных ученых. Там же говорилось о проектах экспедиций к комете Галлея, о том, какие научные цели будут преследовать эти экспедиции.

Тогда, в 1982 году, все еще было впереди — и старты, и встречи космических миссионеров со знаменитой кометой. Сегодня до встреч еще далеко — они произойдут в марте 1986 года, а вот первый старт уже состоялся. Две советские космические станции «Вега-1» и «Вега-2» успешно стартовали 15 и 21 декабря 1984 года. Название станций (как и название всего проекта) — «Вега» — это сокращение от полного названия Международной экспедиции «Венера — комета Галлея». В проекте «Вега» участвуют Австрия, Народная Республика Болгария, Германская Демократическая Республика, Венгерская Народная Республика, Польская Народная Республика, Франция, СССР, Чехословацкая Социалистическая Республика, Общество имени Макса Планка (ФРГ). Проект «Вега» предусматривает совмещение исследований Венеры и кометы Галлея.

В серии «Библиотечка «Квант» готовится к печати книга «Свидание с кометой». Ниже мы публикуем небольшие отрывки из этой книги, подготовленные ее автором, Л. С. Марочником, для читателей «Кванта».

1. Выбор цели

Итак, мы стартуем к комете Галлея. Прежде всего, почему именно к ней? Очевидно, готовить экспедиции нужно заранее — это многолетняя трудоемкая работа; но заранее можно готовиться только к встрече с какой-либо знакомой кометой, периодичность появления которой изучена. Естественно, это — короткопериодические кометы. С другой стороны, с точки зрения физических интересов ясно, что комета должна быть активной — яркой, с бурным выделением газов, «пышным» хвостом, развитой атмосферой, «серьезной» ионосферой и т. п. Активными бывают, как правило, молодые кометы, впервые подлетающие к Солнцу, но такие «небесные гостьи», внезапно появляясь в поле зрения, стремительно проносятся через перигелий и вновь уходят в «небытие». Подготовить космический аппарат и запустить его навстречу такой комете невозможно. (В лермонтовском «Демоне» есть строчки о том, как

> «...бегущая комета
> Улыбкой ласковой привета
> Любила поменяться с ним...»

Это как раз та самая ситуация — ничего, кроме «привета», ни космический аппарат, ни комета не успеют передать друг другу.)

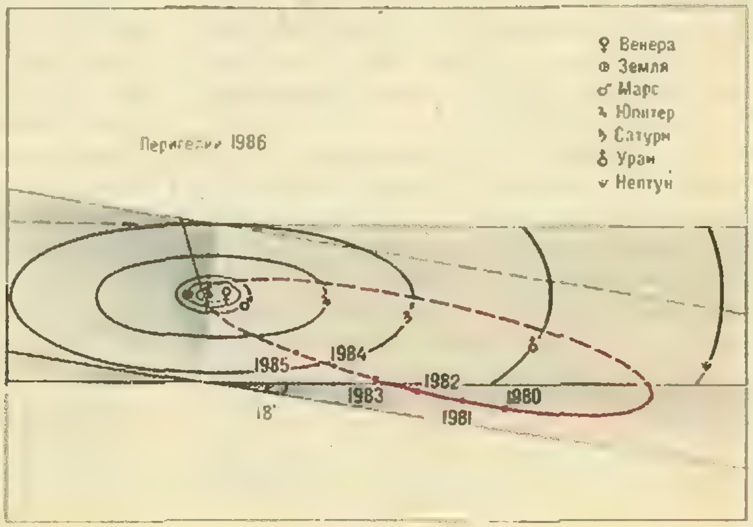
Поэтому все-таки приходится ориентироваться на короткопериодические кометы. Но такие кометы, как правило, не слишком активны — часто проходя вблизи Солнца в течение своей «жизни», они теряют летучие вещества и становятся малоинтересными, свидания с ними не вызывают особого энтузиазма.

Комета Галлея в этом смысле является исключительной. Несмотря на то, что ее появления вблизи Солнца регистрируются человечеством уже более 2000 лет, а в действительности на своей нынешней (или близкой к нынешней) орбите она пребывает, возможно, более 100 тысяч лет, эта комета продолжает оставаться весьма активной. Трудно сказать, в чем секрет ее молодости, но, может быть, мы узнаем это после первого свидания.

2. Дороги, которые мы выбираем

Проект «Вега» возник потому, что его автор — известный советский физик академик Р. З. Сагдеев — обратил внимание на удачное расположение Венеры в эпоху прохождения кометой Галлея ее перигелия. Положение Венеры случайно оказалось таким, что возникла возможность совместить, образно говоря, «приятное с полезным». В декабре 1984 года в СССР планировался запуск автоматических станций в сторону Венеры. Но оказалось, что небольшого маневра в поле тяготения Венеры могло бы хватить на то, чтобы направить станцию, выполнившую свои исследовательские «венерианские задачи», к комете Галлея. Расчеты показали, что идея осуществима, и проект «Венера — комета Галлея» обрел жизнь.

Обратимся теперь к «дорогам, которые мы выбираем». На языке науки речь идет о стратегии выбора траектории полета космических аппаратов к комете Галлея. Стратегия эта определяется современным уровнем возможностей космической техники. Дело в том, что Земля летит по своей



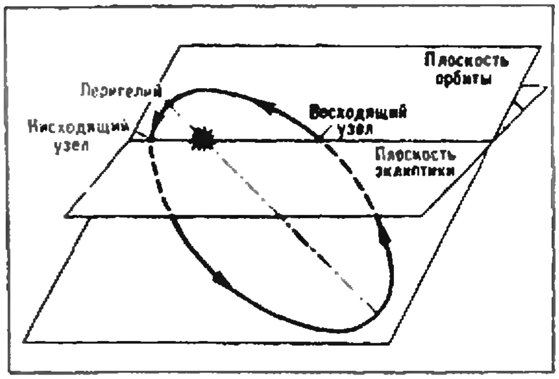
Взаимная ориентация орбит планет и кометы Галлея. В июне 1985 года, когда «Вега» встретится с Венерой, комета будет между орбитами Юпитера и Сатурна.

гелиоцентрической орбите со скоростью около 30 км/с. Стартовые скорости, которые при современном уровне техники могут быть сообщены космическому аппарату, находящемуся на орбите спутника Земли, — порядка 3—5 км/с. Такие малые по отношению к орбитальной скорости Земли стартовые скорости не позволяют организовать встречу с кем бы то ни было далеко от плоскости эклиптики. Это обстоятельство определяет время запуска аппаратов к Венере и момент начала гравитационного маневра, направляющего аппарат от Венеры к комете.

Венера вращается вокруг Солнца быстрее Земли в 1,6 раза. Поэтому «догнать» Венеру космический аппарат, запущенный с Земли, не в состоянии. Его надо запускать в тот период, когда Венера начинает «догонять» Землю в своем гелиоцентрическом вращении. Отсюда возникают «окна» запуска на Венеру длительностью в две недели. «Внутри» этих двух недель нужно оптимально выбрать дату пуска, чтобы космический аппарат подошел к Венере как раз в нужный момент и мог снова «стартовать» — теперь уже к комете.

Плоскость орбиты кометы Галлея наклонена к плоскости эклиптики под углом 18°. Понятно, что встречи возможны лишь вблизи узлов орбиты кометы — восходящего, где она поднимается из-под плоскости эклиптики и переходит в северное полушарие неба, или нисходящего, где она снова уходит после прохождения перигелия под плоскость эклиптики в южное полушарие. Таким образом, точки встречи с кометой Галлея определяются сразу же, так как уровень современной космической техники не допускает других решений этой задачи. Таких точек, однако, две, и следующий вопрос заключается в том, какую из них выбрать.

Из чего следует исходить при решении этого вопроса? Успех физических экспериментов зависит от степени активности кометы в момент встречи. Наблюдения кометы Галлея в 1910 году выявили некую, присущую именно этой комете, особенность: после прохождения перигелия она стала намного активнее, чем при подлете к нему. Это обстоятельство является сильным аргументом в пользу того, чтобы направить кометную миссию в нисходящий узел орбиты. Но есть и другие моменты, которые нужно учитывать, свои pro и contra.



Некоторые элементы орбиты, плоскость которой не совпадает с плоскостью эклиптики.

3. «Сценарий» экспедиции «Вега»

В Институте космических исследований АН СССР были выполнены на компьютере расчеты оптимальных траекторий полета в восходящий и нисходящий узлы орбиты кометы Галлея. Проанализировав расчетные данные, советские специалисты остановились на следующем сценарии экспедиции.

В конце декабря 1984 года с небольшим интервалом стартуют две станции (для обеспечения надежности). Их программы идентичны, поэтому дальше мы будем говорить об одной (любой) из них. Станция летит к Венере так, чтобы встретиться с ней (июнь, 1985) на втором полувитке своей эллиптической гелиоцентрической орбиты. За двое суток до подлета к Венере происходит разделение станции на спускаемый (СА) и пролетный (ПА) аппараты. Спускаемый аппарат входит в атмосферу Венеры и совершает посадку на ее поверхность. Пролетный аппарат совершает гравитационный маневр в поле тяготения Венеры и направляется на встречу с кометой Галлея. В процессе полета к комете двигатель пролетного аппарата будет включаться несколько раз, так как нужно будет провести несколько коррекций траектории по мере уточнения элементов орбиты кометы при ее приближении к Солнцу.

Вот некоторые «узловые» моменты и количественные данные сценария полета по проекту «Вега».

Старт с Земли: 15 и 21 декабря 1984 года.

Коррекции траектории на трассе Земля — Венера.

Встреча с Венерой: середина июня 1985 года; расстояние Земля — Венера в это время — около 103 млн. км.

Продолжительность полета к Венере — приблизительно 175—180 суток.

Коррекция траектории ПА на трассе Венера — комета Галлея.

Встреча с кометой: первая половина марта 1986 года; расстояние до Земли от точки встречи ПА с кометой — около 173 млн. км.

Относительная скорость сближения ПА с кометой при встрече — 78 км/с.

Общая продолжительность полета к комете — около 450 суток.

Положения основных «действующих лиц» этого сценария в разные моменты показаны на рисунке на второй странице обложки этого номера журнала.

4. Свидание с Венерой

Так же как «театр начинается с вешалки», «Вега» начинается с Венеры. Поэтому разговор о сценарии проекта без хотя бы краткого описания подлета к Венере и предполагаемых исследований этой планеты невозможен.

К тому моменту, как вы будете читать эти строки, бо́льшая часть «первого акта» сценария уже будет позади. Многоступенчатая ракета-носитель вывела космическую станцию вместе с так называемой разгонной ступенью на орбиту искусственного спутника Земли. На первом витке орбиты включилась разгонная ступень, и станция перешла на траекторию полета к Венере.

За двое суток до подлета к планете, как уже говорилось, «Вега» разделяется на спускаемый аппарат и пролетный аппарат. При движении в атмосфере Венеры от спускаемого аппарата отделяется аэростатный зонд. Согласно научной программе зонд должен дрейфовать в атмосфере и передавать на Землю информацию о скорости венерианских атмосферных течений, температуре, давлении и других параметрах вдоль своей траектории. Для приема этой информации на Земле будет использована международная сеть радиотелескопов. Поэтому и спускаемый аппарат, и аэростатный зонд должны входить в атмосферу Венеры так, чтобы и на входе, и в течение всего времени дрейфа (1—2 суток) оставаться на видимой с Земли части диска Венеры.

Со спускаемого аппарата информация может передаваться на Землю только через ретранслятор. Таким ретранслятором будет служить пролетный аппарат. Тогда получается, что требования, которые предъявляет к нему комплексный характер эксперимента «Вега», взаимно противоречивы. Пролетный аппарат должен ввести в атмосферу Венеры спускаемый аппарат и аэростатный зонд, не имеющие собственных систем управления полетом в космосе, вполне определенным образом, но при этом сам он не должен входить в атмосферу планеты — ведь ему еще лететь дальше. Кроме того, во время работы спускаемого аппарата на Венере пролетный аппарат должен находиться в зоне связи, чтобы ретранслировать получаемую информацию на Землю. Оказывается, что при этом пролетный аппарат не может выйти на траекторию полета к комете Галлея. Отсюда и возникает необходимость в гравитационном маневре — выполнив свои функции, пролетный аппарат должен включить реактивную тягу и изменить свою траекторию, чтобы направиться к комете.

5. От Венеры — к комете

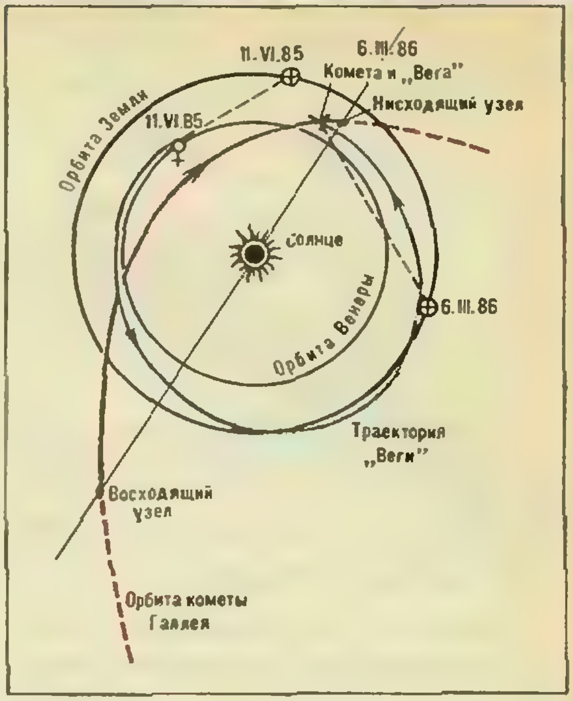
Через 2—4 недели после пролета Венеры планируется произвести первую коррекцию и перевести пролетный аппарат на траекторию полета к комете Галлея. Здесь начинается специфика, с которой специалистам пока не приходилось сталкиваться. Дело в том, что впервые в мире осуществляется полет к небесному телу, параметры движения которого в момент старта с требуемой точностью не будут известны. Довольно часто специалисты ошибались в прогнозах момента прохождения кометой ее перигелия, даже при использовании современных математических методов вычислений. Поэтому совершенно необходимо постоянное уточнение элементов орбиты кометы по наземным наблюдениям уже в ходе полета к ней. По этой причине сейчас создана точная небесно-механическая теория движения кометы Галлея. Основанная на анализе данных о ее движении в 1759, 1835, 1910 годах, эта теория показала очень хорошее согласие с наблюдениями.

Всего на участке полета Венера — комета будет произведено три коррекции. О первой уже говорилось. Вторая будет осуществлена в середине полета и третья — за 2—4 недели до подлета к комете. Первый сеанс научных исследований начинается за двое суток до подлета, когда расстояние до кометы будет составлять 14 млн. км. Второй сеанс начинается за одни сутки до подлета на расстоянии 7 млн. км. Третий сеанс начинается при встрече с кометой.

Вопрос, остающийся достаточно неопределенным и, соответственно, всех волнующий, — это расстояние от ядра кометы Галлея, на котором пройдет космический аппарат. Здесь все определяется точностью, с которой известна орбита кометы, а эта точность не слишком велика. Последнее обстоятельство связано с тем, что в районе перигелия комета испытывает значительные негравитационные ускорения. Они вызваны, главным образом, действием реактивных сил, которые возникают при мощном испарении льдов, входящих в состав ядра кометы.

Если основываться на предыдущих прохождениях кометы Галлея, то прогноз местоположения узла ее орбиты можно сделать с совершенно неудовлетворительной точностью — порядка 10^6 км. А диаметр головы кометы Галлея всего лишь $4 \cdot 10^5$ км. Так легко и промахнуться, пролететь мимо кометы. Если, однако, включить в расчеты уже ведущиеся наблюдения за движением этой кометы, то точность, с которой специалисты программы «Вега» надеются попасть в нее, повышается. Сейчас предполагается, что космический аппарат пролетит на расстоянии приблизительно 10^4 км от ядра кометы.

И еще один очень важный вопрос: пролетит ли аппарат без повреждений через атмосферу кометы? По мере приближения к ядру плотность кометной пыли заметно увеличивается, и, хотя масса пылинок мала, скорости, с которыми они будут «налетать» на аппарат, огромны — можно считать, что они равны относительной скорости аппарата и кометы при встрече, то есть близки к 80 км/с. Так что кинетическая энергия налетающих пылинок будет велика, а от нее, понятно, в прямой зависимости находятся размеры возможных повреждений.



4

По такой схеме должен проходить второй этап полета — от Венеры до кометы Галлея.

Эти соображения заставили создателей корабля продумать надежные меры защиты. По расчетам советских и зарубежных специалистов вероятность того, что повреждение произойдет, составляет лишь несколько процентов. Вероятность весьма небольшая, но все же не равная нулю.

В полетах к планетам Солнечной системы, где метеорная опасность неизмеримо ниже, научная и служебная информация записывается на запоминающее устройство, с которого она передается на Землю в сеансы связи. От этой практики пришлось отказаться, так как лучше иметь «синицу в руках, чем журавля в небе»: если произойдет повреждение научной или служебной аппаратуры, то это поставит под удар успех экспедиции. Поэтому в проекте «Вега» предусмотрена прямая передача информации на Землю. Конечно, это потребовало отказа от сложившихся технических решений. Например, информативность служебного радиокомплекса, ответственного за отправку на Землю данных научных измерений, увеличена более чем в 20 раз. Радиоантенна, установленная на пролетном аппарате, при пролете через атмосферу кометы Галлея будет все время направлена на Землю.

Заключение от автора

Разумеется, мой рассказ — это весьма беглый обзор «насущных» проблем и трудностей, с которыми столкнулись специалисты при проектировании первых в истории человечества миссий к кометам. Очень многое осталось «за бортом» — ведь нельзя объять необъятное (а тем более в журнальной статье). Среди этого «многого» — и уже решенные научно-технические проблемы, связанные с проектом «Вега», и те вопросы, которые ученые «задают» комете... Но на одном «философском» вопросе, который, наверное, возникал не раз, я хотел бы немного задержаться.

Зачем все это? Не лучше ли потратить деньги на хозяйственные нужды? Построить, например, больше жилых домов, заводов, санаториев? Можно ответить коротко: не хлебом единым жив человек. Но можно и подробнее.

Прогресс в прикладных областях науки и техники, тех, которые создают станки, подъемные краны, хлебоуборочные машины, производят медикаменты и т. п., невозможен без прогресса в фундаментальных исследованиях, хотя на первый взгляд они не связаны между собой.

Искусственные спутники Земли и управляемые космонавтами корабли, первоначально предназначенные для исследования околоземного космического пространства — области, далекой, казалось бы, от нужд народного хозяйства, сегодня дают бесценную информацию о наших земных природных ресурсах, о залегании полезных ископаемых на поверхности нашей планеты, позволяют делать долгосрочные метеорологические прогнозы, так необходимые в народнохозяйственной деятельности.

Я не хочу становиться на зыбкую почву предсказаний того, что могут в будущем дать человечеству миссии к кометам вообще и комете Галлея в частности. Следующее перигелийное прохождение кометы Галлея должно произойти в 2061 году, и специалисты всех космических программ не забыли подумать о будущих поколениях: научная информация, полученная экспедициями, будет собрана в Мировом центре данных, чтобы дети и внуки современных людей могли ею воспользоваться при следующем возвращении этой замечательной кометы.

Информация

Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция

16 октября 1982 года было зарегистрировано появление кометы Галлея в созвездии Малого Пса. С этого дня астрономы всего мира следят за движением кометы по созвездиям. Уже проведены уточнения элементов ее орбиты и вычислена эфемерида, которая поможет наблюдателям изучать это уникальное природное явление.

В советской программе исследований кометы Галлея (СОПРОГ) большое место уделено любительским наблюдениям. Это связано с тем, что такие наблюдения, несмотря на скромность астрономического оборудования, которым располагают любители, могут внести существенный вклад, если проводятся по единой программе.

В Ленинграде уже много лет постоянно действует любительская астрономическая экспедиция, в которой участвуют люди различных возрастов и профессий. Для наблюдения кометы Галлея организуется юношеская экспедиция. Возрастной состав ее — от 13 до 20 лет. В ней примут участие школьники, учащиеся ПТУ, студенты техникумов и вузов (всего около двадцати человек).

Согласно расчетам, в районе Ленинграда условия наблюдений кометы в основном будут неудовлетворительными, а в благоприятное время блеск кометы будет настолько слаб, что ее можно будет видеть лишь при помощи специальных астрономических приборов. И хотя в октябре — декабре 1985 года все-таки планируется провести ряд экспериментов и предварительные работы в окрестностях Ленинграда, встал вопрос о снаряжении экспедиции в южные районы страны, удобные для наблюдений.

Координационный центр по любительским наблюдениям СОПРОГ выделил для ленинградской юношеской экспедиции район города Алма-Аты. Работы там будут проходить, ориентировочно, с 5 марта по 27 апреля 1986 года.

Подготовка экспедиции осуществляется уже сейчас. Составлена предварительная научная программа. В нее входит фотографирование, спектрографирование кометы, определение ее формы, размеров, блеска самой кометы и ее ядра, и т. д. В экспедиции будет работать служба времени.

Материалы экспедиции, результаты научных наблюдений будут переданы в центр сбора информации СОПРОГ.

Ответственный по печати экспедиции
С. Н. Ерлыков

Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки

Кандидат физико-математических наук
В. В. ТРОФИМОВ

В этой статье речь идет об одном классе элементарно формулируемых задач, известных еще в Древней Греции. Рассказывается, как эти задачи возникли, как они решаются математически и как их решения можно промоделировать с помощью мыльных пленок. Статья доступна восьмиклассникам, но, мы надеемся, заинтересует и более старших читателей.

Легенда о царевне Дидоне

Давным давно финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом преданных ей людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата, тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, подгоняемые попутным ветром, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе.

Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Король нумидийцев Ярб воинственно и презрительно разговаривал с непрошеной гостьей. Он принял драгоценности, предложенные Дидоной для покупки земли, но решительно заявил, что взамен он согласен уступить ей лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Царевна безропотно согласилась. Ярб понял хитрость и коварство финикианки слишком поздно: Дидона изготовила из бычьей шкуры тонкий, длинный ремень и отгородила им от берега значительную территорию. Простодушный, но честный Ярб не стал отказываться от данного слова. А Дидона на этом месте основала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель была названа «Бирса», что на языке обитателей Карфагена означает «бычья шкура».

Заметим, что размеры первоначальной территории могли быть достаточно велики. Представим себе бычью шкуру как прямоугольник 1×2 м и будем считать, что Дидона разрезала шкуру на полоски шириной 1 мм по схеме, показанной на рисунке 1. Тогда легко подсчитать длину полученного ремня — она будет равна примерно 2 км, так что Дидона могла бы в этом случае отгородить от берега (который мы будем считать прямым), скажем, прямоугольный участок $0{,}5\ \text{км}^2 = 500\ \text{м}\times1000\ \text{м}$.

Легенда относит описанные события к 825 г. до н. э. и нам, конечно, судить об их достоверности трудно. Но не исторические события интересуют нас здесь, а математическая задача, которую, видимо, пришлось решать Дидоне:

Задача 1 (задача Дидоны).

Как нужно расположить шнур фиксированной длины L, чтобы он отгораживал от прямолинейного берега участок земли максимальной площади?

Изопериметрические задачи

Задача Дидоны является частным случаем так называемых *изопериметрических* задач. Это название происходит от двух греческих слов isos — равный и perimetron — обмер, обвод. Изопериметрическая задача состоит в том, чтобы среди данной совокупности фигур, имеющих одинаковую длину контура (одинаковый пе-

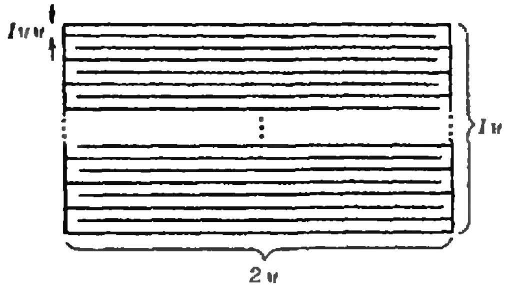


Рис. 1.

риметр), найти ту, чья площадь больше площади любой другой фигуры рассматриваемой совокупности.

Рассмотрим два простых примера. Пусть выделенный класс геометрических фигур состоит из всех треугольников с данным периметром L. Тогда изопериметрическая задача заключается в том, чтобы найти треугольник периметра L, у которого площадь максимальна. Таким треугольником является равносторонний (со стороной $L/3$). Если в качестве выделенного класса взять множество всех прямоугольников с фиксированным периметром, то решением соответствующей изопериметрической задачи будет квадрат. Доказательства этих утверждений мы оставим в качестве упражнений читателю.

Значительно более сложной является

Основная изопериметрическая задача. *Среди всех плоских фигур данного периметра L найдите ту, которая имеет максимальную площадь.*

Ответ, конечно — круг. Еще в древней Греции было известно, что круг имеет большую площадь, чем все другие фигуры с тем же самым периметром, а шар — наибольший объем среди всех тел с одной и той же поверхностью. Недаром круг и шар были в древности символами геометрического совершенства. В начале второго века до нашей эры греческий геометр Зенодор написал специальный трактат «О фигурах, имеющих равную периферию». О существовании этого трактата мы узнаем из сочинений греческих комментаторов Зенодора — Паппа (III в. н. э.) и Теона (IV в. н. э.). Сама рукопись Зенодора утеряна.

Хотя ответ в основной изопериметрической задаче очевиден, про доказательство это сказать никак нельзя. Лишь в XVIII в. великому Леонардо Эйлеру удалось привести убедительное доказательство изопериметрического свойства круга, для чего ему потребовалось создать так называемое *вариационное исчисление*. Об одной попытке привести элементарное доказательство, предпринятой швейцарским математиком Я. Штейнером (1796—1863), мы расскажем ниже.

Сформулируем еще несколько изопериметрических задач. Как мы потом увидим, их решения, также как и решение задачи Дидоны, легко и красиво следуют из изопериметрического свойства круга.

Задача 2. *Среди всех линий фиксированной длины l с концами в данных точках A, B, найти ту, которая ограничивает вместе с прямой (AB) фигуру наибольшей площади.*

Задача 3. *Среди всех линий фиксированной длины l с концами на сторонах угла в 45°, найти ту, которая ограничивает внутри угла фигуру наибольшей площади.*

К основной изопериметрической задаче сводятся также некоторые задачи, в формулировку которых явно не входит изопериметричность. Например, такая

Задача 4. *Найти кратчайшую линию, делящую равносторонний треугольник на две фигуры равной площади.*

Решение Штейнера основной изопериметрической задачи

Мы рассматриваем всевозможные фигуры на плоскости с данным периметром p. Установим сперва некоторые свойства максимальных (по площади) фигур этого класса.

Первое свойство. *Всякая максимальная фигура выпукла, то есть любая хорда, соединяющая две ее точки, целиком в ней лежит.*

Пусть хорда A_1B_1, соединяющая точки A_1, B_1 нашей фигуры, не лежит целиком внутри нее. Тогда, очевидно, некоторый отрезок этой хорды, скажем AB, лежит весь (кроме концов) вне фигуры. Можно считать поэтому, что дана фигура с периметром $A\alpha BC$, равным p, не содержащая хорду AB (рис. 2). Заменим дугу α хордой AB. Периметр при такой замене уменьшится, а площадь увеличится на часть $A\alpha B$. Построим теперь фигуру, подобную построенной фигуре $A\gamma BC$, но с периметром, равным периметру первоначальной фигуры $A\alpha BC$. У новой фигуры площадь будет больше, чем у второй (поскольку коэффициент подобия больше единицы), и подавно больше, чем у первоначальной.

Второе свойство. *Всякая хорда максимальной фигуры с периметром p, делящая пополам ее периметр, обязательно делит ровно пополам и ее площадь.*

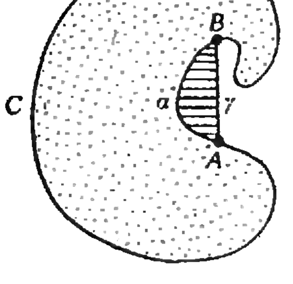


Рис. 2.

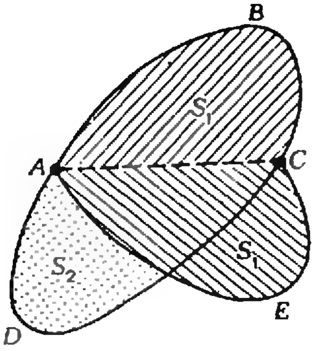


Рис. 3.

Действительно, пусть у фигуры $ABCD$ с периметром p хорда AC делит периметр пополам (рис. 3). Обозначим через S_1 площадь фигуры ABC, а через S_2 — площадь ADC. Предположим, что $S_1 > S_2$. Построим тогда новую фигуру $ABCEA$, заменив линию ADC линией AEC, симметричной с ABC относительно хорды AC. Новая фигура $ABCEA$, имея прежний периметр, имеет площадь больше площади первоначальной фигуры, так как площадь новой фигуры равна $2S_1$, а площадь первоначальной равна $S_1 + S_2$, в то время как по предположению $S_1 > S_2$ и, следовательно, $2S_1 > S_1 + S_2$. Поэтому фигура $ABCDA$ не является, вопреки предположению, максимальной. Это доказывает, что предположение $S_1 > S_2$ неверно. Аналогично доказывается, что и предположение $S_1 < S_2$ приводит к противоречию. Окончательно, $S_1 = S_2$.

Назовем всякую хорду, делящую периметр фигуры пополам, ее *диаметром*.

Третье свойство. *Всякий диаметр любой максимальной фигуры виден из всех точек ее контура под прямым углом (то есть для любого диаметра AC и любой точки B контура угол ABC равен 90°).*

Для доказательства этого свойства нам потребуется следующее свойство треугольников: *из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти две стороны взаимно перпендикулярны.* Это утверждение мы оставляем читателю в качестве легкого упражнения и перейдем к доказательству третьего свойства. Предположим, что некоторый диаметр AC фигуры $ABCD$ с периметром p виден из какой-нибудь точки B ее контура не под прямым углом: $\angle ABC \neq 90°$ (рис. 4). Докажем, что в этом случае фигура $ABCD$ не обладает наибольшей площадью при фиксированном периметре p. Обозначим площади фигур ABC и ACD через S_1 и S_2 соответственно. Построим прямоугольный треугольник $A'B'C'$ с прямым углом при вершине B' такой, что $A'B' = AB$. Другими словами, сдвинем или раздвинем стороны AB и BC, сохраняя их длины без изменения, так, чтобы они образовали при вершине B' прямой угол. К сторонам $A'B'$ и $B'C'$ приложим сегменты $A'E'B'$ и $B'F'C'$ (рис. 5), равные соответствующим сегментам на рисунке 4. В силу максимальности прямоугольного треугольника имеем неравенство $S_{\triangle A'B'C'} > S_{\triangle ABC}$. Следовательно, площадь фигуры $A'E'B'F'C'A'$ больше площади S_1 первоначальной фигуры. Присоединим к фигуре $A'E'B'F'C'A'$ симметричную с нею относительно оси $A'C'$ фигуру $A'K'D'L'C'A'$, получим фигуру $A'E'B'F'C'L'D'K'A'$ с прежним периметром p, но с большей площадью (рис. 6). Итак, фигура $ABCDA$ не является максимальной, если хотя бы из одной точки ее контура какой-нибудь ее диаметр виден не под прямым углом.

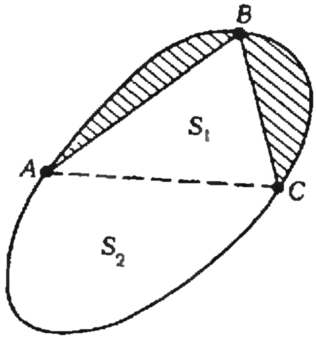


Рис. 4.

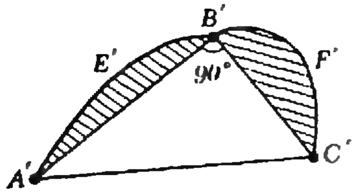


Рис. 5.

Из третьего свойства сразу следует, что искомая максимальная *фигура является кругом*. Действительно, выберем произвольный диаметр; тогда контур фигуры, по третьему свойству, состоит из вершин прямых углов, опирающихся на этот диаметр, то есть является окружностью. Что и требовалось доказать.

Рассуждение Штейнера, изложенное выше, заимствовано нами из замечательной, но труднодоступной книги А. Б. Крыжановского «Изопериметры» (М. — Л., Физматлит, 1959). Оно, как может показаться на первый взгляд, завершает доказательство основной теоремы об изопериметрах. Однако мы в нем сделали одно не правомочное предположение. А именно, мы с самого начала предположили, что решение основной изопериметрической задачи существует.

Это незаконное предположение. Яркий пример, показывающий, что *существование решения надо доказывать*, доставляет следующая модификация парадокса Перрона.

«Теорема». Среди всех квадратов наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 1.

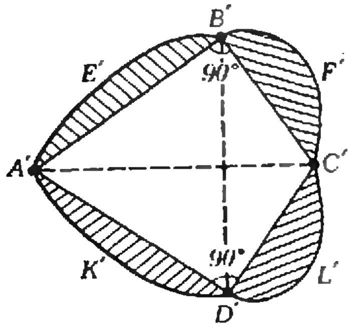


Рис. 6.

«Доказательство». Пусть наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $b=a^2$. Рассмотрим два случая: $a<1$ и $a>1$. Если $a<1$, то $a^2<1$ и площадь квадрата со стороной a не является наибольшей (она меньше площади единичного квадрата). Если же $a>1$, мы возьмем квадрат со стороной $b=a^2$. Тогда $b>a$ (так как $a>1$), и площадь квадрата со стороной b будет b^2, притом $b^2>a^2$ (так как $b>a$). Значит, квадрат со стороной a не имеет наибольшую площадь, вопреки предположению. «Теорема» доказана.

Читатель, конечно, понимает, в чем ошибка в этом рассуждении. Однако оно проводится по той же схеме, что и приведенное выше «решение» изопериметрической задачи, которое поэтому нельзя считать исчерпывающим.

Строгое решение этой задачи приводится в современных учебниках по вариационному исчислению. Убедительное доказательство существования можно получить и из «элементарных» соображений, но на этом пути нужно будет провести довольно тонкое рассуждение «по непрерывности»; мы здесь не будем этим заниматься, отсылая читателей к цитированной книге А. Б. Крыжановского или к книге Р. Куранта и У. Роббинса «Что такое математика» (М., «Просвещение», 1967, с. 408). Читателю, сомневающемуся теперь в существовании решения изопериметрических задач, мы советуем обратиться к последнему разделу нашей статьи.

Решение задач

Наша ближайшая цель — привести решения четырех ранее сформулированных изопериметрических задач. При этом мы будем предполагать известным изопериметрическое свойство круга.

Решение задачи Дидоны. Пусть ABC и $A'B'C'$ представляют собой полукруг и какую-нибудь другую фигуру, удовлетворяющую всем условиям задачи. Прибавляя к этим фигурам фигуры ADC и $A'D'C'$, симметричные с первыми относительно осей AC и $A'C'$, составим две новые фигуры: круг $ABCD$ и отличную от круга фигуру $A'B'C'D'$, периметры которых равны $2l$. Согласно основной теореме об изопериметрах, площадь круга $ABCD$ больше площади фигуры $A'B'C'D'$. Поэтому площадь полукруга ABC больше площади фигуры $A'B'C'$, и полукруг ABC будет решением задачи Дидоны.

Решение задачи 2. Ответом будет дуга окружности AB длины p (рис. 7). Доказательство такое же, как в предыдущей задаче: дугу AB нужно продолжить до окружности и применить изопериметрическое свойство круга.

Решение задачи 3. Ответом будет дуга δ окружности с центром в вершине угла O, длины p. Для доказательства проведем еще 6 лучей из точки O так, чтобы разбить плоскость на 8 углов по 45°. Если бы ответ — кривая γ — отличался от дуги δ, то мы могли бы построить в каждом из семи построенных углов по экземпляру кривой γ, а тогда объединение этих кривых (длиной $8k$) ограничивала бы площадь большую, чем площадь круга периметра $8p$, вопреки изопериметрическому свойству круга.

Решение задачи 4. Ответом будет дуга окружности с центром в одной из вершин. Доказательство, аналогичное предыдущему, мы оставляем читателю, так же как вычисление радиуса искомой окружности.

Мыльные пленки

Для тех читателей, которые стали сомневаться в существовании решений изопериметрических задач, а также для всех любителей красивых физических экспериментов, мы предлагаем несколько очень простых опытов с мыльной пленкой, подтверждающих правильность наших решений. Конечно, физический опыт не может заменить строгое математическое доказательство, он только делает более правдоподобным полученный результат.

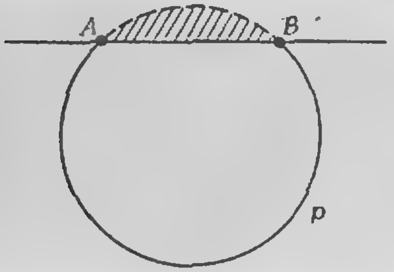


Рис. 7.

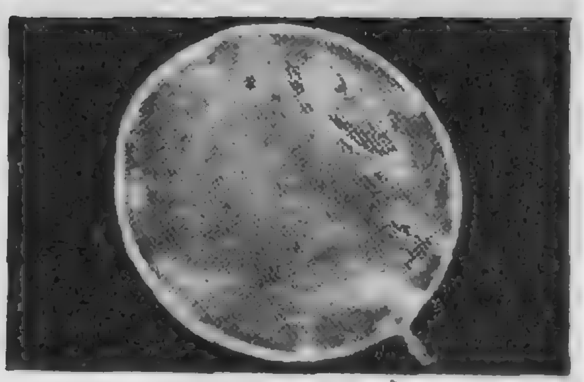


Фото 1.

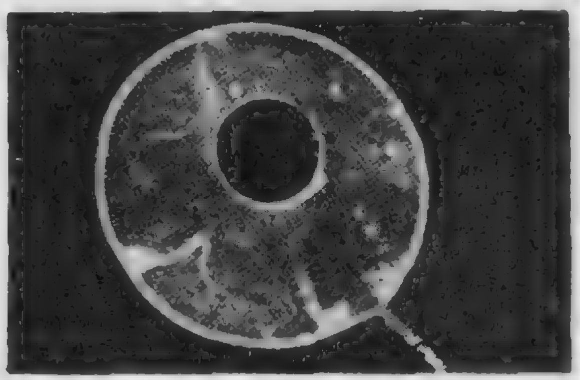


Фото 2.

Для проведения первых — самых простых — опытов, вам потребуется насыщенный мыльный раствор (лучше использовать хорошее туалетное мыло, можно добавить немного глицерина), тонкая проволока, обыкновенная нитка; для следующих потребуются еще и небольшие колечки (свободно скользящие по проволоке) и несколько прямых тонких соломинок.

Первый опыт. Проволочную рамку погрузите в мыльный раствор и осторожно выньте из него. Рамка затянется тонкой пленкой из мыльной воды. На пленку плавно положите связанную концами тонкую нитку, предварительно смоченную в мыльной воде. Эта петля плавает на пленке, имея неправильную форму (фото 1). Затем пленку внутри петли проколите горячей иглой — петля мгновенно и точно принимает форму окружности (фото 2).

Описанное явление объясняется так: из общих физических принципов следует, что устойчивое положение равновесия мыльной пленки отвечает минимуму энергии ее натя-

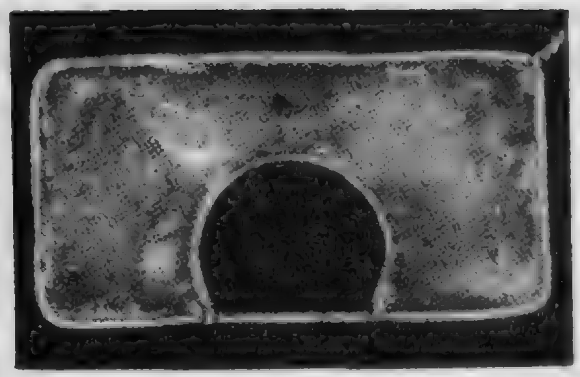


Фото 3.

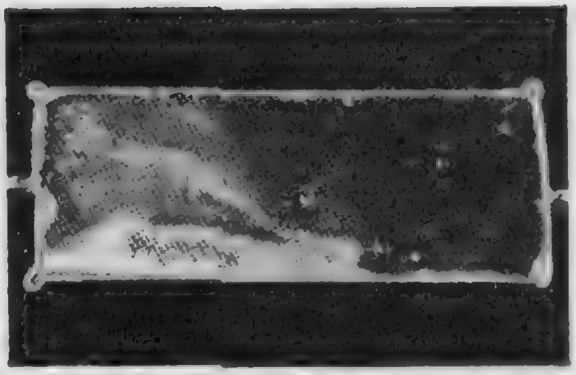


Фото 4.

жения; минимум же энергии достигается, естественно, при минимальной площади поверхности, внешней по отношению к ниточной петле, то есть при максимальной площади дыры.

Таким образом, этот опыт демонстрирует правильность решения основной изопериметрической задачи.

Второй опыт. Привяжите теперь нитку двумя концами к одному из прямолинейных участков рамки так, чтобы расстояние между концами было *примерно* равно четверти длины нитки. Погрузите рамку в раствор и выньте ее так, чтобы нитка плавала по поверхности полученной пленки. Проколите пленку внутри петли — петля мгновенно и точно принимает форму дуги окружности (фото 3). Двигая один из концов нитки вдоль рамки, вы сможете получить дуги окружностей разных радиусов.

Этот опыт демонстрирует правильность решения задачи 3. Следующий опыт демонстрирует решение задачи Дидоны.

Третий опыт. Наденьте два *маленьких колечка на рамку и привяжите* к ним нитку. Погрузите рамку в раствор и выньте ее так, чтобы нитка плавала по поверхности пленки. Проколите маленькие пленочки, образовавшиеся внутри колечек и проверьте, что колечки свободно двигаются по рамке. Проколите теперь пленку внутри петли — петля мгновенно и точно примет форму полуокружности. (Этот более тонкий эксперимент может получиться не сразу — нужно, чтобы трение колечек с рамкой было очень малым.)

Четвертый опыт. Соедините *концы двух прямолинейных проволок* нитками одинаковой длины, натяните проволочки так, чтобы получился прямоугольник. Опустите прямоугольник в раствор и выньте (фото 4), а затем дайте проволочкам несколько сблизиться. Тогда нитяные стороны примут форму правильных дуг окружности (фото 5).

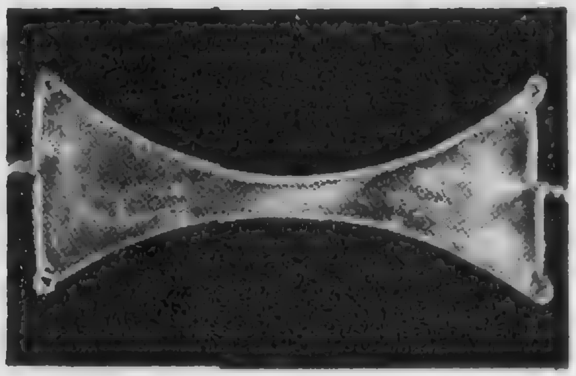


Фото 5.

Пятый опыт. Возьмите несколько кусков тонкой соломы и пропустите сквозь них нить, длина которой больше суммы длин соломинок. Связав концы нити вместе, вы получите фигуру, в которой криволинейные части, образуемые частями нити между соломинками, могут произвольно изменять форму, сохраняя общую длину. Эту фигуру, смоченную в воде, поместите на мыльную пленку, затягивающую рамку и проколите пленку внутри фигуры. После этого ваша фигура принимает такую форму, что все нити образуют дуги одного и того же круга, соломинки же изображают его хорды.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Импульс и кинетическая энергия» предназначена восьмиклассникам, «Скин-эффект» — девятиклассникам, «Две загадки бета-распада» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Импульс и кинетическая энергия

Одна из основных идей механики состоит в том, что сила, приложенная к телу, есть причина изменения его скорости. Второй закон Ньютона и выражает эту идею:

$$m\vec{a}=m\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t}=\vec{F}.$$

В механике используются еще две величины, связанные со скоростью. Это — импульс тела (другое, сейчас почти вышедшее из употребления, название этой величины — количество движения) и кинетическая энергия тела. *Импульс тела* $\vec{P}$ — векторная величина, равная (по определению) произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{P}=m\vec{v}.$$

Кинетическая энергия E_k тела — скалярная величина, равная (тоже по определению) половине произведения массы тела на квадрат его скорости:

$$E_k=\frac{mv^2}{2}.$$

Поскольку и импульс, и кинетическая энергия непосредственно выражаются через скорость тела, а изменение скорости вызывается действующей на тело силой, очевидно, что изменения импульса и кинетической энергии тоже связаны с силой.

Для импульса тела эта связь следует непосредственно из второго закона Ньютона, записанного в виде

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\vec{F}t \qquad (1)$$

— изменение импульса тела равно произведению силы на время ее действия, то есть импульсу силы («Физика 8», § 50).

Связь кинетической энергии тела с силой выглядит так:

$$E_{k2}-E_{k1}=Fs\cos\alpha=A, \qquad (2)$$

где s — модуль вектора перемещения тела, α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$, а произведение $Fs\cos\alpha=A$ — работа действующей на тело силы. Таким образом, эта запись означает, что изменение кинетической энергии тела равно работе приложенной к телу силы («Физика 8», § 55).

Роль импульса и кинетической энергии в описании движения. Различие между величинами $\vec{P}$ и E_k не ограничивается тем, что одна из них векторная, а другая скалярная.

Из равенства (1) видно, что если сила $\vec{F}$ задана, изменение импульса определяется только временем действия силы и не зависит от того, к какому телу она приложена. Любое тело (*тело любой массы*) под действием данной силы за данное *время* изменит свой импульс на одну и ту же величину. Даже если бы, например, столкнулись герои басни Крылова «Слон и Моська», то импульс каждого из них изменился бы одинаково.

Равенство (2) говорит о том, что при заданной силе изменение кинетической энергии тела определяется только расстоянием, пройденным телом в направлении действия силы (произведение $s\cos\alpha$ — это проекция перемещения на направление силы). Любое тело под действием данной силы на данном *расстоянии* изменит свою кинетическую энергию на одну и ту же величину.

Таким образом, изменение импульса связано с промежутком времени, необходимым для изменения скорости тела, а изменение кинетической энергии связано с расстоянием, которое тело должно пройти для изменения его скорости (разумеется, при заданной силе).

Другими словами, изменение импульса — это характеристика действия силы во времени, а изменение кинетической энергии — характеристика действия силы в пространстве.

Еще одно различие между импульсом и кинетической энергией. Пожалуй, самое замечательное свойство импульса тела состоит в том, что общий импульс замкнутой системы тел (то есть векторная сумма импульсов всех тел системы) остается неизменным при любых взаимодействиях и любых движениях тел этой системы. Это — *закон сохранения импульса* («Физика 8», § 51).

Обладает ли свойством «сохраняться» кинетическая энергия? Рассмотрим простой пример, из которого сразу станет видно, что в этом импульс и кинетическая энергия отличаются друг от друга.

Пусть по гладкой (без трения) горизонтальной поверхности движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v два одинаковых, например стальных, шарика массой m каждый (см. рисунок). В какой-то момент шарики соприкоснутся, затем какое-то время будут продолжать приближаться друг к другу, потом на мгновение остановятся и после этого начнут расходиться, пока не станут двигаться в противоположные стороны с прежними по модулю скоростями.

Посмотрим, чему равны суммарные импульсы и кинетические энергии обоих шариков до, во время и после столкновения.

До столкновения импульсы шариков равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=(m\vec{v})+(-m\vec{v})=0,$$

а кинетические энергии шариков одинаковы и равны $mv^2/2$ каждая, так что

$$E_{k1}+E_{k2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mv^2.$$

Во время столкновения в тот момент времени, когда оба шарика покоятся, их скорости равны нулю, следовательно,

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=0,$$
$$E_{k1}+E_{k2}=0.$$

После столкновения шарики, как и до столкновения, движутся в противоположные стороны с одинаковыми по модулю скоростями, поэтому

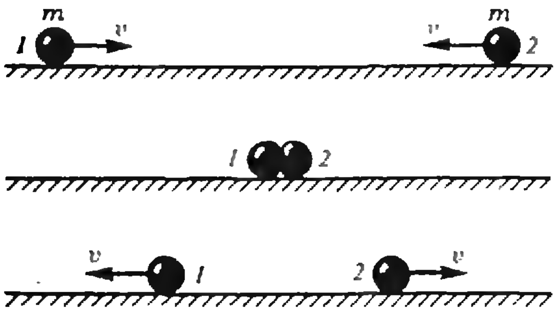
$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=-m\vec{v}+m\vec{v}=0,$$

$$E_{k1}+E_{k2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mv^2.$$

Таким образом, суммарный импульс системы двух шариков все время оставался одним и тем же. Кинетическая же энергия до и после столкновения одинакова (именно такое столкновение и называют упругим), а во время столкновения она изменялась, так что в какой-то момент даже временно исчезла совсем. Значит, существует закон сохранения импульса, но нет закона сохранения кинетической энергии.

Заметим, что если бы шарики были не из стали, а из мягкой глины или пластилина, то при столкновении они бы слиплись, остановились и больше бы не двигались (такое столкновение называют абсолютно неупругим). Их общий импульс был бы по-прежнему равен нулю, а кинетическая энергия во время столкновения исчезла бы не временно, а навсегда.

Как известно, закон сохранения существует и для энергии, но не для кинетической, а для полной, включающей в себя и другие формы энергии. Так, в нашем примере временная пропажа кинетической энергии при упругом столкновении шариков означает лишь тот факт, что в этот момент она полностью превратилась в потенциальную энергию упругой деформации шариков. В конце столкновения потенциальная энергия вновь целиком превратилась в кинетическую. При неупругом же ударе кинетическая энергия шариков переходит во внутреннюю энергию (шарики нагреваются), которая обратно в кинетическую энергию уже не превращается.



Скин-эффект

Из школьного курса физики («Физика 9», § 94) известно, что вследствие явления электромагнитной индукции в любом проводнике под действием изменяющегося магнитного поля наводятся вихревые токи (токи Фуко). Они вызываются индукционным электрическим полем, которое возникает при изменении магнитного поля. Силовые линии индукционного электрического поля всегда замкнуты, поэтому и токи Фуко тоже замкнутые (вихревые). Так как обычно проводники обладают электрическим сопротивлением, энергия токов Фуко переходит в тепло (проводник нагревается), а сами токи при этом затухают.

Оказывается, что быстропеременные токи Фуко не проникают в глубь проводника и текут практически только в его поверхностном слое. Это явление называют *скин-эффектом* (от английского слова skin — кожа). Его надо учитывать при использовании переменных токов (и полей) в технике.

Причину возникновения скин-эффекта качественно можно объяснить с помощью правила Ленца для электромагнитной индукции. Согласно этому правилу, направление индукционных токов всегда таково, что они своим магнитным полем «мешают» изменению магнитного потока, которое эти токи вызвало. Поэтому при помещении проводника во внешнее переменное поле возникают токи Фуко, которые ослабляют это поле в проводнике, экранируют его. Причем чем дальше от поверхности в глубь проводника, тем меньшим становится суммарное магнитное поле. Соответственно и величина тока в проводнике с глубиной тоже убывает. Убывание происходит по столь быстрому закону, что, начиная с некоторой глубины, поле и ток можно считать практически равными нулю. Эту глубину называют толщиной скин-слоя.

От чего зависит толщина скин-слоя? С одной стороны, чем быстрее изменяется магнитное поле, тем больше возникающая электродвижущая сила индукции и тем бо́льшие токи Фуко текут в проводнике. С другой стороны, сила тока зависит и от удельного сопротивления проводника — в проводниках с меньшим удельным сопротивлением наводятся бо́льшие токи Фуко и магнитное поле экранируется сильнее. Поэтому при увеличении частоты изменения поля и при уменьшении сопротивления проводника толщина скин-слоя уменьшается.

Точный расчет показывает, что для меди, например, при частоте промышленного переменного тока $\nu = 50$ Гц толщина скин-слоя составляет приблизительно 1 см. Это не слишком малая величина, поэтому в проводниках диаметром до нескольких сантиметров переменный ток распределяется по всему сечению провода, а скин-эффект проявляется в полной мере в гораздо более толстых проводах. В то же время в диапазоне средних радиоволн с частотой $\nu \sim 10^7$ Гц для толщины скин-слоя в меди имеем $\approx 10^{-3}$ см. Это уже достаточно малая величина. Быстропеременные токи такой частоты текут практически только по поверхности проводов. Можно проводники сделать вообще полыми, и это почти не скажется на их сопротивлении. Иногда для уменьшения потерь проводники в радиосхемах покрывают тонким слоем серебра — токи текут только в этом слое, а серебро обладает меньшим удельным сопротивлением, чем медь.

Интересно, что в сверхпроводниках индукционные токи вообще не затухают (сопротивление равно нулю), и поэтому они способны экранировать даже постоянное магнитное поле. В толще сверхпроводника суммарная индукция внешнего магнитного поля и магнитного поля экранирующих токов равна нулю. Это явление называют эффектом Мейснера*).

Две загадки бета-распада

Как известно, естественный бета-радиоактивный распад состоит в том, что ядра атомов одного элемента самопроизвольно испускают бета-частицы, то есть электроны, и при этом превращаются в ядра другого элемента с атомным номером на единицу бо́льшим, но с прежней массой («Физика 10», § 103). Символически это превращение записывается так:

---

*) Об этом эффекте подробно рассказывается в статье Л. Г. Асламазова «Сверхпроводящие магниты», опубликованной в девятом номере «Кванта» за 1984 год.

$$ {}^{M}_{Z}X \rightarrow {}^{M}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e. $$

Здесь X — исходное ядро, Y — продукт распада, e — электрон (верхний индекс «0» показывает, что масса электрона по сравнению с атомной единицей массы очень мала).

Тщательное изучение бета-распада показало, что это явление таит в себе две загадки.

Загадка первая: «пропажа» энергии. Если ядро X самопроизвольно превращается в ядро Y, то это значит, что энергия W_X ядра X больше, чем энергия W_Y ядра Y. А энергия вылетающей при этом бета-частицы должна быть равна разности энергий $W_X - W_Y$ (если пренебречь энергией отдачи).

Поскольку все исходные ядра X одинаковы, равно как одинаковы и все получающиеся из них ядра Y, все вылетающие бета-частицы должны иметь одну и ту же энергию. Опыты же показывают, что энергия практически всех бета-частиц меньше, чем разность энергий $W_X - W_Y$. Точнее: β-частицы имеют различные энергии, и все они лежат в пределах от нуля до максимального значения, равного $W_X - W_Y$. Например, для бета-частиц, испускаемых ядрами ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ (период полураспада 5 дней), максимальное значение энергии около 1 МэВ, а средняя энергия, приходящаяся на долю одной частицы, меньше чем 0,4 МэВ.

Создавалось впечатление, что бета-распад — это процесс, в котором, в нарушение закона сохранения энергии, энергия пропадает бесследно. Некоторые физики склонны были думать, что закон сохранения энергии, безусловно верный в мире макроскопических процессов, «необязателен» для некоторых процессов, связанных с элементарными частицами. К этой мысли (о возможности нарушения закона сохранения энергии) склонялся даже такой физик, как Нильс Бор. Высказывались и другие мнения, что возможно найдутся процессы, при которых энергия не пропадает бесследно (как в случае бета-распада), а наоборот возникает из ничего.

Нейтрино. Закон сохранения энергии был, однако, «спасен» швейцарским физиком-теоретиком Вольфгангом Паули. В 1930 году он высказал предположение, что при бета-распаде из ядра вылетает не только электрон, но и еще одна частица, на долю которой и приходится недостающая энергия. Но почему эта частица никак себя не обнаруживает: не ионизует газ, как это делает электрон; ее энергия при столкновениях с атомами не переходит в тепло и т. д.? Паули объяснял это тем, что придуманная им частица электрически нейтральна и не обладает массой покоя*).

Очень странной казалась эта частица, которой итальянский физик Энрико Ферми дал имя — нейтрино. Все назначение нейтрино состояло в том, чтобы «спасти» закон сохранения энергии. С такими частицами физикам иметь дело еще не приходилось. Тем не менее, идея Паули о новой частице быстро получила всеобщее признание. Советский физик А. И. Лейпунский уже в 1936 году придумал способ ее обнаружения. Однако окончательно ее реальное существование было доказано только в 1956 году, почти через 26 лет после того, как она «родилась» в мозгу физика с богатым воображением — В. Паули.

Загадка вторая: откуда берутся электроны? Эта загадка бета-распада (ее можно было бы поставить и на первое место) состояла вот в чем.

Как известно («Физика 10», § 107), атомные ядра всех элементов состоят только из протонов и нейтронов. Как же из ядер могут вылетать электроны, которых там нет, и нейтрино, которых там тоже нет?

Объяснить этот удивительный факт (из ядра вылетает то, чего там нет) можно только тем, что частицы — протоны и нейтроны, образующие ядро, способны взаимно превращаться друг в друга. В частности, бета-распад состоит в том, что один из нейтронов, входящих в ядро радиоактивного элемента, превращается в протон.

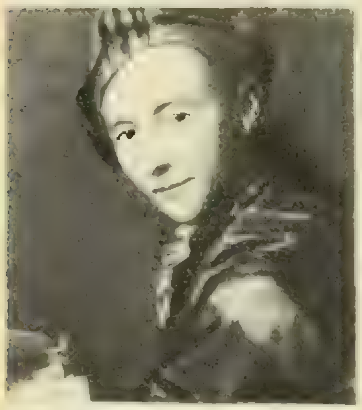
(Окончание см. на с. 34)

---

*) Сейчас существует и другая точка зрения — что у нейтрино есть очень малая масса покоя. Однако пока этот факт нельзя считать бесспорным.

Математика является
наукой, которая
не только показывает
в каждом случае
соотношения,
но и определяет причины,
от которых
они зависят по природе
самих вещей.

Л. Эйлер



Леонард Эйлер (1707—1783) принадлежит к числу величайших математиков, заложивших в XVII—XVIII веках основы современной математики. Сын швейцарского пастора, он в 1726 году приезжает в Россию для работы в Петербургской Академии наук и остается здесь до конца своей долгой жизни, за исключением периода (1741—1765) работы в Берлинской академии наук.

Совершенно удивительны как его работоспособность (около 800 трудов, собранных в настоящее время в 72 томах), так и умение увидеть главное в любой изучаемой им области математики. В большинстве математических наук обязательно существуют основополагающие теоремы, формулы, уравнения, носящие имя Эйлера.

Подробнее об Эйлере и его работах можно прочесть в 10-м номере нашего журнала за 1983 год.

Как разрезать пирог

Математика — наука точная. Она учит считать, измерять и многому другому. Поэтому не удивительно, что когда на дне рождения у Васи потребовалось разрезать праздничный пирог на 11 частей, то все закричали: «Пусть это сделает Миша!» — ведь Миша лучший математик класса. Миша взглянул на пирог. Пирог был круглым, но не очень, и с одной стороны потолще, а с другой — потоньше. Да, задача оказалась трудной.

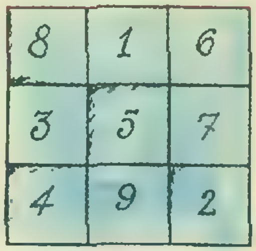
«Пусть я действительно разрежу пирог на равноценные части, но вдруг кому-нибудь покажется, что ему досталось меньше, чем соседу. Как мне доказать, что части действительно одинаковы?» — думал Миша.

Но тут он вспомнил, как он делил несколько дней назад с именинником мороженое, купленное на два гривенника — его и свой. «Тогда я разрезал мороженое на две части, по-моему, поровну, но вместо того, чтобы прятать их за спиной, положил их на стол перед Васей — выбирай ту половину, которая тебе кажется большей. И оба мы были довольны. Нельзя ли и тут поступить подобным образом?» — думал Миша. И после некоторого размышления он воскликнул:

«Ребята, становитесь за мной в очередь. Сейчас я отрежу часть пирога, которая составляет, как мне кажется, 1/11 его часть. Кто стоит за мной? Сережа? Если ты считаешь, что в куске больше 1/11 части пирога, то отрежь от него столько, чтобы, по-твоему, в нем

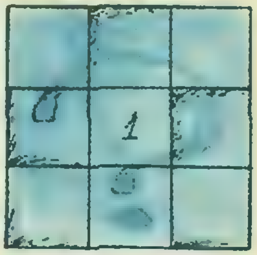
1. В «магическом квадрате» 3×3 суммы чисел во всех горизонтальных и вертикальных рядах, а также по диагоналям, одинаковы (рис. 1). При этом в его центре обязательно стоит число 5. Если же мы поставим в центральную клетку число 1 (рис. 2), то расставить остальные числа от 2 до 9 в клетках квадрата так, чтобы все указанные суммы были равны, оказывается невозможным. Попробуйте их расставить так, чтобы в горизонтальных и вертикальных рядах суммы были одинаковы.

М. В. Варга



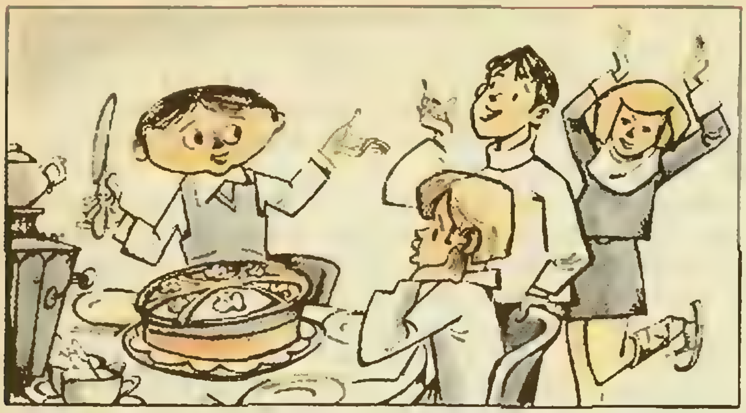
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 1.



	1	

Рис. 2.



действительно осталась 1/11, *если же ты считаешь*, что в нем не больше 1/11 части пирога, то есть в остатке не меньше 10/11, то проходи, не прикасаясь к пирогу. После тебя с первым куском так же сможет поступить следующий по очереди и т. д., пока не будут опрошены все ребята. Тот, кто последним прикоснулся к куску, тот и забирает его, в частности, если никто из вас ничего не отрежет, кусок достанется мне. Справедливо?» «Вроде бы так, — ответил за ребят Коля, — а дальше?

«Дальше, — радостно улыбаясь от сознания верно решенной задачи, произнес Миша, — останется 10 человек, уверенных, что *в оставшейся части не менее* 10/11 от всего пирога. Тем же способом мы кому-то из них отдадим 1/10 этой части, то есть 1/11 всего пирога, и так далее, пока последний не получит свою часть пирога, которую он, в соответствии с правилами, заведомо будет считать не меньшей, чем 1/11 часть всего пирога, как и все остальные».

История эта выдумана и ее решение имеет скорее теоретическую, чем практическую ценность, особенно если пирог легко крошится. Впрочем, этой проблемы не будет, если торт сделан из мороженого. Однако задача о дележе пирога неправильной формы между несколькими людьми так, чтобы каждый считал, что ему досталось не меньше, чем полагается в случае равного раздела, появилась довольно давно. Вместе с решением она содержится в книге «Математические соревнования», изданной в серии «Библиотека физико-математической школы» в 1974 г. Приведенное

здесь решение проще изложенного в книге, его прислал нам ученик 7 «В» класса школы № 2 г. Москвы Миша Ободовский, сейчас он уже восьмиклассник.

А. П.

ГОЛОВОЛОМКИ

2. Разгадайте серию ребусов «Времена года»:

ВЕСНА·В=ЕЙСКЕ
ЛЕТО:В=ОРЛЕ
ОСЕНЬ·В=МОСКВЕ
ЗИМОЙ·В=ИЛИМЕ

В. М. Радунский

3. Эту головоломку очень просто сделать, но совсем не просто решить. Нужно начертить фигуру, изображенную на рисунке 3, и изготовить пять цепочек, каждая из которых содержит по пять квадратиков. Цепочки удобно делать из картона, оклеивая нитку с двух сторон картонными квадратиками (рис. 4). Теперь попробуйте замостить фигуру полученными цепочками.

Н. И. Авилов

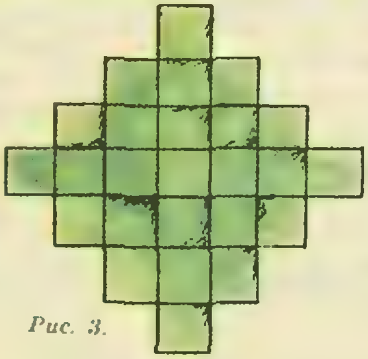


Рис. 3.

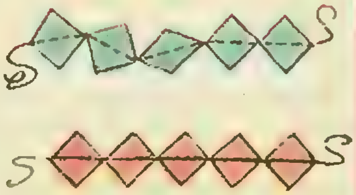


Рис. 4

(Начало см. на с. 28)

При этом в ядре оказывается одним протоном больше, чем было, а общее число частиц остается прежним. Просто один из нейтронов стал протоном. Но если бы дело только тем и ограничилось, был бы нарушен закон сохранения электрического заряда. Природа таких процессов не допускает! Так вот, оказывается, что вместе с превращением нейтрона в протон в ядре рождаются электрон, отрицательный заряд которого компенсирует положительный заряд появившегося протона, и нейтрино, которое уносит определенную долю энергии.

Таким образом, при бета-распаде в ядре происходит превращение одного из нейтронов в протон и рождение двух частиц — электрона и нейтрино. Протон остается в ядре, электрон же и нейтрино, которым в ядре быть «не полагается», вылетают из него.

Заметим, что процесс бета-радиоактивного распада несколько напоминает процесс испускания светового кванта (фотона). Бета-частица и нейтрино рождаются в момент перехода ядра из одного состояния в другое, аналогично тому как фотон испускается атомом при переходе электрона, входящего в состав электронной оболочки атома, с одного энергетического уровня на другой.

Математика 10

С помощью обратной функции

В школе интегралы вычисляют по формуле Ньютона—Лейбница. Чтобы вычислить таким способом интеграл

$$I_1=\int_0^1 \arcsin x\,dx,$$

надо знать первообразную для функции $\arcsin x$, а вы ее не знаете. Как быть?

Обратимся к геометрическому смыслу интеграла: интеграл есть площадь. В частности, I_1 — площадь области, окрашенной на рисунке 1 в голубой цвет. Найдем эту площадь как разность площади соответствующего прямоугольника и площади σ_1 «желтой области». Поскольку график функции $\arcsin x$ представляет собой «перевернутый» (полученный симметрией около прямой $y=x$) график функции $\sin x$, площадь σ_1 равна площади под синусоидой $x=\sin y$ на участке изменения y от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy=-\cos y\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Следовательно, $I_1=\frac{\pi}{2}-1$.

Вычислим теперь интеграл

$$I_2=\int_a^b \ln x\,dx \quad (1<a<b).$$

Снова обратимся к рисунку (рис. 2). На этот раз «голубая площадь» I_2 равна площади «большого прямоугольника» минус площадь «маленького прямоугольника» и площадь σ_2 «желтой области». График функции $\ln x$ есть «перевернутый» график обратной функции e^x, поэтому σ_2 — площадь под графиком функции $x=e^y$ на участке изменения y от $\ln a$ до $\ln b$:

$$\sigma_2=\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy=e^y\,\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

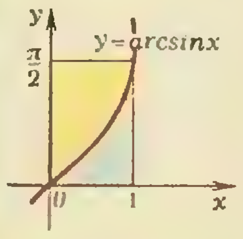


Рис. 1.

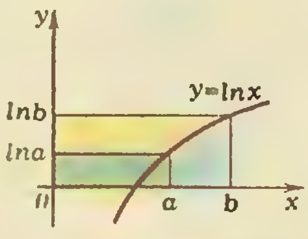


Рис. 2.

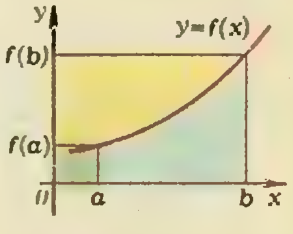


Рис. 3.

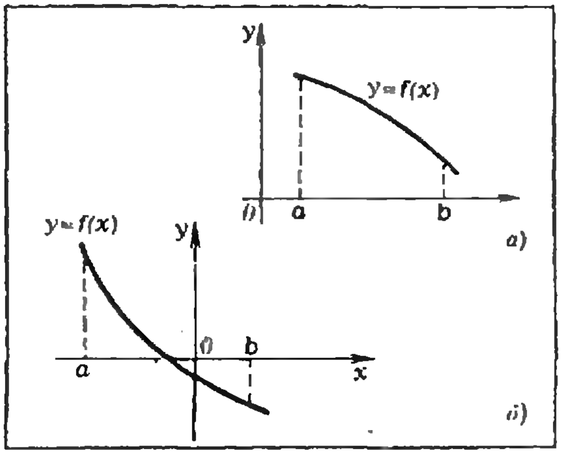


Рис. 4.

Следовательно, $I_2=b\cdot\ln b-a\times\ln a-(b-a)=b\cdot\ln\frac{b}{e}-a\cdot\ln\frac{a}{e}$.

Мы дважды выразили интеграл от некоторой функции ($\arcsin x$, $\ln x$) через интеграл от обратной функции ($\sin x$, e^x).

$\ln x$ и e^x — взаимно-обратные функции. Но $\arcsin x$ и $\sin x$ — не взаимно-обратные функции ($\sin x$ — не обратимая функция); взаимно-обратными являются $\arcsin x$ и $\sin x$, рассматриваемый на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, или, как говорят математики, *сужение* функции $\sin x$ на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Нельзя ли это сделать и в общем случае? Если, например, график функции f имеет такой вид, как на рисунке 3, и функция g — обратная для f на $[a;b]$, то из рисунка 3

$$\int_a^b f(x)dx=b\cdot f(b)-a\cdot f(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy. \quad (1)$$

Но если график функции f имеет такой вид, как на рисунках 4, *а* или 4, *б*, то из рисунка равенство (1) не получается. Верно ли оно все-таки? Если верно, то как его доказать?

Как доказать равенство (1) для *интеграла*, не ясно. Попробуем доказать соответствующее утверждение для *первообразной*. Заменим в (1) b на x:

$$\int_a^x f(t)dt=x\cdot f(x)-a\cdot f(a)-\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy \quad (2)$$

(для простоты мы заменили также переменную интегрирования x на t; от обозначения переменной интегрирования величина интеграла, очевидно не зависит:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz=\ldots).$$

Как известно, функция $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для *непрерывной* функции f («Алгебра и начала анализа 9—10», задача 1046). Поэтому, если равенство (2) верно, то функция

$$x\cdot f(x)-a\cdot f(a)-\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy,$$

или, что все равно, отличающаяся от нее на константу функция

$$\Phi(x)=x\cdot f(x)-\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy, \quad (3)$$

также будет первообразной для f.

Чтобы проверить, верно ли это, надо продифференцировать правую часть равенства (3). Потребуем поэтому, чтобы функция f была дифференцируема.

Функция $\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy$, входящая в правую часть равенства (3), является композицией функции $z=f(x)$ и функции $\int_{f(a)}^{z} g(y)dy$. Поскольку

$$\left(\int_{f(a)}^{z} g(y)dy\right)'=g(z), \quad (4)$$

по правилу дифференцирования композиции

$$\left(\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy\right)'=g(f(x))\cdot f'(x).$$

Так как функция g — обратная для f, $g(f(x))=x$. Следовательно,

$$\left(\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy\right)'=x\cdot f'(x).$$

Поэтому

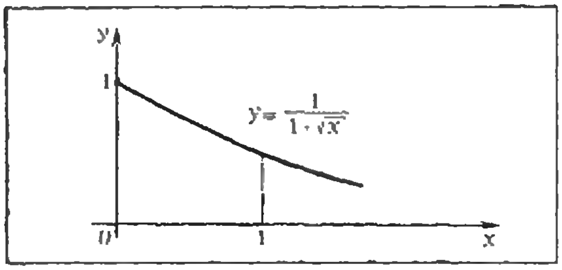


Рис. 5.

$$\Phi'(x)=\Bigl(x\cdot f(x)-\int\limits_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy\Bigr)'=$$

$$=(x\cdot f(x))'-\Bigl(\int\limits_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy\Bigr)'=$$

$$=f(x)+x\cdot f'(x)-x\cdot f'(x)=f(x).$$

Таким образом, функция Φ действительно является первообразной для функции f.

Нами вроде бы доказана

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема и обратима на интервале $]\alpha;\ \beta[$ и функция g — обратная для f на $]\alpha;\ \beta[$. Тогда для любого $a\in]\alpha;\ \beta[$ функция*

$$\Phi(x)=x\cdot f(x)-\int\limits_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy$$

является первообразной для f на $]\alpha;\ \beta[$.

Слова «вроде бы» поставлены нами на всякий случай, поскольку мы вели вычисления, еще не дав формулировки и не особенно следя за их обоснованностью. Просмотрев еще раз выкладку, видим, что для верности (4) нужна непрерывность функции g. Можно доказать, что эта непрерывность вытекает из непрерывности и обратимости функции f; непрерывность же функции f следует из ее дифференцируемости.

Упражнение 1. Найдите первообразную для функции а) $\arcsin x$, б) $\ln x$.

Вернемся к равенству (1). Теперь легко доказывается

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема и обратима на интервале $]\alpha;\ \beta[$ и функция g — обратная для f на $]\alpha;\ \beta[$. Тогда для любых $a,\ b\in]\alpha;\ \beta[$*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=b\cdot f(b)-a\cdot f(a)-\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Учитывая теорему 1, по формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b=$$

$$=\Bigl[x\cdot f(x)-\int\limits_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy\Bigr]\Big|_a^b=$$

$$=b\cdot f(b)-\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy-$$

$$-a\cdot f(a)+\int\limits_{f(a)}^{f(a)} g(y)dy=$$

$$=b\cdot f(b)-a\cdot f(a)-\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy,$$

что и требовалось доказать.

Например, функция $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ дифференцируема и обратима на $]0;\ +\infty[$ (рис. 5). Легко подсчитать, что обратной для нее будет функция $x=\left(\frac{1}{y}-1\right)^2$ $(0<y\leqslant 1)$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}-\int\limits_1^{1/2}\left(\frac{1}{y}-1\right)^2 dy=$$

$$=\frac{1}{2}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y}-1\right)^2 dy=$$

$$=\frac{1}{2}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{y}-2\ln y+y\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=2\ln\frac{e}{2}.$$

Подспудная цель этой статьи — показать, как бывает полезно сделать чертеж, проинтерпретировать аналитические понятия геометрически (попробуйте «открыть» формулу (1) без чертежа!). Перефразируя известные слова Цезаря, можно эту идею выразить так: «Нарисовал, увидел, доказал!».

Упражнения.

2. Найдите первообразную на $[1;\ +\infty[$ для функции а) $y=\sqrt{x^2-1}+x$, б) $y=\sqrt{x^2-1}$.

3. Вычислите а) $\int\limits_{-1}^{0}\arccos x\,dx$, б) $\int\limits_0^1\arcsin\sqrt{x}\,dx$, в) $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, г) $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

П. Г. САТЬЯНОВ

Квант для младших школьников

Задачи

1. Найдите все такие двузначные числа, которые делятся на каждую из цифр в их записи.

2. Однажды в Артеке за круглым столом оказались пятеро ребят родом из Москвы, Ленинграда, Горького, Перми и Свердловска — Юра, Толя, Леша, Коля и Витя.

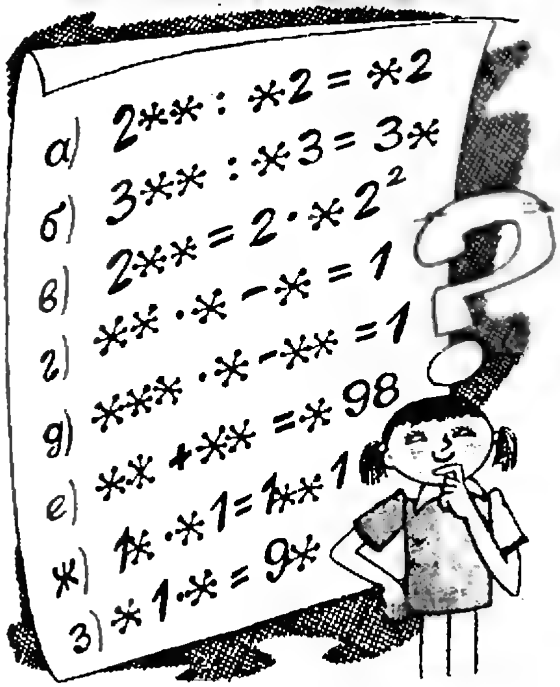
Москвич сидит между свердловчанином и Витей, ленинградец — между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Ленинграде, Юра бывал в Горьком, но не был в Свердловске, а свердловчанин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.

3. Найдите наименьшее четырехзначное число, квадратный корень из которого равен числу, образованному первыми двумя цифрами в сумме с квадратным корнем из числа, образованного последними двумя его цифрами.

4. Для открывания флакона с туго сидящей в нем притертой пробкой рекомендуют горлышко флакона нагреть. На чем основан этот рецепт?

5. Восстановите пропущенные цифры в равенствах на рисунке.

Эти задачи нам предложили: В. Ф. Лев, М. А. Роллова, Н. К. Антонович, А. П. Савин, С. Н. Олехник.



задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М921, 922» или «Ф933». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М921—М925; Ф933—Ф937

М921. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны величины двух углов $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, а его удвоенная площадь равна $AB\cdot CD+BC\cdot AD$. Найдите отношение длин всех его сторон $AB:BC:CD:DA$, если

а) $\alpha=5\pi/12$, $\beta=7\pi/12$; б) $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/3$ *);

в) Выясните, для каких α и β существует такой четырехугольник, и выразите через α и β отношение его сторон.

М922. Докажите, что уравнение

$$\sin^p x+\cos^q x=1,$$

где p и q — положительные числа, имеет решение на интервале $0<x<\pi/2$ тогда и только тогда, когда $(p-2)(q-2)<0$ или $p=q=2$.

А. М. Седлецкий

М923. Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость численно равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

М924. Каждые две из n точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB, BA (например, на рисунке 1 всего три ориентированных треугольника из 10).

а) Объясните, как расставить стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б)* Каково наибольшее возможное число ориентированных треугольников (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для $n=4$, 5 и 6.)

И. Цаленчук, ученик 10 кл.

М925. (Эволюция кляксы.) На белой плоскости расположена синяя фигура K_0. Из нее получается новая синяя фигура K_1 по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам M плоскости: если не менее половины площади круга радиуса 1 с центром в точке M занято синим цветом, то точка M становится синей, а если менее половины — то белой **). На следующем шагу из полученной синей фигуры K_1 по тому же правилу получается фигура K_2, затем из нее — K_3 и т. д. Докажите, что а) для произвольной ограниченной фигуры K_0, начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если K_0 — круг радиуса 100, то это случится не позже чем через миллион шагов.

---

*) Близкие к а) и б) задачи предлагались на вступительных экзаменах 1984 года на экономическом факультете МГУ.

**) Предполагается, что получающиеся на каждом шагу фигуры имеют площадь; так будет, например, если фигура K_0 ограничена отрезками прямых и дугами окружностей.

А. Л. Тоом

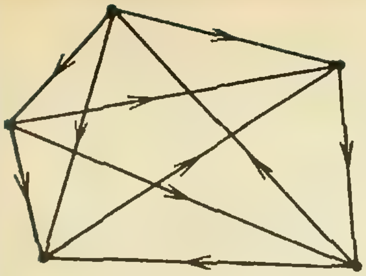
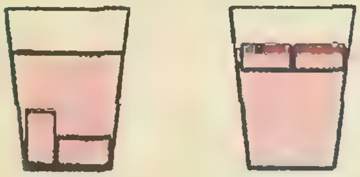


Рис. 1.

Ф933. Два куска сахара можно поместить в стакан с чаем различными способами. Можно просто положить сахар на дно (рис. 2, а), а можно установить куски «враспор», если стакан имеет коническую форму (рис. 2, б). В каком случае сахар растворится скорее, если чай не перемешивать?

Л. А. Ашкинази



а) б)

Рис. 2.

Ф934. Теплоизолированный сосуд разделен на две части легким поршнем. В левой части сосуда находится $m_1 = 3$ г водорода при температуре $T_1 = 300$ К, в правой части — $m_2 = 16$ г кислорода при температуре $T_2 = 400$ К. Поршень слабо проводит тепло, и температура в сосуде постепенно выравнивается. Какое количество тепла отдаст кислород к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться?

З. А. Рафаилов

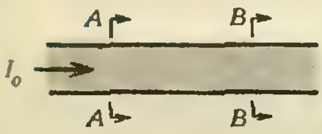


Рис. 3.

Ф935. По длинному прямому проводнику постоянного сечения течет ток I_0. На участке AB проводника (рис. 3) его удельное сопротивление уменьшается от ρ_1 в сечении $A-A$ до ρ_2 в сечении $B-B$. Какой по величине и знаку объемный заряд образуется на участке AB?

В. В. Можаев

Ф936. По длинному сверхпроводящему соленоиду с индуктивностью $L_0 = 0{,}1$ Гн, содержащему $N = 200$ витков, течет ток $I_0 = 0{,}1$ А. Издали к соленоиду подносят замкнутый проводящий виток того же радиуса, что и витки соленоида; индуктивность витка $L_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Гн. Виток вставляют между витками соленоида соосно с ними. Как изменится ток, текущий по соленоиду? Как изменится энергия системы?

Ф937. На вертикальной стене нарисован человечек «ростом» $h = 20$ см, голова человечка находится на высоте $H = 2$ м над полом. При помощи линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}1$ м получают изображение человечка на полу. Найти размер наиболее четкого изображения.

А. Р. Зильберман

Problems

M921—M925; P933—P937

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones.

M921. The angles $\hat{A} = \alpha$ and $\hat{B} = \beta$ of the convex quadrilateral $ABCD$ are known; its doubled area equals $AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Find the ratios of its sides $AB:BC:CD:DA$ if

but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in Englich), including the solution. On the envelope write *NEW PROBLEM IN PHYSICS* (or MATHEMATICS).

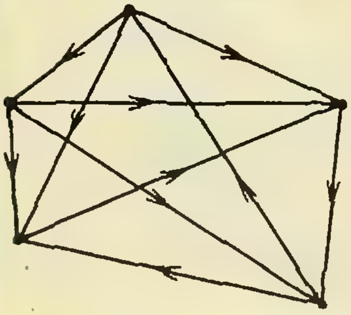
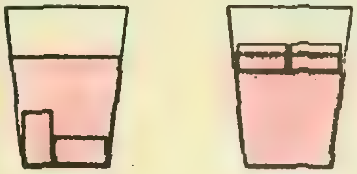


Fig. 1.



a) б)

Fig. 2.

a) $\alpha=5\pi/12$, $\beta=7\pi/12$; b) $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/3$.
c) Find the values of α and β for which such a quadrilateral exists and express α and β in terms of the sides' ratio.

M922. Prove that the equation

$$\sin^p x+\cos^q x=1,$$

where p and q are positive numbers, has a solution on the interval $0<x<\pi/2$ if and only if $(p-2)(q-2)<0$ or $p=q=2$.

A. M. Sedletski

M923. Prove that the area of a cube's projection on any plane is equal to the length of its projection on perpendiculars to the plane.

M924. Any two of n points (no three of which are colinear) are joined by a line segment; all the segments are supplied with arrows. The triangle ABC with vertices at these points is called oriented, if the arrows determine the directions AB, BC, CA or the directions AC, CB, BA (thus, three of the ten triangles on Fig. 1 are oriented).

a) Explain how the arrows should be oriented in order to avoid creating any oriented triangles whatsoever.

b)* What is the largest possible number of oriented triangles (for each n)? Draw the appropriate examples for $n=3$, 4, and 6.

I. Tsalenchuk, 10th grade student

M925. (Ink blot evolution). A blue figure K_0 is drawn on a white plane. A new blue figure K_1 is obtained from it according to the following rule, applied simultaneously to all points M of the plane: if less than half of the area of the circle of radius 1 and centre M is blue, then the point M must become blue, otherwise it must become white *). At the next step the figure K_2 is obtained from K_1 in the same way, etc. Prove that a) for any bounded figure K_0 the entire plane will become white after a finite number of steps; b) if K_0 is the cicle of radius 100, this will happen no later than in one million steps.

A. L. Toom

P933. Two lumps of sugar may be placed into a cup of tea in different ways. The lumps may simply be dropped on the bottom of the cup (Fig. 2, *a*), or, if the cup is cone-shaped, placed so that they hold up each other in the cup's middle (Fig. 2, *б*). In which case will the lumps dissolve more rapidly, if the tea is not stirred?

L. A. Ashkinazi

P934. A heatisolated vessel is divided into two sections by a light piston. The left section contains

---

*) It is assumed that the area of the figures obtained at each step is always defined; this will be the case if K_0 is bounded by straight lines and circular arcs.

$m_1=3$ g hydrogen at temperature $T_1=300$ K, the right section contains $m_2=16$ g oxygen at temperature $T_2=400$ K. The piston weakly conducts heat, so that the temperature in the sections gradually equalizes. How much heat will the oxygen have released at the moment when the piston stops moving?

Z. A. Rafailov

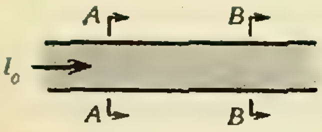


Fig. 3.

P935. A direct current of I_0 flows along a rectilinear wire of constant section. Along the segment AB of the wire (Fig. 3) its specific resistance decreases from ρ_1 at the section $A-A$ to ρ_2 at the section $B-B$. What is the absolute value and the sign of the charge that forms along the segment AB?

V. V. Mozhaev

P936. A current of $I_0=0{,}1$ A flows along a long rectilinear superconducting coil of inductivity $L_0=0{,}1$ with $N=200$ loops. A closed conducting loop for the same radius as the loops of the coil is brought from a distance and placed between the solenoid's loops so as to have a common axis with them. The new loop's inductivity is $L_1=1\cdot10^{-3}$ Hn. How will the current flowing in the solenoid change? How will the energy of the system change?

P937. A human being of «height» $h=20$ cm is drawn on a vertical wall so that its head is at the altitude $H=2$ m above floorlevel. An image of the human being is obtained on the floor by means of a lens of focal distance $F=0{,}1$ m. Find the size of the clearest possible image.

A. R. Zilberman

Решения задач

M901—M904; Ф913—Ф916

M901. *Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если OK=OM, то либо углы A и B треугольника равны, либо угол C равен 60°.*

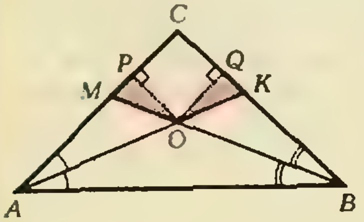


Рис. 1.

Опустим из точки O перпендикуляры OP и OQ на стороны AC и BC. Поскольку O — точка пересечения биссектрис, эти перпендикуляры имеют равные длины, следовательно, прямоугольные треугольники OMP и OKQ равны. Выразим их острые углы при вершинах M и K через углы треугольника ABC. Если точка P лежит на отрезке CM (рис. 1), то угол M треугольника OMP, как внешний угол треугольника AMB, равен $\angle A+\frac{1}{2}\angle B$; если точка P лежит на отрезке AM (рис. 2), то этот угол равен углу AMB, то есть $180°-\angle A-\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle B+\angle C$. Аналогичные две возможности имеются и для точки Q.

Таким образом, исходный треугольник удовлетворяет одному из двух равенств: либо $\angle AMB=$

$=\angle AKB$, то есть $\frac{1}{2}\angle B+\angle C=\frac{1}{2}\angle A+\angle C$ или $\angle A=\angle B$; либо $\angle AMB+\angle AKB=180^\circ$, то есть $\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\angle B=\frac{3}{2}(\angle A+\angle B)=180^\circ$ или $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=60^\circ$.

В. Л. Гутенмахер

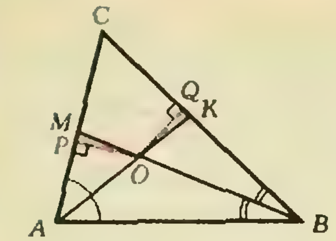


Рис. 2.

◆

M902. *Натуральный ряд 1, 2, 3, ... разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на ее разность.*

Обозначим через $a_1, a_2, ..., a_n$ первые члены прогрессий, на которые разбит натуральный ряд, через $d_1, d_2, ..., d_n$ — их разности. Произведение всех разностей входит в одну из прогрессий, то есть для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$, и некоторого натурального k

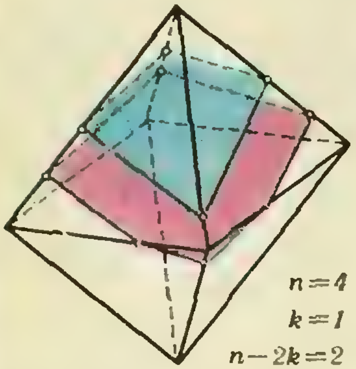
$$d_1d_2...d_n=a_i+kd_i.$$

Из этого равенства следует, что a_i делится на d_i.

А. В. Келарев

◆

M903. *Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с а) четным; б) нечетным числом сторон?*



а) Ответ: существует. Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой многогранник, из каждой вершины которого выходит четное число ребер, например, октаэдр (см. рисунок).

Рассмотрим произвольное сечение такого многогранника, не проходящее через вершины. Очевидно, его можно чуть-чуть пошевелить так, чтобы оно стало непараллельным ни одному из ребер многогранника, а число его сторон осталось прежним. Будем теперь параллельно перемещать плоскость сечения. Тогда число его сторон будет изменяться только при переходе через вершины, причем каждый раз будет проходиться только одна вершина. Если в ней сходится четное число n ребер и k из них пересекали плоскость сечения до перехода через эту вершину (а значит, $n-k$ — после перехода; см. рисунок), то число вершин сечения при этом переходе изменится на $n-2k$ и следовательно, его четность сохранится. А поскольку в конце концов плоскость сечения не будет пересекать ни одно из ребер, число сторон сечения должно оставаться четным все время, за исключением моментов прохождения вершин.

б) Ответ: не существует. Из решения задачи а) следует, что если у всех сечений многогранника, не проходящих через вершины, число сторон имеет одинаковую четность (в частности, нечетно), то из каждой вершины выходит четное число ребер. Но тогда, как было показано там же, число сторон у любого такого сечения должно быть четно.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

◆

M904. *Для каждого натурального числа* $A=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+...+10a_1+a_0$ *(с десятичной записью* $a_na_{n-1}...a_1a_0$*) положим*

а) Докажем, что если десятичная запись числа A содержит не менее двух знаков и $A\neq 19$, то

$$D(A)<A.$$

Пусть $A=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+...+a_0$, $a_n\geqslant 1$, тогда $A\geqslant 10^n$. В то же время

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\dots+2^{n-1}a_1+2^na_0.$$

Например, $D(1985)=1+2\times 9+2^2\cdot 8+2^3\cdot 5=91$,
$D(91)=9+2\cdot 1=11$,
$D(11)=3$.

а) Докажите, что для любого натурального $A=A_0$ в последовательности $A_1=D(A_0)$, $A_2=D(A_1)$,... встретится число $A^*=A_k<20$, для которого $D(A^*)=A^*$.

б) Чему равно A^* для $A=19^{85}$?*

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+\dots+2^na_0\leqslant 9+2\cdot 9+\dots+2^n\cdot 9=9(2^{n+1}-1)<18\cdot 2^n<10^2\cdot 2^{n-2}.$$

Следовательно, $D(A)<A$ при $n\geqslant 2$. При $n=1$, то есть для $A=10a_1+a_0$, имеем:

$$A-D(A)=10a_1+a_0-a_1-2a_0=9a_1-a_0>0$$

при всех значениях a_1 и a_0, кроме $a_1=1$, $a_0=9$ $(A=19)$, а $D(19)=19$. Наконец, при $n=0$, то есть для однозначных чисел A, очевидно, $D(A)=A$.

Таким образом, последовательность $A=A_0$, A_1, A_2, ... будет строго убывать, пока в ней не встретится число $A_k=A^*$, равное 19 или однозначное; для этого числа $D(A^*)=A^*$.

б) Ответ: $A^*=19$. Докажем, что если число A делится на 19, то и $D(A)$ делится на 19. Отсюда вытекает, что для $A=19^{85}$ число A^* делится на 19, а так как в силу утверждения а) $A^*<20$, это возможно только при $A^*=19$.

Для любого числа $A=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+\dots+a_0$ рассмотрим разность

$$2^nA-D(A)=(20^n-1)a_n+2(20^{n-1}-1)a_{n-1}+\dots+2^{n-1}\cdot(20-1)a_1.$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства делится на 19, так как $20^k-1=19\cdot(20^{k-1}+20^{k-2}+\dots+1)$, поэтому, если A делится на 19, то и $D(A)$ тоже делится на 19.

Е. И. Гурвич, А. Л. Федоров

◆

Ф913. *С горизонтальной поверхности земли бросили под углом $\alpha=60°$ к горизонту со скоростью $v_1=12$ м/с комок сырой глины. Одновременно комок вдвое большей массы бросили навстречу первому под углом $\beta=30°$ к горизонту, причем начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости. В результате столкновения комки слиплись. Найти скорость (по модулю) упавшего на землю слипшегося комка.*

Рассмотрим движение центра масс (ц. м.) комков. Скорость ц. м. непосредственно перед ударом о землю равна по модулю скорости ц. м. при бросании комков, причем

$$3m\vec{v}=m\vec{v}_1+2m\vec{v}_2, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ — скорость ц. м. при бросании, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости комков в этот момент, m — масса меньшего комка.

Поместим начало координат в точке бросания комка массы m, направив ось X горизонтально так, чтобы она проходила через точку бросания большего комка, а ось Y — вертикально вверх. Запишем равенство (1) в проекциях на оси X и Y, предварительно разделив обе части его на m:

$$\begin{aligned}3v_x&=v_1\cos\alpha-2v_2\cos\beta,\\ 3v_y&=v_1\sin\alpha+2v_2\sin\beta\end{aligned} \qquad (2)$$

(здесь v_x и v_y — проекции $\vec{v}$ на оси X и Y). Скорость v_2 найдем из условия, что в точке столкновения, которое произошло через время t, координата по оси Y у комков одна и та же:

$$v_1t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}=v_2t\sin\beta-\frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$v_2=v_1\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=v_1\sqrt{3}.$$

Подставляя найденное выражение для v_2 в (2), получаем:

$$v_x=-\frac{5}{6}v_1,\quad v_y=\frac{\sqrt{3}}{2}v_1.$$

Таким образом, скорость слипшегося комка при ударе о землю —

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}v_1\approx 14 \text{ м/с}.$$

В. И. Чивилёв

◆

Ф914. *В закрытом сосуде объема $V=33{,}6$ дм^3 находится азот и $\nu=1$ моль воды. При температуре $t=100$ °С давление в сосуде равно $p=2\cdot 10^5$ Па. Определить количество азота в сосуде.*

Давление p в сосуде складывается из парциальных давлений азота $p_а$ и паров воды $p_п$. Максимальное возможное значение $p_п$ — это давление насыщенных водяных паров $p_н$ при данном значении температуры. При $T=373$ К $p_н=10^5$ Па. Посмотрим, каким должно быть количество ν_1 пара в сосуде, чтобы создать давление $p_н$:

$$p_н V=\nu_1 RT \Rightarrow \nu_1=\frac{p_н V}{RT}=\frac{10^5\cdot 33{,}6\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 373}\text{ моль}\approx$$
$$\approx 1{,}1 \text{ моль}.$$

Значит, при испарении $\nu=1$ моль воды образовавшийся пар будет не насыщенным. Давление этого пара —

$$p_п=\nu\frac{RT}{V}\approx 0{,}9\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Следовательно, парциальное давление азота в сосуде —

$$p_а=p-p_п\approx 1{,}1\cdot 10^5 \text{ Па},$$

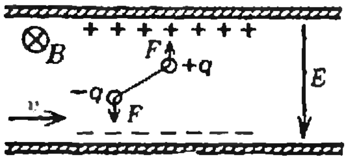
и количество азота в сосуде —

$$\nu_а=\frac{p_а V}{RT}\approx 1{,}2 \text{ моль}.$$

С. М. Коршунов

◆

Ф915. *Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε протекает между пластинами изолированного плоского конденсатора со скоростью v. Перпендикулярно скорости $\vec{v}$ и параллельно пластинам направлено магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Определить напряжение на пластинах конденсатора. Расстояние между пластинами d.*



На разноименные заряды движущихся диполей диэлектрика со стороны магнитного поля действуют силы Лоренца, направленные в противоположные стороны (см. рисунок). Это приводит к поляризации диэлектрика, и в результате у верхней и нижней пластин конденсатора в диэлектрике будут существовать равные по абсолютной величине поверхностные заряды противоположных знаков. Эти поляризационные заряды создают электрическое поле.

Пусть напряженность этого поля равна E (на рисунке $\vec{E}$ направлено сверху вниз). Тогда сила, действующая на положительный заряд движущегося диполя, равна

$$F=q(vB-E).$$

Согласно определению диэлектрической проницаемости эта сила должна быть в ε раз меньше той силы F_0, которая действовала бы на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$, в отсутствие диэлектрика. Но в отсутствие диэлектрика $E=0$, и $F_0=qvB$. Так что

$$F=\frac{F_0}{\varepsilon} \Rightarrow q(vB-E)=q\frac{vB}{\varepsilon},$$

откуда находим E:

$$E=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}vB.$$

Таким образом, разность потенциалов между пластинами конденсатора равна

$$U = Ed = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} vBd.$$

Е. А. Ромишевский

◆

Ф916. *В схеме, приведенной на рисунке 1 (Д — идеальный диод), ключ К замыкают на время* τ, *а затем размыкают. В момент размыкания сила тока в катушке индуктивности равна* I_0. *Через сколько времени после размыкания ключа ток* I_L *в катушке достигнет максимального значения, если оно равно* $2I_0$? *Построить график зависимости* I_L *от времени* t $(0 < t < \infty)$.

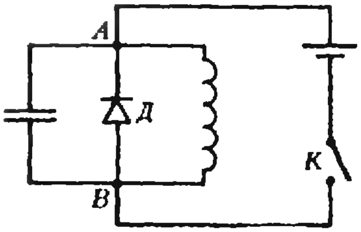


Рис. 1.

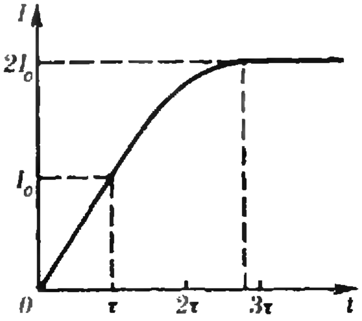


Рис. 2.

После замыкания ключа К за очень короткий промежуток времени напряжение на конденсаторе и на катушке индуктивности станет равным ЭДС источника $\mathscr{E}$ (см. рис. 1: $\mathscr{E} = \varphi_A - \varphi_B$, ток через диод не течет). В течение времени τ на конденсаторе будет сохраняться постоянный заряд $q = C\mathscr{E}$, а ток через катушку будет нарастать по линейному закону:

$$L\frac{di}{dt} = \mathscr{E} \Rightarrow i = \frac{\mathscr{E}}{L}t \quad (0 < t \leqslant \tau).$$

В момент $t = \tau$, согласно условию, $i = I_0$, то есть

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{L}\tau.$$

Если в этот момент разомкнуть ключ К, ток через катушку будет продолжать расти со временем за счет разрядки конденсатора, как это происходит в обычном колебательном контуре, то есть по закону синуса с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Когда ток достигнет максимального значения, напряжение на катушке индуктивности, диоде, конденсаторе станет равным нулю, то есть конденсатор полностью разрядится. На основании закона сохранения энергии имеем: $\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathscr{E}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$.

Учитывая, что $I_{\max} = 2I_0 = \frac{2\mathscr{E}}{L}\tau$, находим $LC = 3\tau^2$.

Значение функции $y = \sin x$ изменяется от 0,5 до 1 при изменении аргумента от $\pi/6$ до $\pi/2$, то есть за $1/6$ часть периода. Поэтому время $\Delta\tau$, за которое сила тока в катушке изменяется от I_0 до $2I_0$, равно $T/6$, то есть

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{3}\tau\sqrt{3} \approx 1{,}8\tau.$$

В момент времени $t = \tau + \Delta\tau \approx 2{,}8\tau$ потенциалы точек A и B сравниваются, сопротивление участка, содержащего диод, в направлении от B к A становится равным нулю. Таким образом, в последующие моменты времени через катушку индуктивности и диод будет течь постоянный ток $I = 2I_0$, заряд конденсатора будет равен нулю.

График зависимости $I(t)$ приведен на рисунке 2.

Необходимо сделать еще одно важное пояснение. В момент времени $t = \tau$ происходит плавный (то есть без скачка производной) переход с линейного участка на часть синусоиды. Это связано с тем, что производной di/dt пропорционально напряжение на катушке индуктивности $U_L = LI'$, которое в каждый момент времени равно напряжению на конденсаторе $U_C = q/C$. А так как заряд на конденсаторе скачком измениться не может, на графике $I(t)$ не может быть изломов.

А. И. Киркинский, Е. А. Ромишевский

Механическая работа и механическая энергия

О. Ю. ОВЧИННИКОВ

§ 1. В механике работа, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на величину $\vec{s}$, равна произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла α между векторами силы и перемещения:

$$A = Fs\cos\alpha.$$

Такое понятие не всегда соответствует обыденному представлению о работе. Например, штангист, удерживающий груз на поднятых руках, или носильщик, несущий тяжелый чемодан, *механической работы* не совершают (объясните — почему?).

Когда действующая на тело сила не постоянна (меняется ее модуль или направление), работу такой силы можно найти следующим образом. Разобьем все перемещение тела на такие малые участки $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$, чтобы на каждом из них силу можно было считать постоянной и равной соответственно $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Затем найдем работу на каждом участке:

$$A_1 = F_1 s_1\cos\alpha_1,$$
$$A_2 = F_2 s_2\cos\alpha_2, \ldots,$$
$$A_n = F_n s_n\cos\alpha_n;$$

а полная работа будет равна сумме работ на отдельных участках:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

В тех случаях, когда известно, как изменяется от точки к точке проекция силы на направление перемещения $F_s = F\cos\alpha$, работу можно найти *графически* (рис. 1). Полная работа на участке BC численно равна площади фигуры $BDEC$.

Задача 1. *Чему равна работа по равномерному подъему однородной гладкой цепочки на гладкий горизонтальный стол? Первоначальное положение цепочки указано на рисунке 2, а; ее длина $l=6$ м; масса $m=3$ кг.*

В начальный момент на цепочку действует сила тяжести mg, и для ее удержания требуется сила

$$F_0 = mg.$$

По мере поднятия цепочки на стол сила, необходимая для поднятия, будет уменьшаться. Обозначим длину части цепочки, уже лежащей на столе, через x (рис. 2, *б*). В этот момент к цепочке надо приложить силу

$$F = mg - \frac{mg}{l}x.$$

Построим график зависимости $F = F(x)$ (рис. 2, *в*). Тогда работа, которую совершит эта сила при равномерном подъеме всей цепочки, будет численно равна площади заштрихованного треугольника:

$$A = \frac{1}{2}mgl = 90 \text{ Дж}.$$

Заметим, что совершенная работа равна работе по подъему центра тяжести цепочки. Поскольку в началь-

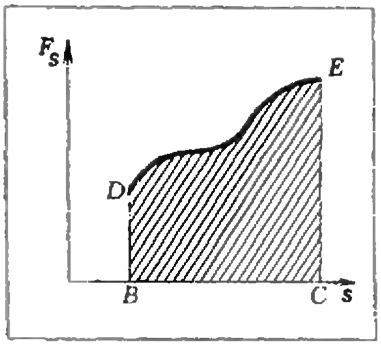


Рис. 1.

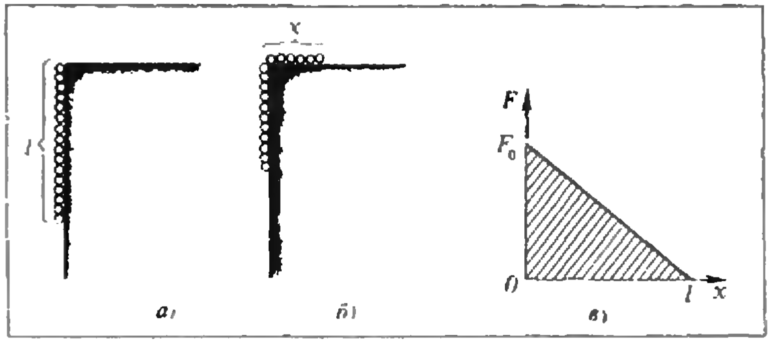


Рис. 2

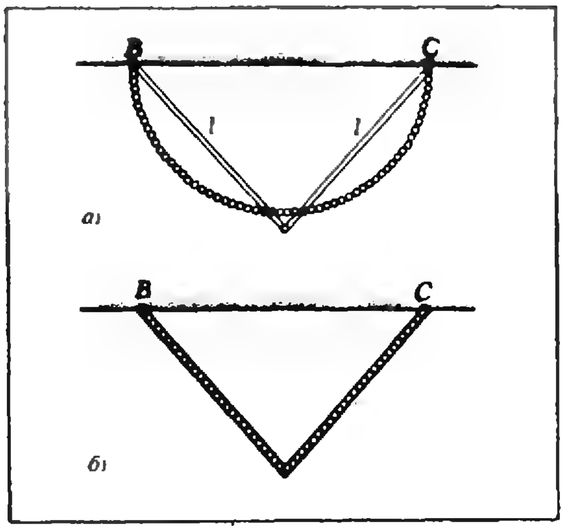


Рис. 3.

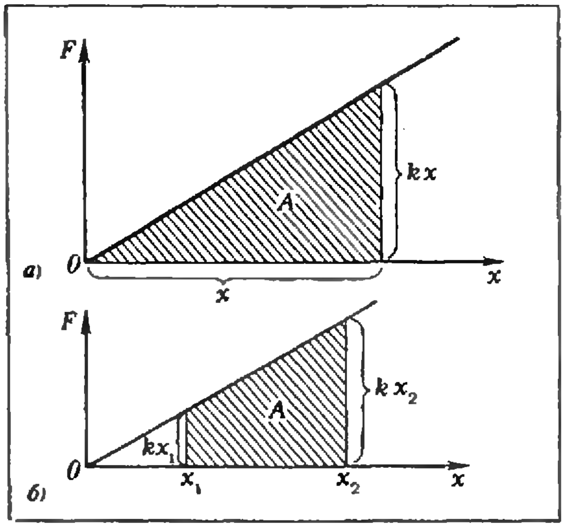


Рис. 4.

ный момент он находится на расстоянии $l/2$ от поверхности стола, потребуется работа $A=mg(l/2)$.

Задача 2. *К точкам B и C, находящимся на одной горизонтали, подвешены однородная цепочка длиной $2l$ и система из двух стержней, соединенных шарниром, каждый из которых имеет длину l (рис. 3, а). Масса цепочки равна массе обоих стержней. Какой из центров тяжести — цепочки или системы стержней — находится ниже?*

Подействуем на цепочку таким образом, чтобы ее положение совпало с положением системы стержней (рис. 3, *б*). Очевидно, что в этом случае центры тяжести цепочки и стержней тоже совпадают. Поскольку для того чтобы перевести цепочку в новое положение потребовалось над ней совершить некоторую работу, можно утверждать, что ее новое положение центра тяжести выше прежнего.

Следовательно, первоначально центр тяжести цепочки находился ниже центра тяжести системы стержней.

Задача 3. *В первом опыте пружину, имеющую жесткость k и длину в недеформированном состоянии l_0, растягивают до длины l. Во втором опыте эту пружину сначала разрезают на две равные части, затем берут одну из них и растягивают ее тоже до длины l. Определите работу, которую надо совершить в первом и во втором опытах.*

Согласно закону Гука, при растяжении пружины на величину x возникает сила упругости $F_{\text{упр}}=-kx$ (знак «минус» говорит о том, что сила упругости стремится вернуть пружину в исходное состояние). Для того чтобы растянуть пружину, к ней надо приложить внешнюю силу $\vec{F}$, равную по модулю силе упругости, но противоположную ей по направлению:

$$F=-F_{\text{упр}}=kx.$$

Построим график зависимости $F=F(x)$ (рис. 4, *а*) и по нему найдем работу, которую должна совершить внешняя сила для растяжения недеформированной пружины на величину x:

$$A=\frac{1}{2}(kx)x=\frac{kx^2}{2}.$$

В случае, когда пружина уже была растянута на величину x_1, а теперь ее надо растянуть до x_2, работа внешней силы будет равна (рис. 4, *б*)

$$A=\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. В первом опыте для растяжения целой пружины с жесткостью k из недеформированного состояния до длины l необходимо совершить работу

$$A_1=\frac{kx_1^2}{2}=\frac{k(l-l_0)^2}{2}.$$

Во втором опыте до той же длины l растягивают лишь половину пружины так, что удлинение $x_2=l-l_0/2$. Кроме того, жесткость половины пружины не такая, как жесткость целой пружины: она в два раза больше (покажите это самостоятельно). Поэтому во втором опыте необходимо совершить работу

$$A_2=\frac{(2k)x_2^2}{2}=\frac{(2k)((l-l_0)/2)^2}{2}=k\left(l-\frac{l_0}{2}\right)^2.$$

§ 2. В механике принято различать кинетическую энергию, обусловленную движением, и потенциальную, определяемую взаимным расположением тел системы или частей одного и того же тела.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, равна

$$E_k=\frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в поле тяжести на высоте h над нулевым уровнем, равна

$$E_p=mgh,$$

а потенциальная энергия упруго деформированного тела равна

$$E_p=\frac{kx^2}{2}.$$

Между понятиями «механическая работа» и «механическая энергия» есть тесная связь. Работа равнодействующей сил, приложенных к системе, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A=E_{k2}-E_{k1}.$$

Работа сил тяжести или упругости, действующих в системе, равна взятому с противоположным знаком изменению потенциальной энергии системы:

$$A=-(E_{p2}-E_{p1}).$$

Задача 4. *На рогатке закреплена длинная (по сравнению с размерами рогатки) резина с жесткостью k. Найдите максимальную скорость камня массой m, выпущенного из рогатки, если предварительно его оттянули на расстояние x (рис. 5).*

Поскольку резина длинная, можно считать, что на камень действуют две параллельные силы упругости резины $\vec{F}$. При оттягивании камня на расстояние x суммарное удлинение пружины будет $2x$, и модуль силы упругости $F=k(2x)=2kx$.

При возвращении в исходное недеформированное состояние резины силы упругости, действующие на камень, совершат работу

$$A=2\frac{(2kx)x}{2}=2kx^2.$$

За счет этой работы камень приобретет кинетическую энергию

$$E_k=\frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом,

$$2kx^2=\frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v=2x\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Задача 5. *Какая работа будет совершена силой $F=30$ Н при подъеме тела массой $m=2$ кг на высоту $h=20$ м?*

Согласно определению, работа приложенной к телу силы равна

$$A=Fh=600 \text{ Дж}.$$

С другой стороны, при подъеме тела на высоту h против силы тяжести mg совершается работа

$$A'=mgh=400 \text{ Дж}.$$

Конечно же, ничего странного в расхождении полученных результатов нет. Дело в том, что A' — это минимальная работа, которую нужно совершить для поднятия тела. За счет этой работы увеличивается его потенциальная энергия в поле тяжести Земли:

$$\Delta E_p=mgh=400 \text{ Дж}.$$

Остальная же часть работы идет на увеличение кинетической энергии тела (тело движется с ускорением, а почему?):

$$\Delta E_k=A-A'=200 \text{ Дж}.$$

Задача 6. *На невесомой конструкции из стержней, соединенных шарнирно, подвешен груз массой m (рис. 6). Чему равно натяжение нити?*

Мысленно уменьшим длину нити на величину x, настолько малую, чтобы изменением силы натяжения нити можно было пренебречь. Тогда груз поднимется на высоту $2x$ (покажите это).

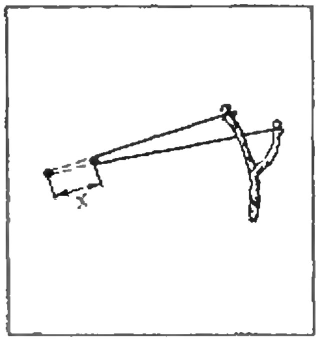


Рис. 5.

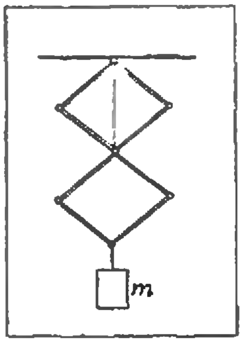


Рис. 6.

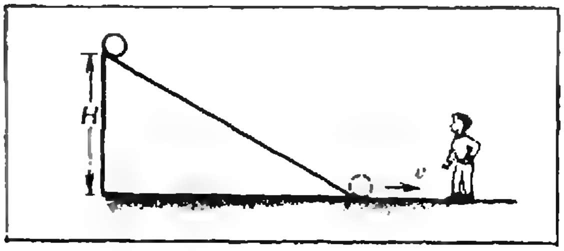


Рис. 7

Работа силы натяжения нити при этом будет равна

$$A = F_{н} x,$$

а потенциальная энергия груза в поле тяжести Земли изменится на

$$\Delta E_p = mg(2x) = 2mgx.$$

Таким образом,

$$F_{н} x = 2mgx,$$

откуда

$$F_{н} = 2mg.$$

§ 3. Энергия принадлежит к тем немногим физическим величинам, для которых выполняются законы сохранения.

В частности, если система тел замкнута и тела взаимодействуют друг с другом только силами тяготения и упругости, то полная механическая энергия системы (то есть сумма кинетической и потенциальной энергий) остается постоянной. Действие же силы трения приводит к тому, что часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию системы. Но и в этом случае сумма всех видов энергии системы сохраняется неизменной.

Задача 7. *Мальчик на коньках разгоняется до скорости v и вкатывается на горку, покрытую льдом. До какой высоты, считая от основания горки, он сможет подняться, если коэффициент трения μ, а угол наклона горки к горизонту α?*

В начальный момент мальчик обладает кинетической энергией $mv^2/2$, а в конечный момент — потенциальной энергией mgh (здесь m — масса мальчика, h — искомая высота подъема). За счет уменьшения полной механической энергии совершается работа против силы трения $F_{тр} = \mu mg \cos \alpha$:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = (\mu mg \cos \alpha) \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Отсюда находим искомую высоту h:

$$h = \frac{v^2}{2g(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)}.$$

Задача 8. *Камень массой m соскальзывает с гладкой горки высотой H. Рассмотрим этот процесс в двух различных инерциальных системах отсчета. С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе потенциальная энергия камня mgH переходит в кинетическую энергию $mv^2/2$, так что после соскальзывания с горки камень имеет скорость v (рис. 7). Наблюдатель, находящийся в системе отсчета, движущейся со скоростью v вправо, скажет, что вначале у камня есть потенциальная энергия mgH и кинетическая энергия $mv^2/2$, а в конце нет ни той ни другой. Куда же «пропала» энергия?**)

Сразу же скажем, что закон сохранения энергии выполняется и в этом случае. Причина сформулированного в условии парадокса в том, что рассуждения проводились для незамкнутой системы — одного камня, а Земля, с которой камень взаимодействует, не учитывалась. Исправим эту ошибку.

а) В неподвижной системе отсчета (связанной с центром масс системы камень — Земля) в начальный момент камень и Земля покоятся, и вся энергия равна потенциальной энергии системы. В конечный момент камень приобретает скорость $\vec{v}$, а Земля — скорость $\vec{u}$, которую можно найти из закона сохранения импульса:

$$mv - Mu = 0,$$

откуда

$$u = \frac{m}{M} v,$$

где M — масса Земли.

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Поскольку масса камня ничтожно мала по сравнению с массой Земли, величиной m/M по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда получим

$$mgH = \frac{mv^2}{2},$$

---

*) Аналогичные вопросы подробно разбираются в статье В. А. Орлова «Парадокс «большого» тела», опубликованной в третьем номере журнала за 1978 год. (*Примеч. ред.*)

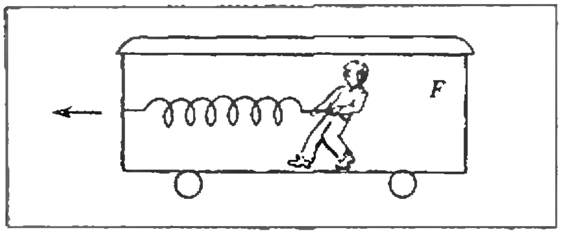


Рис. 8

что целиком соответствует условию задачи.

б) В движущейся системе отсчета в начальный момент общая энергия системы равна $mgH+mv^2/2+Mv^2/2$, а в конечный она равна $Mu^2/2$. Из закона сохранения импульса

$$mv+Mv-Mu=0$$

получаем

$$u=v\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

и

$$\frac{Mu^2}{2}=\frac{Mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\left(2+\frac{m}{M}\right).$$

Тогда из закона сохранения энергии имеем

$$mgH+\frac{mv^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}=$$
$$=\frac{Mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\left(2+\frac{m}{M}\right),$$

или, пренебрегая величиной m/M по сравнению с двойкой,

$$mgH=\frac{mv^2}{2}$$

— тот же самый результат, что и с точки зрения неподвижного наблюдателя!

Упражнения

1. Тело массой $M=990$ г лежит на горизонтальной плоскости. В него попадает пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=100$ м/с, и застревает в нем. Какой путь пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между ним и плоскостью $\mu=0{,}05$?

2. В вагоне равномерно идущего поезда стоит человек, натягивающий пружину с силой $\vec{F}$ (рис. 8). Поезд прошел путь l. Какую работу при этом совершил человек в системе отсчета, связанной с поездом, и в системе отсчета, связанной с Землей?

Школа в «Кванте»

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$$
$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}.$$

2. а) Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 7, такое, что сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 7.

б) Докажите, что среди любых 13 последовательных натуральных чисел найдется число с суммой цифр, делящейся на 7.

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка K лежит на AM, причем $AK/AM=1/3$. Через точку K и вершину B проведена прямая, пересекающая AC в точке L. Найдите площадь треугольника AKL, если $S_{ABC}=S$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3,\\ xy+xz+yz=3. \end{cases}$$

5. Впишите в данный острый угол треугольник наименьшего периметра, одна из вершин которого совпадает с данной точкой A внутри угла, а вершины B и C лежат на сторонах угла.

Девятый класс

6. Докажите, что при целых x, y, z число $x^3+y^3+z^3-3xyz$ делится на $x+y+z$.

7. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN, причем $|AM|=m_1$, $|BM|=m_2$ и $S_{ABC}=2m_1m_2/3$. Найдите $|AB|$.

8. Какое из чисел больше

$$2^{2^{700}} \text{ или } 3^{3^{500}}\ ?$$

9. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба с ребром a.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{(17-x^2)}=(3-\sqrt{x})^2.$$

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\cos^2 4x=2\sin^3 x\cdot\cos 4x.$$

12. Какое из двух чисел больше

а) $1{,}0001^{1{,}0002}$ или $1{,}0002^{1{,}0001}$;

б) e^{π} или π^{e}?

13. Точки M, N, P и Q — середины ребер AB, AD, SC и SD четырехугольной пирамиды $SABCD$ объема V. Найдите объем треугольной пирамиды $MNPQ$, если известно, что $S_{ABD}=S_{BCD}$.

14. Могут ли числа 3, 5 и 7 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

15. Докажите, что если сумма квадратов длин сторон некоторого четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Публикацию подготовил *А. А. Егоров*

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Вариант 1

1. Провод ACB изогнут так, что точки A, C и B образуют правильный треугольник (рис. 1). К серединам сторон AC и BC подключена перемычка EF из провода с вдвое меньшей площадью сечения. К точкам A и B приложено напряжение U. Найдите падение напряжения на перемычке.

2. Два закрепленных цилиндра, площади сечения которых равны S_1 и S_2, соединены трубкой (рис. 2). Цилиндры перекрыты поршнями, жестко соединенными между собой. Объем газа, ограниченный поршнями, вначале был равен V, а давление внутри системы было равно атмосферному давлению снаружи p_0. Затем атмосферное давление изменяется до значения p_1. На какое расстояние сдвинутся поршни? Температура постоянна. Трением пренебречь.

3. Колесо снабжено тормозом BC, который шарнирно закреплен в точке B на той же жесткой раме, что и ось колеса A (рис. 3). Растянутая пружина AC прижимает тормозную колодку C к ободу колеса так, что угол ACB равен α. При вращении колеса по часовой стрелке сила трения, создаваемая колодкой тормоза, равна F_1. Коэффициент трения колодки об обод равен μ. Найдите силу трения при вращении колеса против часовой стрелки.

4. Продолжите мысленно прямую, проходящую вдоль отвеса (висящей вертикально нити с грузиком). Оцените для средних широт, на каком расстоянии от центра Земли пройдет эта прямая.

5. Если в герметичный цилиндр вставить поршень, способный почти без трения скользить по стенкам цилиндра, и прикрепить к нему груз, то поршень сравнительно легко выскальзывает из цилиндра. Если же налить в цилиндр воду, то поршень держится несмотря на значительную массу груза. Объясните явление.

Вариант 2

1. Каким должен быть внешний радиус изгиба световода, сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления n, чтобы при диаметре световода l свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости сечения, распространялся, не выходя наружу через боковую поверхность (рис. 4)?

2. Через трубку переменного сечения продувают воздух (рис. 5). Входное отверстие имеет площадь S, выходное — S_1. На входе скорость воздуха постоянна и равна v, темпе-

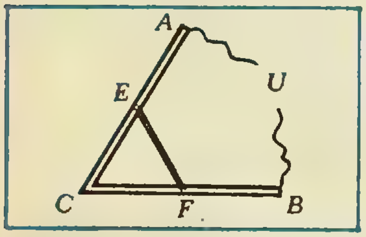


Рис. 1.

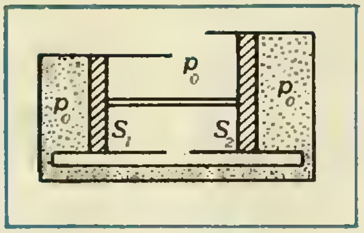


Рис. 2.

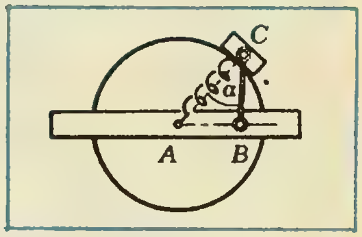


Рис. 3.

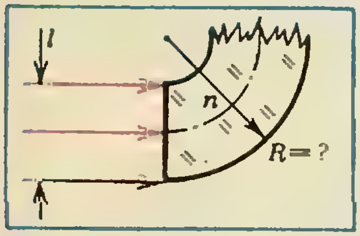


Рис. 4.

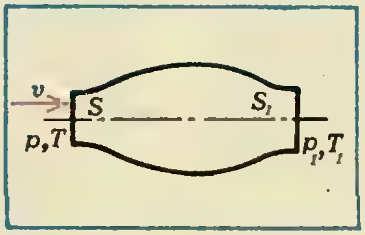


Рис. 5.

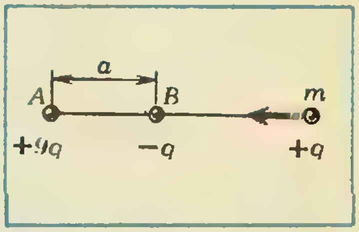


Рис. 6.

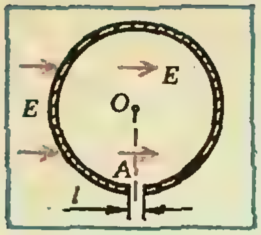


Рис. 7.

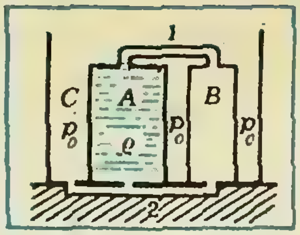


Рис. 8.

ратура T, давление p. На выходе температура T_1, давление p_1. Найдите скорость воздуха в выходном сечении.

3. В точках A и B (рис. 6) на расстоянии $|AB|=a$ закреплены заряды $+9q$ и $-q$. Вдоль прямой AB к ним движется частица массой m, имеющая заряд $+q$. Какую наименьшую скорость должна была иметь эта частица на очень большом расстоянии, чтобы она смогла достигнуть точки B?

4. Оцените, при какой минимальной скорости ветра он может опрокинуть автобус.

5. Два одинаковых сосуда нагреваются до одной и той же температуры. При этом один сосуд ополаскивается горячей водой, а другой остается сухим. Затем оба сосуда ставятся на холодную воду, оба горлышком вниз. После их остывания уровни воды, втянутой в сосуды, заметно различаются. Объясните явление.

Вариант 3

1. Из одной точки вылетают одновременно две частицы с горизонтальными, противоположно направленными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Через какой интервал времени угол между направлениями скоростей этих частиц станет равным 90°? Ускорение свободного падения равно g.

2. Жесткое тонкое непроводящее кольцо массой M, равномерно заряженное зарядом $+Q$, имеет в районе точки A небольшой зазор размера l, много меньшего, чем радиус кольца (рис. 7). Кольцо расположено в горизонтальной плоскости так, что может только свободно вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через центр кольца O. Покоившееся вначале кольцо пришло в движение после того, как было включено постоянное горизонтальное однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярное OA. Найдите максимальную величину скорости кольца.

3. Вертикально стоящие закрытые цилиндры A и B имеют одинаковую высоту H и площади дна S и $S/2$ соответственно. Они закреплены на дне широкого открытого цилиндра C с площадью дна $3S$ (рис. 8). В верхней части цилиндры A и B соединены трубкой *1*, а в нижней — через небольшие отверстия в дне все три цилиндра связаны друг с другом общим узким каналом *2*. Первоначально цилиндр A доверху наполнен водой, а отверстие в дне этого цилиндра закрыто. Найдите высоту уровня воды, установившегося в цилиндре C после открывания отверстия в цилиндре A. Атмосферное давление p_0, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g. Температура постоянна. Объемом трубки, канала и стенок сосудов пренебречь.

4. Оцените изменение объема футбольного мяча при сильном ударе.

5. Когда между лампочкой и линзой помещена прозрачная с плоскими стенками кювета с водой, на экране видно резкое изображение спирали лампочки. Если же кювету убрать, изображение становится размытым. Объясните явление.

Публикацию подготовил
Г. В. Меледин

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Теплоход прошел 6 км вверх против течения реки и затем прошел еще 27 км вниз по течению, затратив на все 1 час. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость реки 6 км/ч.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x+\cos x+\cos 3x=0.$$

3. Решите уравнение

$$3^x=3+2(\sqrt{3})^x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x-3)}{x-5}<0.$$

5. В конус с радиусом основания R и осевым сечением, являющимся правильным треугольником, вписана правильная треугольная призма так, что одна ее боковая грань лежит в плоскости основания конуса, а две остальные вершины лежат на его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если ее высота равна ${}^2/_3R$.

Вариант 2

1. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 28, а сумма второго и третьего членов равна 12. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение

$$9^{\cos\frac{x}{3}}-2\cdot 3^{\cos\frac{x}{3}}=3.$$

3. Решите уравнение

$$x\sqrt[3]{x^2}+16=8\sqrt[6]{x^5}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{5x+4}{x-2}>\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi.$$

5. В куб с ребром длиной a вписана правильная шестиугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите объем призмы, если сторона ее основания в 3 раза меньше ребра куба.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m=0{,}1$ кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной $l=1$ м. Ось вращения расположена над полом на высоте $H=2$ м. При прохождении нижнего по-

ложения нить обрывается, и тело падает на пол на расстоянии $L=4$ м (по горизонтали) от точки обрыва. Определите силу натяжения нити в момент ее обрыва. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. Два шара, имеющие одинаковый диаметр, связаны нитью и опускаются медленно и вертикально один над другим с постоянной скоростью в жидкости. Определите силу натяжения нити, если массы шаров $m_1=2$ кг и $m_2=1,6$ кг. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Силой сопротивления жидкости пренебречь.

3. Воздух при температуре $t_1=20$ °С имеет относительную влажность $\varphi=70$ %. Сколько водяного пара сконденсируется из $V=10$ м^3 воздуха, если температура воздуха понизится до $t_2=10$ °С? Давление насыщенного пара при температуре t_1 равно $p_{н1}=2,3\cdot10^3$ Па, а при t_2 — $p_{н2}=1,2\cdot10^3$ Па. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль·К).

4. Колба с холодной водой, начальная температура которой $t=5$ °С, закипает на плите через время τ_1, а через $\tau_2=10$ мин с начала нагревания вода полностью испаряется. Определите время τ_1. Удельная теплоемкость воды $c=4,2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2,3\cdot10^6$ Дж/кг.

5. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным (рис. 1). Напряженность результирующего электрического поля справа от пластины $E_1=3\cdot10^4$ В/м, а слева $E_2=5\cdot10^4$ В/м. Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, $F=0,7$ Н.

6. Шарик массой $m=2$ г, имеющий положительный заряд q, начинает скользить без начальной скорости из точки A по сферической поверхности радиуса $R=10$ см (рис. 2). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в начальный момент равна $W_A=-2\cdot10^{-3}$ Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд q находится в точке B, если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарику, равна $F=0,1$ Н. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

7. Атом неона ионизируется при столкновении с электроном, если энергия последнего равна $W=21,6$ эВ (энергия ионизации). Длина свободного пробега электрона в неоновой лампе между двумя последовательными соударениями равна $l=1$ мм. Расстояние между плоскими электродами лампы $d=1$ см. Определите напряжение, при котором зажигается неоновая лампа (будет происходить процесс ионизации). Считать, что при ударе электрон полностью передает энергию атому неона. Заряд электрона $e=1,6\cdot10^{-19}$ Кл, 1 эВ$=1,6\cdot10^{-19}$ Дж.

8. Катушка, имеющая $N=100$ витков, расположена в однородном магнитном поле с индукцией $B=10^{-2}$ Тл. Плоскости ее витков перпендикулярны линиям магнитной индукции, площадь одного витка $S=10$ см^2. Катушка присоединена к баллистическому гальванометру так, что сопротивление всей цепи $R=10$ Ом. При повороте катушки на угол α через гальванометр проходит заряд $q=5\cdot10^{-5}$ Кл. Определите угол α.

9. Пропеллер, имеющий лопасти длиной $l=5$ см, вращается с частотой $n=0,1$ с$^{-1}$ перпендикулярно плоскости зеркала, которое движется с поступательной скоростью $u=0,01$ м/с (рис. 3). На концы лопастей пропеллера нанесены точки A и B. Определите скорости изображений точек A и B в зеркале в тот момент, когда пропеллер проходит вертикальное положение.

10. При взаимодействии ядра изотопа лития $^7_3$Li и протона образуются две одинаковые частицы и выделяется энергия $E_0=17,3$ МэВ. Определите частицу и энергию, которая выделится, если с протонами прореагируют ядра, содержащиеся в $m=1$ г изотопа лития. Число Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$, 1 эВ$=1,6\cdot10^{-19}$ Дж.

Публикацию подготовили
И. А. Гладков, В. Ф. Панов

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Каждый вариант состоял из трех задач, содержавших в общей сложности 10 пунктов. Каждый пункт оценивался самостоятельно. Основу всех вариантов составляло исследование функций.

Вариант 1

1. Даны функции: $f(x)=x^3-x$ и $g(x)=x^3+x$.

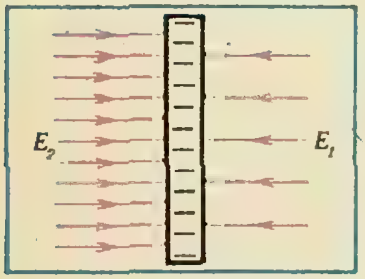


Рис. 1.

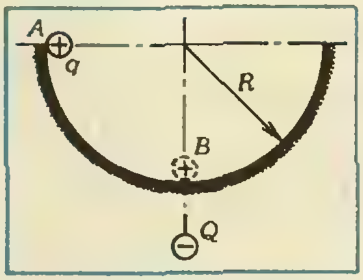


Рис. 2.

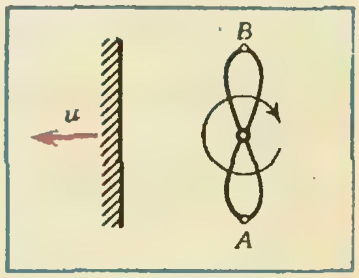


Рис. 3.

а) Решите уравнение

$$2f(x)+g(x)=0.$$

б) При каких x функция $y=f(x)\,g(x)$ принимает наименьшее значение?

в) Решите неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$.

г) При каких значениях a уравнение $f(x)=ag(x)$ имеет ровно три корня?

2. В равнобедреном треугольнике ABC углы B и C при основании равны α, длина отрезка BC равна 1, точка D на прямой AC такова, что $|BC|=|BD|$, $D\neq C$.

а) Найдите $L(\alpha)$, где $L(\alpha)=|AB|+|CD|$.

б) При каком α величина $L(\alpha)$ принимает наименьшее значение?

в) Решите уравнение $L(\alpha)=3\sqrt{2}/2$.

3. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+5}{3-x}$.

а) Найдите область определения функции $y=f(x)$.

б) Решите уравнение $f(x)=-1$.

в) Найдите область значений функции $y=f(x)$.

Вариант 2

1. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\ln\left(2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

а) Найдите область определения данной функции.

б) Выразите x как функцию от y.

в) Найдите область значений функции $y=f(x)$.

г) Решите неравенство $f(x)>0$.

2. Общее сопротивление некоторой электрической цепи, содержащей постоянное сопротивление $R>0$ и переменное сопротивление $r\geqslant 0$, равно $S(r)=\dfrac{4R^2+3Rr}{3R+2r}$.

а) Чему равно r, если $S(r)=\dfrac{15}{11}R$?

б) Исследуйте функцию $S(r)$ на монотонность.

в) Какие значения может принимать $S(r)$?

3. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+3\sin^2 x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=-\dfrac{2}{13}$.

б) Каков наименьший период данной функции?

в) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

Устный экзамен

1. Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha>0$.

2. Решите неравенство $\dfrac{5x-3}{4-x}<2$.

3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_2(x^2-1)}$.

4. Постройте график функции $y=\cos x+|\cos x|$.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$.

6. Что больше: $\sin 1$ или $\cos 1$?

7. Найдите функцию, обратную к функции $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

8. Изобразите на координатной плоскости множество, задаваемое уравнением $x|y|=y|x|$.

9. Решите уравнение $x^3+x^2=a$, зная, что его три корня образуют арифметическую прогрессию.

10. Найдите наименьшее значение функции $y=|\cos x|+|\cos 2x|$.

11. Докажите неравенство $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leqslant 1$.

12. Вершины A и C прямоугольника $ABCD$ лежат на различных ветвях гиперболы $y=-\dfrac{1}{x}$. Стороны прямоугольника параллельны осям координат. Какие значения может принимать его площадь S?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два теплохода движутся с одинаковыми скоростями по направлению к точке O, причем их траектории пересекаются в этой точке под углом $\alpha=60°$. Определите минимальное расстояние между теплоходами во время движения, если первоначально они находились от точки O на расстояниях $l_1=20$ км и $l_2=30$ км соответственно.

2. Тело массой m соскальзывает под действием силы тяжести с высоты h по поверхности произвольного профиля и вследствие трения останавливается. Какую работу надо совершить, чтобы втащить тело обратно?

3. Однородное тело плавает на поверхности керосина, причем объем выступающей над поверхностью части составляет $\alpha=8\,\%$ всего объема тела. Какая часть тела будет погружена при плавании в воде, если плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3, плотность керосина $\rho_к=0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3?

4. Объем V некоторой массы идеального газа изменяется с увеличением температуры по закону $V=aT^n$, где a и n — постоянные коэффициенты, причем $n<1$. Как при этом изменяется давление: увеличивается или уменьшается?

5. Как зависит радиус пузырька, всплывающего со дна водоема, от расстояния h до поверхности воды?

6. До какого максимального потенциала можно зарядить уединенное проводящее тело, направив на него пучок электронов, летящих со скоростью v? Массу m и заряд e электрона считать известными.

7. Две электрические лампочки номинальной мощностью $P_1=40$ Вт и $P_2=100$ Вт включены в сеть последовательно. На какой лампочке при этом выделяется большее количество теплоты и во сколько раз?

8. Точечный заряд влетает со скоростью $v=100$ м/с в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ ($E=10^3$ В/м) перпендикулярно его силовым линиям. Каким (по модулю и направлению) постоянным магнитным полем можно компенсировать действие электрического поля на данный заряд так, чтобы он двигался прямолинейно?

9. Луч падает на плоскую стеклянную пластину под углом α. Определите смещение луча внутри пластины, если показатель преломления стекла n, а толщина пластины h.

10. Точечный источник света находится на расстоянии $l=0{,}95$ м от экрана. На каком расстоянии от источника следует поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=0{,}16$ м и диаметром оправы $D_1=0{,}1$ м, чтобы получить на экране ярко освещенный кружок диаметром $D_2=0{,}025$ м?

Публикацию подготовили
С. Г. Федин, С. В. Фомин

Московский архитектурный институт

Математика

Устный экзамен

1. Упростите выражение

а) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

при $x=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ и $b>a>0$.

2. Вычислите без таблиц

а) $\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 60°\cdot\sin 80°$;

б) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$;

в) $\lg\operatorname{tg} 3°\cdot\lg\operatorname{tg} 6°\cdot\lg\operatorname{tg} 9°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 87°$.

3. Докажите тождество

а) $32\sin^6\alpha=10-15\cos 2\alpha+6\cos 4\alpha-\cos 6\alpha$;

б) $\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60°-\alpha)$;

в) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta+\cos^2(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\times$ $\times\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

4. Решите уравнение

а) $4^{-\frac{1}{x}}-6^{-\frac{1}{x}}=2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

б) $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$;

в) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+$ $+\cos 3x$.

5. Решите неравенство

а) $\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$;

б) $\log_{1+x}(2-x)<1$;

в) $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$.

6. Постройте график

а) $|x|+|y|=2$;

б) $y=|x^2+x|-x^2$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Поезд, масса которого $m=4\cdot10^6$ кг, движется со скоростью $v=10$ м/с. Перед остановкой поезд начинает тормозить. Сила торможения $F=2\cdot10^5$ Н. Какое расстояние пройдет поезд за $t=1$ мин после начала торможения?

2. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены нитью, перекинутой через неподвижный блок. Определите силу натяжения нити при движении грузов. Массой блока и трением в оси пренебречь.

3. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $\Delta l=20$ см, если известно, что сила упругости пружины пропорциональна величине деформации и под действием силы $F_0=30$ Н пружина сжимается на $\Delta l_0=1$ см.

4. Шар массой m подвешен на нити длиной l. Нить отклоняют на угол $\alpha=90°$ от вертикали и отпускают. Определите силу максимального натяжения нити.

5. Небольшое тело массой m соскальзывает без трения с вершины полушара радиусом R. На какой высоте тело оторвется от поверхности полушара?

6. Груз массой $m=2$ кг, падающий с высоты $h=5$ м, проникает в мягкий грунт на глубину $l=5$ см. Определите среднюю силу сопротивления грунта.

7. Брусок скользит сначала по наклонной плоскости длиной $l=50$ см и высотой $h=10$ см, а потом по горизонтальной поверхности (переход плавный), после чего останавливается. Определите коэффициент трения, считая его везде одинаковым, если по горизонтальной поверхности брусок проходит до остановки расстояние $s=1{,}5$ м.

8. Два куска льда массой $m=200$ г каждый при температуре $T=273$ К трутся друг о друга в вакууме с помощью мотора, развивающего мощность $N=10$ Вт. Через какое время лед растает? Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

9. Пылинка массой $m=10^{-8}$ г «висит» между пластинами горизонтального плоского воздушного конденсатора, к которому приложено напряжение $U=5$ кВ. Расстояние между пластинами $d=5$ см. Каков заряд пылинки?

10. Два заряда $q_1=4\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=2{,}5\cdot10^{-8}$ Кл находятся в воздухе на расстоянии $r_1=1$ м друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2=0{,}2$ м?

Публикацию подготовили
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов, В. А. Смирнов

Советуем купить

В 1986 году в научно-популярной серии для школьников «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» будут изданы следующие книги:

1. Л. А. Ашкинази. Вакуум для науки и техники.
2. К. Ю. Богданов. Физик в гостях у биолога
3. И. Д. Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора.
4. Занимательно о физике и математике.
5. В. М. Липунов. В мире двойных звезд.
6. Х. Рачлис. Физика в ванне.
7. А. А. Силин. Трение и мы.
8. В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах.
9. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии (планиметрия). Издание 2-е, переработанное и дополненное.

Заказы на эти книги принимают все книжные магазины.

Механическая работа и механическая энергия

1. $l=\dfrac{m^2v^2}{2\mu g(m+M)^2}=1$ м.

2. В обеих системвх отсчета $A=0$.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Физика

Вариант 1

1. $U_x=U/3$.

2. Поршни сдвинутся вправо на расстояние $x=(1-p_0/p_1)V/(S_2-S_1)$ при $p_1>p_0$.

3. Пусть $|BC|=l$, сила натяжения пружины T, сила реакции опоры N, сила трения F (рис. 1). Колодка не вращается, если сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку B, равна нулю. При вращении колеса по часовой стрелке:

$$N_1 l\sin\alpha-Tl\sin\alpha+\mu N_1 l\cos\alpha=0,$$

откуда

$$F_1=\mu N_1=\mu T\sin\alpha/(\sin\alpha+\mu\cos\alpha).$$

При вращении колеса против часовой стрелки:

$$N_2 l\sin\alpha-Tl\sin\alpha-\mu N_2 l\cos\alpha=0,$$

откуда

$$F_2=\mu N_2=\mu T\sin\alpha/(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

В итоге имеем $F_2=F_1\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\mu}{\operatorname{tg}\alpha-\mu}$ при $\mu<\operatorname{tg}\alpha$.

При $\mu\geqslant\operatorname{tg}\alpha$ вращение колеса против часовой стрелки невозможно.

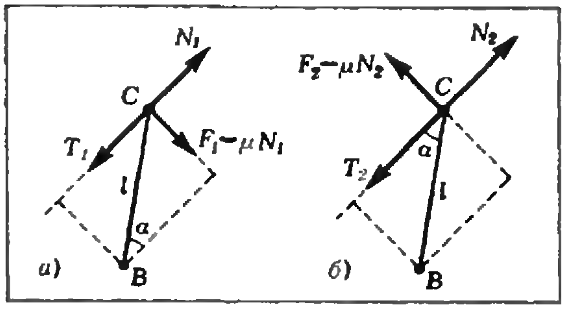


Рис. 1.

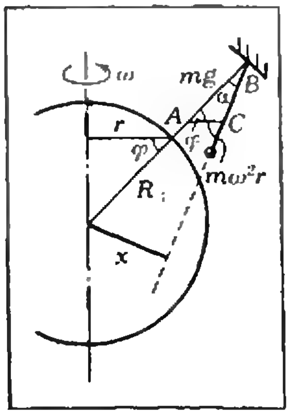


Рис. 2.

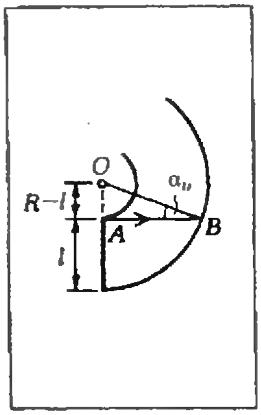


Рис. 3.

4. В треугольнике ABC (рис. 2) $|AB|=mg$, $|AC|=m\omega^2r$ (ω — угловая скорость вращения Земли, $r=R_з\cos\varphi$, где φ — широта данного места), $\widehat{ABC}=\alpha$ — малый угол отклонения отвеса от направления к центру Земли. По теореме синусов имеем

$$\frac{m\omega^2r}{mg}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-(\varphi+\alpha))}\approx\frac{\alpha}{\sin\varphi}.$$

Отсюда

$$\alpha\sim R_з\omega^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi/g=\omega^2R_з\sin 2\varphi/(2g),$$

и

$$x\sim R_з\sin\alpha\sim R_з\alpha\sim\frac{\omega^2R_з^2\sin 2\varphi}{2g}=$$

$$=\left(\frac{2\pi R_з}{T}\right)^2\frac{\sin 2\varphi}{2g}.$$

При $R_з=6{,}4\cdot10^6$ м, $\varphi=45°$, $T=8{,}6\cdot10^4$ с и $g=10$ м/с^2 получаем

$$x\sim10 \text{ км}.$$

5. При движении поршня воздух сравнительно легко меняет свой объем и плотность, а вода — нет.

Вариант 2

1. Луч AB (рис. 3) образует наибольший угол падения α_0 на внешнюю поверхность. Свет не выйдет наружу, если угол α_0 — угол полного отражения, то есть если $\sin\alpha_0=1/n$. Из треугольника OAB имеем

$$\sin\alpha_0=(R-l)/R,$$

откуда

$$R=l\frac{n}{n-1}.$$

2. См. решение задачи Ф920 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

3. Отталкивание зарядов сменяется притяжением на некотором расстоянии x от точки B, когда сила, действующая на двигающуюся частицу, обращается в нуль:

$$9q^2/(x+a)^2=q^2/x^2,$$

откуда однозначно следует, что $x_1=a/2$. Чтобы дойти до точки B, нужна энергия

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{9q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_1+a)}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0x_1}=\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0a},$$

откуда

$$v=\sqrt{\frac{8q^2}{4\pi\varepsilon_0ma}}.$$

4. Введем размеры автобуса: высоту $2b$, ширину $2a$, длину l. Если плотность воздуха ρ, а скорость ветра v, то давление ветра создает силу, действующую на боковую поверхность автобуса, $F\sim2bl\rho v^2$. Рассмотрим моменты сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точки соприкосновения переднего и заднего колес с дорогой: $Fb\sim mga$, где m — масса автобуса. Отсюда

$$v\sim\sqrt{\frac{mga}{2\rho lb^2}}.$$

При $m\sim10^4$ кг, $a\sim b\sim1$ м, $l\sim8$ м и $\rho\sim1{,}3$ кг/м^3

$$v\sim70 \text{ м/с}.$$

5. В отличие от сухого сосуда в мокром вначале внешнее давление компенсируется как давлением воздуха, так и давлением паров воды. При охлаждении пары конденсируются.

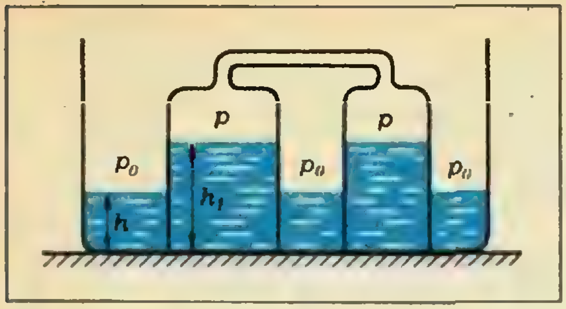


Рис. 4.

Это приводит к тому, что уровень воды в мокром сосуде оказывается выше, чем в сухом.

Вариант 3

1. $t=\sqrt{v_1v_2/g}$.

2. Очевидно, что сплошное равномерно заряженное кольцо в однородном электрическом поле вращаться не будет. Заменим мысленно кольцо с зазором на сплошное, где на месте зазора находится еще и отрицательный заряд $-q$ той же линейной плотности, что и положительный на сплошном кольце:

$$-q=-\frac{Q}{2\pi R}l \qquad (R \text{ — радиус кольца}).$$

Скорость будет максимальной в положении равновесия, когда заряд $-q$ (или зазор, что эквивалентно) опишет дугу $R\pi/2$. При этом изменение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta E_p=qER=QlE/(2\pi).$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{Mv^2}{2}=\frac{QlE}{2\pi},$$

откуда

$$v=\sqrt{\frac{QlE}{\pi M}}.$$

3. Запишем условие равновесия воды (рис. 4):

$$p_0+\rho gh=p+\rho gh_1.$$

Сохранение объема воды приводит к условию:

$$\frac{3}{2}h+\frac{3}{2}h_1=H.$$

По закону Бойля—Мариотта имеем

$$\frac{p_0HS}{2}=\frac{p(H-h_1)S}{2}+p(H-h_1)S.$$

Отсюда получаем

$$h=\frac{p_0}{4\rho g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{4\rho gH}{3p_0}\right)^2}-1\right).$$

4. Согласно закону сохранения энергии, $mv^2/2\sim p\Delta V$ (изменением давления в мяче при ударе пренебрегаем). Скорость v оценим по расстоянию, на которое отлетит после удара мяч: $l\sim v^2/g$. Тогда $mv^2/2\sim mgl/2\sim p\Delta V$, откуда

$$\Delta V\sim mgl/(2p).$$

Полагая $m=0{,}4$ кг, $l=30$ м, разницу давлений внутри мяча и снаружи $p=0{,}5\cdot10^5$ Па, получаем

$$\Delta V\sim10^{-3}\ \text{м}^3=1\ \text{л}.$$

5. Наличие преломляющей толстой пластины-кюветы эквивалентно смещению источника света на некоторое расстояние. Когда кювету убирают, это приводит к расфокусировке изображения, так как резкое изображение спирали должно теперь получаться при другом положении экрана.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 30 км/ч. 2. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $(k,\ n\in Z)$. 3. $\{2\}$. 4. $]3;4[\ \cup\ ]5,+\infty[$.
5. $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$ *).

Вариант 2

1. $b_1=1$, $q=3$ или $b_1=27$, $q=\frac{1}{3}$. 2. $x=6\pi k$ $(k\in Z)$. 3. $\{4\sqrt[5]{4}\}$. 4. $\left]-\frac{10}{9};-\frac{4}{5}\right[$.

5. $a^3(3-\sqrt{2})/6$. **Указание.** Высота призмы составляет часть диагонали куба. Поэтому, чтобы найти эту высоту, нужно определить расстояния от концов диагонали до оснований призмы. Плоскости оснований призмы отсекают от куба правильные треугольные пирамиды, причем основания призмы вписаны в основания этих пирамид. Поэтому достаточно найти их высоты.

Физика

1. $T=mg\left(1+\frac{l^2}{2l(H-l)}\right)=9$ Н.
2. $T=(m_1-m_2)g/2=2$ Н.
3. $\Delta m=\frac{MV}{R}\left(\frac{p_{н1}}{T_1}\frac{\eta}{100\%}-\frac{p_{н2}}{T_2}\right)\approx0{,}027$ кг (здесь $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).
4. $\tau_1=\tau_2\frac{c(t_к-t)}{c(t_к-t)+r}\approx1{,}5$ мин (здесь $t_к=100$ °C — температура кипения воды).
5. $q=\frac{2F}{E_2-E_1}=7\cdot10^{-6}$ Кл.
6. $W_B=W_A+0{,}5(3mg-F)R=-4\cdot10^{-3}$ Дж.
7. $U>Wd/(el)=216$ В.
8. $\alpha=\arccos\left(1-\frac{qR}{BSN}\right)=60^\circ$.
9. $v_{B'}=2\pi nl+2u\approx0{,}05$ м/с; $v_{A'}=2\pi nl-2u\approx0{,}01$ м/с.
10. $E=E_0mN_A/M\approx2{,}4\cdot10^{11}$ Дж (здесь $M=7\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса данного изотопа лития).

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. а) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right\}$; в) $]-\infty;-1]\ \cup\ [1;+\infty[$; г) $a\in\ ]-1;1[$. **Указание.** При любом a уравнение имеет корень $x=0$. При $x\neq0$; $a\neq1$ уравнение принимает вид $x^2=(1+a)/(1-a)$.

---

*) Этот ответ соответствует случаю, когда центры боковой грани призмы и основания конуса совпадают. (*Примеч. ред.*)

2. а) $L(\alpha)=\frac{1}{2\cos\alpha}+2\cos\alpha$; б) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; в) $\left\{\frac{\pi}{4};\ \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

3. а) $]-5;\ 3[$; б) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; в) R.

Вариант 2

1. а) $]-\infty;0[\ \cup\ ]1;\infty[$; б) $x=\frac{2}{2-e^{y}}$; в) $]-\infty;\ \ln 2[\cup]\ln 2;\ +\infty[$. **Указание.** Область значений функций совпадает с областью определения обратной функции.
г) $]-\infty;\ 0[\cup]2;\ \infty[$.

2. а) $\frac{R}{3}$; б) Функция $S(r)$ возрастает; в) $\left]\frac{4}{3}R;\ \frac{3}{2}R\right[$.

3. а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k\in Z)$. **Указание.** Выполните замену $t=\cos 2x$.

б) π. **Указание.** Поскольку $f(x)=\frac{2\cos 2x}{5-3\cos 2x}=g(\cos 2x)$, где $g(t)=\frac{2t}{5-3t}$ и функция $g(t)$ возрастает при $t\in[-1;\ 1]$, равенство $f(x_1)=f(x_2)$ (или, что то же самое, $g(\cos 2x_1)=g(\cos 2x_2)$) означает, что $\cos 2x_1=\cos 2x_2$. Поэтому период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 2x$.

в) $y_{\min}=-\frac{1}{4}$, $y_{\max}=1$. **Указание.** Воспользуйтесь монотонностью функции $g(t)$.

Устный экзамен

1. $\frac{120}{119}$. 2. $]-\infty;\ \frac{11}{7}[\ \cup\ ]4,\ \infty[$. 3. $]-\infty,\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\ +\infty[$. 4. См. рис. 5.

5. $x=\pi n$ $(n\in Z)$. 6. $\sin 1>\cos 1$. **Указание.** $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$. 7. $x=\frac{2y+1}{y-2}$, то есть данная функция совпадает со своей обратной.
8. См. рис. 6.

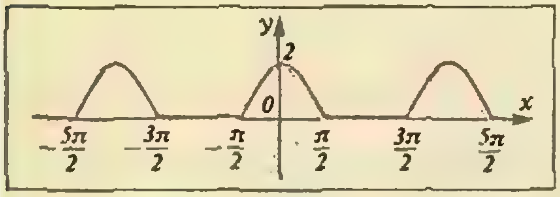


Рис. 5.

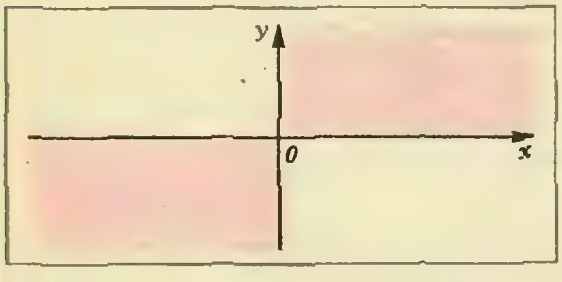


Рис. 6.

9. $\left\{-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. **Указание.** Пусть x_1, x_1-h, x_1+h — корни данного уравнения. Это значит, что $x_1^3+x_1^2=a$, $(x_1-h)^3+(x_1-h)^2=a$, $(x_1+h)^3+(x_1+h)^2=a$. Осталось решить полученную систему уравнений.

10. $y_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Указание.** Пусть $t=|\cos x|$. Тогда $y=t+|2t^2-1|$, $t\in[0;\ 1]$.
11. Воспользуйтесь неравенством $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.
12. S может принимать любые значения из промежутка $[4,\ \infty[$. **Указание.** Если $A\left(x_1,\ \frac{1}{x_1}\right)$, $C\left(-x_2,\ -\frac{1}{x_2}\right)$, $x_1>0$, $x_2>0$, то $S=(x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2+t+\frac{1}{t}$, где $t=\frac{x_1}{x_2}$, причем наименьшее значение выражения $2+t+\frac{1}{t}$ при $t>0$ равно 4.

Физика

1. $l_{\min}=5\sqrt{3}$ км $\approx 8{,}7$ км. **Указание.** Расстояние между теплоходами будет минимальным через время $t=(l_1+l_2)/v$ (где v — скорость теплоходов после начала движения).
2. $A=2mgh$.
3. $\beta=(1-\alpha)\rho_к/\rho_в\approx 74\ \%$.
4. Давление увеличивается.
5. $r=ah^{-1/3}$, где a — постоянный коэффициент (температура воды в водоеме не меняется).
6. $\varphi=mv^2/(2e)$, причем $\varphi<0$.
7. $P_1'/P_2'=P_2/P_1=2{,}5$.
8. $B=E/v=10$ Тл, при этом вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен векторам $\vec{E}$ и $\vec{v}$.

9. $x=h\sin\alpha\cdot\left(1-\frac{\cos\alpha}{(n^2-\sin^2\alpha)^{1/2}}\right)$.

10. Линзу следует поместить на расстояниях $d_1\approx 0{,}8$ м, $d_2\approx 0{,}19$ м, $d_3\approx 0{,}69$ м и $d_4\approx 0{,}22$ м от *источника.*

Московский архитектурный институт

Математика

1. а) $2\cos\alpha$; б) b/a.
2. а) $3/16$; б) $1/4$; в) 0.
4. а) $\left\{\log_2\frac{3}{2}\right\}$; б) $\{2^{2\log_{1,5}3}\}$; в) $x_1=\frac{\pi}{8}\times(4k+1)$; $x_2=\frac{2\pi}{3}(3l\pm 1)$ $(k,\ l\neq 0)$.

5. а) $]-1;\ 1[$; б) $]-1;\ 0[\cup\left]\frac{1}{2};\ 2\right[$; в) $]0;\ +\infty[$.
6. а) см. рис. 7. б) см. рис. 8.
7. $\{(4;\ 10);\ (10;\ 4)\}$.

Физика
1. $l=vt-Ft^2/(2m)\approx 510$ м.
2. $T=\frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$.
3. $A=F_0\Delta l^2/(2\Delta l_0)=60$ Дж.
4. $T_{\max}=3mg$.
5. $H=2/3R$.

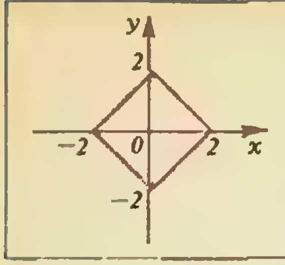


Рис. 7.

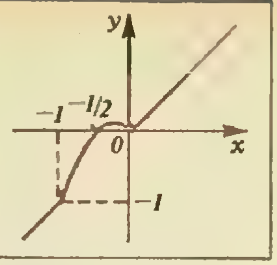


Рис. 8.

6. $F=mg(h+l)/l\approx 2$ кН.

7. $\mu=\dfrac{h}{\sqrt{l^2-h^2+s}}\approx 0{,}05$.

8. $t=2m\lambda/N\approx 3{,}7$ ч.

9. $q=mgd/U\approx 10^{-15}$ Кл.

10. $A=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=3{,}6\cdot 10^{-5}$ Дж.

Диофантово уравнение А. А. Маркова

(см. «Квант» № 4)

1. **Доказательство.** Пусть, например, $b=a$. Тогда $a^2+2b^2=3b^2a$; $a^2=b^2(3a-2)$. Следовательно, b^2 — делитель a^2, а значит, b — делитель a, то есть $a=bd$, где d — натуральное число. Но тогда в силу первого равенства: $d^2+2=3bd$, $2=(3b-d)d$, так что d делит 2, откуда $d=1$ или $d=2$. В обоих случаях $b=1$ и, так как $c=b=1$, мы для a получаем уравнение $a^2+2=3a$, откуда $a=1$, 2, то есть получены сингулярные решения.

2. **Доказательство.** Мы можем считать, что $a>b>c$. Воспользуемся многочленом

$$\Phi_a(x)=x^3-3bcx+b^2+c^2,$$

который имеет своими корнями a и a'. Так как

$$(b-a)(b-a')=\Phi_a(b)=$$
$$=2b^2+c^2-3b^2c<3b^2-3b^2c\leqslant 0,$$

число b лежит между a и a' и, следовательно, $a>a'$. Поэтому максимальная координата решения (a', b, c) меньше максимальной координаты решения (a, b, c). Аналогично, используя многочлен

$$\Phi_b(x)=x^2-3acx+a^2+c^2,$$

можно установить, что a находится между b и b', значит (так как $a>b$), $b'>a$. Поэтому максимальная координата решения (a, b', c) больше максимальной координаты решения (a, b, c). Сходным образом устанавливается, что максимальная координата решения (a, b, c') больше максимальной координаты решения (a, b, c).

3. **Указание.** Воспользуйтесь родословным деревом. Если не сумеете найти доказательство, посмотрите Следствие в конце статьи.

4. **Доказательство.** Пусть q — остаток от деления числа A на 3: $A=3p+q$ ($q=0, 1, 2$), тогда $A^2=3(3p^2+2pq)+q^2$. Если A делится на 3, то в этом и только в этом случае $q=0$. Если же $q=1$, 2 ($q^2=1$, 4), то при делении A^2 на 3 будем получать в остатке 1. Отсюда уже следует утверждение задачи.

5. **Доказательство.** Если (a, b, c) — решение уравнения (6) (см. статью), то есть

$$a^2+b^2+c^2=3abc, \tag{I}$$

то после умножения обеих частей (I) на 9, получим, что $(3a, 3b, 3c)$ — решения уравнения (4). Обратно, если все координаты решения (A, B, C) уравнения (4) делятся на 3, то есть представляются в виде (5), то после подстановки их в уравнение (4) придем к равенству (I). Остается доказать, что у каждого решения уравнения (4) все координаты делятся на 3. Действительно, на 3 должна делиться, по крайней мере, одна из координат решения (A, B, C), ибо в противном случае ABC не делится на 3, тогда как $A^2+B^2+C^2$, согласно задаче 4, делится на 3.

Но если хотя бы одна координата делится на 3, то $A^2+B^2+C^2=ABC$ делится на 3, а тогда по задаче 4 все A, B, C делятся на 3, что и требовалось доказать.

6. **Доказательство.** Рассмотрим, например, квадрат A^2. Если A четно, то A^2 делится на 4; если же A нечетно ($A=2n+1$), то $A^2=4(n^2+1)+1$, так что A^2 при делении на 4 в остатке дает 1. Отсюда уже легко следует утверждение задачи.

7. **Доказательство.** Пусть (A, B, C) — решение уравнения (3) при $k=2$, то есть

$$A^2+B^2+C^2=2ABC. \tag{II}$$

Докажем сначала, что все его координаты — четные.

Если бы среди A, B, C было только одно нечетное или если бы все они были нечетные, то левая часть (II) оказалась бы нечетной, тогда как правая — четная. Если же два из них были бы нечетными, то по задаче 6 при делении на 4 левая часть (II) дала бы в остатке 2, тогда как правая делилась бы на 4 без остатка. Итак,

$$A=2a,\ B=2b,\ C=2c, \tag{III}$$

где a, b, c — натуральные числа. Используя (III) и (II), получим (после сокращения на 4) равенство

$$a^2+b^2+c^2=4abc.$$

В силу предыдущих рассуждений a, b, c — четные, то есть все числа A, B, C делятся на 4. Повторяя этот же прием, получим, что A, B, C делятся на 8, на 16, на 32 и т. д., то есть на любую натуральную степень числа 2. Для натуральных чисел это невозможно.

Откуда взять уравнение

(см. «Квант» № 4, с. 22)

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,h^2(h-2r)$. **Указание.** Обозначьте через x длину ребра основания и выразите двумя способами квадрат высоты $|SD|^2$ боковой грани BSC: из прямоугольного треугольника SKD, где K — основание высоты пирамиды, и из подобия треугольников SKD и SLO, где O — центр шара, L — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую SD. Получится уравнение $h^2+x^2/12=2rh+x^2/4$.

3. $15\sqrt{3}$. **Указание.** Обозначьте боковые стороны BC и DA трапеции через x и y, тогда основания равны $2x$ и $2y$, откуда $x+y=10$, то есть $y=10-x$. Докажите, что именно $\widehat{B}=60°$. После этого получите уравнение для x, выразив двумя способами квадрат высоты трапеции: $h^2=3x^2/4=y^2-(2y-2x-x/2)^2$, откуда $h=1{,}5$.

4. $\sqrt{2}$ см. **Указание.** Пусть ON — радиус, проведенный в точку касания, F — точка его пересечения с биссектрисой угла, OE — перпендикуляр, опущенный из точки O на эту биссектрису, OM — перпендикуляр, опущенный из точки O на хорду AB. Тогда, с одной стороны, $|OF|=|ON|-|OM|=R-\sqrt{R^2-3/2}$, с другой стороны, $|OF|=\sqrt{2}\,|OE|=\sqrt{2}\times$

$\times\sqrt{R^2-7/4}$.

5. $(a/2)(5+4\cos\alpha\pm\sqrt{16\cos^2\alpha+8\cos\alpha-23})$. **Указание.** Обозначьте искомые стороны через x и y и найдите их из системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2, \\ a^2=rR=(1/2)axy/(a+x+y). \end{cases}$$

6. $(7-\sqrt{15})a/4$. **Указание.** Докажите, что центр искомой сферы лежит на прямой AP, где P — точка, симметричная точке C_1 относительно точки C. Обозначьте $|OP|$ через x и найдите x, выразив двумя способами $|OE|^2$: с одной стороны, $|OE|^2=x^2/3$, а с другой (по теореме косинусов из треугольника OAE, учитывая, что $\cos\widehat{OAE}=-1/\sqrt{3}$) — $|OE|^2=x^2+17a^2/4-7\sqrt{3}\,ax/3$.

7. $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{q^2-p^2}/(p\sqrt{2})$.

8. $\cos\lambda=\cos(\alpha-\beta)-2\sin^2(\varphi/2)\cos\alpha\cos\beta$.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 4)

1. **Ответ:** первое. **Решение.** Обозначим число 111111111 через a. Нам нужно сравнить числа $\frac{5a-2}{5a+2}$ и $\frac{6a-2}{6a+3}$. Заметим, что $(5a-2)(6a+3)>(5a+2)(6a-2)$ (так как $a>2$), поэтому $\frac{5a-2}{5a+2}>\frac{6a-2}{6a+3}$.

2. **Ответ:** 22. **Решение.** Назовем «порцией» количество травы, съедаемое коровой за один день. К концу 24-го дня на лугу было съедено $60\cdot24=1440$ «порций» травы, а к концу 60-го дня — $60\cdot30=1800$ «порций». Таким образом, за 36 дней на лугу выросло $1800-1440=360$ «порций» травы (по 10 «порций» в день), а с самого начала на нем было $1440-24\cdot10=1200$ «порций». Поэтому к концу этого дня нужно съесть $1200+100\times\times10=2200$ «порций» травы. Следовательно, искомое число коров равно $2200:100=22$. Отметим, что 10 коров могут непрерывно пастись на этом лугу, причем количество травы на нем меняться не будет.

3. **Ответ:** а) $a>0$, $b<0$, $c<0$; б) $a<0$, $b<0$, $c<0$.
Решение. Ветви параболы направлены в случае а) вверх, а в случае б) вниз, отсюда находим знак a; знак c находим из условия $c=f(1)$; для определения знака b проще всего воспользоваться формулой для абсциссы вершины параболы: $x_0=-b/2a$. Отметим, что в задаче а) можно воспользоваться и теоремой Виета: сумма корней положительна, а их произведение отрицательно, поэтому числа $-b/a$ и c/a отрицательны.

4. **Ответ:** 30°, 60°, 90°. **Решение.** Пусть медиана и высота делят угол C на три равные части (рис. 9). В треугольнике MCB биссектриса совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный, следовательно, CD — медиана и $BD=MD=(1/4)AB$. В треугольнике ACD отрезок CM — биссектриса, поэтому $CD:AC=MD:AM=1:2$, то есть катет CD равен половине гипотенузы AC, следовательно, $\angle CAD=30°$, $\angle ACD=60°$, откуда $\alpha=30°$, $\angle ACB=3\alpha=90°$, наконец, $\angle CBA=90°-\alpha=60°$.

5. а) Воспользуемся тем, что мера вписанного угла равна половине меры дуги, заключенной между его сторонами. Соединим точки B и C (рис. 10). По свойству внешнего угла треугольника $\angle\alpha=\angle1+\angle2=\frac{1}{2}\smile AB+\frac{1}{2}\smile CD$ (см. рис. 10, *а*); $\angle2=\angle1+\angle\beta$, откуда $\angle\beta=\angle2-\angle1=\frac{1}{2}\smile AB-\frac{1}{2}\smile CD$ (см. рис. 10, *б*).

б) **Ответ:** $90°-\alpha/2-\beta/2$; $90°-\alpha/2+\beta/2$; $90°+\alpha/2-\beta/2$; $90°+\alpha/2+\beta/2$. **Решение.** По формуле (2) п. а) $\alpha=\frac{1}{2}(\smile AB-\smile CD)$; $\beta=\frac{1}{2}(\smile AD-\smile BC)$. Так как $\angle B-\angle D=$

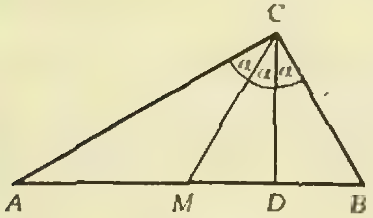


Рис. 9.

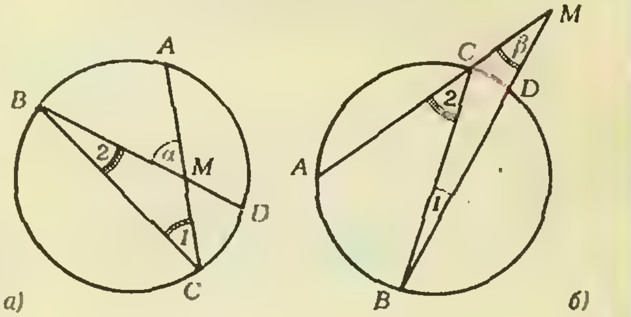


Рис. 10.

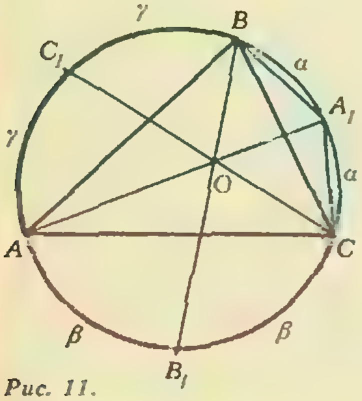


Рис. 11.

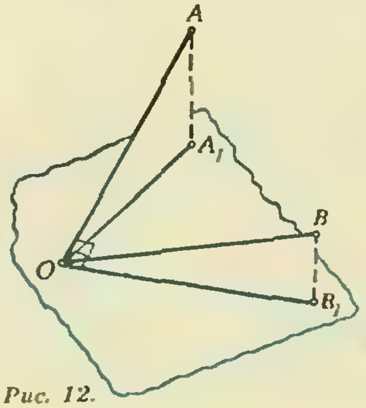


Рис. 12.

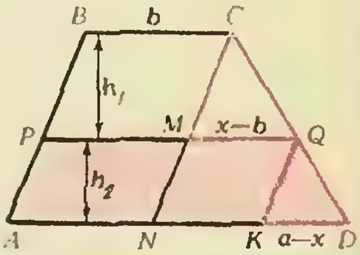


Рис. 13.

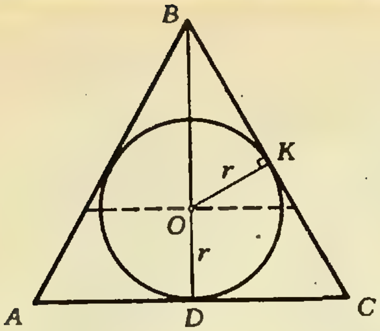


Рис. 14.

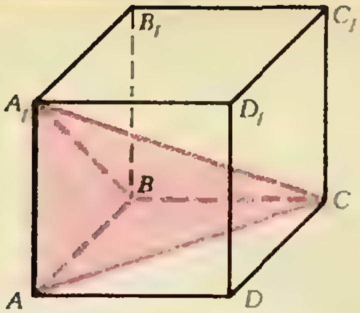


Рис. 15.

$=\frac{1}{2}(\smile CD+\smile AD)-\frac{1}{2}(\smile AB+\smile BC)=\beta-\alpha$, $\angle B+\angle D=180°$, то $\angle B=90°+\beta/2-\alpha/2$, $\angle D=90°-\beta/2+\alpha/2$. Аналогично из системы

$$\begin{cases}\angle A+\angle C=180°,\\ \angle C-\angle A=\alpha+\beta\end{cases}$$

находим $\angle C=90°+\alpha/2$, $\angle A=90°-\alpha/2-\beta/2$.

а) Обозначим через B_1 и C_1 точки пересечения прямых BO и CO соответственно с описанной окружностью (рис. 11). На рисунке 11 одинаковыми буквами отмечены равные дуги (например, дуги BA_1 и A_1C равны, поскольку равны вписанные углы BAA_1 и CAA_1). Хорды BA_1 и CA_1 стягивают равные дуги и поэтому равны. Равенство $BA_1=OA_1$ вытекает из того, что треугольник BOA_1 равнобедренный: каждый из углов OBA_1 и BOA_1 равен $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ — первый как вписанный, а второй — по формуле (1) задачи а).

6. **Ответ:** $\frac{200}{101}$. **Указание.** Преобразуйте каждую скобку по формуле $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ и сократите общие множители числителя и знаменателя

7. **Ответ:** $y=8x+4$. **Указание.** Запишите уравнение касательной к первой параболе в ее произвольной точке — точке с абсциссой $x_1: y=(2x_1+4)x-x_1^2+8$ и уравнение касательной ко второй параболе в ее произвольной точке — точке с абсциссой $x_2: y=(2x_2+8)x-x_2^2+4$. Полученные прямые совпадают при условиях $2x_1+4=2x_2+8$, $-x_1^2+8=-x_2^2+4$, откуда, например, $x_2=0$.

8. Проведем плоскость α_1 параллельно плоскости α через точку O (рис. 12). Тогда проекцией угла AOB на плоскость α_1 будет прямой угол A_1OB_1 и нам надо доказать, что либо (OA_1) совпадает с (OA), либо (OB_1) совпадает с (OB). Пусть прямые OA_1 и OA не совпадают. Докажем, что в этом случае совпадают прямые OB_1 и OB. По условию $(OB_1)\perp(OA_1)$, кроме того, $(OB_1)\perp(OA)$, поскольку прямая OB_1 перпендикулярна проекции OA_1 прямой OA на плоскость α_1 (по теореме о трех перпендикулярах); следовательно, прямая OB_1 перпендикулярна плоскости AOA_1. Прямая OB также перпендикулярна плоскости AOA_1: она перпендикулярна прямой OA по условию и прямой OA_1. Итак, прямые OB и OB_1 совпадают как два перпендикуляра к плоскости AOA_1, проведенные через точку O.

9. **Ответ:** а) 1/8; б) 1/128. **Решение.**

а) $\sin 10°\sin 50°\sin 70°=\sin 10°\cos 20°\cos 40°=$ $=\sin 20°\cos 20°\cos 40°/(2\cos 10°)=$ $=\sin 40°\cos 40°/(4\cos 10°)=$ $=\sin 80°/(8\cos 10°)=1/8$.

б) Аналогично п. а) получаем $\cos(\pi/15)\times\cos(2\pi/15)\cos(4\pi/15)\cos(7\pi/15)=$ $=-\cos(\pi/15)\cos(2\pi/15)\cos(4\pi/15)\cos(8\pi/15)=$ $=1/16$; $\cos(3\pi/15)\cos(6\pi/15)=1/4$; кроме того, $\cos(5\pi/15)=\cos(\pi/3)=\frac{1}{2}$.

10. **Ответ:** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **Указание.** Пусть $|AD|>|BC|$, PQ — данный отрезок, обозначим его длину через x. Проведем прямые CM и QK, параллельные прямой AB (рис. 13). Тогда по условию $(b+x)h_1/((x+a)h_2)=1$, а из подобия треугольников CMQ и QKD $(x-b)/(a-x)=h_1/h_2$, поэтому $(b+x)(x-b)/(x+a)\times(a-x)=1$.

11. **Ответ:** $2\arcsin(\sqrt[3]{2}-1)$. **Указание.** Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 14). Из треугольника BOK получаем $\sin(\alpha/2)=|KO|/|BO|=r/(h-r)=h/(h-r)-1$, где r — радиус вписанного шара, h — высота конуса. Одна из получившихся частей — конус, гомотетичный исходному с высотой $h-r$. Ее объем по условию в два раза меньше объема исходного конуса, поэтому $h/(h-r)=\sqrt[3]{2}$.

12. **Ответ:** а) $(\sqrt{3}/2)\pm\sqrt{\sqrt{3}-5/4}$; б) 7/9; 65/63. **Указание.** а) Легко проверить, что $x=-1$ не является корнем уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $(x+1)^2$, после чего получается квадратное уравнение $y^2+2y-2=0$ относительно переменной $y=(x^2-x+1)/(x+1)$. Корни этого уравнения будут $y_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$. После этого остается решить квадратные уравнения $x^2-x+1=(-1+\sqrt{3})(x+1)$ и $x^2-x+1=(-1-\sqrt{3})\times(x+1)$ (второе из них решений не имеет). б) Убеждаемся, что $x=1$ не является корнем уравнения, и после деления обеих частей на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ получаем квадратное уравнение $y^2-2y-8=0$ относительно переменной $y=\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)}$, корни которого равны 4 и -2. Решая уравнения замены $\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)}=4$ и $\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)}=-2$, получаем ответ.

13. **Ответ:** $\pi^2/4-2$. **Указание.** Данные касательные образуют углы 45° и 135° с осью Ox, поэтому треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, его площадь равна $\pi^2/4$.

14. **Ответ:** $(1+ab)/(8a-5ab)$. **Решение.**

Перейдем к логарифмам по основанию 12. По условию $\log_7 12=a$, поэтому $\log_{12}7=1/a$; $\log_{12}(2\cdot 12)=b$, поэтому $\log_{12}2=b-1$. Следовательно $\log_{54}168=\log_{12}168/\log_{12}54=(1+\log_{12}7+\log_{12}2)/(3-5\log_{12}2)=(1+1/a+b-1)/(3-5\times(b-1))$.

Замечание. Можно было перейти к логарифмам и по другому основанию, например 2 или 3.

15. а) Рассмотрим, например, тетраэдр, вершинами которого являются вершины A_1, A, B и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15). Высоты, проведенные из вершин A_1 и C, суть отрезки A_1A и CB. Очевидно, что прямые A_1A и CB не пересекаются.

б) **Указание.** Каждое из условий «высоты AA_1 и BB_1 пересекаются» и «высоты CC_1 и DD_1 пересекаются» эквивалентно условию «ребра AB и CD перпендикулярны» Достаточно показать эквивалентность условий «высоты AA_1 и BB_1 пересекаются» и «ребра AB и CD перпендикулярны». Докажем эту эквивалентность. Пусть указанные высоты пересекаются, тогда плоскость, проходящая через них, содержит ребро AB и перпендикулярна ребру CD, поэтому (CD) перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в частности, прямой AB. С другой стороны, если прямые AB и CD перпендикулярны, то существует плоскость, проходящая через (AB) и перпендикулярная (CD). Обе высоты лежат в этой плоскости и поэтому пересекаются.

Метрические соотношения в треугольнике

(см. «Квант» № 4)

1. $\pi/4+\operatorname{arctg}(3/4)$, $\pi/4+\operatorname{arctg}(3/4)$, $\pi/2-2\operatorname{arctg}(3/4)$.

Решение. Заметим, что $|AC|=2\cdot 4a\cos(\alpha+\pi/4)$ (рис. 16). По теореме синусов для $\triangle AEC$:

$$\frac{a}{\sin\pi/4}=\frac{2\cdot 4a\cos(\alpha+\pi/4)}{\sin(\pi/2-\alpha)},$$

откуда $\alpha=\operatorname{arctg}(3/4)$.

Замечание. Задачу можно решить и другим способом — без использования теоремы синусов. Ответ можно записать также в следующем виде:

$$\operatorname{arctg}7,\ \operatorname{arctg}7,\ \pi-2\operatorname{arctg}7$$

(так как $\pi/4+\operatorname{arctg}(3/4)=\operatorname{arctg}7$).

2. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\frac{3}{4}(\pi-\alpha)}$. **Решение.** По теореме синусов для $\triangle ABD$: $|AD|/|AB|=\sin\alpha/\sin\widehat{ADB}$, но $\widehat{ADB}=\pi-\hat{B}-\hat{A}/2=3(\pi-\alpha)/4$ (рис. 17).

3. $|AD|=\dfrac{c\sin\alpha}{\sin(3\alpha/2)}$, $R=\dfrac{c}{2\cos(\alpha/2)}$. **Решение.** По теореме синусов для $\triangle ABD$: $|AB|/\sin\widehat{ADB}=|AD|/\sin\alpha$, но $\widehat{ADB}=\pi-(3\alpha)/2$ (рис. 18).

4. $\sqrt{c(b+c)}$. **Решение.** Обозначим $|BC|=a$ и проведем биссектрису AD (рис. 19). Из подобия треугольников ABD и ABC получаем $c/|BD|=a/c$. По свойству биссектрисы $|BD|/(a-|BD|)=c/b$, откуда, исключая $|BD|$, находим $a=\sqrt{c(b+c)}$.

Замечание. Возможно другое решение с применением теоремы синусов для $\triangle ABC$.

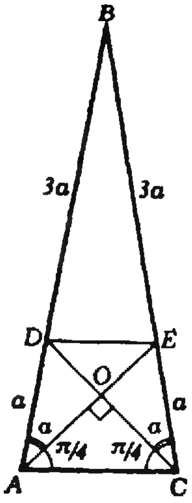


Рис. 16.

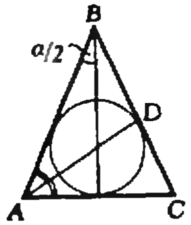


Рис. 17.

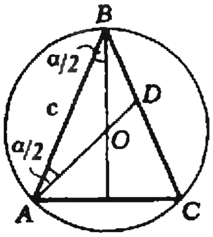


Рис. 18.

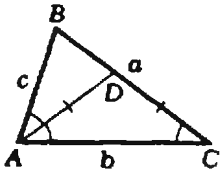


Рис. 19.

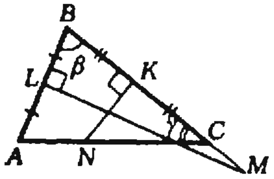


Рис. 20.

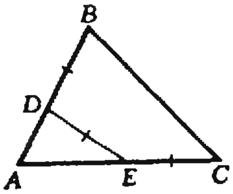


Рис. 21.

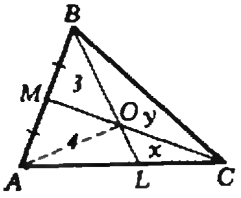


Рис. 22.

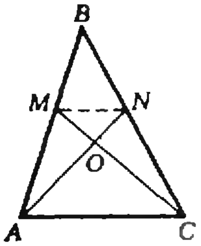


Рис. 23.

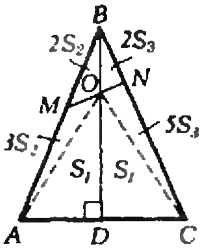


Рис. 24.

5. $\hat{A}=\operatorname{arctg}2$, $\hat{B}=\operatorname{arctg}3$, $c=\pi/4$. **Решение.** Пусть $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$, $\hat{B}=\beta$, $C=\gamma$, (рис. 20). Тогда $|BM|=5a/4$. Из треугольников BLM и KNC получаем

$$c/2=5a(\cos\beta)/4, \qquad (1)$$

$$a/2=2b(\cos\gamma)/3. \qquad (2)$$

Кроме того, по теореме синусов для $\triangle ABC$:

$$a/\sin(\beta+\gamma)=b/\sin\beta=c/\sin\gamma. \qquad (3)$$

Перемножая равенство (1) и равенство $a/\sin(\beta+\gamma)=c/\sin\gamma$, получаем

$$2\sin\gamma=5\cos\beta\cdot\sin(\beta+\gamma). \qquad (4)$$

Аналогично, из равенств (2) и (3) находим

$$4\sin\beta\cos\gamma=3\sin(\beta+\gamma). \qquad (5)$$

Из (5) находим $\sin\beta\cos\gamma=3\cos\beta\sin\gamma$, или

$$\operatorname{tg}\beta=3\operatorname{tg}\gamma. \qquad (6)$$

Разделив (4) на (5), получим

$$\operatorname{tg}\gamma=5(\sin 2\beta)/3. \qquad (7)$$

Из (6) и (7): $5\sin 2\beta=\operatorname{tg}\beta$, или $\operatorname{tg}\beta=3$. Тогда из (6) следует $\operatorname{tg}\gamma=1$.

6. $6\sqrt{3}/25$. Решение. Обозначим $|BD|=|DE|=|EC|=x$ (рис. 21). По теореме косинусов для $\triangle ADE$:

$$(2-x)^2+(3-x)^2-2(2-x)(3-x)\cos\hat{A}=x^2. \qquad (8)$$

Значение $\cos\hat{A}$ находим по теореме косинусов для $\triangle ABC$: $2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos\hat{A}=(\sqrt{7})^2$, откуда $\cos\hat{A}=1/2$, $\hat{A}=\pi/3$. Из (8) получаем $x=7/5$, поэтому $S_{\triangle ADE}=|AD|\cdot|AE|\sin\hat{A}/2=6\sqrt{3}/25$.

7. 8,4 см^2. Пусть x и y — площади треугольников LOC и COB (рис. 22). Площади треугольников AOM и MOB равны, поэтому $S_{\triangle AOL}=1$. Получаем $\frac{1}{x}=\frac{|AL|}{|LC|}=\frac{7}{x+y}$. Решая получившуюся систему, находим $x=1/5$, $y=6/5$, откуда площадь треугольника ABC равна $42/5$ см^2.

8. Присоединим к треугольникам AOM и CON треугольник AOC (рис. 23). Очевидно, $S_{\triangle AOM}=S_{\triangle CON}$, тогда и только тогда, когда $S_{\triangle AMC}=S_{\triangle ANC}$. Последнее равенство эквивалентно условию, что точки M и N находятся на одинаковом расстоянии от прямой AC, то есть (MN) параллельна (AC).

9. 2:1. Решение. Обозначим $S_1=S_{\triangle AOD}=S_{\triangle DOC}$, $S_{\triangle AMO}=3S_2$, $S_{\triangle ONC}=5S_3$ (рис. 24). Тогда $S_{\triangle MOB}=2S_2$, $S_{\triangle BON}=2S_3$. Из равенства площадей треугольников ABD и CBD получаем: $S_1+5S_2=S_1+7S_3$. Из формулы (IV) (см. статью) следует: $S_{\triangle MBN}=|BM|/|BA|\cdot|BN|/|BC|\cdot S_{\triangle ABC}=4/35 S_{\triangle ABC}$, то есть $2S_2+2S_3=4/35(2S_1+5S_2+7S_3)$. Из полученных соотношений вытекает, что $S_1=10S_2$, откуда $|DO|/|BO|=S_1/(5S_2)=2$.

10. 1,2 см.

11. 5:2.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 3)

Головоломки

1. В первом случае можно пройти через все клетки, отмеченные числами (рис. 25, *а*), во втором — такой обход уже невозможен.

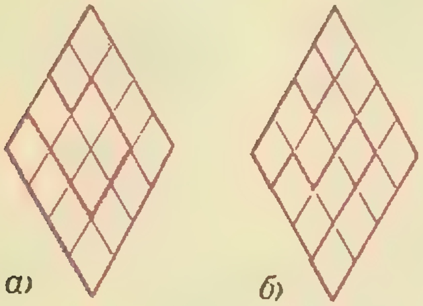

а) б)

Рис. 25.

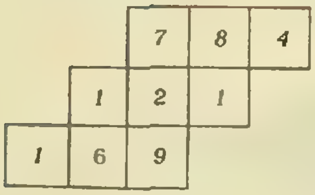


Рис. 26.

Остается непройденной какая-нибудь клетка от 13 до 24. Максимальная сумма оказывается в том случае, если не обходится клетка 13 (рис. 25, *б*). (Номера клеток указаны на с. 32 «Кванта» № 3.)

2. См. рис. 26.

3. Решение имеет только второй вариант головоломки. Оно состоит в следующем: конец петли следует провести через левое нижнее отверстие, затем через правое нижнее, вытянуть из этого отверстия и продеть через конец петли маленькую пуговицу; после этого можно вытащить нитку из большой пуговицы, потянув за маленькую пуговицу.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 4)

Задачи и задачки

1. При запуске спутника вдоль экватора в сторону вращения Земли линейная скорость суточного вращения складывается со скоростью, сообщенной спутнику двигателем ракеты. Естественно, при запуске вдоль меридиана (а тем более вдоль экватора в сторону, обратную вращению Земли) потребуется больше энергии для сообщения спутнику первой космической скорости.

2. При скатывании с горки потенциальная энергия лыжника полностью расходуется на работу против силы трения. Втаскивая лыжника, стоящего на лыжах, подъемник восполняет его запас потенциальной энергии и кроме того совершает работу против силы трения. Затраты энергии в этом случае больше, чем при возвращении к месту старта в кресле подъемника. (Конечно, мы не учли действие сил сопротивления воздуха, считая скорость лыжника небольшой.)

3. При охлаждении гитары часть ее внутренней энергии идет на увеличение потенциальной энергии упругой деформации.

4. Несмотря на то, что при подъеме на высоту 8000 метров потенциальная энергия порции горючего увеличилась, при ее сгорании выделится столько же энергии, сколько и на уровне моря. Работа по подъему горючего в конечном итоге увеличивает потенциальную энергию продуктов сгорания.

5. Работа по разгону стрелы совершается за счет потенциальной энергии упругой деформации корпуса «натянутого» лука и тетивы. Понятно, что возникающие при деформации лука и тетивы силы равны. Однако тетива в хорошем луке мало растяжима, то есть обладает большим коэффициентом упругости k. Можно считать, что упругая энергия зависит от величины k примерно так же, как и у пружины: $U=\frac{kx^2}{2}=\frac{F^2}{2k}$. Ясно, что больший вклад в энергию стрелы вносит корпус лука.

6. При подъеме шара его потенциальная энергия увеличивается, однако на занимаемое им место с той же высоты опускается воздух, плотность которого больше средней плотности шара.

7. Резонатор усиливает рассеяние звука. Хотя будет слышен более сильный звук, его длительность станет меньше, излученная же энергия в обоих случаях одинакова.

8. Работа, требуемая для разрыва чугунной сферы, производится за счет внутренней энергии замерзающей воды.

9. Бабочка «разогревается» подобно спортсмену, делающему разминку перед стартом. Иначе говоря, часть совершаемой ею механической работы идет на увеличение внутренней энергии.

10. Энергия колебаний расходуется на возбуждение вихревых токов в каркасе прибора и в цепи замкнутой катушки, в конечном итоге — на нагревание прибора.

11. Чтобы магнит мог вторично притянуть предмет, его необходимо удалить, то есть совершить работу против силы, действующей на магнит со стороны предмета. Эта работа будет равна той, что совершил магнит при подъеме предмета.

Микроопыт

Вода в первой бутылке практически не вращается; ее потенциальная энергия почти целиком переходит в кинетическую энергию поступательного движения. Значительная доля потенциальной энергии второй бутылки с песком переходит в кинетическую энергию вращательного движения. Скорость поступательного движения второй бутылки оказывается меньше, и время скатывания — больше.

Портреты

Декарт, Джоуль, Майер, Ломоносов, Планк, Лейбниц, Эйнштейн, Гельмгольц, Курчатов.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (Э. Погосянц). **1. bc!** Пешки неожиданно разъединяются, после 1. a4 cb черные легко выигрывают. **1...Крb6!!** В случае 1...Кр:a6 белых спасает маневр Рети: 2. Кр:h7 Крb6 3. Крg7 f5 4. Крf6 f4 5. Крe5 f3 6. Крd6 f2 7. c7 с ничьей. **2. a7!!** Грозило 2...Кр:c6 и т. д. **2...Кр:a7 3. Кр:f7!!** Но не 3. Кр:h7? f5 4. Крg6 f4 5. Крf5 f3 6. Крe6 f2 7. c7 f1Ф 8. c8Ф Фh3+. **3...Крb6!** — и на доске возникла знакомая нам позиция Зинара («Квант», 1985, № 2). Как мы знаем, после **4. Крg7!** белые спасаются.

Задание 4 (Э. Погосянц). **1. Крb3!!** Но не 1. Кр:a3? Крg5 2. Крb3 Крf4 3. h4 Кр:f3 4. h5 Крe4 5. h6 Крd3, и маневр Рети выручает черных. **1...a2! 2. Кр:a2 Крg5 3. Крb1!! Крf4 4. h4 Кр:f3 5. h5 Крe4 6. h6 Крd3 7. Крc1!** и все усилия черных оказались напрасными. Этот этюд относят к теме анти-Рети: умело маневрируя, белые помешали черным воспользоваться геометрическим маневром Рети.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, А. Я. Коршунов, И. М. Офенгенден, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник
Фото представили:
В. В. Бузин, В. П. Шевченко, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250 33-54

Сдано в набор 20.03.85.
Подписано к печати 24.04.85.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр. от. 23,8.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,55. Т-07474.
Цена 40 коп. Заказ 692. Тираж 179 074 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Среди необычных шахматных задач и головоломок немалое место занимают задания, требующие тех или иных вычислений. Знакомству с этой темой посвящается сегодняшняя «страничка».

Самый быстрый мат в шахматной партии возможен уже на втором ходу, и его объявляет черный ферзь: **1. f3 e5 2. g4 Фh4×.**

Здесь, пожалуй, стоит привести один забавный случай, который произошел с М. Таймановым в партии с микрокомпьютером. Гроссмейстер сыграл **1. f3**, и в ответ на **1...e5** пошел **2. g4**. Маленький робот сделал хороший развивающий ход — **2...d5**. Ход действительно неплох, но мат ферзем на h4, кажется, был чуть сильнее. Тайманов продолжал эксперимент: **3. Кc3**, а автомат все централизовывал фигуры — **3...Кc6**, затем **4...Сd6, 5...Сe6**. И лишь после того как черные полностью закончили мобилизацию своих фигур, они решились объявить мат — **Фd8 — h4×**. Да, неплохо играет компьютер, но порой уж слишком правильно. Показательная партия, иллюстрирующая разницу между игрой людей и компьютеров!

Итак, самая быстрая матовая партия продолжается два хода, а самая короткая? Вопрос может вызвать недоумение, разницы между «быстрой» и «короткой» как будто нет. Уточним задание.

Придумать партию, заканчивающуюся матом, в которой длина всех произведенных ходов минимальна.

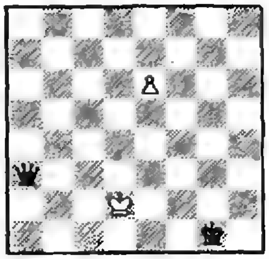
Очевидно, за единицу длины следует принять перемещение фигуры на одно поле вдоль вертикали или горизонтали, и сдвиг по диагонали составляет $\sqrt{2}$.

Первое впечатление, будто самая быстрая партия должна быть и геометрически самой короткой, но это не так. Партия **1. f3 e6 2. g4 Фh4×** состоит из четырех ходов пешек по вертикали и четырех перемещений ферзя — за один ход — по диагонали, итого $4+4\sqrt{2}\approx 9{,}66$. Рекорд же принадлежит, как ни странно, четырехходовой партии: **1. d3 e6 2. Фd2 Крe7 3. Фe3 e5 4. Ф:e5×**, ее длина равна $7+\sqrt{2}\approx 8{,}41$.

Вот еще две подобные задачи на шахматное конструирование. *Придумать геометрически кратчайшую последовательность ходов, приводящих к шаху. Такой же вопрос для двойного шаха.*

Решения: **1. e3 b6 2. Крe2 Сa6+** или **1. b3 e6 2. Сb2! Крe7 3. Сa3+**, оба — длины $3+2\sqrt{2}$. И рекордный двойной шах ставится на третьем ходу: **1. e4 d6! 2. Крe2 d5 3. Крd3 de++**, его длина $5+2\sqrt{2}$.

Геометрический расчет часто встречается в композиции. В жанре сказочных шахмат довольно популярны задачи-максиммумеры, в которых черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. Обычно максиммумеры используются в «обратных матах». В задачах на обратный мат белые вынуждают противника объявить мат их королю. Вот задача-малышка на эту тему.

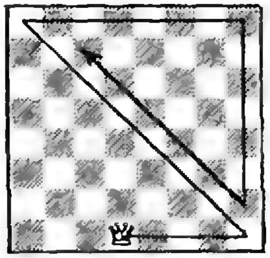


П. Моутесидис, 1965 г. Обратный мат в 5 ходов при ходе черных и в 6 ходов при ходе белых (максиммумер).

При ходе черных: 1...Фf8 (самое длинное — $5\sqrt{2}$) **2. e7 Фf1** (обратной дороги нет) **3. e8Л! Фa6 4. Лe2!** (препятствуя возвращению ферзя на f1 и подготавливая блокировку своего короля) **4...Фh6+ 5. Крe1 Фc1×.**

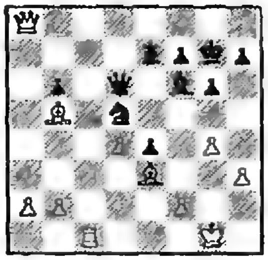
При ходе белых: 1. e7 Фh3 (теперь это самый длинный ход) **2. e8Ф Фc8** (длиннее, чем Фa3, $5\sqrt{2}>7$) **3. Фd7 Фc1+** (диагональ перекрыта и приходится ходить по вертикали) **4. Крe2 Фh6 5. Фd2 Фa6+ 6. Крe1**, и, как черные ни сопротивлялись, они вынуждены объявить мат **6...Фf1×.**

И в заключение задача, в которой вообще участвует один ферзь. *Какой геометрически самый длинный путь, не пересекающий сам себя, может проделать ферзь за пять ходов, начиная с поля d1?*

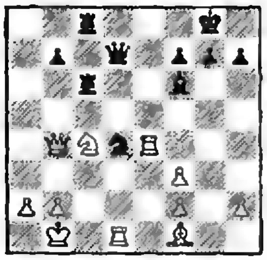


Искомый путь показан на рисунке. Чаще предлагают другое решение: Ф d1—h1—h8—a1—a8—g8. Число полей в данном случае действительно больше (32>30), однако геометрически этот путь короче, хотя разница всего лишь в сотые доли.

Конкурсные задания

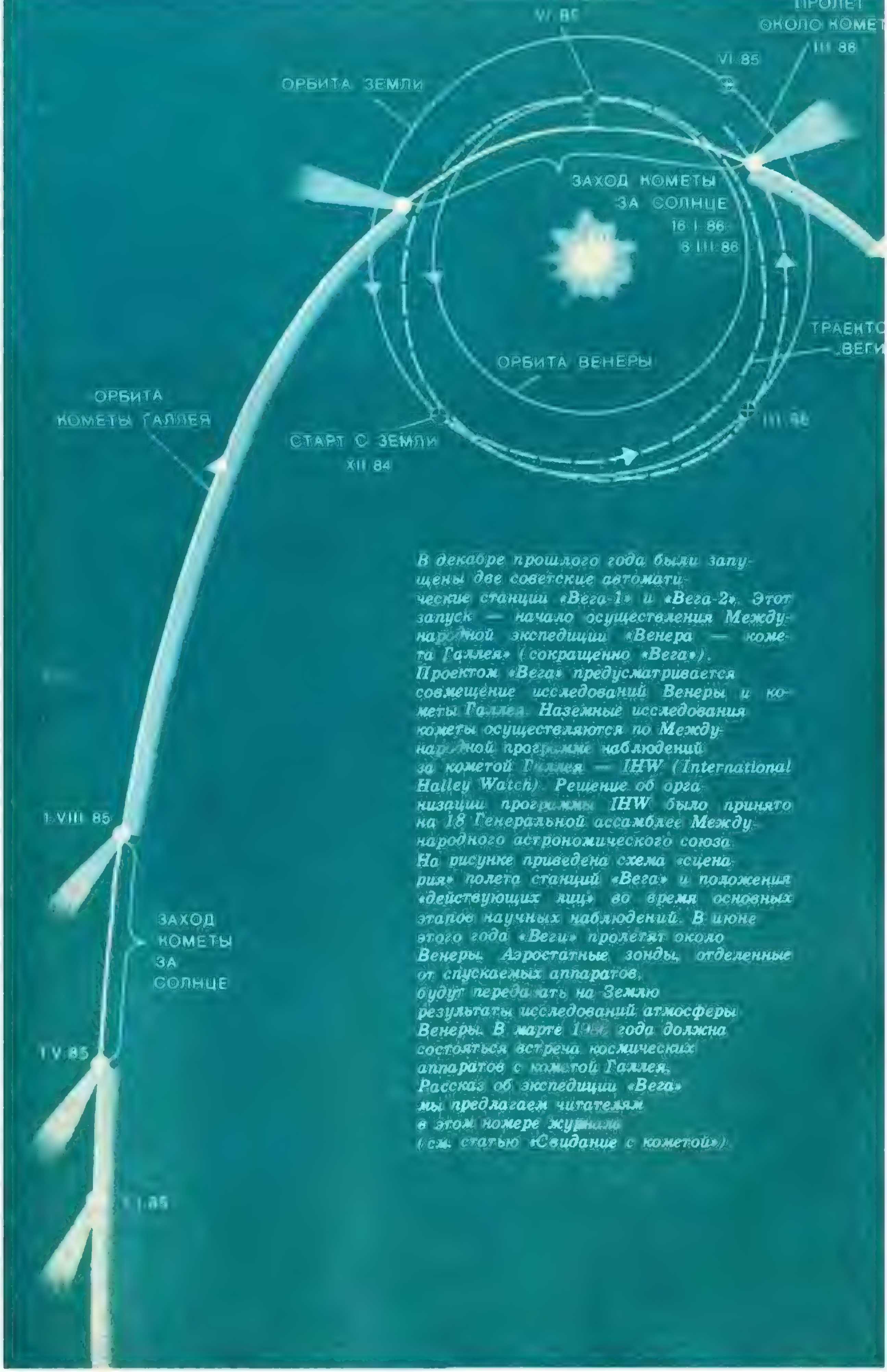


9. Ход белых. Оцените позицию.



10. В этой позиции белые сделали «форточку», опасаясь за свою первую горизонталь — 22. a3. А между тем в их распоряжении был ход 22. Кb6 с вилкой. **Установите, удачен ли этот маневр.**

Срок отправки решений — 25 июля 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»).


VI 85
ПРОЛЕТ
ОКОЛО КОМЕТ
III 86
VI 85
ОРБИТА ЗЕМЛИ
ЗАХОД КОМЕТЫ
ЗА СОЛНЦЕ
16 I 86
6 III 86
ТРАЕНТО
ВЕГИ
ОРБИТА ВЕНЕРЫ
ОРБИТА
КОМЕТЫ ГАЛЛЕЯ
СТАРТ С ЗЕМЛИ
XII 84
III 86
1 VIII 85
ЗАХОД
КОМЕТЫ
ЗА
СОЛНЦЕ
1 V 85
1 I 85

В декабре прошлого года были запущены две советские автоматические станции «Вега-1» и «Вега-2». Этот запуск — начало осуществления Международной экспедиции «Венера — комета Галлея» (сокращенно «Вега»). Проектом «Вега» предусматривается совмещение исследований Венеры и кометы Галлея. Наземные исследования кометы осуществляются по Международной программе наблюдений за кометой Галлея — IHW (International Halley Watch). Решение об организации программы IHW было принято на 18 Генеральной ассамблее Международного астрономического союза. На рисунке приведена схема «сценария» полета станций «Вега» и положения «действующих лиц» во время основных этапов научных наблюдений. В июне этого года «Веги» пролетят около Венеры. Аэростатные зонды, отделенные от спускаемых аппаратов, будут передавать на Землю результаты исследований атмосферы Венеры. В марте 1986 года должна состояться встреча космических аппаратов с кометой Галлея. Рассказ об экспедиции «Вега» мы предлагаем читателям в этом номере журнала (см. статью «Свидание с кометой»).

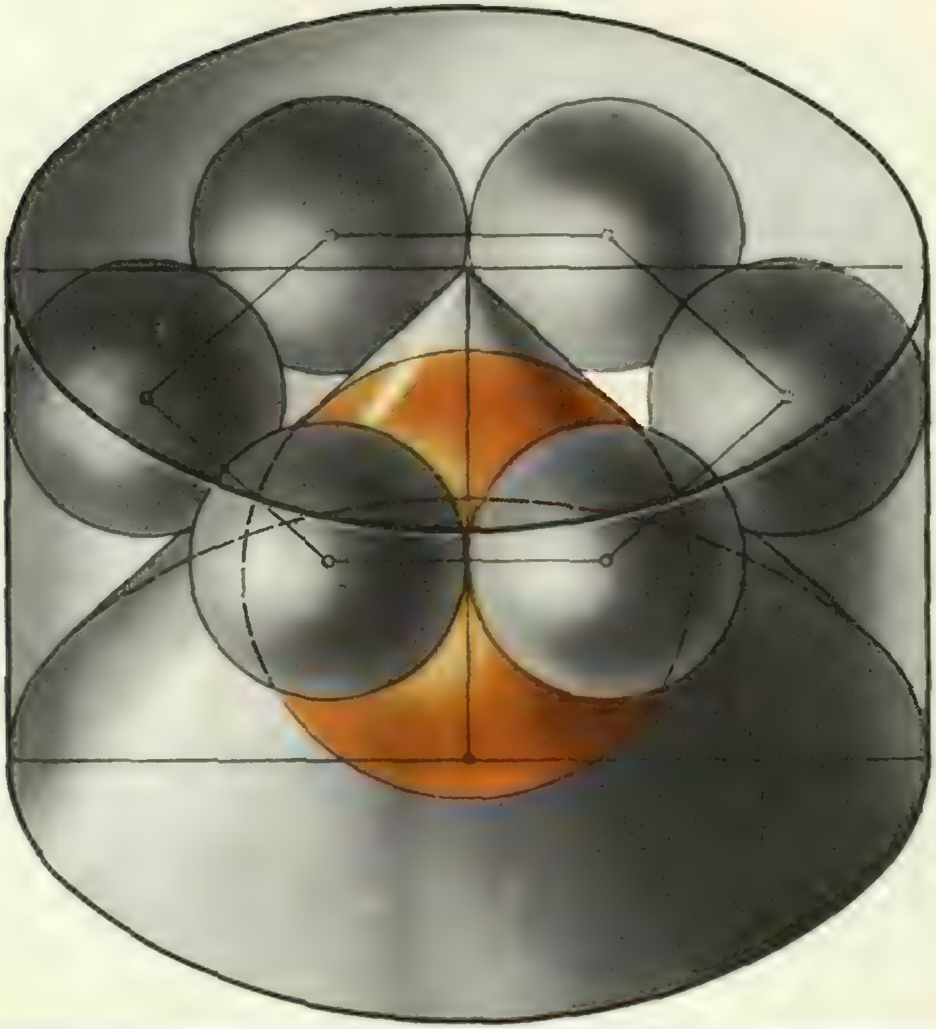
Цена 40 коп.

Индекс 70465

Мы продолжаем начатую во втором номере серию чертежей к стереометрическим задачам, цель которой — помочь читателям развить пространственное воображение. При самостоятельном решении задач такие картинки надо стараться представлять себе мысленно. (Как правило, точные чертежи можно построить, только решив задачу хотя бы частично, к тому же непосредственно для решения они чаще всего не очень нужны.)

Решение предлагаемой ниже задачи вы найдете в следующем номере журнала.

Задача. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту. Внутри цилиндра, но вне конуса расположены шесть равных сфер, каждая из которых касается верхнего основания и боковой поверхности цилиндра, двух соседних сфер и боковой поверхности конуса. Радиус каждой сферы равен r. Найти радиус сферы, вписанной в конус.



НОМЕР
6

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

6 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

В НОМЕРЕ: | IN THIS ISSUE:

2	*Б. М. Болотовский.* Что мы видим?	*B. M. Bolotovski.* What do we see?
8	*С. Г. Гиндикин.* Звездный век циклоиды	*S. G. Gindikin.* The cycloid's glorious century
16	*Л. А. Ашкинази.* Что же такое электризация трением?	*L. A. Ashkinazi.* What is electrisation by friction?
20	*А. И. Привень.* Не беда, что нет функций	*A. I. Priven.* It's OK without functions
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*А. А. Боровой.* Мостик из бумаги	*A. A. Borovoy.* Paper bridges
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	*Л. Кэрролл.* Билль вылетает в трубу	*L. Carroll.* The rabbit sends in a little bill
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
34	Задачи М926 — М930; Ф938 — Ф942	Problems M926 — M930; P938 — P942
37	Решения задач М905 — М910; Ф917 — Ф922	Solutions M905 — M910; P917 — P922
46	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Олимпиады	**Olympiads**
26	Заочная олимпиада по программированию	Programming olympiad (by correspondence)
48	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(47)*	**Kvant smiles** *(47)*
	Смесь *(19, 45)*	**Miscellaneous** *(19, 45)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Инерционность мышления *(3-я с. обложки)*	Inertiality of thought *(3rd cover page)*

Известно, что наэлектризовать тело можно разными способами. Можно передать ему часть «чужого» заряда (именно так наэлектризовали листочки «султанчика», который вы видите на первой странице обложки). Есть и другой способ — электризация трением. О нем рассказывается в этом номере журнала (см. с. 16).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985

Что мы видим?

(о видимой форме быстро движущихся предметов)

Доктор физико-математических наук
Б. М. БОЛОТОВСКИЙ

Введение

Есть поговорка: «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Смысл этой поговорки вполне ясен: говорить можно все, что угодно, но для того чтобы убедиться в сказанном, нужно все увидеть своими глазами. Глаза не обманут.

Однако всегда ли можно доверять своим глазам? Оказывается, не всегда. Иногда мы видим то, чего нет на самом деле. Не подумайте, что речь идет о галлюцинациях или дефектах зрения. Наблюдатель, находящийся в здравом уме и обладающий хорошим зрением, при определенных условиях может увидеть очень искаженную картину явления, весьма далекую от того, что происходит в действительности. И причина этого заключается не в том, что чувства могут изменить человеку. Поставим вместо наблюдателя кинокамеру, уж ее-то «показания» можно считать объективными. И все же, просмотрев заснятый фильм, мы увидим то же самое, что и наблюдатель, которому мы выразили недоверие и которого заменили кинокамерой.

И то, что мы увидим на экране, и то, что увидел наблюдатель, совсем не то, что происходит на самом деле.

Как это может быть?

Мы на нескольких примерах покажем, как это может быть. Ничего таинственного в наших примерах вы не найдете. Они говорят лишь о том, что нужно обдумывать каждое физическое наблюдение, стараться понять, о чем говорят показания приборов, и по этим показаниям восстанавливать реальную картину явления.

Фотографирование света на лету

Около пятнадцати лет назад американский физик Мишель Дюге сконструировал фотографический затвор, который срабатывал за необычайно короткие времена. Зачем нужны такие затворы?

Если мы фотографируем неподвижную картину, то промежуток времени, в течение которого затвор открыт — этот промежуток называется временем экспозиции,— не влияет на резкость изображения. Объект съемки неподвижен, изображение объекта на пленке также неподвижно, поэтому увеличение времени экспозиции не уменьшает резкости изображения. Иное дело, если объект съемки движется. Тогда движение и изображение объекта на пленке. В этом случае чем меньше время экспозиции, тем резче будет изображение предмета на фотографии. И наоборот, чем больше время экспозиции, тем больше «размажется» изображение предмета.

На некоторых фотографиях (обычно это фотографии бегущих людей или быстро мчащихся автомашин) нерезкость изображения уместна — она как бы подчеркивает стремительность движения. Но, как правило, чем быстрее движется объект съемки, тем меньше должно быть время экспозиции, тем на меньшее время открывается затвор. (В наших рассуждениях мы не учитываем, что фотографическая пленка обладает определенной чувствительностью и что меньшим временам экспозиции должна соответствовать большая чувствительность. Будем считать, что чувствительность пленки можно подобрать так, чтобы она соответствовала нужному времени экспозиции.)

Вернемся теперь к началу нашего повествования. Был создан фотографический затвор с временем экспозиции фантастически малым — около 10^{-11} с. Конечно, «фантастически» малым это время можно было считать только до создания затвора. Когда же он создан — это уже никакая не фантастика, а реальное замечательное достижение. Но... где его применить?

Такой «молниеносный» затвор можно было бы использовать для фотографирования объектов, движущихся со скоростями, близкими к скорости

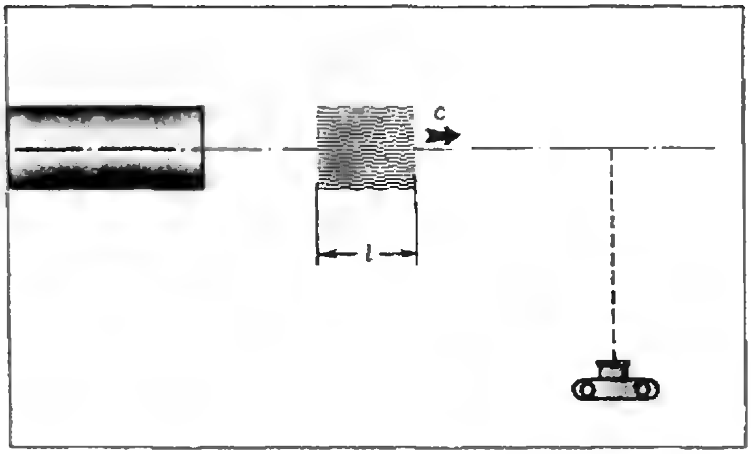


Рис. 1. При такой постановке опыта сфотографировать импульс нельзя — световые волны, составляющие пакет, не попадают в объектив.

света,— изображение на пленке получилось бы достаточно резким. Но где разыскать такие объекты? Они должны быть достаточно велики, для того чтобы получиться на фотографии,— скажем, иметь размер порядка сантиметра. Но сообщить материальному телу таких размеров скорость, близкую к скорости света, мы пока не можем — это требует огромных затрат энергии. (Например, чтобы разогнать тело массой в 1 г до скорости, равной половине скорости света, нужно затратить энергию порядка 10^{11} Дж. Такую энергию вырабатывает ежесекундно десяток современных атомных электростанций.) Максимальные скорости макроскопических тел, достигнутые в земных условиях, составляют величину порядка десятков километров в секунду. Мы умеем разгонять электроны до скоростей, которые близки к скорости света. Но ведь электрон непосредственно не сфотографируешь — он слишком мал. Нужен объект, который имел бы заметные размеры и двигался со световой скоростью. И Дюге, создатель затвора, нашел такой объект. Им оказался... сам свет.

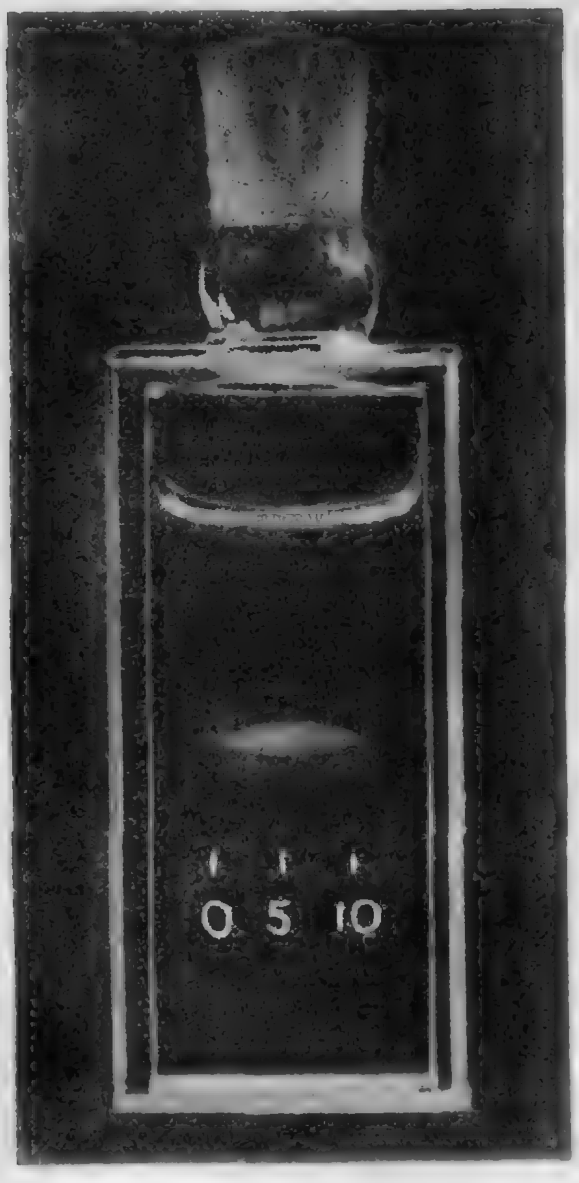
Источником света служил лазер, который давал излучение в виде очень кратковременных импульсов — длительностью примерно 10^{-11} с. Испущенный лазером световой импульс можно представить как некоторый объем, заполненный световыми волнами и движущийся в пространстве со скоростью света (рисунок 1). Такой объем называют волновым (или световым) пакетом. Длина пакета равна, очевидно, $l=c\tau$, где c — скорость света, а τ — время излучения, то есть длительность импульса; подставив $c=3\cdot10^5$ км/с, $\tau\approx10^{-11}$ с, мы получим $l\approx3$ мм. «Тело» таких размеров можно фотографировать.

Казалось бы, все просто — поместим фотоаппарат сбоку от пути светового «тела», наведем на какую-нибудь точку пути и в нужный момент спустим затвор. Такая постановка опыта изображена на рисунке 1. Однако если мы так сделаем, то ничего не увидим на пленке. Почему? Потому что изображение появляется на пленке лишь в том случае, если на нее попадает свет от движущегося тела. Это может быть «собственный» свет, если тело само излучает (так, например, происходит при фотографировании горящей лампочки). Если тело само не светится, его надо осветить, и тогда на пленку попадет отраженный или рассеянный телом свет от внешнего источника. Из рисунка 1 видно, что световые волны, составляющие пакет, распространяются по такому пути, что они никак не могут попасть в объектив фотоаппарата. Освещать такой пакет внешним источником тоже бесполезно — пакет не отражает и не рассеивает свет, световые волны от внешнего источника проходят через волновой пакет как через бесплотное привидение, не меняясь и не меняя пакета.

Выход был найден такой. На пути светового сгустка был помещен стеклянный сосуд с водой. В воду было добавлено несколько капель молока. От этой добавки вода стала немного мутной. Мутная среда рассеивает падающий на нее свет. Когда в такой сосуд с мутной водой попадает световой сгусток, составляющие его световые волны начинают рассеиваться и сгусток становится видимым. Теперь его можно фотографировать. Разумеется, вся установка для фотографирования должна помещаться в темной комнате, чтобы посторонние источники света не создавали помех.

С помощью такой установки были получены очень красивые фотографии летящего света. Одна из них воспроизводится на рисунке 2. Это — первая в истории науки фотография, полученная в «комнатных условиях» и изображающая объект, летящий со скоростью, близкой к скорости света (в воде скорость света приблизительно в полтора раза меньше, чем в пустоте). За время экспозиции световой сгусток в сосуде успел сдвинуться всего на 2,2 мм. Но изображение на фотографии «размазано» больше чем на 2,2 мм. Причина этого будет ясна из дальнейшего.

Рис. 2. Фотография светового импульса, движущегося в мутной (рассеивающей) среде. Время экспозиции 10^{-11} с.



После этого опыта М. Дюге проделал еще один чрезвычайно красивый эксперимент. Он создал световую «гантель» и сфотографировал ее.

Световая «гантель»

Прежде чем описывать результаты опыта по фотографированию световой «гантели», скажем несколько слов о том, зачем нужен такой опыт.

Согласно теории относительности длина тела, измеряемая в некоторой системе отсчета, зависит от того, с какой скоростью движется тело относительно этой системы отсчета. Если, в частности, тело покоится и его длина равна l_0, то при движении этого тела со скоростью v его длина будет $l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, где c — скорость света. Множитель $\sqrt{1-v^2/c^2}$ всегда меньше единицы, так что при движении тела его размеры в направлении движения (именно этот размер мы имели в виду, когда говорили «длина») сокращаются в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз.* (Для скоростей, достижимых в земных условиях в настоящее время, множитель $\sqrt{1-v^2/c^2}$ очень мало отличается от единицы. Если тело имеет скорость 10 км/с (это по порядку величины скорость космических аппаратов — ракет и спутников), то этот множитель равен 0,99999999944, то есть отличается от единицы в десятом знаке после запятой. Следовательно, при достижимых ныне скоростях обнаружить сокращение размеров при движении чрезвычайно трудно. Но это утверждение теории относительности проверено на большом количестве вытекающих из него следствий.

Изменение размеров тел при движении приводит к изменению их формы. Движущийся шар, если скорость его движения близка к скорости света, должен сплющиваться и превращаться в «блин», плоскость которого перпендикулярна направлению скорости; куб должен превращаться в параллелепипед и т. п.

---

*) Такое сокращение часто называют «лоренцовым» — по имени нидерландского физика-теоретика Х. А. Лоренца, одним из первых (в 1892 году) предсказавшего этот эффект.

Поскольку в нашем распоряжении нет тел, движущихся с достаточно большой скоростью, непосредственно проверить изменение формы не представлялось возможным. Но теоретический анализ этого явления был проведен довольно подробно. И анализ показал, что дело не так просто, как кажется. Действительно, размеры шара в направлении движения сокращаются. Но заметить это сокращение, глядя на движущийся шар, наблюдатель не сможет. Ему помешает... сам способ наблюдения.

Чтобы понять, почему так получается, рассмотрим несколько примеров, имеющих отношение к затронутым вопросам. В летний день мы любуемся каким-нибудь ландшафтом. Светит Солнце, шелестят деревья, поют птицы. Мы все это воспринимаем одновременно.

Но в тот момент, когда мы слышим чириканье, птица может молчать. Звук в воздухе распространяется со скоростью более 300 м/с. Поэтому между временем исполнения птичьей трели и временем «приема» есть вполне измеримое запаздывание. Мы видим Солнце в некотором месте на небосводе. Но ведь свет от Солнца до Земли «идет» примерно восемь минут. Значит, мы не может утверждать, что сейчас, «сию минуту», Солнце находится именно там, где мы его видим.

Еще пример. Мы фотографируем звездное небо. О чем говорит сделанная нами фотография? Можно ли считать, что она отражает расположение звезд именно в тот момент, когда мы проводили съемку? Нет. Свет от удаленных звезд идет к Земле десятки, сотни и тысячи лет. Звезда, может быть, давно погасла, а мы не скоро узнаем об этом, свет от нее все еще идет, и мы видим эту звезду на фотографии. Звезда родилась, но свет от нее еще не дошел до нас,— и на фотографии этой звезды нет.

Все эти несоответствия имеют своей причиной одно и то же явление — конечную скорость распространения того сигнала, который доносит до нас сведения о состоянии объекта. Пока сигнал идет к нам, состояние объекта меняется. Если мы одновременно фотографируем несколько объектов, находящихся на разных расстояниях от камеры, то мы одновременно получаем информацию о положении этих тел. Но изображения всех тел на этой фотографии отражают положения этих тел в разные моменты времени. Эти моменты времени «сдвинуты» в прошлое по отношению к моменту съемки.

А теперь вернемся к вопросу о том, почему наблюдатель не сможет заметить лоренцова сокращения.

Все, что мы говорили о съемке нескольких объектов, относится и к одному объекту, имеющему определенные размеры. Если предмет неподвижен и время экспозиции достаточно для того, чтобы сигнал (свет) от самой удаленной точки предмета успел дойти до объектива, то мы можем с уверенностью сказать, что фотография точно отображает и положение предмета, и его размеры. Иное дело, если предмет движется.

Фотография движущегося тела дает нам сложную картину, на ней изображены разные точки тела в тех положениях, которые они занимали в разные моменты времени. Пусть, скажем, фотографируемое тело приближается к фотокамере. Тогда те точки тела, которые во время съемки больше удалены от объектива, будут казаться «отставшими» по сравнению с более близкими точками, так как на фотографии получатся изображения этих далеких точек, соответствующие более раннему моменту времени. Таким образом, на фотографии движущийся предмет окажется растянутым в направлении движения. Понятно, что такое мнимое «растяжение» будет особенно заметно, если скорость тела будет сравнима со скоростью света.

Расчеты показали, что мнимое растяжение будет компенсировать лоренцово сокращение. Так что наблюдатель не сможет заметить изменение формы быстро движущегося тела, и шар так и будет казаться ему шаром.*)

Как проверить справедливость всех этих рассуждений? Нужно сфотографировать движущееся тело, скорость которого была бы близка к скорости света,— в этом случае и сокращение длины в направлении движения, и запаздывание сигналов от разных точек тела будут наиболее заметны. Для этого Дюге с сотрудниками и создали «гантель» из света.

---

*) Попробуйте сами найти, как будет выглядеть на фотографии, сделанной с малым временем экспозиции, куб, пролетающий мимо объектива в направлении, перпендикулярном оптической оси. Проверить себя вы сможете, посмотрев решение задачи Ф827 в 10 номере «Кванта» за 1983 год.

Для «приготовления» гантели достаточно разделить один световой пакет на две половинки, на два пакета. Затем эти половинки нужно развести в стороны так, чтобы получилось два летящих параллельно волновых пакета. Такие два пакета и составляют гантель.

«Приготовить» гантель можно, например, с помощью системы зеркал, изображенной на рисунке 3. Ось BB' гантели перпендикулярна линии AA' и делится этой линией пополам. Поворачивая всю систему зеркал вокруг оси AA', мы можем менять ориентацию гантели в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси AA'. На рисунке 3 гантель изображена в вертикальном положении; повернув систему зеркал на 90° (в любом направлении относительно оси AA'), мы получим горизонтальную гантель, и т. п.

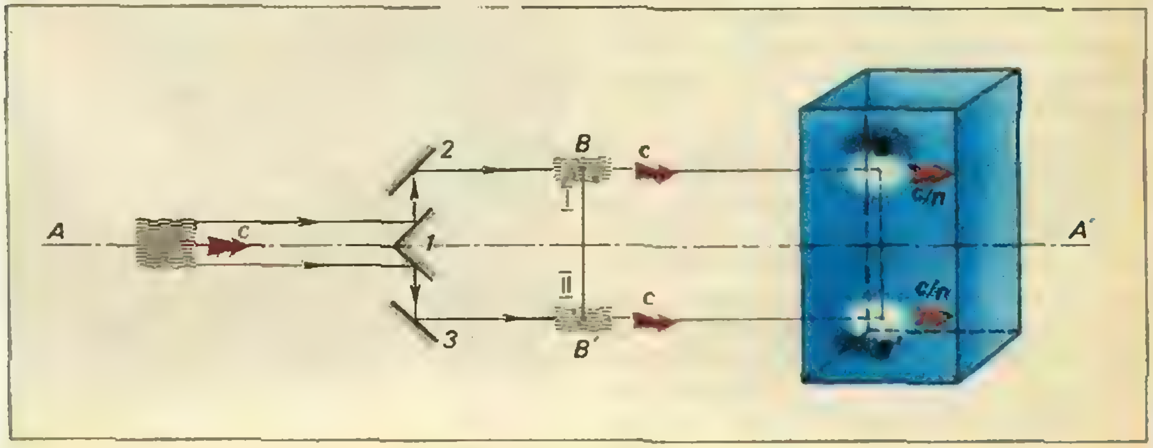
Готовая световая гантель направлялась в сосуд с мутной водой. Пакеты, составляющие гантель, влетали в сосуд одновременно и фотографировались.

На рисунке 4 представлены фотографии гантелей, по-разному повернутых относительно оси AA'. Снимок *а*) сделан с вертикально ориентированной гантели, и на фотографии гантель тоже вертикальна. Снимок *б*) сделан с гантели, которая была повернута от вертикального положения вокруг оси AA' на угол, примерно равный 30°. Снимок *в*) дает изображение гантели, повернутой относительно вертикального направления примерно на 60°. Наконец, снимок *г*) изображает гантель, расположенную горизонтально. На всех снимках световые пакеты, составляющие гантель, движутся слева направо, как и на рисунке 3.

Снимки эти удивительны. Пожалуй, только снимок *а*) оказался таким, как можно было предполагать. Два пакета, составляющие гантель, на этом снимке изображены один над другим. Так и должно быть, если фотографировать вертикально ориентированную гантель. Остальные снимки дают очень странную картину явления. Может быть, наиболее странным является снимок *г*), поэтому мы начнем с разбора именно этого снимка.

В самом деле, снимок сделан с гантели, которая была расположена в горизонтальной плоскости перпендикулярно линии AA' (то есть параллельно лучу зрения нашей фотокамеры), и по всем привычным нам законам на этом снимке должно быть одно светлое пятно, а не два — ведь в момент съемки более близкий к камере световой пакет загораживает более удаленный. А на снимке — два пакета, летящих друг за другом. Фотоаппарат «видит» гантель, ориенти-

Рис. 3. Уголковое зеркало 1 делит падающий на него световой пакет на две одинаковые части: половина пакета отражается по направлению к зеркалу 2, вторая половина — к зеркалу 3. Зеркала расположены так, что в конце концов мы получаем два расположенных рядом и летящих параллельно друг другу световых пакета. Эти пакеты, соединенные воображаемой линией BB', и образуют световую гантель. В среде с показателем преломления n гантель движется со скоростью c/n.



рованную параллельно скорости, а на самом деле гантель ориентирована перпендикулярно скорости.

Снимки *б*) и *в*) тоже неожиданны. Видно, что чем ближе положение оси гантели к горизонтальному, тем больше один пакет отстает от другого. А ведь мы по самой постановке опыта знаем, что оба пакета летят с одной и той же скоростью.

Все легко объясняется, если мы вспомним наши рассуждения о том, какую информацию можно извлечь из фотоснимка. Если на снимке изображены два предмета, из которых один был в момент съемки расположен ближе к фотоаппарату, чем другой, то изображение более далекого предмета соответствует более раннему моменту времени. Именно это мы и видим на фотографиях гантели (*б*) — *г*)): более удаленный от объектива пакет гантели изображен в более ранний по сравнению с ближайшим к объективу пакетом момент времени, когда он еще не достиг той точки, в которой его застал момент съемки. Поэтому изображение удаленного пакета на фотографии смещено назад по сравнению с изображением ближайшего пакета.

Теперь понятно, почему на фотографии светового пакета (см. рисунок 2) получилось сильно размазанное изображение: дополнительное «расплывание» связано с тем, что пакет имеет протяженность в направлении луча зрения фотокамеры.

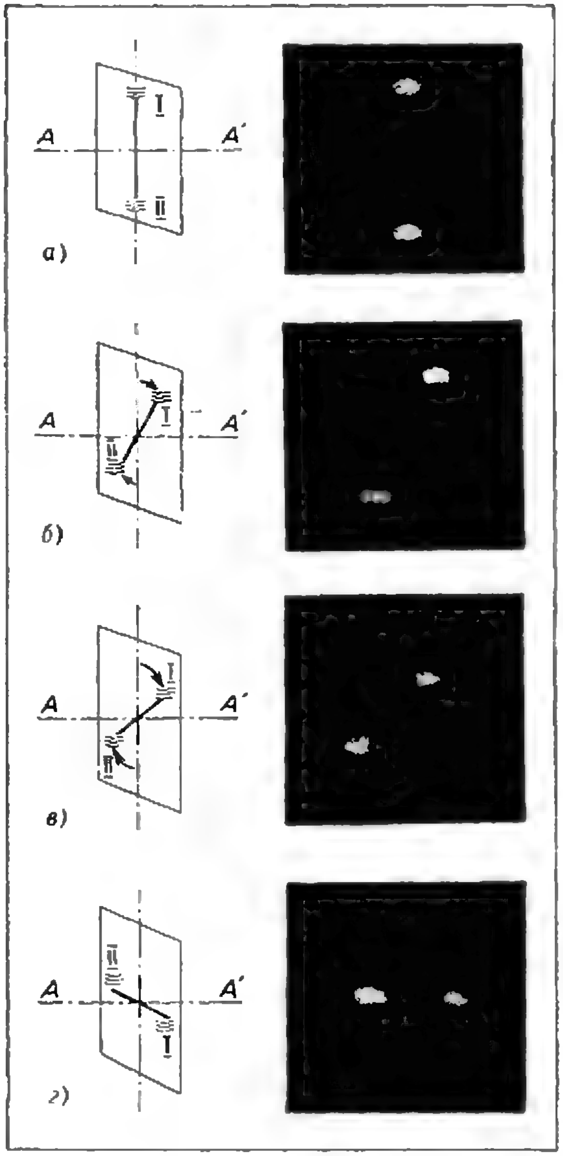


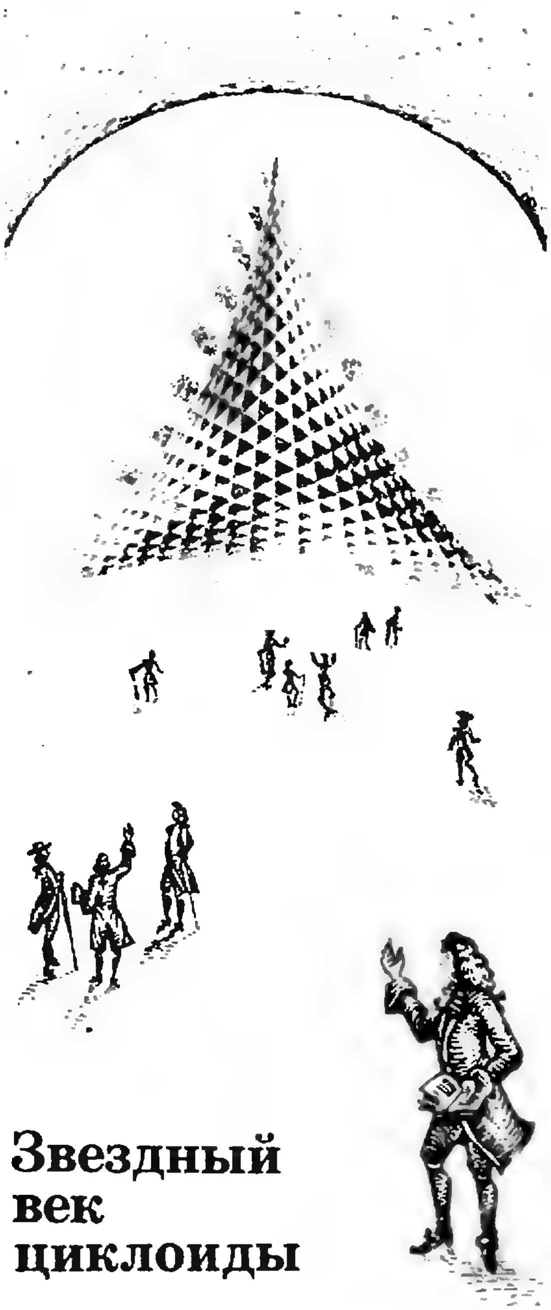
Рис. 4. Фотографии световых гантелей, по-разному ориентированных относительно «луча зрения» фотоаппарата. Время экспозиции 10^{-11} с.

Заключение

Итак, не всегда можно верить глазам своим. Глаз получает зрительную информацию с помощью световых волн. Фотоаппарат, по существу, повторяет устройство глаза. Испокон веку люди наблюдали только медленно движущиеся предметы. При этом, когда мы говорим о медленном движении, мы имеем в виду, что скорость мала по сравнению со скоростью света. В этом смысле самые быстрые земные движения являются медленными, и зрение дает правильное представление о форме предметов. Но если предметы движутся со скоростями, равными или близкими к скорости света, то наш глаз (и фотоаппарат) дает искаженную картину. Зная эту особенность нашего зрения, мы всегда можем внести необходимые поправки и восстановить истину. Нужно только с должной осторожностью относиться к показаниям наших чувств.

* * *

Тому, кто захочет подробнее ознакомиться с устройством замечательного затвора Дюге и деталями эксперимента по фотографированию светового импульса, советуем прочитать статью Н. Н. Малова «Как сфотографировали свет», которая была опубликована в 10 номере «Кванта» за 1974 год.



Звездный век циклоиды

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Циклоида сыграла беспрецедентную роль в истории математики XVII века, героического века анализа бесконечно малых. Быть может, наиболее красноречивые следы этого сохранились вдалеке от математики — в художественной литературе. В третьей части «Путешествий Гулливера» Джонатан Свифт рассказывает, как Гулливер попадает на летающий остров Лапуту и король, покровительствовавший науке и музыке, угощает его изысканным обедом. За бараньей лопаткой, вырезанной в форме равностороннего треугольника, и куском говядины в форме ромба последовал пудинг в форме циклоиды. Вероятно, в начале XVIII века трудно было представить себе более изощренную форму!

Лет через тридцать циклоида появляется на страницах «Жизни и мнений Тристрама Шенди, джентльмена», бессмертного романа Лоренса Стерна. Чудаковатый добряк Тоби Шенди, собираясь построить мост, который должен стать чудом фортификационного искусства, решает придать ему форму циклоиды: «...он переменил решение в пользу моста, изобретенного маркизом де Лопиталем, который так обстоятельно и научно описан Бернулли-младшим, как ваши милости могут убедиться в Acta Erud. Lips, an. 1695; такие мосты удерживаются в устойчивом равновесии свинцовым грузом, который их охраняет не хуже двух часовых, если мост выведен в форме кривой линии, как можно больше приближающейся к циклоиде».

К Лопиталю, Бернулли и к научному журналу Acta Eruditorium мы еще вернемся, а пока выясним, что могли знать о циклоиде современники Тоби Шенди, жившие в середине XVIII века.

Авторитетным источником информации является «История рулетты, называемой также трохоидой или циклоидой», датированная еще октябрем 1658 года и подписанная Амосом Деттонвиллем; как мы увидим, это псевдоним французского математика, физика и мыслителя Блеза Паскаля (1623—1662). Он пишет: «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние... ибо это не что иное, как путь колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься с земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота, считая, что колесо — идеальный круг, гвоздь — точка его окружности, а земля — идеально плоская». В этом тексте содержится определение циклоиды: это

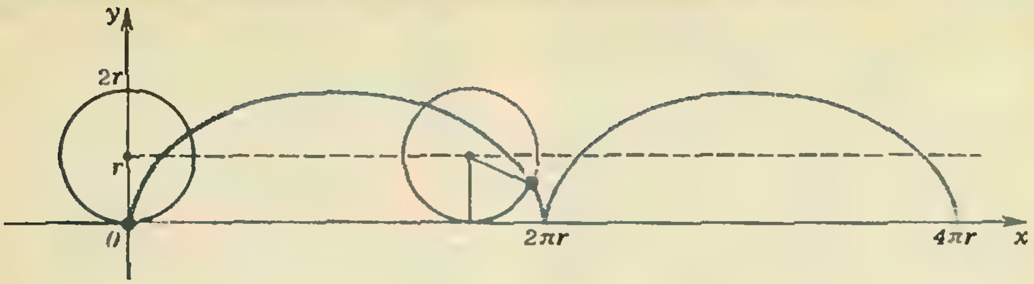


Рис. 1.

траектория точки окружности, которая катится без скольжения по прямой. Точка, поднимаясь с нижнего положения, описывает симметричную выпуклую арку, причем при каждом обороте получается новая арка; в точке соприкосновения арок имеется острие (рис. 1).

Термин «циклоида» (происходящая от круга) принадлежит Галилею (1564—1642), который, по-видимому, первый рассмотрел ее. «Рулетта» — французский термин (от глагола rouler — катать), «трохоида» — его греческий эквивалент. Разнобой в терминологии отражает энергичную франко-итальянскую дискуссию о приоритете в открытии циклоиды: Паскаль утверждает, что Марен Мерсенн (1588—1648) рассмотрел ее уже в 1615 году, раньше Галилея.

Эпициклоиды в системе Птолемея

Достойно внимания удивление Паскаля по поводу того, что циклоиду не рассмотрели древние. В чем причина этого? Дело в том, что для древних источником появления новых кривых были разнообразные задачи на геометрические места точек, а траектории криволинейных движений были за пределами интересов большинства математиков древности.

Лишь новая механика, начавшаяся в первые годы XVII века с работ Галилея о движениях, перестроила идеологию математиков, обратив их внимание на кривые механического происхождения, и знаменательно, что именно Галилей ввел в рассмотрение первую такую кривую — циклоиду.

Хотя древние не знали циклоиды, они знали и успешно пользовались ее близкой родственницей — эпициклоидой. *Эпициклоиды* (см. 2-ю с. обложки, *а, б*) получаются как траектории точек окружности, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности (при качении по внутренней стороне получаются кривые, называемые *гипоциклоидами*; обл., *д*). Эпициклоиды встречаются в геоцентрической системе мира*) Птолемея (85?—165?). Еще Платон (427—347 до н. э.) и Аристотель (384—322 до н. э.) считали, что все планеты, а также Солнце и Луна, равномерно вращаются по окружностям с центром в Земле. Эта теория не только входила в противоречие с численными данными, полученными по составлении астрономических таблиц, но не объясняла ряд грубых качественных эффектов. Скажем, Марс, который, как правило, двигался по звездному небу против часовой стрелки, в окрестности противостояния начинал двигаться по часовой стрелке («попятное движение»). Это легко объяснить в рамках гелиоцентрической системы, но ученые древности, не сомневавшиеся в основном догмате геоцентрической системы, решили примирить ее с данными астрономических наблюдений. Аполлоний и вслед за ним Птолемей сохраняют аксиому о том, что в мире царит равномерное круговое движение, но полагают, что движение планет является сложным; планета движется по окружности, центр которой в свою очередь вращается по большой окружности с центром в Земле. Оказывается, что можно так подобрать скорости этих двух вращений, что траектории планет будут содержать петли, на которых будет происходить «попятное движение». Эти траектории не будут в точности эпициклоидами, но очень близкими кривыми. Если предположить, что по неподвижной окружности катится не окружность, а круг, то его граничные точки будут описывать эпициклоиды, а внутренние точки описывают иные кривые, у которых острия сглаживаются и которые называются *укороченными эпициклоидами* (обл., *г*). А если мысленно расширить катящийся круг (не меняя неподвижного), скажем, «надеть» на него реборду, то внешние точки будут описывать *удлиненные эпициклоиды*, у которых острия превратятся в петли с «попятным» движением (обл., *в*).

---

*) В геоцентрической системе мира Земля считается центром Вселенной, в отличие от гелиоцентрической системы Коперника, согласно которой планеты вращаются вокруг Солнца.

Эта удивительная по остроумию конструкция не только смоделировала качественные эффекты типа «попятного движения», но и с различными модификациями позволила многие сотни лет учитывать все многочисленные данные астрономических наблюдений. Даже когда Николай Коперник (1473—1543) предложил гелиоцентрическую систему мира, ему очень нелегко было сделать свою систему конкурентноспособной с существующим тогда вариантом птолемеевой системы с точки зрения согласованности с данными наблюдательной астрономии.

Интересно, что и Коперник (как позднее и Галилей) не отказался от принципа, по которому в мире царит равномерное вращение и сохранил круговые орбиты (необходимость в них отпала лишь после появления эллиптических орбит Ке́плера (1571—1630)). В частности, он хотел сконструировать прямолинейное движение из круговых (считалось, что по прямым движутся кометы). И он придумал способ! Пусть по внутренней стороне окружности радиуса 1 катится без скольжения окружность радиуса 1/2. Ее точки описывают некоторые вырожденные гипоциклоиды — диаметры неподвижной окружности: каждая точка колеблется взад-вперед по своему диаметру. Удивительно красивая картина, в которой приятно разобраться самому!

Циклоиду заметили

Мы не знаем в точности, когда Галилей заинтересовался циклоидой: было ли это уже в его молодости, в начале века, когда он открыл законы движения, или когда, через тридцать лет, борясь с наступающей слепотой, он писал «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Эта книга была призвана сохранить для потомков замечательные открытия Галилея по механике, остававшиеся неопубликованными. Галилей находился тогда в ссылке по приговору суда инквизиции. Жил он на вилле Арчетри близ Флоренции. Последние годы Галилея скрашивали два его ученика: совсем юный Винченцо Вивиани (1622—1647) и более умудренный опытом Эванджелиста Торричелли (1608—1647). Они помогли учителю в завершении его замыслов, но, чем дальше, тем больше им приходилось самостоятельно разрабатывать задачи Галилея, на которые у него не было сил.

Галилей ясно понимал, какие задачи про циклоиду естественно использовать в первую очередь: нужно построить касательные к кривой и найти площади ее сегментов и других связанных с ней криволинейных фигур. Первая из них относится, в современной терминологии, к дифференциальному исчислению, а вторая — к интегральному.

Касательная к циклоиде

В Италии касательную к циклоиде первым построил Вивиани, а затем Торричелли придумал очень изящную конструкцию этой касательной, основанную на сложении движений. Он вначале рассматривал параболу, по которой летит тело, брошенное горизонтально (или под углом). Это движение, следуя Галилею, получается сложением равномерного прямолинейного движения и равноускоренного свободного падения. Скорости этих движений известны и, складывая векторы скоростей по правилу параллелограмма, мы получаем вектор скорости движения, направленный по касательной к параболе (очень поучительно самостоятельно воспроизвести эту простую выкладку; напомним, что касательная к параболе $y \approx x^2$ через точку (x, x^2) соединяет эту точку с $(x/2, 0)$. Это рассуждение Торричелли. Удивительно, что его не провел (или не опубликовал?) Галилей.

Движение же по циклоиде складывается из равномерного движения вдоль горизонтали и равномерного вращения, причем величины скоростей этих движений равны (условие отсутствия скольжения). Складывая горизонтальные вектор скорости в точке циклоиды с вращательным вектором (касающимся производящего круга и имеющим ту же длину), получаем, что касательная к циклоиде проходит через верхнюю точку круга в соответствующем положении (проделайте это построение на рисунке 1).

Аналогичное рассуждение (возможно, несколько раньше) придумал француз Жиль Персонн, по прозвищу Роберваль (1602—1675). Заслуга Роберваля заключалась в том, что он не ограничился рассмотрением циклоиды, а разработал общую технику проведения касательных при помощи представления кривых в виде траекторий сложных движений. Его метод был по началу вполне конкурентноспособен в сравнении с другими способами проведения касательных, имеющимися в это время.

И все же будущее принадлежало более прямым методам, разрабатывавшимся Пьером Ферма (1601—1665) и Рене Декартом (1596—1650). Эти методы не требовали «индивидуального подхода» к каждой кривой (например, подбора составляющих движений). А позволяют ли эти методы провести касательную к циклоиде — кривой механического происхождения?

Выяснилось, что методом Ферма касательная строится без всяких затруднений, а вот метод Декарта, ориентированный на рассмотрение кривых, заданных многочленами, отказал. Но не таков Декарт, чтобы дать повод утверждать, что он не справился с задачей, доступной его коллегам. Он придумывает удивительную по красоте механическую теорию. В модернизированном варианте речь идет о том, что при образовании циклоиды мы рассматриваем не движение изолированной материальной точки, а движение твердой пластины — катящегося круга. При этом в каждый момент времени движение, как правило, мало отличается от поворота пластины около некоторого (мгновенного) центра вращения. Скорости во всех точках перпендикулярны радиусу из мгновенного центра вращения. В случае циклоиды, как легко понять, мгновенный центр вращения — это не центр катящегося круга, а его точка касания с направляющей прямой. Отсюда немедленно следует сформулированное выше правило проведения касательной (ведь вписанный прямой угол опирается на диаметр).

Площадь и «спутница» циклоиды

Покончим с касательными и перейдем к площадям. В случае циклоиды французские математики рассмотрели эти задачи даже раньше, чем задачу о касательных (возможно, причиной была бо́льшая уверенность в задачах о площадях). Прежде всего речь идет о вычислении площади сегмента под полной аркой циклоиды. Вивиани и Торичелли утверждают, что Галилей знал, что площадь этого сегмента равна утроенной площади производящего круга. Роберваль доказал эту теорему в 1634 году. Несколько слов об очень красивом рассуждении Роберваля. В каждый момент времени Роберваль проецирует наблюдаемую точку циклоиды на вертикальный диаметр катящегося круга и следит, как перемещается эта проекция. Получается новая кривая, которую Роберваль назвал «спутницей циклоиды» (рис. 2) А потом выяснилось, что эта очень симметричная кривая является ...сдвинутой синусоидой! Именно так (а не как график синуса) впервые появилась в математике синусоида. Площадь под синусоидой считается легко: если разрезать ее средними горизонтальной и вертикальной линиями, то получаются части, из которых составляется прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и r (см. рис. 2, где $r=1$), то есть площадь равна $2\pi r^2$. Что касается двух оставшихся фигур (их назвали *лепестками Роберваля*), то они как нельзя лучше иллюстрировали очень популярный в те годы прием вычисления площадей — принцип Бонавентуры Кавальери (1598—1647). Он состоит в том, что если две фигуры при пересечении любыми горизонталями дают отрезки равной длины,

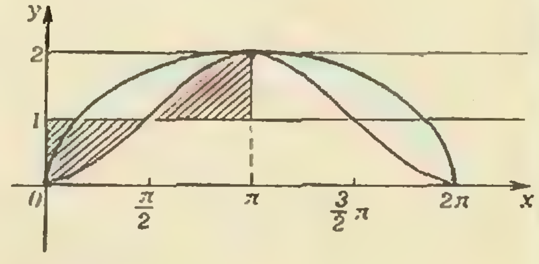


Рис. 2.

то они имеют одинаковые площади. Кавальери мыслил себе фигуры состоящими из «неделимых» — параллельных слоев нулевой толщины — и утверждал, что при взаимных сдвигах слоев площадь не меняется. Лепестки Роберваля имеют те же пересечения с горизонталями, что и отсекаемая вертикальным диаметром половина катящегося круга, значит, по принципу Кавальери их общая площадь равна площади πr^2 этого круга, а общая площадь под аркой циклоиды равна $3\pi r^2$. Не правда ли, очень остроумное рассуждение!

Задачи Мерсенна и конкурс Паскаля

На этом кончается первый этап «жизни» циклоиды. Первые связанные с ней задачи решились очень красиво, и циклоида прочно заняла место в поле зрения крупнейших ученых. Но оставались нерешенными задачи, которые естественно было поставить в рамках развивающегося анализа бесконечно малых. Пропагандистом новых задач (в случае про циклоиды) был Мерсенн, которого мы уже упоминали. О нем и его своеобразной роли в истории науки стоит сказать еще несколько слов. У францисканского монаха Мерсенна были собственные достижения и в математике и в физике (например, он довольно точно измерил скорость звука), но много выше его заслуги как организатора науки. В то время, когда еще не было научных журналов, почти все научные связи осуществлялись через Мерсенна: он был своеобразным «почтовым ящиком». Ученые из разных стран сообщали ему о полученных результатах, понимая, что он оперативно даст знать о них заинтересованным коллегам и конкурентам (а авторитет Мерсенна был гарантией сохранения приоритета). Мерсенн следил за актуальными задачами, передавал их тем ученым, которым было естественно ими заниматься. С 1639 года начались «мерсенновские четверги», которые посещали Этьен и Блез Паскали (отец и сын), Дезарг, Мидорж, Роберваль, словом все серьезные ученые, находившиеся в тот год в Париже. Эти «четверги» были предвестником Французской Академии наук. На примере Христиана Гюйгенса (1629—1695), с которым Мерсенн переписывался с 1646 года, видно, как заботился Мерсенн о становлении молодого таланта. Он начинает с учебных задач, переходит к нерешенным, предвещает, что его юный корреспондент станет «Аполлонием и Архимедом ... грядущего века», и, наконец, ставит задачу (обещая премию за решение) о приведенной длине физического маятника, которую Гюйгенс сможет решить лишь через несколько десятилетий, не прекращая все это время думать над ней.

Что касается циклоиды, то Мерсенн считал, что не следует ограничиваться вычислением площади полного сегмента циклоиды, а надо рассмотреть сегменты, отсекаемые различными горизонталями, нужно найти центры тяжести этих сегментов, объемы тел вращения, ими образованных, и т. д. Мерсенн, вероятно, правильно оценивал то, что в этих задачах элементарные манипуляции с «неделимыми слоями» Кавальери не ведут к цели (нужно сосчитать интеграл от синуса в общем виде). Поэтому Мерсенн нацеливал на эти задачи самого многообещающего и оригинального из своих коллег — Блеза Паскаля.

Паскаль, однако, занялся этими задачами лишь весной 1658 года, когда он находился в монастыре Пор-Рояль после тяжелых потрясений и когда казалось, что он окончательно разочаровался в математике и уже никогда не вернется к ней. Сохранились рассказы его сестры Жильберты Перье и племянницы Маргариты о последнем контакте Паскаля с математикой. Он вспомнил о задачах Мерсенна, когда не мог уснуть из-за жесточайшей зубной боли. Размышления над циклоидой отвлекали от боли и постепенно захватили Паскаля. К утру он знал решение давно не поддававшейся задачи и... совершенно исцелился от зубной боли. Паскаль не собирался записывать полученный результат, но его друг герцог де Роанне уговорил его сделать это, успокоив тем, что возвращение к математике было вызвано «внушением свыше». Герцог выделил 60 пистолей для организации конкурса на решение задач Мерсенна.

В июне 1658 года рассылается циркулярное письмо крупнейшим геометрам Европы с предложением решить шесть задач о циклоиде. Срок конкурса — 1 октября — предельно краток. Письмо подписано псевдонимом «Амос Деттонвилль»,— это анаграмма псевдонима Паскаля «Луи де Монтальт», под которым в это время выходили его «Письма к провинциалу». 7—9 октября было сообщено о закрытии конкурса, 24 октября были подведены итоги. Мерсенн не дожил до решения своих задач. Его функции «почтового ящика» перенял Пьер Каркави (1603—1684), который и возглавил вместе с Робервалем жюри. На призыв Деттонвилля откликнулись крупнейшие математики: Джон Валлис (1616—1703) решил все задачи, но к его решениям были претензии, Гюйгенс решил четыре задачи. А жюри присудило приз Деттонвиллю, который использовал премиальные средства на публикацию решений. «Работа выполнена столь тонко, что к ней ничего нельзя прибавить»,— писал Гюйгенс канонику де Слюзу, участнику конкурса, решившему одну задачу.

Конкурс Паскаля сыграл большую роль в научной жизни. Для грядущего анализа бесконечно малых было принципиально перейти от рассмотрения конкретных примеров к общим методам. Рассмотрения Паскаля практически не использовали специфики циклоиды и без затруднений могли быть перенесены на общую ситуацию. Однако Паскаль сам этого не сделал, а оценено это было задним числом, когда Лейбниц (1646—1716), который и разработал наряду с Ньютоном общие методы дифференциального и интегрального исчисления, обратился по рекомендации Гюйгенса к работе Паскаля. «Меня озарило новым светом»,— писал Лейбниц и удивлялся, что Паскаль не сформулировал общего приема, как будто «на его глазах была пелена». Трудно угадать, почему это произошло. Часто ученые не видят ходов, которые по прошествии некоторого времени кажутся естественными. Но опять-таки можно предположить, что Паскаля уже не волновали судьбы математики: он отдавал свои последние силы напряженным размышлениям о смысле жизни, о месте человека на Земле.

С конкурса Паскаля началась новая жизнь циклоиды. Участники конкурса не ограничились задачами, предложенными Паскалем. Например, Кристоффер Рен (1632—1723), талантливый английский математик, прославленный архитектор (создатель собора св. Павла в Лондоне), не достиг больших успехов в конкурсе, но сообщил теорему, которая произвела очень сильное впечатление на математиков. Он доказал, что длина одной арки циклоиды равна $8r$.

Часы с циклоидальным маятником

Другой участник конкурса 28-летний Гюйгенс отвлекся на решение задач про циклоиду от построения маятниковых часов, которому он с увлечением отдавал все свое время уже второй год. Первый экземпляр часов появился в середине 1658 года. С тех пор Гюйгенс был занят их усовершенствованием. Идея, лежащая в основе маятниковых часов, состоит в том, что период колебаний маятника — это постоянно воспроизводимая единица времени, которая в силу открытого Галилеем изохронного свойства маятника (независимость периода от амплитуды размаха) остается неизменной при затухании колебаний. Гюйгенс хотел создать морской хронометр, при помощи которого можно будет измерять долготу на борту корабля (по разности местных времен на борту и в порту отплытия; время отплытия и «помнит» хронометр). Проблема измерения долготы была проблемой века. Не удивительно, что ведущие морские державы назначали баснословные премии за достаточно надежный способ измерять долготу на борту.

Вскоре после того как стало известно об изобретении Гюйгенса, выяснилось, что Галилей обладал идеей маятниковых часов, но очередь до нее дошла лишь за год до смерти, когда уже не было сил для реализации. Не смог справиться с этой задачей и его сын Винченцо, которому было завещано завершение проекта.

Создавая первые часы, Гюйгенс обнаружил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний математического маятника не точно. Оно справедливо лишь для малых углов размаха. А как же обеспечить изохронность? Гюйгенс понимает, что для этого надо уменьшать длину маятника по мере отклонения от вертикали. Но каков должен быть закон уменьшения длины подвеса? Для первых часов Гюйгенс эмпирически подбирает форму «щек», на которые частично наматывается нить подвеса по мере удаления от вертикали (рис. 3). Но он не может найти способа вычислить форму щек. Отчаявшись, он убирает щеки в конструкции 1658 года (поставив ограничитель амплитуды). Но через год щеки появились вновь,— теперь уже Гюйгенс знал точный закон изменения длины подвеса, при котором имеет место изохронность колебаний: в промежутке, как мы помним, он участвовал в конкурсе Паскаля!

Галилей ясно понимал, что задача о колебании математического маятника эквивалентна задаче о движении тяжелой материальной точки по круговому желобу (который совпадает с траекторией конца маятника). На точку, движущуюся по желобу, и конец маятника наложены одинаковые связи. Утверждение об изохронности эквивалентно тому, что, с какого бы места на желобе точка ни начинала движение, она окажется в нижней точке через один и тот же момент времени. Удивляться возможности существования такого эффекта не следует: если движение начинается на большей высоте, то точка проходит больший путь, но набирает по дороге большую скорость. Впрочем, как выяснил Гюйгенс, круговой желоб, в противоречии с мнением Галилея, свойством изохронности не обладает. И Гюйгенс ищет форму желоба, при которой время спуска не зависит от начальной точки. Такую кривую Гюйгенс назвал *таутохроной* (ее называют также *изохроной*). Оказалось, что таутохрона — это... перевернутая циклоида!

Но это еще не решает задачу до конца. Нужно придумать способ подвески (форму щек), при которой конец маятника будет двигаться по циклоиде. И опять совпадение: Гюйгенс ранее интересовался развертками кривых — траекториями точек нитей, наматываемых на криволинейные препятствия. Имевшийся опыт позволил ему выяснить, что для получения циклоидального маятника щекам надо придать также форму циклоид. При этом циклоида, отвечающая концу маятника, и циклоида щеки должны быть сдвинуты на полоборота. Длина маятника равна $4r$; когда он полностью наматывается, он оказывается в нижней точке щеки. Отсюда мгновенно получается упомянутая выше теорема Рена: периметр щеки вдвое больше длины маятника.

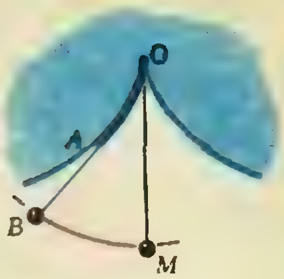


Рис. 3.

Гюйгенс уверен в фундаментальности обнаруженных им свойств циклоиды: «...потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

С 1661 года начинаются испытания морского варианта маятниковых часов, но постепенно становится ясно, что надежного морского хронометра на этом пути создать не удастся. Однако теоретические изыскания Гюйгенса по математике и механике, предпринятые в связи с совершенствованием часов, были столь значительны, что его книга «Маятниковые часы» (1673 г.), в которой они подытожены, наряду с книгами Галилея и Ньютона, является великим памятником эпохи становления классической механики.

В «Маятниковых часах» Гюйгенс констатировал, что циклоида исследована «точнее и основательнее других кривых».

Последняя тайна циклоиды

Циклоиде довелось еще один раз удивить математиков, на закате века анализа бесконечно малых. Необходимость перейти от рассмотрения отдельных задач к построению общего метода *первым осознал Исаак Ньютон* (1643—1727), который во время «чумных каникул» в Линкольншире (1665—1667) построил свой метод «флюксий». Однако он не торопился публиковать его, сконцентрировавшись на получении разнообразных результатов этим методом. Фейерверк этих результатов сверкает на страницах «Математических начал натуральной философии» (1687), но метод здесь систематически не развивается, оставаясь на втором плане. С начала 70-х годов Готфрид Вильгельм Лейбниц, отвлекаясь от своих многочисленных государственных и научных дел, с возрастающим энтузиазмом начинает разрабатывать формализм дифференциального и интегрального исчисления (под сильным влиянием упоминавшейся работы Паскаля). Он узнает о работах Ньютона, а с 1676 года переписывается с ним. В отличие от Ньютона, Лейбниц активно привлекает внимание к своему методу как при помощи личных контактов, так и пользуясь страницами журнала «Acta Eruditorium» (помните, его читал дядя Тоби), выходящего с 1682 года.

В 1696 году на страницах «Acta Eruditorium» появилась заметка «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Вот ее формулировка: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B в кратчайшее время». Задача понравилась; Лейбниц называл ее «столь прекрасной и поныне неизвестной». Впрочем, Галилей в «Беседах» с энтузиазмом обсуждая, что тяжелая точка по отрезку прямой спускается медленнее, чем по ломаной с теми же концами, довольно уверенно утверждал, что быстрее всего точка спустится по четверти круга. Кривую наискорейшего спуска стали называть *брахистрохроной*. Но является ли она дугой окружности?

Своевременность задачи проявилась в том, что ее сравнительно быстро решили и оба брата Бернулли — Якоб (1654—1705) и Иоганн (1667—1748), и Лейбниц, и Лопиталь (1661—1704), и Ньютон (он представил анонимное решение, но по словам Иоганна Бернулли, «льва узнают по когтям»). Самым популярным стало решение самого И. Бернулли. Предложенный им ход был совершенно неожидан: он предложил заменить механическую задачу оптической. Нетрудно убедиться, что если рассмотреть оптическую среду, в которой скорость света в точке M равна $\sqrt{2gy}$, где y — разность высот точек A и M, то свет из точки A в B пойдет по брахистохроне (в силу принципа Ферма свет выбирает путь, на который уходит наименьшее время). После этого, пользуясь законом преломления, с одной стороны, и хорошо известным тогда свойством касательной к циклоиде (см. выше), легко вывести, что брахистохрона — это опрокинутая циклоида с острием в точке A!

Один из историков механики об этом писал так:

«Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу, умело пользуясь при этом тем, что случайно уже известно,— картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был ученым совсем другого рода. В нем было более сильное критическое начало, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил задачу о брахистохроне, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом мы находим у каждого из братьев лишь одну из тех двух сторон научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой».

Героическая история циклоиды завершилась с концом XVII века. Она так таинственно возникала при решении самых разных задач, что никто не сомневался, что она играет совершенно исключительную роль. Пиетет перед циклоидой держался долго, но прошло время, и стало ясно, что она не связана с фундаментальными законами природы, как, скажем, конические сечения. Задачи, приводившие к циклоиде, сыграли огромную роль в становлении механики и математического анализа, но когда величественные здания этих наук были построены, оказалось, что эти задачи являются частными, далеко не самыми важными. Произошла поучительная историческая иллюзия. Однако, знакомясь с удивительной историей циклоиды, можно увидеть много принципиальных фактов из истории науки.

Что же такое электризация трением?

Л. А. АШКИНАЗИ

— Опять наэлектризовалась, — вздыхаем мы, вынимая из проигрывателя пластинку, облепленную пылью. Слишком сухой воздух — и начинают электризоваться трущиеся о части ткацких и полиграфических машин нити, бумага, синтетические пленки; светочувствительные материалы засвечиваются — при электризации могут происходить электрические разряды, а они, как известно, светятся. Но если электризующуюся и липнущую к человеку одежду можно считать мелочью, то человеку, наэлектризовавшемуся от хождения по линолеуму, не до смеха — при приближении к металлическому оборудованию с его пальца срывается сантиметровая искра. Иногда достаточно снять с себя рубашку из синтетической ткани, чтобы при приближении руки в водопроводному крану получить ощутимый удар. А сколько чувствительных полупроводниковых приборов было испорчено электростатическими разрядами, пока не стали покрывать полы на монтажных участках проводящей краской.

Более серьезные последствия — и легко догадаться какие — могут быть от трения шин о сухую дорогу. Если машина из-за трения о дорогу наэлектризуется, входящего или выходящего человека может «дернуть», а искра рядом с цистерной бензина может вызвать пожар. Поэтому не для красоты висят сзади машин-цистерн для горючих веществ цепи, волочащиеся по дороге. Да и у обычных автомобилей часто есть такая ленточка из проводящей резины... Опасна электризация трением *в производственных помещениях*, где присутствуют пары или пыль горючих веществ, — вызываемые ею разряды могут приводить к взрывам. В США, например, с 1900 по 1959 год было зарегистрировано около двадцати таких взрывов: при этом погибло около десяти человек и был причинен ущерб на сумму два миллиона долларов. Есть от электризации трением и польза: это — простейший способ получения высоких напряжений. Помните электрофорную машину? А ее «старший брат» — генератор Ванн-де-Граафа — еще не так давно был наиболее распространенным источником высоких напряжений (до 20 МВ). И наконец, электризация трением — по-видимому, первое электрическое явление, которое изучали люди.

Тысячи лет назад люди знали, что при трении некоторых веществ одно о другое они, как мы бы сейчас сказали, электризуются. Не исключено, что древнеегипетские и древнегреческие жрецы поражали публику зрелищем гребня, притягивающего кусочки папируса. Однако, несмотря на столь древнюю историю, с элекризацией трением не все ясно до сих пор. Когда-то полагали, что есть некая электрическая жидкость, перетекающая от тела к телу при контакте, а тело с ее недостатком притягивается к телу с ее избытком.

Когда люди открыли электрон, они поняли, что наэлектризованное тело должно содержать избыток или недостаток электронов, и стали считать, что при трении электроны переходят от одного тела к другому. Но такое заключение было не вполне обосновано: в диэлектрике — на то он и диэлектрик — электроны не могут двигаться свободно. Существенный прогресс в понимании того, как происходит электризация трением, был достигнут в последнее десятилетие. Об этом и пойдет дальше речь. Эксперименты, о которых будет рассказано, выполнялись в 1969—1977 годах в Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе в Ленинграде. Два цилиндрика из хороших диэлектриков (тефлон, янтарь, рубин, оргстекло), диаметром 10 мм и высотой 14 мм, прижимались один к другому торцами и вращались со скоростью 0,5 об/с один относительно другого (рисунок 1,*а*). Через три оборота измерялись заряды цилиндриков, для чего они разъединялись и по очереди помещались в камеру, соединенную с электрометром (рисунок 1,*б*); потом они опять ставились один на другой, делалось еще три оборота, опять измерялись заряды, и так далее. Оказалось, что исходно нейтральные образцы при трении заряжаются. Сумма их зарядов, однако, остается равной нулю. Следовательно, в процессе переноса зарядов не участвует «третий лишний».

Далее, оказалось, что при вращении цилиндриков заряды их сначала постепенно увеличиваются (у одного — отрицательный, у другого — положительный), а при скорости примерно тридцать оборотов в секунду стабилизируются. Простое касание цилиндриков переноса заряда не вызывает, то есть существенно именно трение. Накопленный заряд сохраняется несколько недель, но только если держать образец в камере, лишенной доступа воздуха. На открытом воздухе заряд «утекает» за сутки — имеющиеся в воздухе ионы притягиваются к поверхностным зарядам образца и нейтрализуют их. (Между прочим, на этом эффекте основано действие одного из приборов, измеряющих дозу радиоактивного облучения: излучение ионизирует воздух, и образовавшиеся ионы нейтрализуют заряд на предварительно заряженном миниатюрном электроскопе: быстрота «спадания» листочков электроскопа может служить мерой радиоактивного излучения.) Если же образец лишен доступа воздуха, то нейтрализация поверхностных зарядов быстро прекращается, а из-за низкой собственной проводимости диэлектрика притока зарядов изнутри на поверхность образца практически нет.

Итак, почему разряжается образец, заряженный при электризации трением, понятно. Но почему он все-таки заряжается?

Приглядимся внимательнее к ионам, собирающимся на образце, и к самому образцу. Пусть наш образец — ионный диэлектрик, кристаллическая решетка которого состоит из ионов двух сортов, например Li^+F^-. Однако при его образовании получилось так, что вместо части ионов в нем пустые места — вакансии. Вакансии могут быть на месте ионов Li^+ и на месте ионов F^-, и если количество вакансий не одинаково, то кристалл будет иметь собственный заряд. Раз есть собственный заряд, то к образцу притягиваются из воздуха ионы. Вместе с прилипшими к его поверхности молекулами воды и газов воздуха они образуют

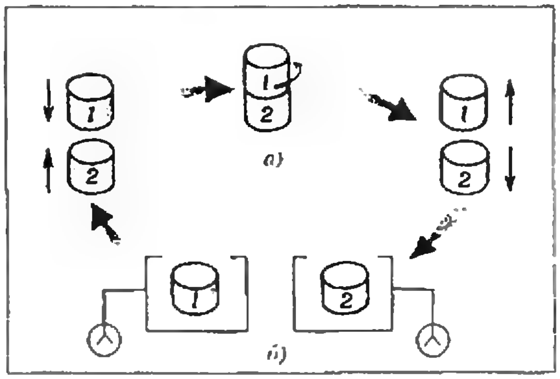


Рис. 1.

«шкурку». Заряд шкурки в точности равен собственному заряду образца, но, конечно, с обратным знаком (так что в целом образец нейтрален).

Остальное понятно — разные диэлектрики, разные собственные заряды и разные заряды шкурок. Потерли, перемешали шкурки — и получили заряженные куски.

Пусть, например, каждый цилиндрический образец имеет длину, равную диаметру. Тогда площадь торца будет составлять 1/6 от всей поверхности. Обозначим заряды шкурок на образцах (до трения) q_A и q_B и будем считать, что заряд каждой шкурки распределен по поверхности образца равномерно. Тогда после трения, когда шкурки на торцах перемешались и их заряды разделились поровну, полные заряды q'_A и q'_B новых шкурок будут состоять из 5/6 собственных старых зарядов и половины от суммы $^1/_6 q_A$ и $^1/_6 q_B$:

$$q'_A = \frac{5}{6} q_A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} q_A + \frac{1}{6} q_B\right) = q_A + \frac{1}{12}(q_B - q_A),$$

$$q'_B = \frac{5}{6} q_B + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} q_A + \frac{1}{6} q_B\right) = q_B + \frac{1}{12}(q_A - q_B).$$

Ясно, что раз заряд шкурки изменится (а это будет всегда, когда $q_A \neq q_B$), то изменится и заряд образца в целом.

А могут ли электризоваться два куска одного и того же диэлектрика? Если они имеют одинаковые собственные заряды, то нет. Но они могут иметь разные собственные заряды, то есть содержать разные количества вакансий, если условия образования кусков различались (например, один кусок ионного диэлектрика образовывался в окружении паров какого-то из входящих в него элементов, так что заполнялись все вакансии на месте ионов этого элемента, а вокруг другого куска давление паров было меньше, и вакансии на месте ионов остались). Поэтому и была обнаружена электризация при трении двух цилиндриков из одинакового, казалось бы, рубина.

Электризация происходит не только при трении. Фарадей писал в 1833 году, что электризация возникает при деформации кристаллов, в том числе при их раскалывании. Однако время для исследования этого процесса, видимо, тогда еще не пришло. Почти через сто лет, в 1930 году, было замечено, что электризуется при расщеплении слюда, но детальное изучение электризации при расщеплении началось спустя четверть века.

Как уже говорилось, кристалл диэлектрика «сам по себе», то есть с чистой поверхностью, без шкурки, не нейтрален. В нем есть вакансии, и, как правило, они распределены по кристаллу неравномерно. Заряд же шкурки, нарастающей на образец, во многих случаях можно считать распределенным по его поверхности почти равномерно. Когда мы ломаем кристалл пополам, половинки получают «в наследство» по половине объема и поверхности, а с ними — по полшкурки. Но заряд шкурки делится при этом честно, поровну, заряд же объема, если он был распределен неравномерно, делится не поровну. В этом случае заряды получившихся при расколе частей будут иметь противоположные знаки, так как у одной части заряд шкурки будет больше собственного (объемного), а у другой — меньше. Но есть и другая причина неравномерного деления заряда.

Кристалл LiF устроен простейшим из возможных способов: кубическая решетка, ионы Li^+ и F^- чередуются вдоль любой оси. При ударе кристалл раскалывается обычно по плоскости,

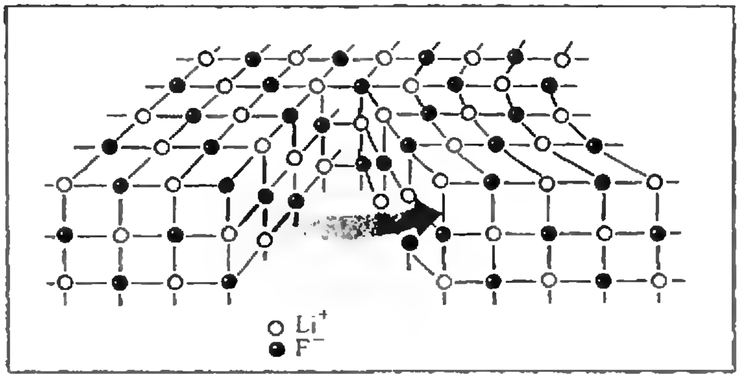


Рис.2.

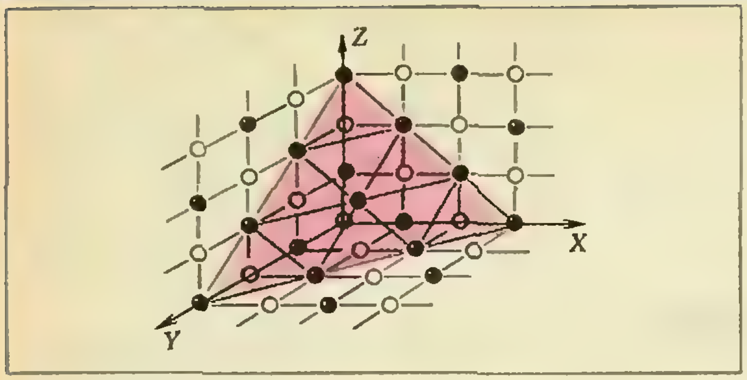


Рис. 3.

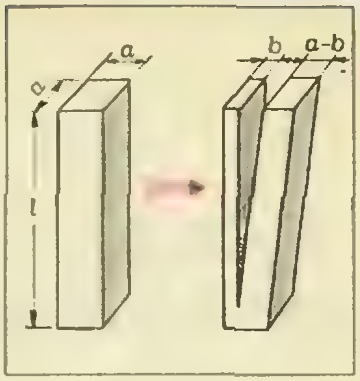


Рис. 4.

перпендикулярной осям кристаллической решетки (рисунок 2). Но иногда направление трещины может измениться, и она пойдет по диагонали в плоскости, в которой лежат ионы одного сорта (рисунок 3).

В этом случае на одной поверхности трещины сразу после раскола оказываются ионы одного знака, а на другой — противоположного. И действительно, при движении зонда электрометра вдоль поверхности раскола такие участки были обнаружены.

Но значительно более сильное неравенство зарядов отдельных кусков было обнаружено при расколе образца на неодинаковые части. Действительно, пусть длинный кристалл с квадратным торцом со стороной, равной a, и длиной $l \gg a$ (рисунок 4) раскалывается на две части, толщины которых b и $a-b$. Если ϱ — средняя плотность собственного объемного заряда целого кристалла, то поверхностная плотность σ заряда шкурки вычисляется из условия равенства нулю суммы зарядов:

$$Q_{\text{кристалла}}+Q_{\text{шкурки}}=0.$$

Пусть площадь торцов мала и заряд шкурки на них можно не учитывать. Тогда

$$4al\sigma+\varrho la^2=0.$$

Отсюда находим плотность заряда шкурки:

$$\sigma=-a\varrho/4.$$

Считая, что плотности объемных зарядов левой и правой частей одинаковы (и равны ϱ), находим заряд, например, левой части, равной сумме объемного и поверхностного зарядов:

$$\varrho abl-\frac{\varrho al}{4}(a+2b)=\frac{\varrho al}{2}\left(b-\frac{a}{2}\right)<0,$$

что и было обнаржено на опыте.

...Разумеется, это далеко не все, что можно рассказать о механизмах электризации. Массу интересных вопросов можно задать о моменте, когда трещина разделяет кристалл (электроны могут «перепрыгивать» со стенки на стенку), об острие сапфирового «рубила» (электроны могут переходить и на него), наконец, о механизме электризации при трении диэлектрика по металлу, о механизме электризации при сжатии кристаллов и так далее. На некоторые из этих вопросов ответы уже получены. Остальные — ждут своего времени. И, может быть, вас.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, z таких, что

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1},$$

где p — простое, $p>3$, а x и y не делятся на p.

Указание: примените Малую теорему Ферма: $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, где a — натуральное и $(a, p)=1$ (см. «Квант», 1978, № 10, с. 7).

2. Докажите, что при $p=3$ любое решение диофантова уравнения

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1},$$

состоящее из попарно взаимно простых натуральных чисел, содержит число кратное 3.

О. А. Черепанов

Не беда, что нет функций

А. И. ПРИВЕНЬ

— Папа, ты знаешь, Маше Сидоровой родители купили новенькую «Электронику БЗ-36» с функциями. И у других ребят она есть...

— А что, твоя «Электроника БЗ-30» плохо работает?

— Работать-то она работает, но на ней же нет функций: только арифметические действия делает, и корни извлекает. А у нас в девятом классе всё синусы и косинусы, логарифмы, показательные функции. Не носить же мне всюду с собой таблицы Брадиса!

— Не беда, что нет функций. Ты же у нас математиком хочешь быть, значит соображать должна. Ряд Тейлора на кружке вам рассказывали? Ну тогда слушай...

Как сосчитать логарифм

Сначала немного теории. Ты, конечно, знаешь, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Это равенство с достаточной точностью выполняется, если x близко к 0. Тогда получаем $(1+x)^{1/x}\approx e$, или $1+x\approx e^x$, откуда

$$\ln(1+x)\approx x, \qquad (1)$$

то есть, отняв от числа единицу, получим его натуральный логарифм. А как быть с большими числами?

Довольно просто. Ведь

$$\ln a=\ln(a^{N/N})=N\ln(a^{1/N}).$$

Если N достаточно велико (о конкретных значениях поговорим позже), то $a^{1/N}\approx 1$ и $\ln(a^{1/N})\approx a^{1/N}-1$.

На машинке $a^{1/N}$ вычисляется легко, если $N=2^n$ — достаточно лишь n раз нажать на клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$. А затем для нахождения искомого логарифма нужно вычесть единицу и умножить на соответствующую степень двойки:

$$\ln a=\ln a^{N/N}=N\ln a^{1/N}\approx(a^{1/N}-1)\cdot N. \qquad (2)$$

Осталость лишь найти оптимальное значение N. Из равенства (1) вытекает

$$\ln(1+x)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}x\approx\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right),$$

то есть

$$(1+x)^{1/2}=\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x. \qquad (3)$$

Чтобы оценить точность этого равенства, воспользуемся формулой Тейлора*). Нам достаточно трех первых членов:

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

В нашем случае $a=1$; $f(a+x)=\sqrt{1+x}$;

$$f(a)=\sqrt{a}=1;\ f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2};$$

$$f''(a)=-\frac{1}{4a^{3/2}}=-\frac{1}{4},$$

то есть $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$;

остальные члены при $x\to 0$ можно отбросить.

Таким образом, погрешность формулы (3) примерно равна $x^2/8$. Зададимся величиной погрешности $\Delta=5\cdot10^{-9}$. Это наибольшая величина, которая не сказывается на показаниях 8-разрядного калькулятора.

Далее просто: $\Delta=\frac{x^2}{8}=5\cdot10^{-9}$, $x=2\cdot10^{-4}$. Это значение x должно обеспечить минимум погрешности. Так, значение ln 2, вычисленное по формуле $\ln 2=2^{12}\,(2^{1/2^{12}}-1)=4096\times$ $\times0{,}0001691$, равно 0,693207 вместо табличного 0,693147.

Однако тут сказывается один чисто «машинный» эффект: извлечение корня (как и другие вычисления) проводится с недостатком в последнем знаке, и эта ошибка с каждым разом увеличивается. В конце концов она перекрывает величину $\frac{x^2}{8}$, и формула для Δ становится неприемлемой. Этот эффект заметно сказывается при $n>10$, где $n=\log_2 N$ — число извлечений корня. В результате тот же ln 2, вычисленный по той же формуле на микрокалькуляторе БЗ-30, равен 0,69263... Поэтому в случае $n>10$ целесообразно принять $x=(3{,}5\div 7)\cdot 10^{-4}$.

---

*) О формуле Тейлора см. статью В. Р. Почуева в предыдущем номере «Кванта».

Тот же ln 2, вычисленный на той же машинке при $n=11$, равен 0,69304 с относительной ошибкой 0,014 %.

Итак, мы нашли алгоритм вычисления $\ln a$:

$$\boxed{a}\ \underbrace{\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\dots\boxed{\sqrt{\ }}}_{n\ \text{раз}}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{2^n}$$

Как быть с десятичными логарифмами, ясно из формулы:

$$\lg a=\frac{\ln a}{\ln 10}=\frac{\ln a}{2{,}303}.$$

Для $2<a<10$ достаточно точные результаты дает выражение

$$\lg a\approx(a^{2^{1\ 10}}-1)\cdot 445,\ \text{где}\ 445\approx\frac{2^{10}}{\ln 10}.$$

Как считать показательную функцию

Для вычисления функции e^x преобразуем выражение, полученное для $\ln a$. Мы имели $\ln a\approx N(a^{1/N}-1)$, при большом N, значит,

$$a\approx\left(\frac{\ln a}{N}+1\right)^N.$$

Сделав замену $x=\ln a$, получим $a=e^x$ и поэтому

$$e^x\approx\left(\frac{x}{N}+1\right)^N=\left(\frac{x}{N}+1\right)^{2^n}. \qquad (4)$$

Чтобы быстро пользоваться этим соотношением на простейшем калькуляторе, желательно превратить его в *цепочный* алгоритм, то есть такой алгоритм, при котором не нужно записывать промежуточные результаты. Для этого возведение в степень N (или n раз в квадрат) и нужно выполнять, повторяя последовательность команд $\boxed{\times}\ \boxed{=}$ для модели Б3-30 или

$$\dots\boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\dots,$$

для моделей типа Б3-14. При этом результат все время остается во «временной памяти» калькулятора, и поэтому его не нужно вновь вводить в машинку после каждой итерации. Таким образом, алгоритм нахождения e^x выглядит так (ниже n — это натуральное число, притом $N=2^n$):

$$\boxed{x}\ \boxed{:}\ \boxed{2^n}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \underbrace{\boxed{\times}\ \boxed{=}}$$

Вычисление функции 10^{a} отличается лишь тем, что после набора 2^n результат умножается на $\ln 10\approx 2{,}303$.

Осталась функция x^y. Прологарифмируем ее:

$$\ln(x^y)=y\ln x=Ny\ln(x^{1/N})\approx\approx Ny(x^{1/N}-1).$$

Отсюда по формуле (4)

$$x^y=e^{\ln(x^y)}\approx e^{Ny(x^{1/N}-1)}\approx\approx\left[\frac{Ny(x^{1/N}-1)}{N}+1\right]^N==[y(x^{1/N}-1)+1]^N. \qquad (5)$$

Формула (5) представляется программой:

$$\boxed{x}\ \underbrace{\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\dots\boxed{\sqrt{\ }}}_{n}$$

$$\boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{y}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \underbrace{\boxed{\times}\ \boxed{=}}_{n}$$

Как считать тригонометрические функции

Здесь формула Тейлора дает два удобных выражения для синуса и косинуса

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}=\frac{(x^2-6)x}{6};$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=1+\frac{(x^2-12)x^2}{24}.$$

Первое выполняется достаточно точно при $x\leqslant\frac{\pi}{4}$; то же можно сказать и о втором. Величина $\frac{x^4}{24}$ начинает заметно сказываться при $x>\frac{\pi}{6}$, при $x<\frac{\pi}{6}$ можно упростить формулу для $\cos x$, отбросив третий член:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

Ограничение $x\leqslant\frac{\pi}{4}$ не опасно, так как тригонометрические функции всегда можно привести к аргументу, меньшему $\frac{\pi}{4}$.

* * *

Как видишь, совсем немного математики — и простейший микрокалькулятор становится пригодным для вычисления практически всех «школьных» функций.

Мостик из бумаги

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

I. Одно из важнейших свойств любых инженерных конструкций — их жесткость. Понятно, что ни под действием собственной силы тяжести, ни под влиянием внешних нагрузок конструкция не должна изменять свою форму. Правда совсем избежать деформации невозможно, но нужно так выбрать материал, тип деталей, чтобы изменения формы происходили до определенного, заранее рассчитанного предела. Эта задача, стоящая перед инженерами, почти всегда дополняется другой: сделать конструкцию наиболее простой, дешевой, легкой, истратить на нее как можно меньше материалов.

Лавируя между этими противоречащими друг другу требованиями, инженеры-конструкторы находят оптимальное для данной задачи решение. В ряде отраслей промышленности, как например в авиастроении, вопрос о сочетании максимальной жесткости и одновременно минимальной массы жизненно важен.

Великим конструктором является природа. Давно уже решила она многие задачи, волнующие инженеров. В ходе естественного отбора возникли такие шедевры, как перо птицы, стебель бамбука, полые кости наземных животных и т. п.

Мы недаром привели в качестве примера природные конструкции, имеющие в своей основе трубку — полый цилиндр. Почему они получили такое широкое распространение?

Попробуем разобраться в этом. А начнем с весьма простого эксперимента.

II. Опыт, который предлагается провести, известен в литературе как «Опыт Умова» (или «Прочность трубки»).

Николай Алексеевич Умов (1846—1915) был крупным русским физиком, на протяжении почти двадцати лет — профессором Московского университета. Наиболее важные его работы связаны с вопросом переноса энергии, он впервые ввел понятие скорости и направления движения энергии, потока энергии, плотности энергии в данной точке и т. п. Известен был Умов и как прекрасный лектор, уделяющий много внимания демонстрационным экспериментам.

В домашних условиях опыт можно выполнить с помощью совсем простой «аппаратуры». Вырежьте из плотной бумаги два прямоугольника длиной около 20 и шириной около 8 см. Затем, используя в качестве подставок две стопки книг, так, как это показано на рисунке 1, положите на них один из листков и нагрузите его легкими гирьками (а если таких нет, то монетами). Под малым грузом листок — своеобразный мостик — сильно прогнется (см. рис. 1,*а*).

Оказывается, жесткость нашей конструкции можно увеличить в десятки раз, причем очень простым способом. Для этого второй листок сверните в трубку и обмотайте ниткой, чтобы он не развертывался. Вы увидите, что под прежним грузом трубка практически не прогибается. Только значительно бóльшая гиря заставит ее заметно деформироваться (см. рис. 1,*б*).

А насколько жестко, например, перо птицы? Проведите аналогичные испытания. В наших опытах гусиное перо длиной около 10 см «держало» гирю массой 0,5 кг.

«Опыт Умова» можно существенно видоизменить. Изготовьте из одинаковых листков бумаги так называемые профили: углы с равными и неравными сторонами, швеллеры, тавры и двутавры, гофрированный лист (рис. 2). Убедитесь, что все они имеют гораздо бóльшую жесткость, чем исходный мостик из бумаги. Для этого проведите ряд сравнительных опытов: определяйте величину прогиба при равных грузах или добивайтесь одинакового прогиба, нагружая конструкцию различными гирьками.

III. Теперь надо, хотя бы на качественном уровне, разобраться, от чего же зависит жесткость конструкции по отношению к изгибу.

Проделайте еще один опыт. Для него вам понадобится прямоугольный брусок из резины (или другого упругого материала) с поперечным сечением приблизительно 1—2 см^2 и длиной около 10 см.

Нанесите на брусок масштабную сетку из продольных и поперечных прямых линий (рис. 3,*а*). Затем согните брусок — сетка исказится (рис. 3,*б*). При этом поперечные линии останутся прямыми, но повернутся относительно друг друга и перестанут быть параллельными, а продольные линии искривятся. Нетрудно заметить, что материал бруска на одной стороне испытывает растяжение, а на другой — сжатие. Но среди продольных линий есть одна, идущая посередине, которая не изменяет своей длины. Очевидно, что и весь горизонтальный слой материала, лежащий за этой линией, не испытывает деформации. Поэтому он носит название нейтрального слоя (или нейтральной поверхности).

Из этого опыта следует, что чем дальше от нейтральной поверхности расположен участок бруска, тем большее растяжение (или сжатие) он испытывает. Тогда, согласно закону Гука, и сила упругого сопротивления изгибу возрастает по мере удаления от нейтрального слоя. Другими словами, основной вклад в жесткость бруска вносит слой, наиболее далекий от нейтрального. А отсюда вывод: чтобы увеличить жесткость конструкции, надо расположить ее основной материал как можно дальше от этого слоя. Вот почему листок бумаги в «Опыте Умова» почти не оказывает сопротивления нагрузке, а, например, двутавр из того же материала ведет себя значительно жестче.

Однако удалением основного материала от нейтральной поверхности слишком увлекаться нельзя. Так, если двутавровую балку сделать в середине очень тонкой, она станет неустойчивой и будет скручиваться. В то же время правильно сконструированный двутавр при одинаковой жесткости со сплошной балкой квадратного сечения оказывается в четыре с половиной раза легче.

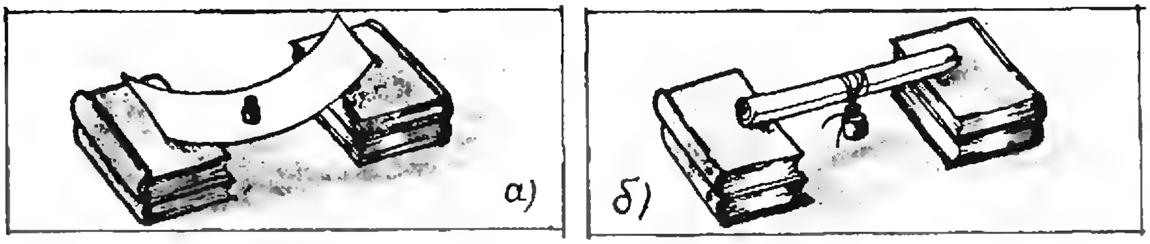


Рис. 1.

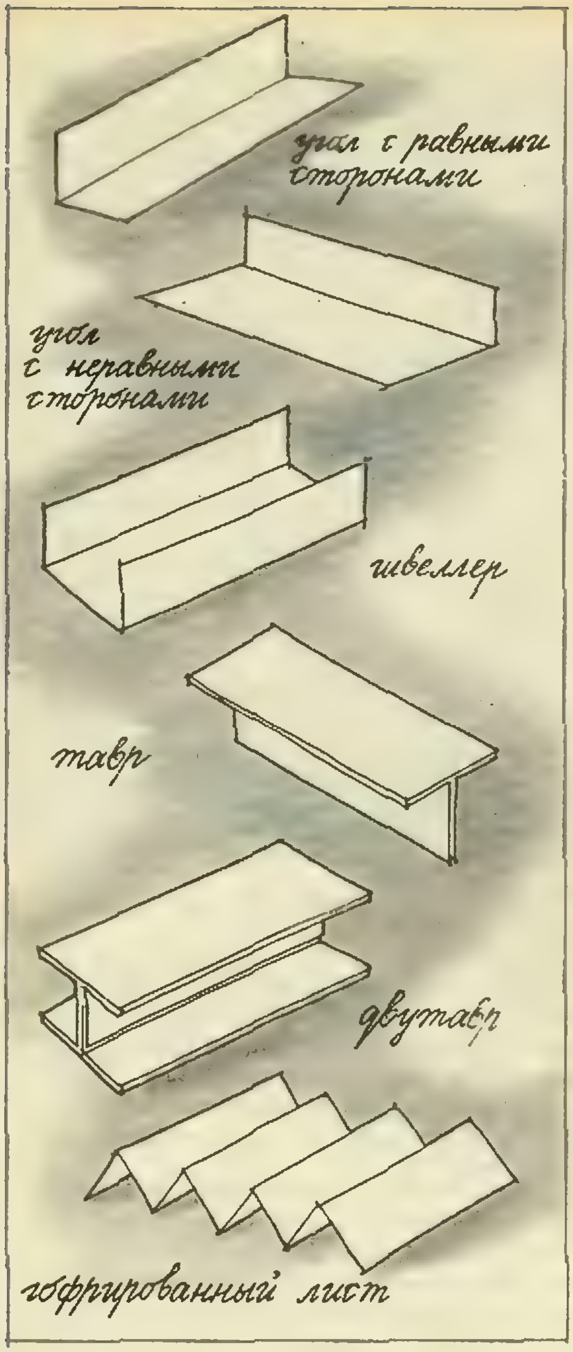


Рис. 2.

Полый цилиндр в силу своей симметрии одинаково реагирует на нагрузку с любой стороны, и материал его достаточно удален от нейтральной поверхности, вот почему во многих случаях именно он является оптимальной конструкцией. По сравнению со сплошной цилиндрической балкой полая мало проигрывает в жесткости по отношению к изгибу, но сильно выигрывает в экономии материала. Например, если внутри сплошного цилиндра диаметром *D* сделать отверстие диаметром *D*/2, то, как показывают расчеты, жесткость балки уменьшится всего на 6—7 %, а экономия материала составит около 25 %.

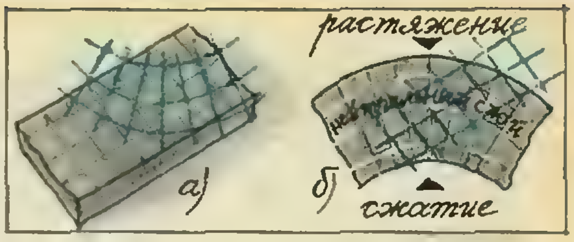


Рис. 3.

Теперь понятно, почему природа так широко использует трубчатые конструкции. А родились они в процессе эволюции. Пока жизнь сосредоточивалась в воде, особой необходимости в малой массе скелета не было — помогала выталкивающая сила жидкости. Поэтому у акул, например, сохранился от предков массивный хрящевой скелет. Но вот живые существа вышли на сушу. Теперь прочность скелета должна была сочетаться с возможно меньшей его массой. Миллионы лет длился процесс превращения хрящевых образований в трубчатые кости и закончился созданием прочной, легкой и весьма экономной по расходованию материала конструкцией.

IV. Попытки построить бумажный мостик между двумя стопками книг привели к тому, что мы на опыте (а потом и качественными рассуждениями) убедились в том, что его надо делать не плоским, а профилированным.

Есть и другой способ увеличить жесткость мостика — использовать конструкцию, называемую фермой. Простейшую ферму, представленную на рисунке 4, легко изготовить самостоятельно. К середине листка бумаги приклейте поперечную полоску, соединенную натянутыми нитками с концами

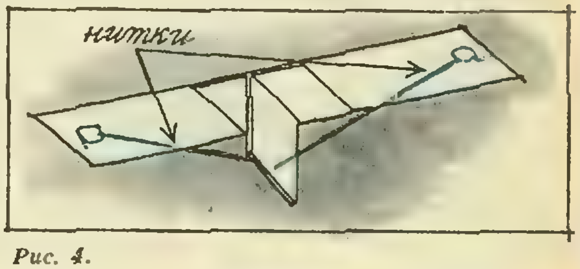


Рис. 4.

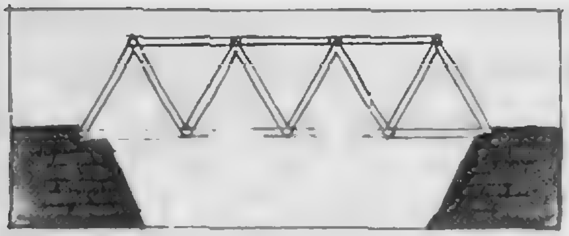


Рис. 5.

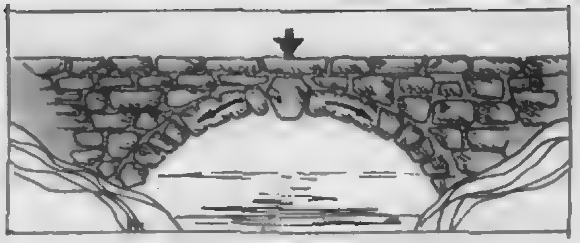


Рис. 6.

листка. (Подумайте, как прочно закрепить концы ниток.) Теперь, если мостик нагрузить, он начнет прогибаться и нитки натянутся сильнее. Разорвать их достаточно трудно, и поэтому такая конструкция значительно жестче, чем плоский листок.

Фермы очень часто используются в строительстве мостов (рис. 5). С их помощью напряжение изгиба переводится в напряжение растяжения или сжатия балок и стержней, роль которых в нашем опыте сыграли нитки.

Можно упомянуть еще одну очень распространенную в строительстве конструкцию — арочный мост (рис. 6). Арки были известны с глубокой древности, чуть ли не с начала четвертого тысячелетия до нашей эры. Принцип их действия состоит в трансформации вертикальных нагрузок в боковые давления арочного кольца, которые передаются на основание (пяту) арки.

Вообще различных конструкций мостов существует великое множество. Ведь, кроме решения инженерных и экономических вопросов, создатели моста должны еще «привязать» его облик к местности, добиться того, чтобы он был красив. Никакого общего рецепта здесь не существует, и, может быть, это и к лучшему. Вспомним хотя бы мосты Ленинграда — какое прекрасное разнообразие всевозможных решений!

В заключение статьи мы хотели бы напомнить читателям, что для многих выдающихся изобретателей и инженеров создание в детстве макетов самых разных машин и конструкций было как бы первым шагом к выбору своей дальнейшей специальности. «Интерес к технике у меня появился при изготовлении строительных моделей и не столько моделей, сколько, главным образом, макетов (в период 6—7 классов)»,— так писал крупный ученый, конструктор и инженер в области транспорта академик В. Н. Образцов.

Возвращаясь к тем опытам, которые мы вам предлагали проделать, следует отметить, что сконструировать прочный и красивый мостик из бумаги, применив необычные «инженерные» находки, тоже не легко. Если это занятие вас увлечет, и модель получится интересной, мы будем рады получить (а возможно, и опубликовать) ее фотографии и описание.

Арочный мост, который в начале нашего века создал швейцарский инженер Робер Майар. Фотографию и чертежи этого моста можно встретить буквально в каждом общем труде по архитектуре. Мост поражает зрителя смелостью формы и совершенством инженерной конструкции.

Заочная олимпиада по программированию

17 февраля 1985 года Учебно-производственный центр вычислительной техники Октябрьского района Москвы и институты Электронных управляемых машин Минприбора СССР и Проблем информатики АН СССР провели традиционную (шестую) Московскую городскую олимпиаду по программированию для школьников, в которой участвовали около 200 человек.

Журнал «Квант» предлагает всем школьникам и учащимся ПТУ, умеющим программировать (кроме москвичей), задачи этой олимпиады в качестве задания *Заочной олимпиады по программированию.* Решения отправляйте не позднее 1 августа (по почтовому штемпелю) на адрес «Кванта», написав на конверте: «Олимпиада по программированию». Присланные решения будут оцениваться жюри под председательством доктора физико-математических наук А. Л. Брудно. Всем участникам будут присланы отзывы об их работах. Победители получат Дипломы журнала «Квант».

Имейте в виду, что описки снижают оценку решения. Снижают оценку и алгоритмы с излишним числом действий или массивами, без которых можно обойтись. Хорошие алгоритмы и экономно написанные программы оценку повышают. В каждой работе засчитываются только 3 задачи с более удачными решениями.

Задачи приведены в порядке убывания трудности. Принимаются решения на любых языках программирования. Перед решением надо дать словесное описание алгоритма.

Задачи

1. **Разложение на слагаемые.** Напечатать все способы представления натурального числа n суммой натуральных чисел. Перестановка слагаемых новым способом не считается.

2. **Равные элементы.** Задан массив чисел $P[1:m, 1:n]$. Каждая строка массива упорядочена по возрастанию. Найти и отпечатать число, встречающееся во всех строках, и надпись *NET*, если такого числа не окажется.

3. **Несоставляемое число.** Задан массив натуральных чисел $M[1:n]$. Найти и отпечатать минимальное натуральное число, не представимое суммой элементов массива M. Сумма может состоять и из одного слагаемого, но каждый элемент массива может входить в нее только один раз.

4. **Тетраэдры.** На гранях двух равных правильных тетраэдров M и N написаны числа $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ на одном, и $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ на другом (в том же порядке). Можно ли совместить тетраэдры так, чтобы на совпавших гранях оказались написаны одинаковые числа? Напечатать *DA* или *NET*.

5. **Самое частое число.** В массиве чисел $M[1:n]$ найти число, повторяющееся максимальное количество раз. Если их несколько, то одно из них.

6. **Системы счисления.** В целочисленном массиве $M[1:9]$ записаны разряды (цифры) некоторого натурального числа в i-ричной системе счисления ($M[1]$ — разряд единиц и т. д.). Отпечатать разряды этого числа в j-ричной системе счисления. Числа i и j не более числа десять.

7. **Боковая диагональ.** Найти сумму элементов $A[i, j]$ массива $A[1:m, 1:n]$, имеющих заданную разность индексов $i-j=k$. Число k — целое, но не обязательно положительное.

* * *

Пояснение. Здесь массив $P[1:m, 1:n]$ обозначает массив чисел P_{ij} для $i=1, 2, \ldots, m$ и $j=1, 2, \ldots, n$, а запись $P[i, j]$ обозначает элемент P_{ij}. Если сказано, что массив $P[1:m, 1:n]$ задан, то значит заданы числа m, n и значения элементов массива. Аналогичный смысл имеют обозначения и задания других массивов.

В программах (решениях) ученики вводят извне заданные значения и печатают их. Некоторые оформляют решения в виде подпрограмм (в алголе — procedure, в фортране — subroutine и т. д.). В тех языках, где размеры массивов нужно задавать числами (как на фортране), ученики их выбирают произвольно.

«Хорошие решения» должны укладываться (с точностью до постоянного множителя) в следующие количества действий: $m \cdot n$ (задача 2), n^2 или $n \cdot \log n$ (задачи 3 и 5), $\min\{m, n\}$ (задача 7), считая n и m большими числами.

Задачи

1. В корзине лежат 20 грибов: белые, подосиновики и подберезовики. Сколько в ней белых грибов, если подберезовиков в ней в 9 раз больше, чем подосиновиков?

2. Восстановите деление:

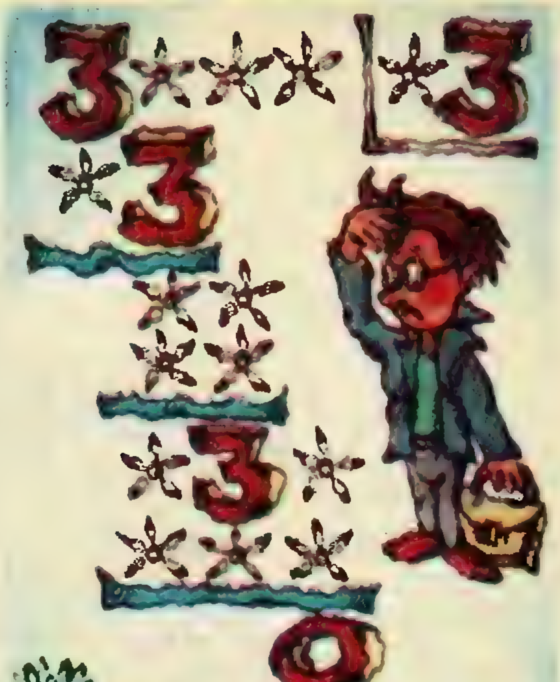
```
3***|*3
*3
 **
 **
 *3*
 ***
  0
```

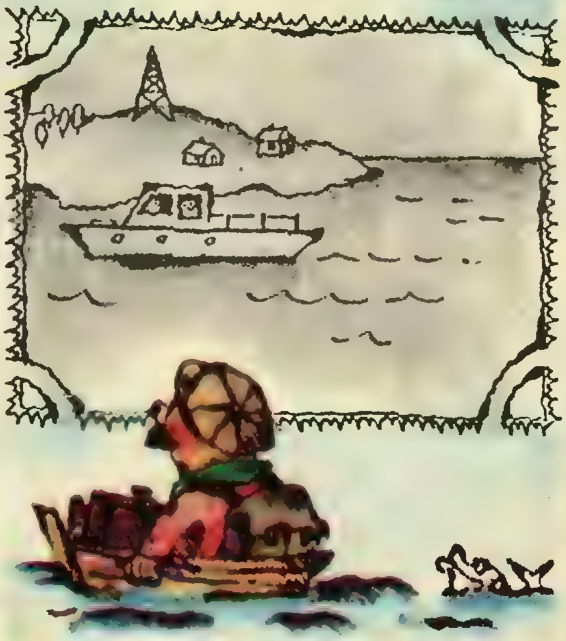
3. Поверхность кубика 1×1×1 нельзя оклеить целиком полоской бумаги 1×6, не допуская разрывов. Можно ли такой кубик оклеить полоской бумаги 1×12 в два слоя?

4. Рассматриваются всевозможные треугольники со сторонами $a<2$, $b<3$, $c<4$. Найдите длину наибольшей из высот таких треугольников.

5. Фотограф сделал свой снимок, стоя в лодке (см. рисунок). Оцените длину изображенного катера, считая, что фотографом были вы.

Эти задачи нам предложили С. Н. Олехник, Н. К. Антонович, В. В. Произволов, Г. А. Гальперин, Я. Л. Калда.





БИЛЛЬ ВЫЛЕТАЕТ В ТРУБУ

Но это был Белый Кролик. Он медленно трусил назад, с волнением глядя по сторонам, словно что-то искал. Алиса услышала, как он бормочет про себя: «Ах, Герцогиня! Бедные мои лапки! Бедные мои усики! Она велит меня казнить! Как пить дать, велит! Где же я их потерял? Тут он заметил Алису.

— Эй, Мери-Энн,— сердито крикнул он. Беги-ка скорей домой и принеси мне пару перчаток и веер! Да поторопись! Алиса так испугалась, что со всех ног бросилась исполнять поручение. «Он, верно, принял меня за горничную,» — думала она на бегу. В эту минуту она увидела чистенький домик. На двери была прибита медная дощечка, начищенная до блеска, а на дощечке было написано: «Б. Кролик». Алиса без стука вошла и побежала по лестнице наверх. «Как странно, что я у Кролика на побегушках!» Размышляя таким образом, она пробралась в маленькую комнатку,

так задрожала, что

?2

и прислушалась.— Мери-Энн! — кричал голос.— Неси-ка сюда перчатки! Да поторапливайся! Вслед за тем на лестнице послышался топот маленьких ног. Алиса поняла, что это Кролик ее ищет, и

Делай, что тебе говорят!

Алиса еще немножно подождала, но все было тихо. Немного спустя послышался скрип колес и гул голосов.

— Эй, Билль! Тащи-ка ее сюда!

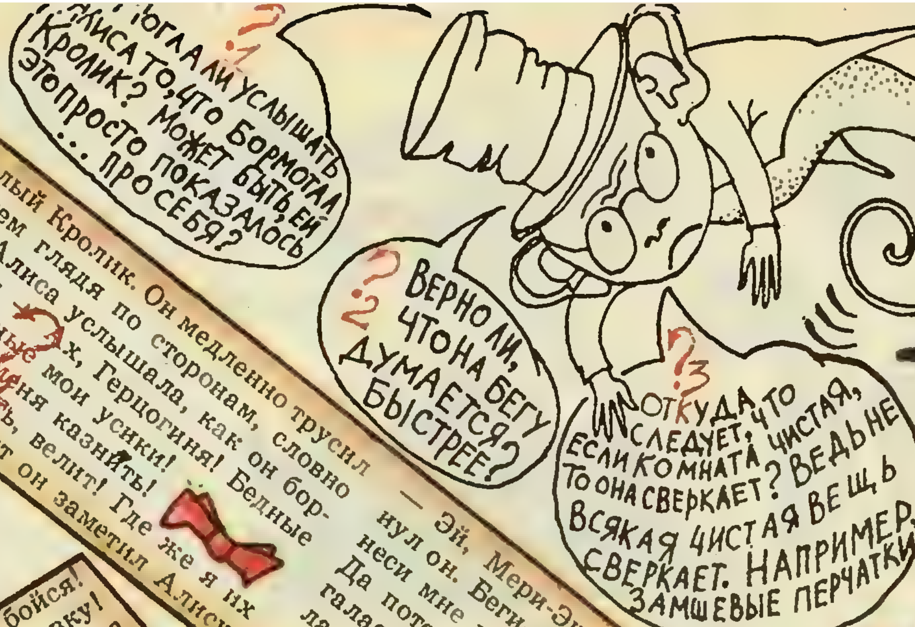
— Надо сначала их связать! Они и до середины не достают!

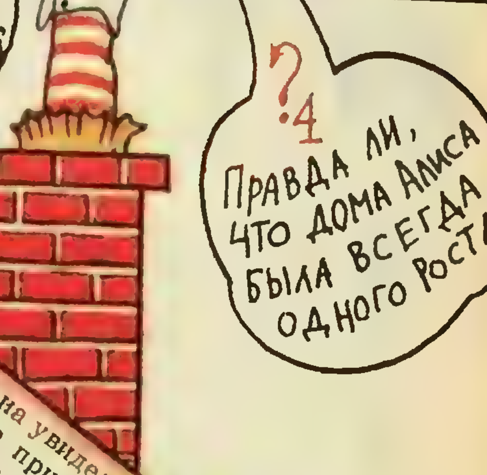
— Достанут, не бойся!

— Эй, Билль! Лови веревку!

— Осторожно! Это черепица шатается... — Сорвалась! Падает! — Головы береги! Послышался громкий треск. — Кто полезет в трубу? — Я не полезу! — Пусть лезет Билль! — Эй, Билль! Слышишь? Хозяин велит тебе лезть!

— Ах вот оно что! — сказала про себя Алиса. — Значит, лезть приходится Биллю? Я бы ни за что не согласилась быть на его месте. Камин здесь, конечно, невелик, а все же лягнуть его я сумею! Алиса просунула ногу подальше в камин и стала ждать. Наконец


?1 Могла ли Алиса услышать то, что бормотал Кролик? Может быть, ей это просто показалось ... про себя?
?2 Верно ли, что на бегу думается быстрее?
?3 Откуда следует, что если комната чистая, то она сверкает? Ведь не всякая чистая вещь сверкает. Например, замшевые перчатки


?4 Правда ли, что дома Алиса была всегда одного роста

ЛАБИРИНТ ДОМА КРОЛИКА

зеркающую чистотой. У ок-
на стоял стол; а на нем,
ак она и надеялась, ле-
жал веер и несколько
ар крошечных пер-
аток. Алиса взяла
ер и пару пер-
аток и совсем

уже собралась выйти
из комнатки, как вдруг
увидала у зеркала малень
кий пузырек. Алиса откры-
ла его и поднесла к губам.
«Стоит мне что-нибудь прогло-
тить,— подумала она,— как тут
же происходит что-нибудь интере-
сное.» Так оно и случи-
лось. Не успела *она* от-
пить и половины, как упер-
лась головой в потолок.
— Ну, хватит,— сказала она.
Я и так уже в дверь не пролезу.
Зачем только я так много выпила!
Увы! было уже поздно, она все ро-

сла и росла
Пришлось ей
выставить одну
руку в окно, а
одну ногу засу-
нуть в дымоход.
К счастью, дейст-
вие напитка на
этом кончилось.

«Как хорошо было
дома! — думала Алиса.— Там
я всегда была одного роста!
И все же ... Такая жизнь
мне по душе. Интересно, что
же со мной произошло?»
Тут под окнами послышался
чей-то голос. Она замол-
чала

весь дом
зашатался.
Кролик подо-
шел к двери и
толкнул в нее
лапкой. А так как Али-
са уперлась в нее локтем,
дверь не поддавалась. Алиса услы-
шала: — Что ж, обойду дом кругом
и залезу в окно... «Ну, нет!» — по-
думала Алиса. Подождав, пока он,
должен был подойти к окну, она
высунула руку. Послышался крик,
зазвенело разбитое стекло.
Видно, он упал в теплицы, в кото-
рых выращивали огурцы.
Потом раздался серди-
тый крик. — Пат! Пат! — кричал
Кролик. Что это там в окне?
— Рука, конечно, ваша честь!
— Дубина, какая ж это рука?
Ты когда-нибудь видел такую
руку? — Оно-то так, только
это рука! — Ей там
во всяком случае
не место! Иди и
убери ее, Пат! Наступило долгое
молчание. Алиса с трудом разли-
чала тихий шепот: — Ваша честь,
не лежит у меня сердце... Не надо!
Прошу вас... — Трус ты эдакий!

она услышала,
что в дымоходе
прямо над ней кто-
то шуршит и скребется.
— А вот и Билль! — ска
она про себя и изо
всех сил поддала ногой.
Сначала она услышала, как
все закричали: — Билль! Билль! Вон летит
Билль! Потом голос Кролика:
— Эй, там, у кустов! Ловите его!
Потом молчание и снова
взволнованные голоса: — Дайте
ему бренди! — Не в то горло... Нако-
нец раздался тоненький, слабый голос.
— Спасибо, больше не нужно.
Мне легче... — Нужно сжечь дом! — ска-
зал вдруг Кролик. Алиса крикнула во

1. Разбойнику, приговоренному к казни, Герцогиня сказала: «Клянусь честью, тебя повесят, если ты сейчас солжешь, и утопят, если скажешь правду!». Разбойник, подумав немного, ответил так, что Герцогиня не смогла выполнить своей угрозы. Что сказал разбойник?

2. Вы вошли в темную комнату. В коробке у *вас всего* одна спичка. В комнате находятся свеча, керосиновая лампа и готовая к растопке печь. Что вы зажжете в первую очередь?

3. Два человека собирались поужинать. Один из них принес 3 огурца, *второй* — 2 огурца. Тут пришел третий, попросил поесть и обещал заплатить за это. Все съели поровну, после чего третий оставил 5 пенсов и ушел. Как первые два человека должны разделить *эти деньги?*

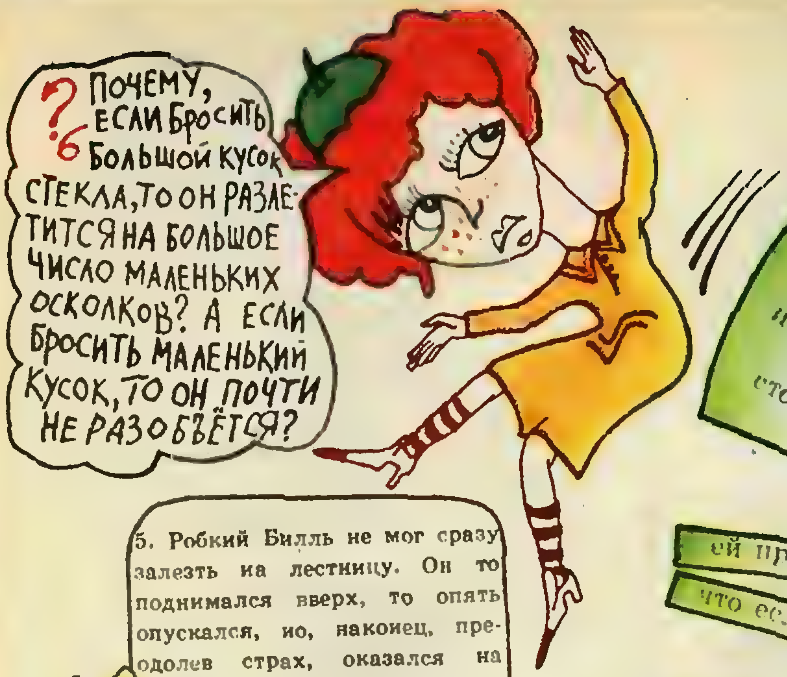
4. Пат приближался к домику с
скоростью 0,5 м/с, а удалялся с
скоростью 10 м/с, так что чере
21 секунду он снова оказался возле
Кролика. На каком расстоянии о
домика стояли Пат и Кролик вна
чале?

весь голос: — Попробуйте только, я натравлю на вас Дину! Мгновенно наступила мертвая тишина. «Интересно, что они теперь будут делать? — подумала Алиса. — Если бы они хоть что-нибудь соображали, они бы сняли крышу!» Минуты через две внизу опять началось движение. Алиса услышала, как Кролик сказал: — Для начала хватит одной тачки. «Тачки чего?» — подумала Алиса. Недоумевала она недолго. В следующую минуту в окно посыпался град мелких камешков. Некоторые попали ей прямо в лицо. «Сейчас я это прекращу», — подумала Алиса. — Перестаньте! — крикнула она во весь голос. — А то худо будет. Снова наступила мертвая тишина. Алиса меж тем с удивлением заметила, что камешки, упав на пол, тотчас превращаются в пирожки. Тут Алису осенило. «Если я съем пирожок, — подумала она, — со мной обязательно что-нибудь случится. Рас мне больше нек да, так что скорее всего я стану меньше!» Она проглотила один пирожок и с радостью заметила, что росту в ней поубавилось. Как только она уменьшилась настолько, что смогла пройти в дверь, она тотчас выбежала из дому и увидала под окнами целую толпу птиц и зверюшек. В середине лежал на земле бедный Ящерка Билль, две морские свинки поддерживали ему голову и чем-то поили из бутылки.

Увидев Алису, все бросились к ней, но она пустилась наутек и вскоре оказалась в дремучем лесу.

— Прежде всего нужно принять прежний вид, — сказала Алиса, пробираясь меж деревьев. — А потом найти дорогу в тот чудесный сад. Так и поступлю — лучше плана не придумаешь! И вправду, план был замечательный — такой простой и ясный. Одно только плохо: Алиса не имела ни малейшего представления о том, как все это осуществить. Она с тревогой вглядывалась в чащу, как вдруг прямо у нее над головой кто-то громко тявкнул. Она вздрогнула и подняла глаза. Гигантский щенок смотрел на нее огромными круглыми глазами и тихонько протягивал лапу, стараясь коснуться ее. — Бе-е-д-ненький, ма-а-ленький! — сказала Алиса заискивающе и попробовала посвистать ему, но губы у нее дрожали, и свист не получился. А что если щенок голоден? Чего доброго еще съест, как перед ним ни заискивай! Алиса нагнулась, подняла с земли палочку и не отдавая себе отчета в том, что делает, протянула ее щенку. Щенок взвизгнул от счастья, подпрыгнул всеми лапами в воздух и ухватился за палку. Алиса увернулась и спряталась за куст чертополоха, испугавшись, как бы щенок на радостях ее не затоптал. Только она показалась из-за куста, как щенок снова бросился на палку, но не рассчитал силы и полетел кувырком. «Играть с ним, — подумала Алиса, — все равно, что играть с лошадью — того и гляди, погибнешь под копытами!» Алиса снова юркнула за чертополох. А щенок не мог оторваться от палки: отбегал подальше, с хриплым лаем бросался на нее, а потом снова отбегал. Наконец он устал и, тяжело дыша, уселся поодаль, высунув язык и полуприкрыв свои огромные глаза. Время улизнуть было самое подходящее. Алиса не стала терять ни минуты. Она бежала, пока совсем не задохнулась от уста лости и лай щен тих в отдал

МОЖНО ЛИ ПО ТОПОТУ УСТАНОВИТЬ РАЗМЕР НОГ? ИЛИ СКОРЕЕ ГАБАРИТЫ? ?5

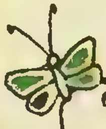

?6 ПОЧЕМУ, ЕСЛИ БРОСИТЬ БОЛЬШОЙ КУСОК СТЕКЛА, ТО ОН РАЗЛЕТИТСЯ НА БОЛЬШОЕ ЧИСЛО МАЛЕНЬКИХ ОСКОЛКОВ? А ЕСЛИ БРОСИТЬ МАЛЕНЬКИЙ КУСОК, ТО ОН ПОЧТИ НЕ РАЗОБЬЁТСЯ?

нии. Тогда она остан вилась и, прислонясь к стеблю лютика, стала обмахиваться его листом. — А щенок-то какой чудесный! — сказала задумчиво Алиса.

— Я бы могла его научить разным фокусам, если б... если б только я была нужного роста! Да, кстати, чуть не забыла, мне бы надо еще *подрасти*! Дайте-ка вспомнить, как это делается? Если не ошибаюсь, нужно что-то съесть или выпить. Только вот что? И вправду, что? Алиса поглядела кругом на цветы и травы, но не увидела ничего подходящего. Неподалеку стоял гриб — большой, почти с нее ростом. Она заглянула за него, и под него, и по обе стороны от него. Тут ей пришло в голову, что если уж на то пошло, можно посмотреть, нет ли у него чего-нибудь на шляпке?

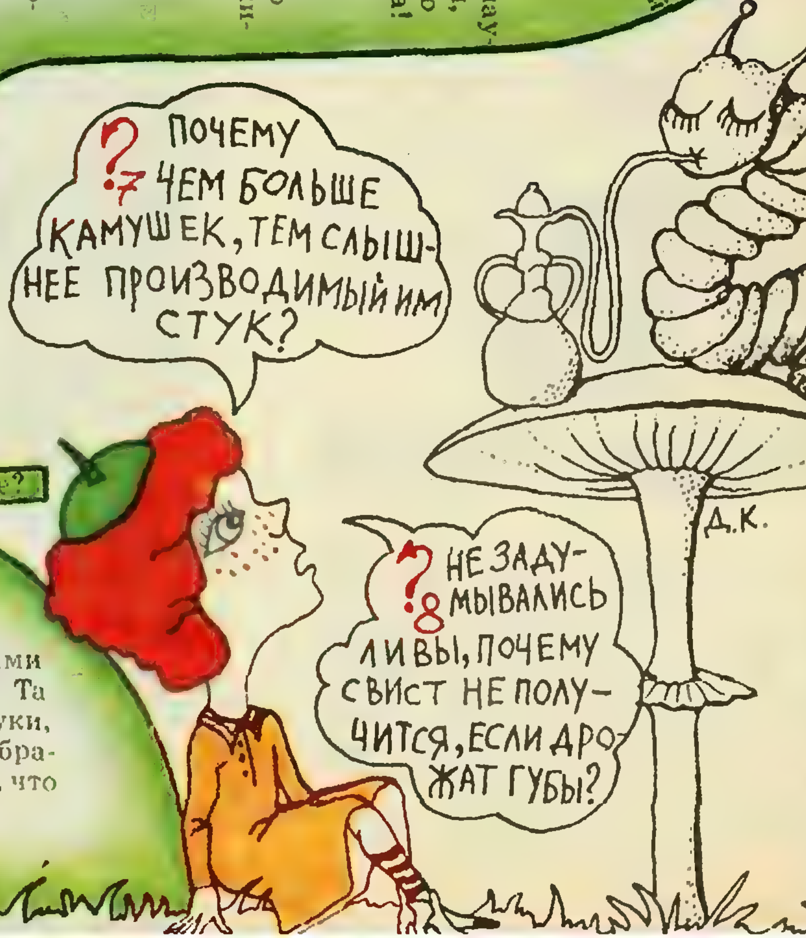
Она поднялась на цыпочки, заглянула наверх — и встретилась глазами с огромной синей гусеницей. Та сидела, скрестив на груди руки, и томно курила кальян, не обращая никакого внимания на то, что творится вокруг.

5. Робкий Билль не мог сразу залезть на лестницу. Он то поднимался вверх, то опять опускался, но, наконец, преодолев страх, оказался на крыше. Какое наименьшее число шагов он мог сделать, если за каждый шаг он перемещался на 1 перекладину, на земле оказался один раз, на верхней перекладине — тоже один раз, на остальных перекладинах побывал одинаковое количество раз, и если всего у лестницы 9 перекладин.



6. Удар + удар = драка.

7*. Вы заблудились в выпуклом лесу площади 100 км². Докажите, что вы можете выйти из леса, пройдя путь, не больший чем 30 км.


?7 ПОЧЕМУ ЧЕМ БОЛЬШЕ КАМУШЕК, ТЕМ СЛЫШНЕЕ ПРОИЗВОДИМЫЙ ИМ СТУК?
?8 НЕ ЗАДУМЫВАЛИСЬ ЛИ ВЫ, ПОЧЕМУ СВИСТ НЕ ПОЛУЧИТСЯ, ЕСЛИ ДРОЖАТ ГУБЫ?
Д.К.

Рисунки Д. А. Крымова,
задачи и вопросы А. А. Егорова
и С. С. Кротова

Наблюдения и эксперименты

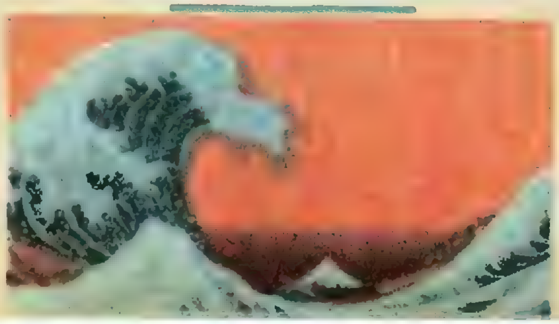
1. В круглый сосуд с водой (ведро, таз, тарелка) бросают маленький предмет, стараясь попасть в центр. Как проверить точность броска?

2. Соедините нитью середины подвесов двух висящих рядом маятников равной длины так, чтобы нить слегка стягивала их друг с другом. Придерживая один маятник, немного подтолкните другой перпендикулярно стягивающей нити. Что произойдет, если теперь отпустить первый маятник? Почему?

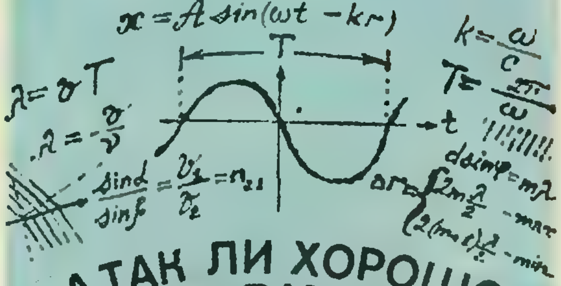
Наблюдения и эксперименты

3. Известен период одного из двух маятников разной длины. Как, не пользуясь секундомером и линейкой, определить период другого маятника?

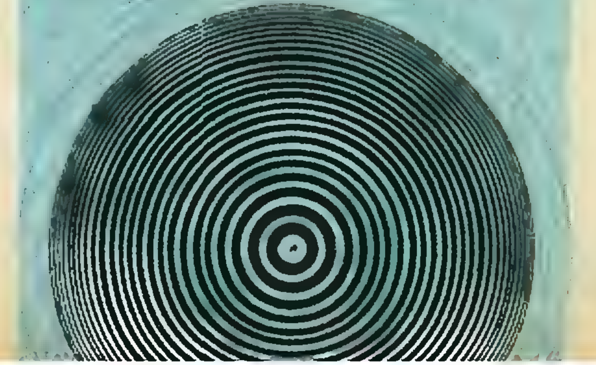
4. Как объяснить расцветку крыльев стрекозы, и почему она меняется, если наблюдение вести под разными углами?



> «Свет, электричество и магнетизм, квантовая физика — всюду мы имеем дело с волнами, подобно тому, как имели дело с частицами в механике Декарта, Галилея и Ньютона».
>
> *Л. Купер. «Физика для всех»*



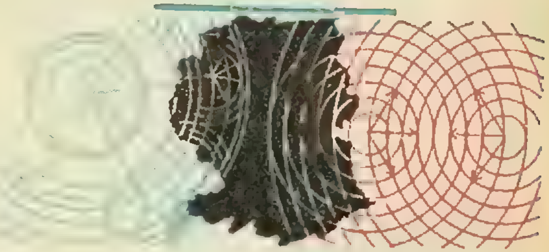
А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМО ВАМ ПОНЯТИЕ ВОЛНА ?



Задачи и задачки

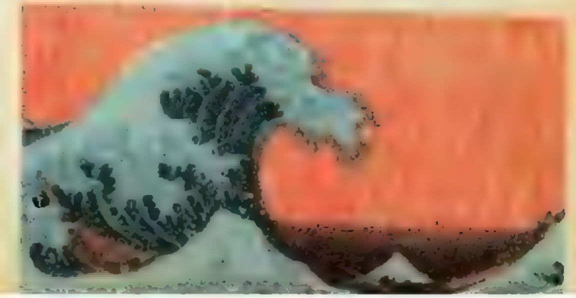
6. Половина полосы закрашена в фиолетовый, другая половина — в красный цвет. Что можно увидеть, глядя на полоску через стеклянную призму, преломляющее ребро которой параллельно полосе?

7. Почему после нанесения мельчайшей штриховки пуговицы могут приобрести радужную окраску — стать «перламутровыми»?



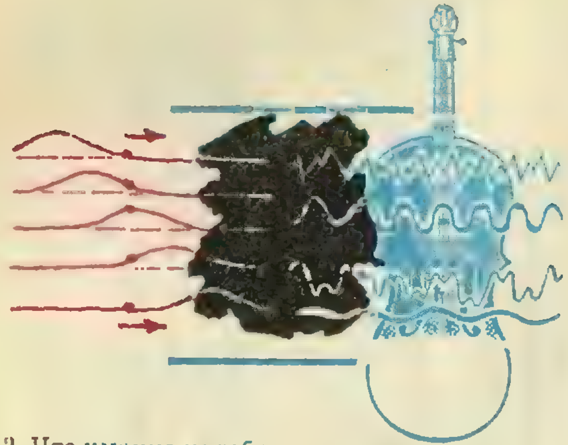
Любопытно, что ...

...звуковая волна, выйдя из одного фокуса эллипсоида и отразившись от его поверхности, придет в другой фокус. Эту особенность кривых поверхностей знали давно, и во времена инквизиции использовали сводчатые потолки для подслушивания подозрительных разговоров.



Задачи и задачи

1. Почему басовые струны музыкальных инструментов оплетают спиралью из проволочки?

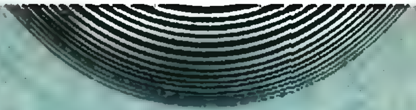


2. Что именно колеблется в электромагнитной волне?

3. Приближаясь к берегу, морские волны «растут», достигая иногда высоты в десятки метров. Отчего это происходит?

4. Бывает, что у пологого берега направление распространения набегающих волн изменяется. Как можно объяснить это явление?

5. Разговор стоящих за приоткрытой дверью людей может быть слышен, но их мы не видим. Почему же звуковые волны достигают нас, а световые — нет?



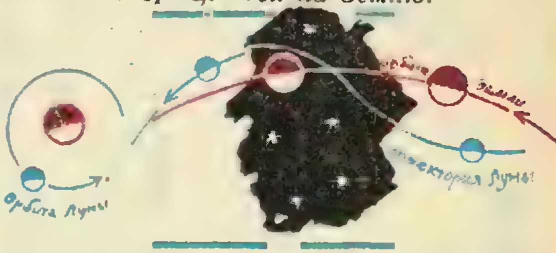
ВОЛНА – ЭТО ОДНО ИЗ САМЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ В ФИЗИКЕ, встречающееся в самых разных проявлениях ПРАКТИЧЕСКИ ВО ВСЕХ ЕЕ ОБЛАСТЯХ.

ВОЛНЫ распространяются по поверхности океанов и в их толще, в межзвездной пустоте и в кристаллических решетках, бегут по проводам линий электропередач, доносят до нас многообразие цветов и обилие звуков. Существуют волны песчаные и волны на снегу. Землетрясения и океанские цунами — тоже волновые движения, только гигантских масштабов. Есть волны, которые еще не стали привычными и для самих физиков, например, волны в транспортных потоках, в химических реакциях, в сердце и нервной системе, в сообществах биологических организмов, в звездных системах — галактиках. По образному выражению ученых, волны «разбежались» из физики и охватили едва ли не все множество процессов в живой и неживой природе. И самое интересное — все эти волны математически схожи, то есть могут быть описаны одними и теми же уравнениями. Вот почему так важно «подружиться» с этим понятием, ведь и вам, быть может, придется не раз столкнуться с ним самым неожиданным образом.

Любопытно, что ...

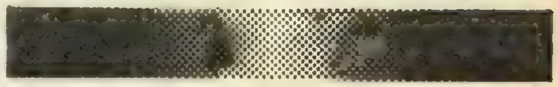
...волнение, даже очень сильное на поверхности воды, быстро затухает по мере погружения. На глубине, равной нескольким длинам волн, не остается почти никакого движения.

...звуковые волны с поверхности Земли не распространяются на высоту более 2,5—3 километров, а, переходя в воздух меньшей плотности, преломляются и, загибаясь, возвращаются на Землю.



...сведения о каждом подземном толчке доставляются сейсмическими волнами трижды. Сперва приходят внутренние волны — продольная, затем поперечная,— а последней прибывает поверхностная (наиболее интенсивная) волна.

Что читать о волнах в «Кванте»



(публикации последних лет)

1. *«О волнах на море и ряби на лужах» — 1980, № 9.*
2. *«Что такое волна?» — 1982, № 6.*
3. *«Солитоны» — 1983, № 11.*
4. *«Цвета рассеянного света» — 1984, № 3.*
5. *«Связанные маятники» — 1984, № 5.*
6. *«Уравнение волны» — 1984, № 11.*
7. *«Переговорная трубка длиной в экватор?» — 1985, № 2.*

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. *Решения* задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М926, М927» или «Ф938». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М926—М930; Ф938—Ф942

М926. Докажите, что если

$$x^2+y^2=u^2+v^2=1,\quad xu+yv=0,$$

то

$$x^2+u^2=y^2+v^2=1,\quad xy+uv=0.$$

С. В. Дужин

М927*. На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведено несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешается менять: если какие-то два из них, AC и BD, пересекаются, их можно стереть и провести:

а) отрезки AB и CD,

б) отрезки AB и BC.

(Если «новый» отрезок уже проведен, проводить его второй раз не нужно.)

Можно ли после нескольких таких замен (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

В. Е. Колосов

М928. В кинотеатре $N+1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием места (в их числе и Игорь), сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять свое место; если оно занято,— сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)

И. Б. Алексеев-Астафьев

М929. Натуральные числа a, b, c, d, e удовлетворяют условию $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Докажите, что по крайней мере а) три из них четны, б) три делятся на 5, в) два делятся на 10.

В. Д. Яковлев

М930*. Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что в одном из них найдется три числа, одно из которых равно сумме двух других (или два числа, из которых одно вдвое больше другого).

А. Д. Валиев (уч. 9 класса).

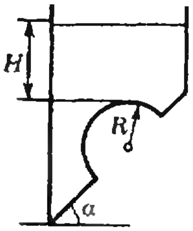


Рис. 1.

Ф938. Пилот космического корабля, движущегося со скоростью $v=1$ км/с, заметил прямо по курсу астероид диаметром $d=7$ км, когда до его поверхности оставалось расстояние $l=8,5$ км. Космонавт сразу же включил аварийные двигатели, которые за пренебрежимо малое время сообщают кораблю дополнительную скорость $\Delta v=300$ м/с, направление которой задается космонавтом. Может ли корабль избежать столкновения?

А. В. Андрианов

Ф939. Дно сосуда наклонено под углом $\alpha=45°$ к горизонту. В дне имеется полусферическая выпуклость радиуса R (рис. 1). Высота столба жидкости над выпуклостью равна H. Какая вертикальная сила действует со стороны жидкости на выпуклый участок дна? Плотность жидкости равна ρ.

Л. Г. Маркович

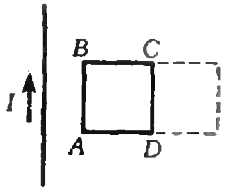


Рис. 2.

Ф940. Почему при кладке кирпичных печей для скрепления кирпичей используют глиняный раствор, а не, например, цементный (хотя он более твердый)?

В. А. Ильин

Ф941. В магнитном поле постоянного прямолинейного тока находится квадратная металлическая рамка $ABCD$ (рис. 2). Рамку переводят в новое положение, показанное на рисунке пунктиром. Это можно сделать двумя способами: равномерным поворотом вокруг стороны CD или равномерным параллельным переносом вдоль AD. При каком способе выделится больше тепла, если время перевода рамки в новое положение в обоих случаях одинаковое?

Л. Е. Шмитс

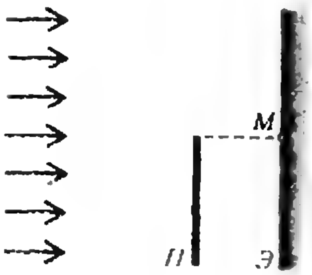


Рис. 3.

Ф942. Плоская световая волна падает нормально на экран $Э$. Как изменится освещенность экрана в точке M (рис. 3), если на пути волны поместить полубесконечную непрозрачную пластину $П$, параллельную экрану?

Д. А. Купцов

Problems

M926—M930; P938—P942

M926. Prove that

$$x^2+y^2=u^2+v^2=1,\ xu+yv=0$$

implies

$$x^2+u^2=y^2+v^2=1,\ xy+uv=0.$$

S. V. Duzhin

M927*. In the plane a finite set of points, no three of which are collinear, is chosen. Some line segments joining pairs of these points are drawn. We are allowed to change the segments in the following way: if, say, AC intersects BD, we can delete both, replacing them by

a) the segments AB and CD,
b) the segments AB and BC.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in

Russian or in English) may be posted no later than August 15th to the following address:

USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the calendar year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

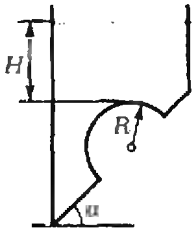


Fig. 1.

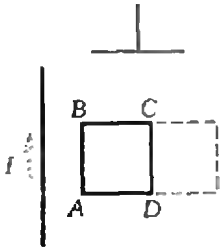


Fig. 2.

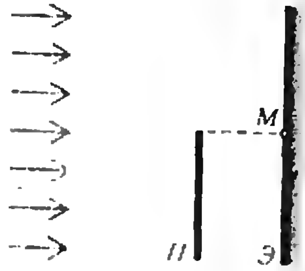


Fig. 3.

(If a "new" segment has already been drawn, we don't have to draw it again.) Can we return to the initial set of segments by carrying out only changes of type a) or only of type b)?

V. E. Kolosov

M928. There are $N+1$ seats in a movie theatre. At first N people, possessing tickets supplied with seat numbers (including Igor), occupied N seats irrespective of numbers. But then the $(N+1)$ st ticket holder came, a very pedantic man. If his seat is occupied, he chases out the person sitting there, who then claims his own seat, eventually chasing out its occupant, and so on. What is the probability that Igor will not have to change his seat? (In other words, what is the ratio of the number of these dispositions of viewers in the theatre which are favorable to Igor to the total number of dispositions?)

I. B. Alekseev-Astafiev

M929. The natural numbers a, b, c, d, e satisfy the condition $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Prove that at least a) three of them are even, b) three are divisible by 5, c) two are divisible by 10.

V. D. Yakovlev

M930* Numbers from 1 to 1985 are partitioned into 6 sets. Prove that one of them contains three numbers, one of which equals the sum of the two others (or two numbers, one of which is twice the other).

A. D. Valiev (9th form student)

P938* The pilot of a spacecraft flying at velocity $v=1$ km/s observed an asteroid of diameter $d=7$ km directly on course when the distance to its surface was $l=8{,}5$ km. The cosmonaut immedialety turned on the emergency engines which, in negligeably short time, change the velocity by $\Delta v=300$ m/s, the direction of Δv being chosen by the cosmonaut. Can the spaceship avoid collision?

A. V. Andrianov

P939. The bottom of a vessel forms the angle $\alpha=45°$ with the horizontal plane. The bottom has a hemispherical convexity of radius R (Fig. 1). The height of the liquid above the convexity is H. What vertical force is exerted by the liquid on the convex part of the bottom? The density of the liquid is ρ.

L. G. Markovich

P940. When Russian brick stoves are constructed, the bricks are held together by clay rather than, say, cement, although the latter is stronger. Why?

V. A. Il'in

P941. A square mettallic frame $ABCD$ is placed in the magnetic field of a rectilinear DC conductor (Fig. 2). The frame is then moved to the new position shown by dotted lines on the figure. This can be done in two ways: by uniform rotation about CD or by uniform parallel translation along AD. For which of the two ways will the emitted heat be greater, if the time of motion is the same?

L. E. Shmits

P942. A plane light wave falls perpendicularly on the screen Э. How will the luminosity of the screen at the point M change (Fig. 3) if a metal plate Π parallel to the screen, infinite in one direction, is placed in the way of the light wave?

D. A. Kuptsov

Решения задач

М905 — М910; Ф917 — Ф922.

М905. *Докажите, что уравнение $4x^n+(x+1)^2=y^2$ относительно натуральных чисел x и y: а) не имеет решений при $n=1$; б) имеет по крайней мере два решения при $n=2$; в)* имеет бесконечно много решений при $n=2$; г)* не имеет решений для натуральных $n>3$.*

а) Уравнение $4x+(x+1)^2=y^2$ можно переписать в виде $(x+3)^2-y^2=8$ или

$$(x+3+y)(x+3-y)=8.$$

Поскольку $x+3+y\geqslant 5$, левая часть последнего равенства могла бы иметь только вид $8\cdot 1$, но и это невозможно, так как оба сомножителя $x+3+y$ и $x+3-y$, очевидно, числа одной четности.

б), в) Решим сразу задачу в). Перепишем данное уравнение $4x^2+(x+1)^2=y^2$ в виде $(5x+1)^2-5y^2=-4$ или

$$z^2-5y^2=-4, \tag{1}$$

где $z=5x+1$. Нам надо доказать, что уравнение (1) имеет бесконечно много решений (z, y) в натуральных числах, причем число z должно давать при делении на 5 остаток 1. Нетрудно проверить прямым вычислением, что если (z, y) — такое решение, то и числа

$$\begin{aligned} z'&=161z+360y,\\ y'&=72z+161y \end{aligned} \tag{2}$$

также удовлетворяют уравнению (1), причем z' при делении на 5 дает такой же остаток, как и z (в частности, остаток 1 при $z=5x+1$). Таким образом, остается указать хотя бы одно решение (1) с $z=5x+1$. Простейшее из таких решений — $(z_0, y_0)=(1, 1)$. Правда, ему отвечает $x_0=0$ (не натуральное число), но в дальнейшем пары (z, y), последовательно получаемые из (z_0, y_0) по формулам (2), уже будут давать решения исходной задачи: $z_1=161z_0+360y_0=521$ (или $x_1=104$), $y_1=72z_0+161y_0=233$ и т. д.

С первого взгляда приведенное решение кажется чрезвычайно искусственным. Однако на самом деле здесь был просто применен стандартный метод решения так называемого *уравнения Пелля* (частным случаем которого является наше уравнение (1)), описанный, например, в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Пары чисел и действия с ними» (Квант, 1985, № 1, с. 20, 21).

г) Допустим, что данное уравнение имеет решение (x, y), тогда

$$4x^n=(y-x-1)(y+x+1).$$

Сомножители в правой части имеют одинаковую четность и, следовательно, четны. Пусть $y-x-1=2a$, тогда $y+x+1=2(a+x+1)$, то есть $x^n=$

$=a(a+x+1)$. Поскольку a и $a+x+1$ — взаимно простые числа (любой их общий делитель должен одновременно делить x^n и $x+1$), существуют такие натуральные числа u и v, что $a=u^n$, $a+$ $+x+1=v^n$, $x=uv$. Но тогда при $n\geqslant 3$

$$uv+1=x+1=v^n-u^n=$$
$$=(v-u)(v^{n-1}+v^{n-2}u+\ldots+u^{n-1})\geqslant 1+vu+1.$$

Полученное противоречие показывает, что исходное уравнение решений не имеет.

М. Гараев, В. Н. Дубровский

◆

М906. *а) Докажите, что при любом натуральном $a>1$ уравнение*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y.

б) Найдите число натуральных решений этого уравнения при $a=1985$.

а) Решениями данного уравнения при любом натуральном a являются пары натуральных чисел $(2a,\ 2a)$, $(a+1,\ a(a+1))$ и $(a(a+1),\ a+1)$.

б) Ответ: при $a=1985$ данное уравнение имеет 9 решений. Покажем, что уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

имеет столько решений, сколько делителей у числа a^2. (При $a=1985=5\cdot 397$ число делителей a^2 равно 9, так как любой из них можно представить в виде $5^n\cdot 397^k$, где n и k независимо принимают любое из трех значений 0, 1, 2.)

Для доказательства достаточно переписать наше уравнение в виде $ay+ax=xy$ или

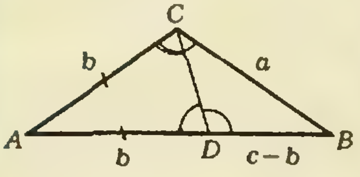
$$a^2=(x-a)(y-a),$$

и заметить, что количество разложений числа a^2 на два сомножителя равно числу его делителей.

М. В. Славинский, А. Ю. Вайнтроб

◆

М907. *Про треугольник ABC с длинами сторон $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ известно, что $3\angle A+2\angle B=180^\circ$. Докажите, что $a^2+bc-c^2=0$.*



Доказываемое соотношение удобно переписать в виде равенства отношений отрезков

$$\frac{a}{c}=\frac{c-b}{a}. \qquad (*)$$

Теперь его можно доказывать с помощью подобных треугольников. Возьмем на стороне AB такую точку D, что $AD=b$ (а $DB=c-b$; см. рисунок). Равенство (*) — это условие пропорциональности сторон треугольников ABC и CBD, заключающих общий угол B этих треугольников, поэтому достаточно доказать, что эти треугольники подобны, то есть что, например, углы ACB и CDB равны. Имеем

$$\angle CDB=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle A}{2}=$$
$$=180^\circ-(\angle A+\angle B)=\angle ACB.$$

(Мы воспользовались тем, что треугольник ACD равнобедренный и данным соотношением $3\angle A+$ $+2\angle B=180^\circ$.)

Т. А. Джортменадзе

M908. *На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P, и через нее проводятся прямые, параллельные BC и AC, до пересечения со сторонами AC и BC соответственно в точках M и N. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?*

Решите эту задачу а) для треугольника с прямым углом C; б) для произвольного треугольника ABC.*

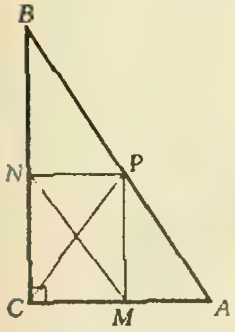


Рис. 1.

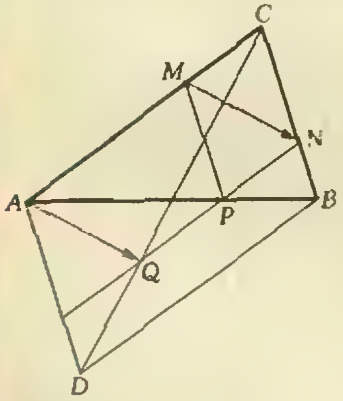


Рис. 2.

а) Ответ: точка P должна быть основанием высоты треугольника ABC. Действительно, в случае, когда угол C прямой (рис. 1), параллелограмм $CMPN$ является прямоугольником. Следовательно, $MN=CP$, а отрезок CP имеет наименьшую длину, когда он перпендикулярен к AB.

б) Мы начнем решать задачу вполне стандартным способом: введем параметр $x\equiv AP/AB$ $0\leqslant x\leqslant 1$, и выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, чтобы записать затем его длину как функцию от x и найти наименьшее значение этой функции. Однако, как мы увидим, получающиеся векторные соотношения сами подсказывают более простое и по существу «чисто геометрическое» завершение решения.

Из гомотетичности треугольников BPN и BAC, APM и ABC (рис. 2) следует, что $CN/CB=AP/AB=x$, то есть $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{CB}$, $CM/CA=BP/BA=1-x$, то есть $\overrightarrow{CM}=(1-x)\overrightarrow{CA}$ и (см. рис. 2)

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CB}-(1-x)\overrightarrow{CA}=$$
$$=\overrightarrow{AC}+x(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AQ}$$

где $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, а точка Q определяется условием $\overrightarrow{CQ}=x\overrightarrow{CD}$. Когда точка P пробегает отрезок AB, параметр x меняется от 0 до 1, а точка Q пробегает отрезок CD. Следовательно, длина $MN=AQ$ будет минимальна, когда Q — ближайшая к A точка отрезка CD. Чтобы найти отвечающее этой точке положение точки P, заметим, что $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AM}$ (так как $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AQ}$), а значит, Q лежит на прямой, проходящей через N параллельно прямой AM, то есть на прямой PN.

Итак, ответ к нашей задаче можно сформулировать так: достроим данный треугольник до параллелограмма $ACBD$; найдем на его диагонали CD точку Q, ближайшую к A, и проведем через нее прямую, параллельную стороне AC; точка пересечения этой прямой со стороной AB и есть искомая точка P. В частности, если оба угла ACD и ADC острые, то Q — это проекция точки A на CD; если ACD — не острый угол, то $Q=C$, а $P=A$, если же ADC — не острый угол, то $Q=D$, а $P=B$.

В. Н. Дубровский, Э. Г. Готман

◆

M909. *а) Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 4 различных членов, содержащая только степени натуральных чисел $n^k (k\geqslant 2)$.*

Существует ли такая прогрессия из

б) любого конечного числа,

в) бесконечного числа членов?

Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая

а) Приведем пример нужной прогрессии: 73^2, $5^2\cdot 73^2$, $7^2\cdot 73^2$, 73^3. В пункте б) решения объяснено, как строится этот и другие, ему подобные, примеры.

б) Ответ: да, существует. Покажем, как по прогрессии $a_1, \ldots, a_m$ длины $m (m\geqslant 2)$ из степеней натуральных чисел можно построить прогрессию из степеней длины $m+1$. Пусть разность данной прогрессии равна d и $a_i=n_i^{k_i}$, $i=1, \ldots, m$. Припишем к нашей прогрессии ее следующий член $b=a_m+d$ и умножим все числа $a_1, \ldots, a_m$, b на b^k, где k —

г) ни одной степени натурального числа,
д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

наименьшее общее кратное показателей $k_1, \dots, k_m$. Полученная последовательность из $m+1$ чисел

$$a_1b^k, \dots, a_mb^k, b^{k+1},$$

очевидно, является арифметической прогрессией с разностью $d \cdot b^k$, причем все ее члены — степени натуральных чисел (так как $a_ib^k=(n_ib^{k/k_i})^{k_i}$). Таким образом, например, любую пару степеней можно «нарастить» до прогрессии любой заданной длины. Пример в пункте а) получен из прогрессии 1, 25, 49.

в) **Ответ**: не существует. Приведем доказательство, основанное на рассмотрении ряда из чисел, обратных к членам прогрессии.

Заметим, что *для любой бесконечной арифметической прогрессии* $a_1, \dots, a_m, \dots$ *из натуральных чисел сумма*

$$S_m=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_m}$$

с ростом m неограниченно возрастает.

Действительно, поскольку $a_{i+1}\leqslant(a_1+d)i=a_2i$ при $i=1, 2, \dots$, где d — разность прогрессии,

$$S_m\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m-1}\right)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdot s_{m-1}.$$

Одио из обычных доказательств неограниченного возрастания суммы s_m состоит в следующем: пусть $2^k\leqslant m<2^{k+1}$, тогда

$$s_m>1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\dots+\frac{1}{2^k-1}\right)>1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)=$$
$$=k>\log_2 m-1.$$

Теперь покажем, что *для любого набора (без повторений) степеней натуральных чисел сумма обратных к ним величин не превосходит* 2.

Числа, обратные к степеням (не ниже второй) данного натурального числа n, образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $1/n$ и первым членом $1/n^2$. Их сумма (при $n>1$) равна

$$A_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\dots=\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1-1/n}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Пусть наибольшее число, степень которого входит в данный набор степеней, равно m. Тогда сумма чисел, обратных к этим степеням, не превосходит

$$1+A_2+A_3+\dots+A_m=1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{(m-1)m}=$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=2-\frac{1}{m}<2,$$

что и требовалось доказать.

Из двух доказанных утверждений, очевидно, вытекает, что составить бесконечную арифметическую прогрессию из степеней натуральных чисел невозможно.

Другое решение задачи опирается на то, что доля, которую составляют члены произвольной арифметической прогрессии с разностью d среди первых n натуральных чисел, с ростом n приближается к $1/d$, а доля, составляемая среди тех же чисел всевозможными степенями натуральных чисел, стремится к 0.

Читатель без труда восстановит детали этого решения, ознакомившись с решением задачи М783 (Квант, 1982, № 8, с. 35).

г), д) Ответ к обеим задачам г) и д): существует. Из разнообразных примеров мы выбрали такой, который годится сразу для обеих задач — прогрессию 10, 30, 50, ... Ее n-й член $a_n = -10+20n = (2n-1)\cdot 10$ при любом n оканчивается ровно одним нулем и, следовательно, не может быть степенью натурального числа (так как делится на 10, но не делится на 10^2) и не состоит из одинаковых цифр.

Р. Н. Азизян, Н. Б. Васильев

◆

М910. *На сторонах правильного шестиугольника взяты точки A_1, A_2, ..., A_6 (рис. 1). Известно, что три попарно не смежные стороны шестиугольника $A_1...A_6$ (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6) определяют треугольник KLM, вершины которого лежат на продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трех других сторон шестиугольника $A_1...A_6$.*

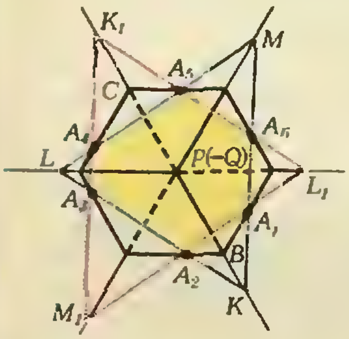


Рис. 1.

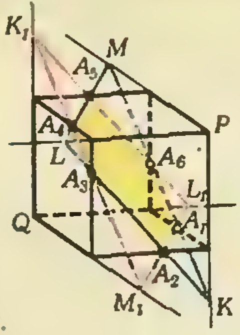


Рис. 2.

Рассмотрим данный правильный шестиугольник как ортогональную проекцию куба вдоль его диагонали PQ. Возьмем на продолжениях ребер куба, выходящих из вершины P, по точке так, чтобы эти точки проектировались в точки K, L, M (на рисунке 2 они обозначены теми же буквами K, L, M). Тогда, очевидно, сечение куба плоскостью KLM будет шестиугольником, который при проекции переходит в шестиугольник $A_1...A_6$. Пусть K_1, L_1, M_1 — точки пересечения этой плоскости с продолжениями ребер, выходящих из вершины Q, тогда и в пространстве (рис. 2) и на проекции (рис. 1) отрезки A_2A_3, A_4A_5 и A_6A_1 будут лежать на сторонах треугольника $K_1L_1M_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Из проведенного рассуждения видно, что противоположные стороны шестиугольника $A_1...A_6$ параллельны (плоскость сечения пересекает противоположные грани куба по параллельным прямым). Это можно вывести и непосредственно из условия: например, треугольники BA_1A_2 и PML на рисунке 1 гомотетичны с центром гомотетии K ($KA_1:KM = KB:KP = KA_2:KL$) и, следовательно, $A_1A_2 \parallel A_4A_5$. Отсюда в свою очередь вытекает, что треугольники CA_4A_5 и PM_1L_1 (где M_1 и L_1 — точки пересечения прямых A_4A_3 и A_5A_6 с A_1A_2) тоже гомотетичны, как треугольники с соответственно параллельными сторонами, а значит, прямые A_3A_4, A_5A_6 и BC пересекаются в одной точке — центре гомотетии. Рассматривая аналогичным образом две другие пары противоположных сторон шестиугольника $A_1...A_6$, мы получим другое решение задачи, не использующее «выход в пространство».

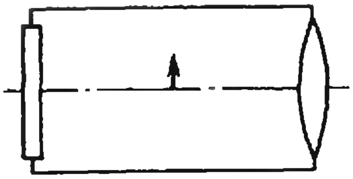
С. Ю. Оревков, В. Н. Дубровский

◆

Ф917. *Предмет находится между линзой и плоским зеркалом, перпендикулярным главной оптической оси линзы. Зеркало, линза и предмет заключены в кожух из светопроницаемой матовой пластмассы. Такая система создает два изображения предмета и изображение линзы. Оба изображения предмета имеют*

Линза создает изображение предмета, а также изображение его отражения в зеркале. Поскольку предмет и его изображение в зеркале имеют одинаковые размеры, но находятся на различных расстояниях от линзы, их изображения, создаваемые линзой, не могут иметь одинаковые размеры, если они оба являются действительными или оба мнимыми. В самом деле, для действительного изображения мы можем написать фор-

одинаковые размеры независимо от расстояния между линзой и предметом. С каким увеличением изображается линза?



Ф918. *Пара одинаковых грузиков A и B, связанных невесомой нитью длины l, начинает соскальзывать с гладкого стола высоты l, причем в начальный момент грузик B находится на высоте $h=2l/3$ от*

мулу линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

где F — фокусное расстояние линзы, d — расстояние между линзой и предметом, f — расстояние между линзой и изображением. Поскольку увеличение определяется формулой $\Gamma=f/d$, то, исключая с помощью формулы линзы f, получаем

$$\Gamma=\frac{F}{d-F}. \qquad (1)$$

Для мнимого изображения формула линзы принимает вид

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f},$$

а увеличение задается выражением

$$\Gamma=\frac{F}{F-d}. \qquad (2)$$

Если мы обозначим через d_1 расстояние от предмета до линзы, через Γ_1 — увеличение, с которым линза изображает этот предмет, через d_2 — расстояние от линзы до изображения предмета в зеркале и через Γ_2 — увеличение, с которым линза изображает это отражение, то с помощью формул (1) и (2) нетрудно увидеть, что если изображения, создаваемые линзой, оба действительные или оба мнимые, то условие $\Gamma_1=\Gamma_2$ выполнить невозможно.

Остается предположить, что одно изображение является действительным, а другое — мнимым. Очевидно, что мнимым будет изображение предмета, поскольку он находится ближе к линзе, а изображение его отражения — действительным. Тогда, в соответствии с формулами (1) и (2), мы можем написать:

$$\Gamma_1=\Gamma_2 \Rightarrow F-d_1=d_2-F. \qquad (3)$$

Но расстояние от линзы до изображения предмета в зеркале равно $d_2=2a-d_1$, где a — расстояние от линзы до зеркала. Тогда из (3) получаем $a=F$, то есть зеркало расположено в фокальной плоскости линзы. Линза создает изображение собственного отражения в зеркале. Но это отражение имеет те же размеры, что и линза, и расположено на расстоянии $d=2F$ от нее. Следовательно, согласно формуле (1), линза создает действительное изображение своего отражения в зеркале с увеличением $\Gamma=1$.

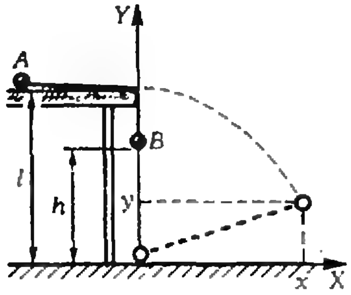
П. Кузнецов

◆

Скорость грузика A непосредственно перед тем моментом, когда он начнет соскальзывать со стола, находим с помощью закона сохранения энергии:

$$2m\frac{v_0^2}{2}=mgh=\frac{2}{3}mgl,$$

пола (см. рисунок). Достигнув пола, грузик B прилипает к нему; грузик A в этот момент слетает со стола. На какой высоте над уровнем пола будет грузик A, когда нить вновь окажется натянутой?



Ф919. *На рисунке показано долевое сечение прибора, используемого в качестве эталона длины. Центральный стержень C и внешняя оболочка A прибора сделаны из материала с коэффициентом теплового расширения α_1; их длины при $t_1=20$ °C одинаковы и равны l_1. Внутренняя труба B сделана из материала с коэффициентом теплового расширения α_2. Какой должна быть*

откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{2}{3}gl}. \qquad (1)$$

Теперь убедимся в том, что эта скорость мала для того, чтобы в дальнейшем нить была натянута. Действительно, в этом случае грузик A стал бы двигаться по окружности радиуса l; центростремительное ускорение в верхней точке, равное v_0^2/l, должно было бы обеспечиваться суммой силы тяжести mg и силы натяжения нити T:

$$m\frac{v_0^2}{l}=mg+T. \qquad (2)$$

Подставив в (2) значение v_0 из (1), получим: $T=-mg/3$, что не имеет смысла (такое движение было бы возможно, если бы вместо нити был жесткий стержень). Следовательно, соскользнув со стола, грузик A в дальнейшем будет двигаться по параболе.

Используя систему координат, изображенную на рисунке, запишем координаты грузика в момент времени t:

$$x=v_0t,\ y=l-\frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Нить вновь будет натянута, когда будет выполняться соотношение

$$x^2+y^2=l^2. \qquad (4)$$

Подставив в (4) выражения для координат из (3), получим уравнение для определения того момента времени, когда нить вновь будет натянута:

$$v_0^2t^2+\left(l-\frac{gt^2}{2}\right)^2=l^2,$$

или, с учетом (1),

$$gt^2\left(\frac{gt^2}{4}-\frac{1}{3}l\right)=0,$$

откуда $t^2=4l/3g$ (корень $t=0$ соответствует моменту соскальзывания грузика A со стола). Подставляя это значение t^2 в выражение для координаты y (см. (3)), находим искомую высоту:

$$y=\frac{1}{3}l.$$

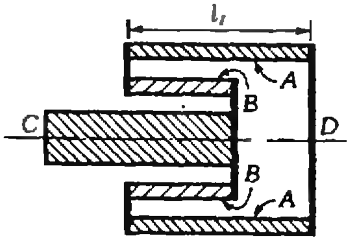
Г. Л. Коткин

◆

Пусть при температуре $t_0=0$ °C центральный стержень C и внешняя оболочка A имеют длину l_{10}, а внутренняя труба B — длину l_{20}. Тогда

$$l_1=l_{10}(1+\alpha_1t_1)\Rightarrow l_{10}=l_1/(1+\alpha_1t_1),$$
$$l_2=l_{20}(1+\alpha_2t_1)\Rightarrow l_{20}=l_2/(1+\alpha_2t_1),$$

где l_2 — искомая длина трубы B при температуре $t_1=20$ °C. При изменении температуры от t_0 до t_1 длины соответствующих деталей изменились *длина внутренней трубы при $t_1=20$ °C, чтобы при изменении температуры полная длина эталона (CD) не менялась?*



на

$$\Delta l_1=l_1-l_{10}=l_{10}\alpha_1 t_1,$$
$$\Delta l_2=l_2-l_{20}=l_{20}\alpha_2 t_1.$$

Конструкция эталона такова, что при любом изменении температуры изменение длины трубы *B* должно компенсировать суммарное удлинение деталей *A* и *C*. Следовательно, должно выполняться условие $\Delta l_2=2\Delta l_1$, то есть

$$l_{20}\alpha_2 t_1=2l_{10}\alpha_1 t_1.$$

Подставляя в это равенство записанные выше выражения для l_{10} и l_{20}, находим l_2:

$$l_2=2l_1\frac{\alpha_1(1+\alpha_2 t_1)}{\alpha_2(1+\alpha_1 t_1)}\approx 2l_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

А. П. Ершов

◆

Ф920. *Через трубку переменного сечения продувают воздух. Входное отверстие трубки имеет площадь S_1, выходное — S_2. На входе скорость воздуха v_1, температура — T_1, давление — p_1; на выходе температура воздуха T_2, давление — p_2. Какова скорость воздуха на выходе?*

Объем воздуха, входящего в трубку за время t, равен $V=S_1v_1t$. Объем выходящего за то же время воздуха равен $V_2=S_2v_2t$, где v_2 — искомая скорость воздуха на выходе. Так как скорости v_1 и v_2 не меняются со временем, массы входящего и выходящего воздуха одинаковы. Поэтому, согласно объединенному газовому закону,

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}\Rightarrow V_2=V_1\frac{p_1T_2}{p_2T_1},$$

то есть

$$S_2v_2t=S_1v_1t\,\frac{p_1T_2}{p_2T_1}.$$

Отсюда находим v_2:

$$v_2=v_1\frac{S_1p_1T_2}{S_2p_2T_1}.$$

Г. Л. Коткин

◆

Ф921. *Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U. Пластины конденсатора имеют площадь S каждая, расстояние между пластинами равно d_1. К одной пластине прижата металлическая пластинка площади S и толщины d_2 (рис. 1), имеющая массу m. Пластинку отпускают. С какой скоростью она ударится о другую пластину конденсатора? Влиянием силы тяжести пренебречь.*

На рисунке 1 показано распределение зарядов в системе в начальный момент времени t_0. Под действием силы притяжения со стороны заряда $-q_0$ пластины 2 пластинка, когда ее отпустят, начнет двигаться с ускорением по направлению к пластине 2. На рисунке 2 показано положение системы в момент времени t, когда пластинка ударяется о пластину 2.

Обозначим скорость пластинки в момент удара v. Чтобы найти v, воспользуемся законом сохранения энергии.

В момент t_0 энергия W_0 системы конденсатор + пластинка равна энергии конденсатора, заряженного до разности потенциалов U; расстояние между пластинами этого конденсатора равно d_1-d_2, и его емкость — $C_0=\varepsilon_0 S/(d_1-d_2)$. Так что

$$W_0=C_0\frac{U^2}{2}.$$

В момент времени t энергия системы равна

$$W=C_0\frac{U^2}{2}+m\frac{v^2}{2}=W_0+m\frac{v^2}{2}.$$

Откуда взялась дополнительная энергия $mv^2/2$?

За время движения пластинки от пластины 1 до удара о пластину 2 между обкладками конденсатора прошел заряд q_0. Такой же заряд прошел через источник. Значит, источник совершил работу $A=q_0U$. Эта работа и пошла на сообщение пластинке энергии $mv^2/2$.

Итак,

$$m\frac{v^2}{2}=q_0U=C_0U^2=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1-d_2}U^2.$$

Отсюда находим v:

$$v=U\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 S}{m(d_1-d_2)}}.$$

А. П. Ершов

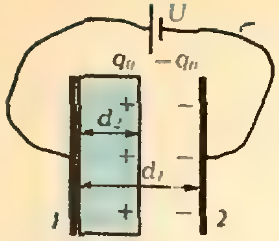


Рис. 1.

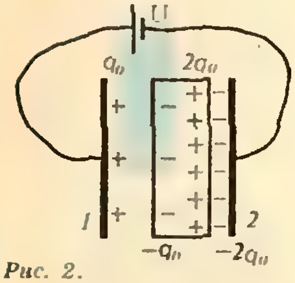


Рис. 2.

◆

Ф922. *Фотографируя муравья с близкого расстояния, экспериментатор использовал удлинительное кольцо, которое увеличило расстояние от пленки до объектива на $\Delta l=7{,}5$ мм. Резкое изображение муравья получилось в том случае, когда на шкале объектива было установлено расстояние $b=1{,}05$ м (на шкале указываются значения расстояний от предмета до объектива без использования удлинительных колец). Фокусное расстояние объектива $F=50$ мм. На каком расстоянии от объектива находился муравей? Считать объектив тонкой линзой.*

Из условия задачи следует, что без использования удлинительного кольца на пленке будет получаться резкое изображение предмета, находящегося от объектива на расстоянии $b=1{,}05$ м. Это позволяет определить по формуле линзы расстояние между объективом (без кольца) и пленкой:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{b}+\frac{1}{f}\Rightarrow f=\frac{Fb}{b-F}=5{,}25\text{ см}.$$

При фотографировании с кольцом расстояние между объективом и пленкой было $f'=f+\Delta l=6$ см. Воспользовавшись вновь формулой линзы, найдем, на каком расстоянии b' от объектива (с кольцом) находился муравей:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{f+\Delta l},$$

откуда

$$b'=\frac{F(f+\Delta l)}{f+\Delta l-F}=30\text{ см}.$$

А. П. Ершов

Поправка

В «Кванте» № 4 на с. 54 в левой колонке в знаменателе второй дроби в условии задачи 1 варианта 1 должно быть

$$kx^2+2xy+ky^2.$$

На с. 55 в верхней строке левой колонки вместо $9x$ должно быть 9^x; условие задачи 1 варианта 6 должно заканчиваться фразой: «Найти скорости поездов».

Список читателей приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М881 — М895, Ф893 — Ф907, справились с задачами М881, М882, М887 — М893, Ф898, Ф905. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Агазарян (Абовян) **83, 84, 94, 95**; *М. Александров* (Москва) **83, 85, 95**; *Р. Алексеев* (Петродворец) **94**; *Я. Алиев* (Баку) **83, 84**; *Г. Андреева* (Пермь) **86, 94**; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм. ССР) **83, 84, 86, 94**; *Р. Бабаев* (Баку) **83, 84**; *М. Байрамов* (Баку) **83, 84**; *А. Барабаш* (Киев) **83—85**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **83, 84**; *М. Барон* (Ленинград) **83, 84**; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) **94**; *Ю. Бекетов* (Ленинград) **83**; *И. Бирман* (Донецк) **83, 86**; *А. Ваганов* (Гатчина) **83, 84**; *С. Велесько* (Минск) **83—85, 94**; *Э. Велиметов* (Баку) **83, 84, 94**; *И. Верный* (Киев) **85**; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) **84, 86, 94, 95**; *Р. Видгоп* (Баку) **83, 84**; *В. Викторов* (п. Чимишлия МССР) **83, 84**; *И. Воронков* (Гатчина) **83, 84, 94**; *Т. Газарян* (Ереван) **83—86, 94, 95**; *Д. Гамарник* (Тбилиси) **84, 94**; *А. Гарибян* (Октемберян) **94**; *Р. Гендлер* (Ташкент) **83—85, 94**; *О. Гейпель* (Дрезден, ГДР) **86, 94, 95**; *Д. Гехтман* (Киев) **83—85**; *В. Годлевский* (Киев) **83—85, 94**; *Л. Гольдштейн* (Киев) **83**; *В. Городницкий* (Днепропетровск) **83**; *И. Григорьева* (Андропов) **83, 84, 94**; *А. Давтян* (п. Мецамор Арм. ССР) **83—85, 94, 95**; *Ю. Дейкало* (Киев) **83, 84**; *С. Демьянченко* (Москва) **83, 84, 94**; *Джафаров* (Баку) **94**; *В. Дзюба* (Одесса) **84, 85**; *А. Дынников* (Жуковский) **83—86, 94**; *К. Дынников* (Жуковский) **83, 84, 86, 94**; *В. Елистратов* (Донецк) **83, 84, 94**; *В. Журавлев* (Гайворон) **83, 84, 94**; *С. Зейналов* (Баку) **94**; *Л. Зосин* (Киев) **83—85**; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) **94**; *М. Йорданов* (Враца, НРБ) **83**; *В. Канашевич* (Киев) **83, 84**; *В. и И. Каповичи* (Хабаровск) **83—85, 94**; *А. Каринский* (Невинномысск) **83—86, 94**; *И. Кирилин* (Дубна) **83, 84, 86, 94**; *О. Кирнасовский* (Винница) **83, 84, 94**; *А. Киселев* (Ленинград) **83—85, 94**; *Т. Кобдиков* (Павлодар) **83—85**; *М. Колодин* (Ленинград) **83**; *К. Копотун* (Киев) **83**; *А. Корсунский* (Киев) **84**; *И. Крылов* (Ленинград) **83, 94**; *М. Куринной* (Харьков) **83—85, 94**; *А. Кухарский* (Киев) **83, 85, 94**; *Н. Кушлевич* (Москва) **83**; *С. Кярас* (Молетай) **83, 84, 86, 94**; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) **84**; *Л. Леняшин* (Ленинград) **83**; *А. Липай* (Минск) **94**; *А. Литвак* (Ленинград) **94**; *В. Ляндин* (Белорецк) **94**; *И. Макаров* (Новокузнецк) **84, 94**; *М. Макаров* (Севастополь) **83, 84, 94**; *Д. Малышев* (Москва) **94**; *Ю. Махлин* (Москва) **83, 84, 94**; *С. Мигушов* (Москва) **94**; *С. Минаев* (Свердловск) **83, 84**; *Т. Мисирпашаев* (Москва) **83, 84, 86, 94, 95**; *А. Молотков* (Ленинград) **83, 84, 94**; *В. Морозов* (Пущино) **83**; *Д. Музаффаров* (п. Герматук Аз. ССР) **94**; *М. Мунькин* (Алма-Ата) **84**; *Т. Мурашов* (Ленинград) **84**; *Е. Мухин* (Кинешма) **94**; *О. Никифорчин* (Ивано-Франковск) **84**; *С. Пиунихин* (Москва) **83**; *Т. Поликарпова* (Белорецк) **94**; *М. Померанцев* (Черкассы) **94**; *Т. Попова* (Челябинск) **83**; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) **83—86, 95**; *М. Ровинский* (Москва) **94**; *А. Розанов* (Киев) **84**; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) **83**; *Е. Романов* (Димитровград) **83, 84**; *А. Ростов* (Винница) **84**; *Ю. Рыбалочка* (Киев) **84**; *И. Самовол* (Гайворон) **83, 84, 94**; *К. Семенов* (Киев) **83—85, 94**; *Р. Сибилёв* (Ленинград) **83—85, 94**; *Д. Сиваков* (Воскресенск) **83, 84**; *В. Сизый* (Киев) **84, 94**; *А. Смирнов* (Ленинград) **85**; *М. Соколова* (Ленинград) **83**; *Г. Спивак* (Киев) **84, 85**; *С. Старцев* (Уфа) **84**; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **94**; *В. Судаков* (Тбилиси) **83, 84, 94**; *М. Тейтель* (Киев) **83—85**; *Ю. Томилов* (Винница) **83, 84, 86, 94**; *А. Трухан* (Минск) **84**; *В. Тульчинский* (Киев) **83, 84**; *Е. и Т. Уклистые* (Астрахань) **86**; *Н. Федин* (Омск) **84**; *Н. Филонов* (Ленинград) **83—86, 94, 95**; *Т. Хилкова* (Щербинка) **83, 94**; *М. Хованов* (Москва) **83**; *Д. Хосид* (Алма-Ата) **84**; *А. Цирс* (Апатиты) **85**; *С. Чебуков* (Симферополь) **83, 84**; *А. Череватый* (Киев) **83, 84, 94**; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **83**; *А. Шанин* (Москва) **84**; *С. Шейнин* (Молодечно) **84**; *А. Ширинкин* (Березники) **94**; *Б. Шраер* (Ленинград) **83**; *С. Штейнгольд* (Москва) **94**; *Е. Юдицкий* (Киев) **84—86, 94**; *Д. Якобсон* (Москва) **83, 84, 94**.

Физика

А. Абанов (Красноярск) **93, 99, 00, 04—06**; *И. Абрамчук* (Винница) **99, 02**; *А. Агаев* (с. Шарафа Аз. ССР) **93, 95, 96, 99, 01**; *В. Апальков* (Харьков) **93, 95—97, 99, 01, 02, 06, 07**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **93, 95—02**; *К. Баталин* (Нижний Тагил) **03**; *Н. Баталин* (Новосибирск) **96**; *Г. Бахов* (Баку) **04**; *Б. Баяраа* (Улан-Батор, МНР) **95**; *А. Белопольский* (Киев) **93**; *С. Беловолов* (Красноярск) **04**; *И. Бена* (Васлуй, СРР) **93—97, 00—04, 06, 07**; *Э. Бондаренко* (Полтава) **93, 95—02, 06, 07**; *Д. Боровский* (Ульяновск) **93, 94**; *Ю. Боровский* (Киев) **93, 96, 99, 00, 04, 07**; *Р. Боташев* (Фрунзе) **95, 96, 02**; *М. Будаев* (Улан-Батор, МНР) **96, 02, 06**; *В. Бурлак* (Винница) **99, 02**; *А. Васильев* (Красноярск) **99, 03**; *О. Васильев* (Алма-Ата) **93, 95, 96, 99—01, 06, 07**; *Д. Вент* (Тула) **99, 06**; *С. Винтовкин* (Свердловск) **93, 02, 04, 06**; *А. Воротняк* (Киев) **00**; *Ю. Воронов* (Москва) **03**; *И. Гаврик* (Часов Яр) **96, 99, 04**; *К. Галочкин* (Ташкент) **00**; *В. Галухин* (Рязань) **94, 95, 97, 99—04, 06, 07**; *А. Глухов* (Саратов) **93—02**; *М. Годин* (Ленинград) **97**; *Л. Гольдштейн* (Киев) **93, 95, 96, 99, 03, 04**; *Г. Горбатенко* (Арзамас) **04, 06**; *М. Готман* (Киев) **96, 07**; *Л. Гринберг* (Алма-Ата) **95, 96, 07**; *Э. Гукасян* (Баку) **04**; *В. Гусев* (Красноярск) **96, 01, 02, 04, 06, 07**; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) **96, 99**; *С. Дубовик* (Брест) **93, 00, 06**; *В. Душацкий* (Киев) **03**; *А. Еренбург* (Запорожье) **01**; *С. Ефремов* (Запорожье) **93, 97, 02**; *Р. Зайнуллин* (с. Сарманат Оренбургской обл.) **93, 95, 96**; *В. Зелов* (Алма-Ата) **96**; *В. Калацкий* (Солигорск) **96, 99**; *А. Карнаухов* (Устинов) **04**; *В. Кирьяшкин* (Саратов) **95**; *А. Кирьянов* (Киев) **03**; *А. Киселев* (Ленинград) **93, 95**; *П. Кларк* (Тула) **93, 00, 02**; *А. Климачев* (Минск) **93, 95—02, 04, 06, 07**; *П. Климкин* (Киев) **96**; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) **93—02**; *А. Кноп* (Винница) **95, 97, 00, 02**; *Б. Король* (Киев) **99, 02**; *Х. Королев* (Горький) **04**; *Я. Корчевский* (Киев) **96**; *В. Костенко* (Киев)

(Окончание см. на с. 56)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Что написано на конденсаторе?

(из ответов на экзаменах)

— Расскажите об устройстве и принципе работы приемника А. С. Попова.

— Основным элементом приемника А. С. Попова является ребратор Гука.

— ?!

— Это ротор, наполненный металлическими опилками, который в момент приема сигнала сперва ударяет по контуру, а потом по лампе. Благодаря этому возникает звук.

— И много весит этот «ребратор Гука»?

— Не очень. Примерно 800—900 кг.

— Ну, допустим, контур приемника такой удар выдержит, но ведь стеклянная лампа наверное разобьется?

— И бились. Но наука нашла выход из этого положения. Лампу заменили транзистором.

* * *

— Что такое звук?

— Звук — это колебание ушей.

* * *

— Как определить скорость звука?

— Для определения скорости звука необходимо одно ухо приложить к рельсу, а по другому ударить.

* * *

— Каково назначение трансформатора?

— Трансформатор — это прибор, который преобразует переменный ток в равномерный и прямолинейный.

* * *

— Из каких основных частей состоит любая тепловая машина?

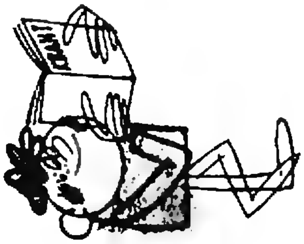
— Основной частью любой тепловой машины является ее оболочка.

* * *

— Как вы себе представляете свободное падение тела?

— Возьмем какое-либо тело и бросим его вверх. Там оно на несколько минут остановится, а затем медленно начнет падать вниз.

* * *



* * *

— В каких единицах измеряется электроемкость конденсатора?

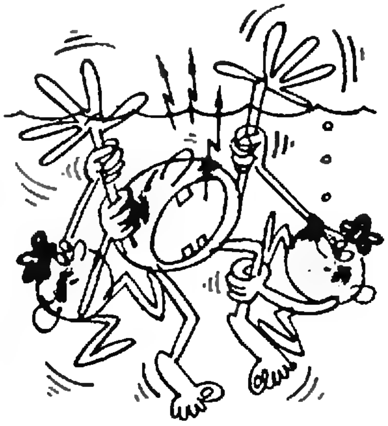
— ??

— Ну, хорошо. Вы взяли в руки конденсатор. Что на нем написано?

— Как что? Цена!

— Какова природа электрического тока в электролитах?

— Возьмем молекулу натрий хлор и опустим ее в воду. На нее сразу же набросятся молекулы воды и станут ее растягивать до тех пор, пока не получится электрический ток.



— Для того чтобы мотор не портился, его макают в масло.

* * *

— Кипение — это бурление жидкости.

* * *

— Вода из банки не выливается, так как в ней еще остался кусочек атмосферы.

Собрал Л. А. Бирюков

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Воронежский (2), Донецкий (3), Киевский (4), Омский (5), Ташкентский (6), Уральский (7) и институты — Горьковский политехнический (8), Ленинградский технологический (9), Рижский политехнический (10), Томский политехнический (11), Тбилисский педагогический (12), II Московский медицинский (13), Минский радиотехнический (14).

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. (5) Дано натуральное число. Если к его цифровой записи справа приписать цифру 2, то получится число, которое делится без остатка на 9. При этом частное от деления больше, чем данное число, на 21. Найдите это число.

2. (5) Два комбайна убирают хлебное поле. После того как первый проработал на поле 2 часа, а второй — 5 часов, оказалось, что убрана половина поля. Затем 1,5 часа они работали вместе и убрали еще четверть поля. Оставшуюся работу выполнял только первый комбайн. Определите, сколько ему понадобилось для этого времени.

3. (2) Две автомашины, выехавшие из городов А и Б навстречу друг другу, каждая со своей скоростью, встретились через 6 часов. Первой машине, чтобы пройти 2/5 пути от А до Б, требуется на 2 часа больше, чем второй, для того, чтобы пройти 2/15 пути от Б до А. За какое время проходит расстояние между А и Б каждая машина?

4. (2) Число десятков двузначного числа на 4 больше числа его единиц; произведение же этого числа на сумму его цифр равно 496. Найдите это число.

5. (10) Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 66, и произведение второго и третьего членов равно 528. Найдите сумму первых сорока членов.

6. (3) Два тела, находящиеся на расстоянии 310 м одно от другого, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первое тело движется равномерно со скоростью 15 м/с, а второе — равноускоренно с начальной скоростью 1 м/с и ускорением 3 м/с². Через сколько секунд они встретятся?

7. (11) Вычислите

$$\frac{1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}.$$

8. Упростите выражение:

а) (3)

$$\frac{c^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{\frac{1}{c}}}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{-1}-\left(\frac{a}{c}\right)^{-1}\right):\frac{(a+c)\sqrt{c}}{\sqrt{ac}}.$$

б) (10)

$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

в) (12)

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}.$$

9. (6) Вычислите

$$\log_{\sqrt{a}}\frac{1}{a^3}+\log_{a^2}\sqrt{a\sqrt{a}}.$$

10. (2) Докажите, что сумма

$$\sqrt{\sin^4 x+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+$$

$$+\sqrt{\cos^4 x+4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

является постоянным числом, не зависящим от x.

11. Найдите:

а) (5) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, если $\sin 2\alpha=\frac{1}{7}$;

б) (3) $\cos(60^\circ-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

12. (10) Упростите выражение $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\left(1+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$ и найдите его значение, если $\cos\alpha=-0,8$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

13. (6) Чему равно выражение $\sin\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

14. (12) Найдите целый корень уравнения

$$|3x-7|=x+5.$$

15. Решите уравнение:

а) (6) $x^2-0,8|x|-0,33=0$;

б) (11) $16\cdot 2^{3x}=\frac{1}{32}\cdot 4^{x-3}$;

в) (4) $3^{2x}-3^x=702$;

г) (9) $2\cdot 5^{1-x}-2\cdot 5^{x+1}+25^x+25^{-x}=26$;

д) (2) $|x-3|^{x^2-x}=|x-3|^2$;

е) (10) $x^{1-\frac{1}{3}\lg x}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0$;

ж) (9) $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$;

з) (9) $3\log_2(x+1)^2+12=2\log_2(5-x)^3+2\log_2(5+x)^3$;

и) (9) $\log_{36}x^2+\log_6(x+5)=1$;

к) (10) $9^{\log_3 x-\frac12}-28\cdot 3^{\log_3 x-3}+1=0$;

л) (13) $\left(\frac15\right)^{\lg^2 x-\lg x}=\left(\frac1{125}\right)\cdot 5^{\lg x-1}$;

м) (13) $\sqrt{\log_2 x}-0{,}5=\log_2\sqrt{x}$;

н) (10) $2\cos^2 x+\sin^2 x-3\sin x\cos x=0$;

о) (3) $1-\left(\cos\frac{5x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right)^2=-\sin 3x$;

п) (10) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt2\cos x$;

р) (7) $-\cos 7x+\sin 8x=\sin 2x+\cos 3x$;

с) (12) $4\cdot(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$;

т) (3) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin(\pi-x)}-1$;

у) (2) $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac18$;

ф) (9) $\sin x+\sin 2x-\sin(3x+\pi)=1+\cos x-\cos(2x+\pi)$;

х) (13) $2\sin 3x+2\cos x=(\sin x+\cos x)^2+(\sin 2x+\cos 2x)^2$;

ц) (13) $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3$;

ч) (12) $\sin^3 x\cdot(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$;

ш) (7) $\sqrt{5\cos x-1}=\sqrt2\sin x$.

16. (4) Найдите корни уравнения $\cos x=\sin 2x+\sin 4x$, удовлетворяющие неравенству $x^2+x-6>0$.

17. (4) Найдите все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\cdot\left(1+\sin^2(x+y)\right)=1+7\cos^2(x+y).$$

18. (11) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x\cdot\cos 2x=\cos 3x$$

в промежутке $x\in[0;\ 2\pi]$?

19. (6) Найдите значения функции $\sin x$, если

$$5\cos x-\cos 2x-3=0.$$

20. (11) Сколько точек пересечения имеют графики функций

$$y=2^{\frac{|x|}{x}};\qquad y=x+1{,}5?$$

21. (11) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций

$$y=(x-1)^3;\quad y=\log_8(2-x).$$

22. (10) Найдите целое значение k, для которого уравнение

$$(2k+1)x^2+3(k-1)x-k+1=0$$

имеет равные корни.

23. (5) Определите, при каких a уравнение $a^2+a(x-1)=2+\frac{7}{2x}$ имеет два разных корня, равных по модулю.

24. (2) При каких действительных значениях a все корни уравнения

$$ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$$

лежат в отрезке $[0;\ 1]$?

25. Решите систему уравнений:

а) (4) $\begin{cases}x^2+xy=3\\ y^2+xy=6;\end{cases}$

б) (5) $\begin{cases}|x|+y+2=0\\ |y|=x^2-4;\end{cases}$

в) (12)

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt x}+\frac{1}{\sqrt y}=\frac43\\ xy=9;\end{cases}$$

г) (12)

$$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}\\ x^2-y^2=7;\end{cases}$$

д) (3)

$$\begin{cases}x^{\frac1y}=2^{1-\frac1y}\\ x=64^{\frac1y};\end{cases}$$

е) (3)

$$5^{\log_5 x}=y-2$$

$$2^{\frac2x}=\left(\frac12\right)^{1-y}.$$

26. Найдите область определения функции:

а) (12)

$$y=\sqrt{5-x-\frac6x};$$

б) (2) $y=\sqrt{\log_{|x-1|}3-1}$;

в) (9) $y=\log_{1-x}(\sqrt{x^2+11x+24}-x-3)$.

27. Решите неравенство:

а) (12) $\frac{x^2+x+1}{2x^2+5}>\frac13$;

б) (3) $\sqrt{-x}>2x-1$;

в) (4) $\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geq 5$;

г) (12) $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}<2{,}5$;

д) (10) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45}>(0{,}81)^x$;

е) (7) $-\log_{\frac14} x+2\log_x 4+3\leq 0$;

ж) (3) $2^{\log_{\frac13}\frac{9x+1}{x-2}}>\frac14$;

з) (6) $\log_{x+2}|x|>1$;

и) (5) $\log_{3x-2}(x+2)>1$;

к) (9) $2{,}25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac23\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}$;

л) (13) $\log_{x^2}(2+x)<1$;

м) (13) $\log_a(x-1)+\log_a x>2$;

н) (6) $a^{x+2}+8a^{x-1}-\frac4a>a+2$ при $a>0$, $a\neq1$.

28. (3) При каких значениях параметра p выражение $\sqrt{-x^2+2(p-1)x-p+1}$ не имеет смысла ни при каких значениях x?

29. (7) Для каких значений параметра a решение системы

$$\begin{cases}-x^2+12x-a\geq 0,\\ x\leq 2\end{cases}$$

состоит из одной точки?

30. (4) Изобразите на координатной плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\log_2(4y-4x^2+1)\geq\log_2(2y).$$

$$\sqrt{2y-4x+3}\leq\sqrt{8-2x}.$$

31. Постройте график функции:

а) (9) $y=(|x+1|+1)(x-3)$;

б) (9) $y=\frac12(|2x+3|-3)(x-2)$.

Анализ

1. (11) Найдите ускорение движения точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением

$$S=5t^2+58t-623.$$

2. (3) Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=5+6t^2-\frac{1}{3}t^3$, где $S(t)$ — путь (в метрах) и t — время (в секундах). Найдите наибольшее значение его скорости.

3. (6) Напишите уравнения касательных к графику функции $y=2x^2+2$, проходящих через точку $(0; -6)$.

4. (6) Докажите, что функция $y=1+12x+3x^2-2x^3$ возрастает на интервале $]-1; 1[$.

5. Найдите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функций:

а) (13) $y=x^4+4x^3-8x^2+3$;

б) (4) $y=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) (13) $y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на отрезке $[-3; 6]$;

б) (3) $y=15-3\cos x+\cos 3x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. (3) Найдите критические точки функции $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin(2x+\pi)$, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

8. (7) При каких значениях $a>0$ точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)=2x^3-6a^2x+3$?

9. (2) Найдите значения параметра c, при которых функция

$$f(x)=(c-12)x^3+3(c-12)x^2+6x+7$$

монотонно возрастает при всех x.

10. (4) Известно, что $2x^2+2y^2=1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x-y$.

Геометрия

1. (2) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $[AD]\|[BC]$, K — середина $[BC]$, P — середина $[DC]$. Выразите через векторы $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AP}=\vec{b}$ сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$.

2. (10) Около окружности радиуса r описан равнобедренный треугольник с углом при вершине в 120°. Найдите длины сторон треугольника.

3. (2) Докажите, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади данного треугольника.

4. (7) В ромб вписана окружность радиуса R. Три точки касания окружности со сторонами ромба соединены между собой. Найдите площадь получившегося треугольника, если большая диагональ ромба в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

5. (5) Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. При этом расстояние от точки касания до центра второй окружности равно диаметру второй окружности. Найдите отношение площадей получившихся кругов.

6. (10) Диагональ прямоугольной трапеции равна ее боковой стороне. Найдите длину средней линии трапеции, если ее высота 4 см, а боковая сторона 5 см.

7. (6) Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна φ. В каком отношении делит высота этого треугольника, опущенная к основанию, другую высоту?

8. (2) В треугольнике ABC известны стороны $|AC|=b$, $|BC|=a$, $|AB|=c$. Найдите, в каком отношении точка D, лежащая на стороне $[BC]$, делит отрезок $[BC]$, если известно, что произведение расстояний от точки D до двух других сторон треугольника является наибольшим.

9. (16) Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна половине площади ее боковой поверхности. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

10. (3) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды. Почему угол α должен быть больше 30°?

11. (11) В правильной треугольной пирамиде вычислите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если отношение бокового ребра к стороне основания равно 2:3. Ответ запишите в градусах.

12. (12) Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите площадь боковой поверхности, если сторона основания 20, а высота 21.

13. (12) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение — квадрат с площадью Q. Определите объем параллелепипеда.

14. (12) Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом α и большей диагональю m. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем параллелепипеда.

15. (7) В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковое ребро DB перпендикулярно плоскости основания. Длина бокового ребра CD равна $2a$. Точка M является серединой ребра AD. Найдите угол между прямыми CM и MB.

16. (11) Объем конуса V, а радиус основания R. Чему равна площадь осевого сечения конуса? Вычислите ее, если $V=4\pi R$.

17. (6) Ромб с острым углом α вращается вокруг одной из своих сторон. Длина большей диагонали ромба равна d. Найдите площадь поверхности полученного тела вращения.

18. (5) Боковая поверхность конуса с образующей l развернута в сектор, центральный угол которого равен $6\pi/5$. Найдите объем конуса.

19. (13) В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса S.

20. (10) В конус вписан шар. Угол между высотой конуса и его образующей равен α. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

21. (3) Вокруг конуса, угол наклона образующей которого к плоскости основания равен α, описан шар. Найдите отношение объемов данного конуса и шара.

22. (4) В конус вписан шар. Отношение объема шара к объему конуса равно q. Най-

дите угол между образующей и плоскостью основания конуса. Укажите допустимые значения q.

23. (3) Около шара радиуса R описана правильная четырехугольная пирамида, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

24. (4) В правильной треугольной призме проведено сечение, которое проходит через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол, равный α.

25. (4) Три одинаковых шара радиуса r касаются одной плоскости и каждый из них касается двух других шаров. Найдите радиус шара, который касается плоскости и трех данных шаров.

26. (13) Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то вписанный в тетраэдр и описанный вокруг него шары концентричны.

27. (13) Докажите, что если все диагонали параллелепипеда равны по длине, то он прямоугольный.

Устный экзамен

Алгебра

1. (9) Три числа, сумма которых равна 26, образуют геометрическую прогрессию и являются первым, вторым и пятым членом арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

2. (6) Найдите два числа таких, что первое из них составляет 40 % квадрата второго числа, а второе — 135 % квадрата первого числа.

3. (6) Вычислите

$$\log_{0,25}\cos 675^\circ.$$

4. (3) Найдите 10 % от числа

$$\frac{\left(27^{\log_3 2}+5^{\frac{1}{2}\log_5 49}\right)\left(-81^{\log_9 4}+8^{\frac{1}{2}\log_2 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{2}\log_5 16+\log_5 3}}.$$

5. (12) Вычислите $\cos\left(\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)$, если

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5},\quad \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi.$$

6. (12) Между какими целыми числами заключается $\log_3\frac{1}{7}$?

7. (2) Не используя таблиц логарифмов, докажите, что

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

8. (3) Вычислите значение выражения $\left(\cos^2\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)-\sin^2\alpha\right)^2$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$, предварительно упростив его.

9. Решите уравнение:

а) (9) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}$;

б) (9) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$;

в) (10) $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}}=x+2$;

г) (9) $4^{1-x}-4^{1+x}+16^x+16^{-x}=7$;

д) (9) $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$;

е) (10) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;

ж) (7) $4\sin^4x+\cos 4x=1+12\cos^4x$;

з) (9) $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.

10. (10) Найдите корни уравнения $3\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, принадлежащие промежутку $]-\pi;0[$.

11. (7) При каких x вектор $\vec{a}=(-1;\,4\sin x)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}=(\sin 3x;\,\cos 2x)$.

12. Решите систему уравнений:

а) (9) $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy;\end{cases}$

б) (2) $\begin{cases}\sqrt{(x+y)^2}=3,\\ \sqrt{(x-y)^2}=1.\end{cases}$

13. Решите неравенство:

а) (3) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{3x-1}$;

б) (7) $|x^2-5x|<6$;

в) (9) $\sqrt{x+1/4}>2x-1/2$;

г) (6) $(x+2)\sqrt{x^2-3x-4}\geqslant 0$;

д) (9) $\log_{1/3}x>\log_x 3-5/2$.

14. (10) Найдите все значения x, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$, для которых выполняется неравенство

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2\cos^2x}<\frac{5}{4}.$$

15. Найдите область определения функции:

а) (12) $y=\sqrt{|x|-4}$;

б) (10) $y=\frac{\sqrt{7+6x-x^2}}{\lg(2x-8)}$;

в) (2) $f(x)=\sqrt{2^x-3^x}$;

г) (9) $y=\log_{(x+5)}(\sqrt{x^2-5x-24}-x+2)$.

16. (11) Определите коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

17. (10) График функции $y=a^{x+2}$ проходит через точку $M(1;\,8)$. Найдите a и множество значений x таких, что $0{,}5<y\leqslant 16$. Постройте график, указав на нем искомое множество x и данное множество y.

18. Постройте график:

а) (6) $y=x^2-|x|(x+4)+2$;

б) (7) $y=|\log_2(x-1)|$;

в) (7) $y<e^{\ln\sin x}$.

Анализ

1. (6) Корни квадратного трехчлена равны -1 и 3. Найдите корень производной этого трехчлена.

2. (3) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=15-3\cos x+\cos 3x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) (9) $y=(x+1)\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

б) (12) $y=2^{x^2-4x}$.

4. (2) Докажите, что любая касательная к кривой

$$y=x^5+8x+1$$

образует с осью Ox острый угол.

Геометрия

1. (3) Известны координаты трех вершин параллелограмма $A(-3,\,-2)$, $B(3,\,1)$, $C(5,\,0)$. Найдите координаты его четвертой вершины.

2. (6) Заданы векторы $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. (10) Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12 см и 35 см. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

4. (2) В прямоугольный треугольник с катетом a вписана окружность радиуса r. Найдите гипотенузу этого треугольника.

5. (7) Дана прямоугольная трапеция с основаниями, равными 3 и 2, и меньшей боковой стороной, равной 1. Определите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее основания.

6. (6) Отношение площади круга к площади описанного около него ромба равно $\frac{\pi}{8}$. Найдите острый угол ромба.

7. (3) Периметр равнобедренного треугольника равен 12. При какой длине основания его площадь будет наибольшей?

8. (11) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Определите площадь основания конуса, если его полная поверхность равна Q. Вычислите значение площади основания при $Q=36$, $\alpha=60°$.

Физика

Задачи устного и письменного экзаменов

Механика

1. (11) Скорость электропоезда увеличилась с $v_1=21{,}6$ км/ч до $v_2=108$ км/ч на пути $l=54$ м. Определите ускорение движения поезда. Результат представьте в единицах СИ.

2. (10) Какой путь проходит свободно падающее тело за третью секунду движения ($g=10$ м/с^2)?

3. (10) С какой начальной скоростью необходимо вертикально вниз бросить тело массой $m=2$ кг, чтобы через $t=1$ с его кинетическая энергия была равна $E_k=2{,}5$ кДж ($g=10$ м/с^2)?

4. (10) С крыши здания высотой $h=16$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда пятая отделяется от крыши. Определите: а) время падения капли; б) расстояние между третьей и четвертой каплями в воздухе в момент удара первой капли о землю.

5. (1) С поверхности земли вертикально вверх брошен шарик. Некоторую точку A шарик проходит дважды: спустя время t_1 и время t_2 после начала движения. Определите высоту точки A над поверхностью земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

6. (5) С вертолета, находящегося на высоте $h=500$ м, упал камень. Через какое время камень достигнет поверхности земли, если: а) вертолет неподвижен; б) вертолет поднимается со скоростью $v_0=4{,}9$ м/с? Сопротивление воздуха не учитывать.

7. (11) Камень, брошенный горизонтально на высоте $h=1{,}25$ м над землей, упал на нее на расстоянии $l=5$ м от места бросания (по горизонтали). Определите начальную скорость камня. Результат представьте в единицах СИ. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g=10$ м/с^2.

8. (1) Каким должен быть объем $V_п$ полости железного буя для того, чтобы он мог плавать на поверхности воды? Объем буя V, плотность железа $\varrho_ж$, плотность воды $\varrho_в$.

9. (9) На чашах погруженных в воду равноплечных весов находятся алюминиевый и железный шары одинаковой массы m. Определите массу сплошного шара из меди, который надо добавить для восстановления равновесия. Плотность алюминия $\varrho_а=2{,}7$ г/см^3, железа $\varrho_ж=7{,}88$ г/см^3, меди $\varrho_м=8{,}93$ г/см^3.

10. (9) В бак с жидкостью опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщиной h и диаметром D. Плотность материала диска $\varrho_д$ больше плотности жидкости $\varrho_ж$. Трубку медленно поднимают вверх. Определите, на каком уровне диск оторвется от трубки.

11. (1) Для взятия пробы грунта на дно океана на стальном тросе опускается прибор. Найдите предельную глубину погружения, если предел прочности на разрыв стали $\sigma_{пр}=4{,}8\cdot10^6$ Н/м^2. Массой прибора по сравнению с массой троса можно пренебречь. Плотность стали $\varrho_с=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, плотность морской воды $\varrho_в=1{,}03\cdot10^3$ кг/м^3.

12. (14) В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости различных плотностей. На границе раздела жидкостей плавает однородный куб, погруженный целиком в жидкость. Плотность материала куба ϱ больше плотности ϱ_1 верхней жидкости, но меньше плотности ϱ_2 нижней жидкости ($\varrho_1<\varrho<\varrho_2$). Какая часть объема куба будет находиться в верхней жидкости?

13. (14) От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отцепляется 1/3 состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в два раза. Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определите скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости.

14. (14) Найдите ускорения, с которыми будут двигаться грузы с массами m_1 и m_2 в системе, состоящей из одного неподвижного и трех подвижных блоков (рис. 1). При каком соотношении между массами грузов система будет находиться в равновесии? Трением и массой блоков пренебречь.

15. (11) С какой минимальной силой, направленной горизонтально, надо прижать плоский брусок к вертикальной стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m=6$ кг, коэффициент трения между бруском и стенкой $\mu=0{,}1$. Результат представьте в единицах СИ. Принять $g=10$ м/с^2.

16. (1) Поезд, подходя к станции со скоростью $v=72$ км/ч, начал тормозить. Каково наименьшее время торможения до полной остановки поезда, безопасное для спящих пассажиров (пассажиры не падают с полок)? Каков минимальный тормозной путь? Ускорение поезда при торможении считайте постоянным, коэффициент трения пассажиров о полки $\mu=0{,}2$.

17. (13) Вагон идет по закруглению радиусом $R=800$ м со скоростью $v=72$ км/ч. Расстояние между рельсами $l=1{,}68$ м. Определите, на сколько должен быть выше внешний рельс по сравнению с внутренним, чтобы вагон не перевернулся?

18. (1) Внутри трубы между точками A и B (рис. 2) скользит шайба массой m. Определите максимальную силу давления шайбы на стенку трубы, если длина дуги AB равна диаметру трубы. Трение не учитывать.

19. (9) Автомобиль массой $m=1000$ кг въехал на выпуклый мост длиной $l=156$ м

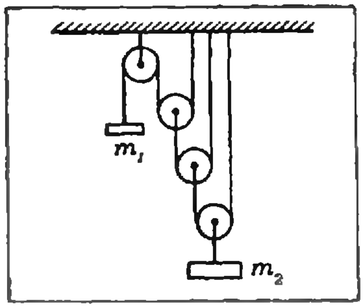


Рис. 1.

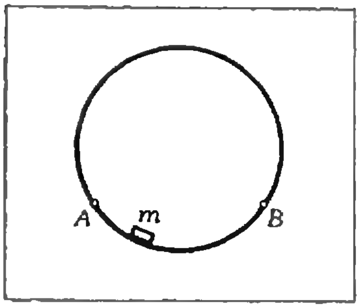


Рис. 2.

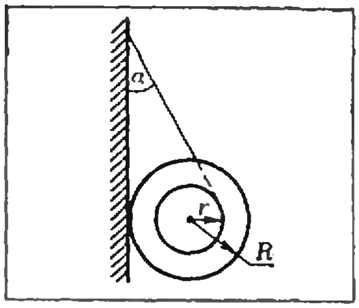


Рис. 3.

со скоростью $v_0=36$ км/ч. По мосту он движется с ускорением $a=1$ м/с^2. Определите силу давления со стороны автомобиля в середине моста, где радиус кривизны $R=200$ м.

20. (1) Катушка за намотанную на нее нить подвешена около вертикальной стены (рис. 3). Малый радиус катушки r, большой — R, коэффициент трения между катушкой и стеной μ. При каком наименьшем угле α между нитью и стеной катушка не будет скользить по стене?

21. (1) Если к пружине поочередно подвешивать грузы массой m_1 и m_2, то ее длина оказывается равной соответственно l_1 и l_2. Какая работа совершается при растяжении пружины от длины l_1 до длины l_2?

22. (14) Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимется пуля над поставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была v?

23. (10) Два груза массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг свободно подвешены на нитях длиной $l=2$ м так, что соприкасаются между собой. Меньший груз отклонили на угол $\alpha=60°$. Определите: а) на сколько изменилась потенциальная энергия отклоненного груза; б) на какую высоту поднимутся грузы, если отклоненный груз отпустили и после удара грузы движутся вместе.

24. (1) Два пластилиновых шара, массы которых относятся между собой, как 1:2, подвешены на одинаковых легких нитях длиной l. При этом шары касаются друг друга. Шары развели в противоположные стороны так, что нити отклонились от вертикали на угол α, и одновременно отпустили. Определите скорость слипшихся шаров сразу после удара. Сопротивление воздуха не учитывать.

25. (8) Электрическая лебедка, развивающая мощность $N=15$ кВт, тянет равномерно вверх по наклонной плоскости тело. Определите угол наклона плоскости, если тело обладает импульсом $P=5 \cdot 10^3$ кг · м/с, и коэффициент трения $\mu=0{,}1$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. (14) Средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул при данной температуре у всех веществ одинакова. Определите отношение средних скоростей хаотического движения молекул водорода и кислорода при одной и той же температуре.

2. (8) Сосуд емкостью $V=10$ л наполнили газом при давлении $p=2 \cdot 10^5$ Па. Какое количество воды войдет в сосуд, если под водой на глубине $h=40$ м в самой нижней части его будет сделано отверстие? Атмосферное давление $p_a=10^5$ Па. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3.

3. (1) В закрытом баллоне при температуре $T=300$ К и давлении $p=1{,}1 \cdot 10^5$ Па находится газ. При его нагревании на $\Delta T=400$ К давление газа в баллоне повысилось на $\Delta p=160$ кПа. Произошла ли диссоциация газа при нагревании? Изменением объема баллона при нагревании можно пренебречь.

4. (14) Газ последовательно переводится из состояния *1* с температурой T_1 в состояние *2* с температурой T_2, а затем в состояние *3* с температурой T_3 и возвращается в состояние *1*. Определите температуру T_3, если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на рисунке 4, а температуры T_1 и T_2 известны.

5. (9) В сосуд объемом $V=10$ л, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях (давлении $p_0=1{,}01 \cdot 10^5$ Па, температуре $t_0=0$ °С), вводят воду массой $m=3$ г и нагревают до температуры $t=100$ °С. Определите давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре.

6. (1) В сосуде объемом $V=100$ л находился сухой воздух при нормальном атмосферном давлении ($p_0=1{,}01 \cdot 10^5$ Па). Затем в сосуд налили $m=100$ г воды и герметически закрыли его. Вся ли вода превратится в пар, если сосуд нагреть до температуры $t=100$ °С и поддерживать эту температуру постоянной? Молярная масса воды $M=18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). Изменением объема сосуда при нагревании можно пренебречь.

7. (14) В котле паровой машины температура $t_1=150$ °С. Температура холодильника $t_2=10$ °С. Какую теоретически максимальную работу может выполнить машина, если в топке, коэффициент полезного действия которой $\eta=80$ %, сожжено $m=200$ кг угля с удельной теплотой сгорания $q=3{,}1 \cdot 10^7$ Дж/кг?

8. (5) С какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы расплавиться при ударе о стенку? Температура летящей пули $T=300$ К. Предполагается, что все количество теплоты, выделившееся при ударе, пошло на плавление пули. Температура плавления свинца $T_п=600$ К, удельная теплоемкость свинца $c=100$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца $\lambda=3 \cdot 10^4$ Дж/кг.

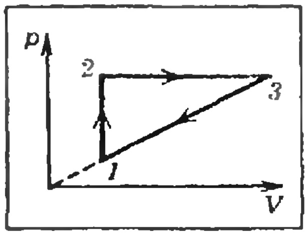


Рис. 4.

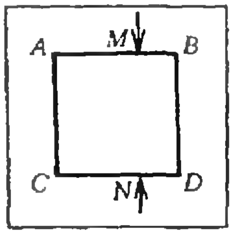


Рис. 5.

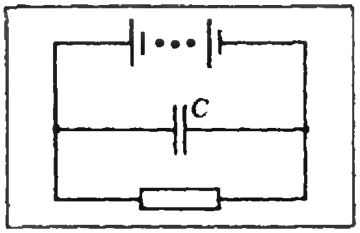


Рис. 6.

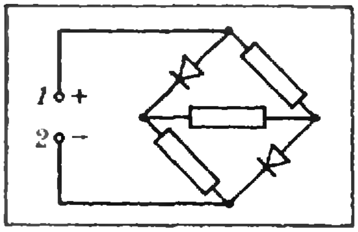


Рис. 7.

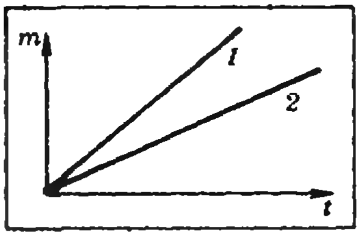


Рис. 8.

9. (1) За время $\tau=2{,}0$ ч автомашина прошла путь $s=160$ км. Двигатель при этом развивал среднюю мощность $N=70$ кВт при коэффициенте полезного действия $\eta=25$ %. Сколько горючего сэкономил водитель за эту поездку, если норма расхода $m_0=36$ кг на $s_0=100$ км пути? Теплота сгорания топлива $q=4{,}2\cdot10^7$ Дж/кг.

Основы электродинамики

1. (5) Два точечных заряда находятся на расстоянии l друг от друга. Если расстояние между ними уменьшится на $\Delta l=50$ см, то сила взаимодействия увеличится в 2 раза. Найдите l.

2. (9) Между пластинами плоского воздушного горизонтально расположенного конденсатора находится заряженная капелька масла массой $m=10^{-8}$ г и зарядом $q=10^{-15}$ Кл. При разности потенциалов между пластинами $U=500$ В и при начальной скорости $v_0=0$ капля проходит некоторое расстояние в два раза медленнее, чем при отсутствии электрического поля. Найдите расстояние между пластинами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. (8) Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов $U=200$ В, затем отключили от источника напряжения, увеличили расстояние между обкладками в 3 раза и погрузили целиком в трансформаторное масло. Определите разность потенциалов на пластинах конденсатора после погружения в масло, если диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon=2{,}2$.

4. (14) На дне широкого сосуда с жидким диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε закреплена пластина конденсатора площадью S. Другая пластина, имеющая вид бруска высотой H и площадью S, плавает над ней в диэлектрике. На какую глубину погрузится нижняя плоскость бруска, если на пластины подать одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды Q? Плотность жидкости ρ_0, плотность бруска ρ $(\rho_0>\rho)$. Поле между пластинами считать однородным.

5. (8) Определите ЭДС источника, если при подключении к нему резистора с сопротивлением R напряжение на зажимах источника $U_1=10$ В, а при подключении резистора с сопротивлением $5R$ напряжение $U_2=20$ В.

6. (13) Аккумулятор замкнут на некоторый проводник. В цепь включают параллельно друг другу два амперметра; они показывают соответственно $I_1=2$ А и $I_2=3$ А. Затем эти амперметры включают в цепь последовательно, и они показывают $I_3=4$ А. Какой ток течет в цепи в отсутствие амперметров?

7. (14) Дан проволочный квадрат (рис. 5). Сопротивление стороны квадрата $R=1$ Ом. Контакты M и N перемещаются одновременно по сторонам AB и CD. В каких пределах изменяется сопротивление квадрата?

8. (11) Источник тока замыкается один раз проводником с сопротивлением $R_1=4$ Ом, а другой — $R_2=9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделившееся в проводниках за одно и то же время, оказалось одинаковым. Определите внутреннее сопротивление источника. Результат представьте в единицах СИ.

9. (1) Гальванический элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь. При изменении ее сопротивления ток I в цепи также изменяется. Найдите зависимость коэффициента полезного действия η источника от тока I. Начертите график этой зависимости.

10. (5) Две электроплитки, включенные в сеть параллельно, потребляют мощность P. Какую мощность будут потреблять эти электроплитки, включенные последовательно, если одна из электроплиток при параллельном включении потребляет мощность P_1?

11. (10) По проводнику сопротивлением $R=300$ Ом в течение времени $\tau=20$ с проходит ток силой $I=2$ А. Определите: а) выделившееся количество теплоты; б) во сколько раз увеличится объем газа, если проводник был помещен в сосуд с газом массой $m=40$ г при начальной температуре $T=300$ К. Процесс считать изобарным. Потери тепла не учитывать. Удельная теплоемкость газа в данном процессе равна $c=5\cdot10^3$ Дж/(кг · К).

12. (9) Батарея аккумуляторов замкнута проводником, параллельно которому присоединен конденсатор емкостью $C=10$ мкф (рис. 6). Определите ЭДС батареи, если заряд на конденсаторе $q=4{,}6\cdot10^{-4}$ Кл, а в проводнике выделяется мощность $P=23$ Вт и известно, что ток короткого замыкания батареи $I_0=5$ А.

13. (1) Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяющаяся в электрической цепи, при перемене полярности на клеммах *1* и *2* (рис. 7)? Модуль напряжения на клеммах считайте постоянным, диоды идеальными, сопротивления резисторов одинаковыми.

14. (11) На рисунке 8 представлены графики зависимости массы двух различных веществ, выделяемых на электродах при электролизе, от времени протекания тока через электролит. Какому из этих графиков (*1* или *2*) соответствует вещество с более высоким значением электрохимического эквивалента, если сила тока, протекающего через электролит, в обоих случаях одинакова? Ответ обоснуйте.

15. (9) К электролитической ванне, содержащей слабый раствор серной кислоты, приложена разность потенциалов $U=40$ В. Выделяющийся на катоде газообразный водород собирается в сосуде объемом $V=400$ см^3. Через некоторое время давление водорода в сосуде достигает значения $p=1215$ гПа при температуре $t=20$ °С. Найдите работу, совершенную источником тока.

16. (13) Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3{,}52\cdot10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}01$ Тл перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $R=2$ см. Вычислите отношение заряда электрона к его массе.

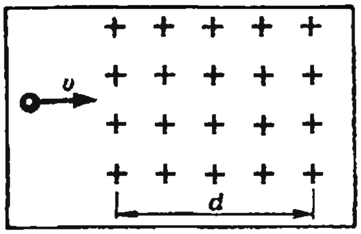


Рис. 9.

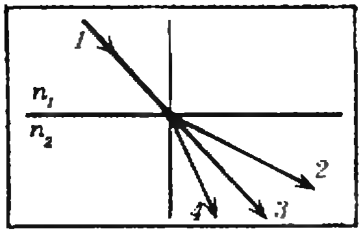


Рис. 10.

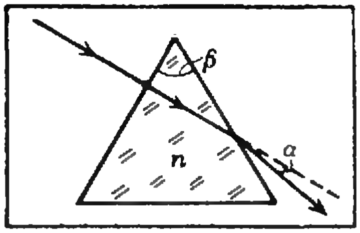


Рис. 11.

17. (10) Проводник длиной $l=0{,}5$ м и сопротивлением $R=0{,}025$ Ом движется поступательно в плоскости, перпендикулярной магнитному полю с индукцией $B=5\cdot10^{-3}$ Тл. По проводнику течет ток $I=4$ А. Скорость движения проводника $v=0{,}8$ м/с. Во сколько раз мощность, затраченная на нагревание проводника, больше мощности, затраченной на его перемещение в магнитном поле?

18. (9) Однозарядные ионы с массовыми числами $A_1=20$ и $A_2=22$ разгоняются в электрическом поле разностью потенциалов $U=4\times10^3$ В, затем попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}25$ Тл перпендикулярно к магнитным линиям и, описав полуокружность, вылетают двумя пучками. Определите расстояние между этими пучками.

19. (1) Однородное магнитное поле с индукцией B создано в полосе толщиной d (рис. 9). Пучок электронов направляется перпендикулярно полосе и линиям вектора магнитной индукции. При каких скоростях v электроны не пролетят на другую сторону полосы («отразятся» от «магнитной стенки»)?

20. (14) В однородном магнитном поле с индукцией B расположена замкнутая катушка с диаметром d и числом витков n. Плоскость катушки перпендикулярна к линиям индукции поля. Какой заряд пройдет по цепи катушки, если ее повернуть на 180°? Проволока, из которой намотана катушка, имеет площадь сечения S и удельное сопротивление ρ.

Колебания и волны

1. (11) Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)$, в котором все величины заданы в единицах СИ. Определите период колебаний. Результат представьте в единицах СИ.

2. (10) Определите длину математического маятника, если известно, что при уменьшении длины нити на $\Delta l=5$ см частота колебаний маятника увеличивается в $k=1{,}5$ раза.

3. (5) Два маятника одновременно начинают колебаться. За один и тот же промежуток времени первый делает $N_1=20$, а второй $N_2=10$ колебаний. Определите отношение длин этих маятников.

4. (1) Тело, прикрепленное к пружине, вывели из равновесия и отпустили, в результате чего оно совершает гармонические колебания вдоль горизонтального стержня. Определите отношение кинетической энергии системы к ее потенциальной энергии по истечении времени t после начала колебаний, если их период равен T. Массой пружины можно пренебречь.

5. (10) На длинной нити подвешен металлический шарик массой $m=10$ г и положительным зарядом $q=1{,}6\cdot10^{-7}$ Кл. Определите: а) натяжение нити, если нить с шариком находится в однородном, направленном вертикально вверх электрическом поле напряженностью $E=10^5$ В/м; б) отношение периодов свободных колебаний, когда электрическое поле выключено и когда оно включено.

6. (10) На какую длину волны настроен приемник, если его приемный контур обладает индуктивностью $L=0{,}003$ Гн и емкостью $C=3\cdot10^{-10}$ Ф ($c=3\cdot10^8$ м/с)?

7. (11) Определите период свободных электромагнитных колебаний в контуре с индуктивностью $L=10$ мкГн и емкостью $C=10$ мкФ. Результат представьте в микросекундах и округлите до целого числа.

8. (5) Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=0{,}2$ мкГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться от $C_1=50$ до $C_2=450$ пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура?

9. (10) Контур содержит катушку и конденсатор. Во сколько раз увеличится период собственных колебаний в контуре, если параллельно конденсатору подключить еще 3 таких же конденсатора?

Оптика

1. (11) На границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1<n_2$) падает параллельный пучок света в направлении луча 1 (рис. 10). В каком направлении (2, 3 или 4) распространяется преломленный пучок света? Ответ обоснуйте.

2. (14) Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Найдите угол между направлениями луча падающего и луча, вышедшего из призмы. Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

3. (13) На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной $a=4$ м не пропускал света в пространство над поверхностью воды? Коэффициент преломления воды $n=1{,}33$, центр плота находится над источником света.

4. (8) Луч света падает на грань стеклянной призмы перпендикулярно к ее поверхности и выходит из противоположной грани, отклонившись от первоначального направления на угол α (рис. 11). Определите преломляющий угол призмы β, если показатель преломления стекла n.

5. (1) Пластинка состоит из нескольких плоскопараллельных слоев различных веществ. Луч света падает из воздуха на первый слой под углом α. Определите угол преломления в последнем слое, если показатель преломления вещества этого слоя n.

6. (1) Луч света падает нормально на боковую поверхность стеклянного клина. Каким должен быть угол клина для того, чтобы луч, отразившись от второй, посеребренной, поверхности клина и снова упав на его первую поверхность, испытал на ней полное отражение? Показатель преломления стекла n считайте известным.

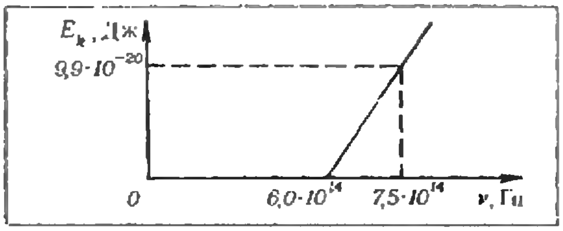


Рис. 12.

7. (10) Фокусное расстояние объектива проекционного аппарата $F=0{,}25$ м. Какое увеличение диапозитива дает проекционный аппарат, если экран удален от объектива на расстояние $f=4$ м?

8. (9) Точка движется со скоростью $v_1=1$ м/с перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см, пересекая ось на расстоянии $d=60$ см от линзы. С какой скоростью движется изображение точки?

9. (1) Предмет в виде стержня расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его концы удалены от линзы на расстояния $d_1={}^3/_2\ F$ и $d_2={}^5/_4\ F$, где F — неизвестное фокусное расстояние линзы. Во сколько раз длина изображения больше длины самого предмета?

10. (1) На главной оптической оси на расстоянии $d=60$ см от собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F=40$ см, расположен точечный источник света. Линзу по диаметру разрезали на две половины и симметрично развели их на расстояние $r=1$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На каком расстоянии друг от друга будут расположены изображения источника, полученные в половинах линзы?

11. (14) На каком расстоянии от глаза надо держать маленький предмет при рассматривании его в лупу с фокусным расстоянием $F=2$ см? Какое при этом получится увеличение? Лупа находится на расстоянии $l=5$ см от глаза, изображение — на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см.

12. (1) На рисунке 12 приведен график зависимости кинетической энергии E_k электронов, вылетающих с поверхности бария при фотоэффекте, от частоты ν облучающего света. Используя график, рассчитайте постоянную Планка и работу выхода электрона из бария.

13. (9) Цинковую пластинку (работа выхода из цинка $A=6{,}4\cdot10^{-19}$ Дж) освещают монохроматическим светом с длиной волны, соответствующей переходу электрона в атоме водорода между уровнями с энергией $W_1=-0{,}38$ эВ и $W_2=-13{,}6$ эВ. Определите, на какое максимальное расстояние от пластинки может удалиться фотоэлектрон, если вне ее имеется задерживающее (то есть возвращающее электроны обратно к металлу) однородное электрическое поле напряженностью $E=10$ В/см.

14. (11) Определите электрическую мощность атомной электростанции, расходующей в сутки $m=220$ г урана $^{235}_{92}$U и имеющей КПД $\eta=25\ \%$, если известно, что при делении одного ядра урана выделяется энергия, в среднем равная $W_0=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж. Результат представьте в мегаваттах (1 МВт$=10^6$ Вт) и округлите до целого числа. Постоянная Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили *А. А. Егоров,*
В. А. Тихомирова

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 46)

94, 97; *М. Кудряшев* (Москва) 02; *М. Кузин* (Коломна) 99; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 96; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) 93, 95; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 96; *К. Лопин* (Фрунзе) 93; *Д. Лунц* (Саратов) 93—97, 99, 00; *П. Лушников* (Москва) 93, 95—97, 01, 02, 04; *О. Мазяр* (Львов) 96, 02, 06; *И. Маресин* (Москва) 06; *Г. Марченков* (Саратов) 95; *А. Мастыкин* (Минск) 94; *Ю. Махлин* (Москва) 00, 02, 06; *С. Машкевич* (Киев) 93, 95, 96, 00—02, 06; *А. Медведев* (Горький) 06; *В. Меньков* (Мончегорск) 93—96, 99, 01, 02—04, 06, 07; *А. Микалькявичюс* (Паневежис) 94, 96, 99, 00; *С. Минаев* (Свердловск) 93—95; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 99, 00, 02, 06, 07; *А. Михеев* (Москва) 93, 96, 97; *В. Моравецкий* (Киев) 99, 06; *О. Мороз* (Алма-Ата) 02; *А. Муравьева* (Брест) 99; *С. Мягчилов* (Одесса) 93—03, 06, 07; *А. Недачин* (Киев) 99; *С. Никоненко* (Киев) 93, 95, 97, 99, 02, 06; *С. Оганесян* (Баку) 04; *Н. Овчаренко* (Киев) 04, 06; *Е. Однорогова* (Винница) 01; *А. Онуфриев* (Москва) 93, 00, 02, 06; *О. Осауленко* (Киев) 93, 95, 99, 00, 04; *С. Павлик* (Ужгород) 93; *Р. Паламарчук* (Нежин) 96, 06; *А. Паничев* (Магадан) 06; *Б. Паркинский* (Кишинев) 93, 94; *Д. Пастухов* (Витебск) 93, 96, 97, 99, 01, 02; *А. Перепеличный* (Владимир-Волынский) 96, 06; *С. Пиунихин* (Москва) 95; *О. Посудневский* (Береза) 06; *В. Прибытков* (Находка) 06; *А. Приходовский* (Береза) 06; *С. Рахамов* (Казань) 95—02; *Р. Ривкин* (Минск) 02, 07; *А. Ростов* (Винница) 96, 02, 04; *С. Рося* (Минск) 99, 00, 07; *М. Рудык* (Винница) 93, 02; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 96, 99, 01, 02, 04, 06; *М. Савченко* (Белгород) 95, 96, 99, 00, 02; *Т. Сагайдак* (Каиев) 94, 95, 04; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 96, 06, 07; *Б. Самойлов* (Киев) 96, 97, 99, 02; *В. Сандомирский* (Братск) 99, 06; *А. Сиваченко* (Москва) 06; *М. Скоробогатов* (Киев) 93, 95—97, 99, 00, 02—04, 06, 07; *С. Собесский* (Новосибирск) 95, 99; *А. Сомов* (Киев) 93; *Г. Спивак* (Киев) 93, 94, 96, 02; *С. Степанянц* (Ереван) 93, 97, 02, 04; *И. Струговщиков* (Киев) 93, 96; *Б. Сулейманов* (Баку) 93—97; *Р. Суник* (Киев) 93; *В. Тартаковский* (Киев) 93, 95—97, 99, 00, 02, 06; *И. Терез* (Симферополь) 93, 94, 96, 97, 99, 00, 02; *П. Трусевич* (Сердобск) 96; *С. Тужанский* (Винница) 99, 02, *А. Тюрин* (Николаев) 02; *Д. Углов* (Геленджик) 96; *Е.* и *Т. Уклистые* (Астрахань) 96; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 93; *М. Уманский* (Москва) 95; *А. Умнов* (Миасс) 93, 96, 00; *Н. Федин* (Омск) 93, 94, 96, 97, 99—02, 04, 06, 07; *Л. Федичкин* (Москва) 93—95, 00, 02, 04, 06, 07; *С. Феранчук* (Минск) 94, 96, 97, 99, 00, 02; *С. Ферлегер* (Ташкент) 99, 00, 02; *А. Фокин* (Москва) 93; *В. Фурман* (Ташкент) 93—02, 06, 07; *А. Цирс* (Апатиты) 93, 95—02; *С. Чернышев* (Ташкент) 06; *Г. Швец* (Киев) 93, 96, 00, 04, 06; *Д. Шкловский* (Ленинград) 06; *П. Шмидт* (Андижан) 00, 01; *О. Яковлев* (Иркутск) 93—02; *А. Ястребов* (Кировоград) 06.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 187. **2.** $2\frac{1}{4}$ ч. **3.** 10 ч., 15 ч. **4.** 62. **5.** 2360. **6.** 10 с. **7.** 5. **8.** а) $a-c$; б) $1/ab$; в) 2. **9.** $-5{,}625$. **11.** а) $97/98$; б) $-\frac{1}{10}(3\sqrt{3}+4)$. **12.** $\frac{2}{\sin\alpha}$, $\frac{10}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6})$ при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $-\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6})$ при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. **14.** $\{6\}$. **15.** а) $\{-1{,}1;\ 1.1\}$; б) $\{-15\}$; в) $\{3\}$; г) $\{\log_5(6+\sqrt{37}),\ \log_3(\sqrt{2}-1)\}$; д) $\{-1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; е) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}},\ 100\right\}$; ж) $\{-3\}\cup[1;\ +\infty[$; з) $\{2-\sqrt{33};\ 3\}$; и) $\{-3,\ -2,\ 1\}$; к) $\{1/2,\ 4\}$; л) $\{10^{-2};\ 10^{2}\}$; м) $\{2\}$; н) $x_1=\pi/4+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; о) $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2l+1)$ $(k,\ l\in Z)$; п) $x_1=\frac{\pi}{6}(8k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4l-1)$ $(k,\ l\in Z)$; р) $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$ $(k\in Z)$; с) $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\pm2\arccos\frac{1}{3}+4\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; т) $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$ $(k\in Z)$; у) $x=\frac{\pi}{8}(4n\pm1)$ $(n\in Z)$; ф) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$, $x_3=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m$ $(k,\ l,m\in Z)$; х) $x_1=\frac{\pi}{6}(4k+1)$; $x_2=2\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; ц) $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ $(k\in Z)$; ч) $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$ $(k\in Z)$; ш) $x=\frac{\pi}{3}(6k+1)$ $(k\in Z)$. **16.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(12l+1)$, $x_3=\frac{\pi}{18}(12m+5)$ $(k,\ l,\ m\in Z/\{-1,\ 0\})$. **17.** $\{(2,\ -2+k\pi),\ (-2,\ 2+l\pi)\}$ $(k,l\in Z)$. **18.** 5. **19.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20.** 2. **21.** $x=1$. **22.** $k=1$. **23.** $a=2$. **24.** $a=0$. **25.** а) $\{(1,\ 2),\ (-1,\ -2)\}$; б) $\{(3,\ -5),\ (-3,\ -5)\}$; в) $\{(1,\ 9),\ (9,\ 1)\}$; г) $\{(4,\ 3),\ (-4,\ -3)\}$; д) $\left\{\left(\frac{1}{8},\ -2\right),\ (4,\ 3)\right\}$; е) $(1,\ 3)$. **26.** а) $]-\infty;\ 0[\cup[2;\ 3]$; б) $[-2;\ 0[\cup]2;\ 4]$; в) $]-\infty;\ -8]\cup]-3;\ 0[\cup]0;\ 1[$. **27.** а) $]3/2;\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ 0]$; в) $]-\infty;\ -\log_3 2]\cup[\log_3\frac{3}{5};\ \log_3\frac{5}{3}[$. г) $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$; д) $]-\infty;\ -9[\cup]5;\ +\infty[$; е) $]0;\ \frac{1}{16}]\cup[\frac{1}{4};\ 1[$; ж) $]-\infty;\ \frac{1}{9}[$; з) $\varnothing$; и) $]1;\ 2[$; к) $]-\infty;\ -2[\cup]6;\ +\infty[$; л) $]-2;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$; м) $\left]1;\ \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right[$ при $a\in]0;\ 1[$, $\left]\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2};\ +\infty\right[$ при $a\in]1;\ +\infty[$; н) $]-\infty;\ -\log_a(a+2)[$ при $a\in]0;\ 1[$, $]-\log_a(a+2);\ +\infty[$ при $a\in]1;\ +\infty[$. **28.** $p\in]1;\ 2[$. **29.** $a=20$. **30.** См. рис. 1. **31.** в) См. рис. 2; б) см. рис. 3.

Анализ

1. 10. **2.** $v_{\max}=36$ м/с. **3.** $y=8x-6$ и $y=-8x-6$. **5.** а) убывает при $x\in]-\infty;\ -4[$ и $x\in]0;\ 1[$; возрастает при $x\in]-4;\ 0[$ и $x\in]1;\ +\infty[$; $x=-4$ и $x=1$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; б) возрастает при $x\in]-1;\ 1[$, убывает при $x\in]-\infty;\ -1[$ и $x\in]1;\ +\infty[$. При $x=-1$ — минимум; при $x=1$ — максимум. **6.** а) $y_{\min}=y(3)=-57$; $y_{\max}=y(6)=132$; б) $y_{\min}=y(\pi/4)=15-2\sqrt{2}$, $y_{\max}=y(\pi/2)=15$. **7.** $\{0,\ \pi/6,\ 5\pi/6,\ \pi\}$. **8.** $a=3$. **9.** $c\in[12;\ 14[$. Указание. Неравенство $f'(x)=3(c-12)x^2+6(c-12)x+6>0$ должно выполняться при всех x, то есть при $c>12$ и $D/4=(c-12)^2-2(c-12)<0$.

10. $z_{\max}=\sqrt{5}$, $z_{\min}=-\sqrt{5}$. Указание. Наибольшее и наименьшее z соответствуют случаям, когда прямая $y=3x-z$ касается окружности $x^2+y^2=1/2$.

Геометрия

1. $2(\vec{a}-\vec{b})$. **2.** $2(2+\sqrt{3})r$; $\frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}r$.

3. Решение (рис. 4). Пусть r — радиус

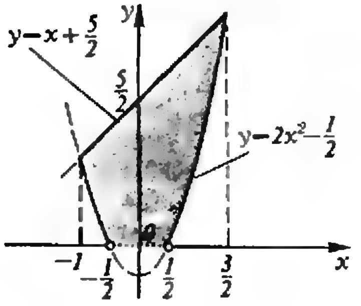


Рис. 1.

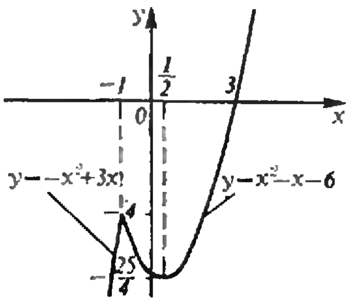


Рис. 2.

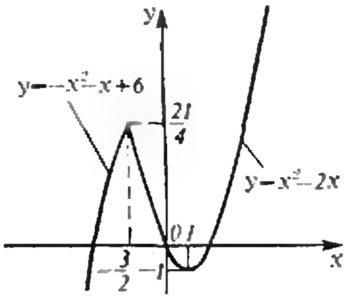


Рис. 3.

вписанной окружности. Тогда $|DC|=|FC|=r$, $|AD|=|AE|=b-r$, $|BF|=|BE|=a-r$. Поэтому $|AE|\cdot|BE|=ab-(a+b)r+r^2=ab-r\times\times(a+b-r)=ab-rp=2S-S=S$.

4. $R^2\sqrt{3}/2$. 5. $9/4$. 6. 4,5. 7. $-\cos 2\varphi$ при $\pi/4<\varphi<\pi/2$. 8. $|BD|=|CD|$. Указание. Пусть $|FD|=x$, $|DE|=y$. Тогда $S=S_{ABC}=\frac{1}{2}cx+\frac{1}{2}by$, откуда $y=\frac{2S-cx}{2}$. Осталось исследовать на максимум функцию $xy=\frac{x(2S-cx)}{2}$. 9. $2\operatorname{arctg}\sqrt{3}/2$. 10. $a^2\sqrt{3-\cos^2\alpha}/8\cos\alpha$. 11. 30°. 12. 1000. 13. $\frac{Q\sqrt{Qmn}}{m^2+n^2}$. 14. $\frac{1}{2}m^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$. 15. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$. 16. $\frac{3V}{\pi R}$. 17. $2\pi d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 18. $12\pi l^3/125$. 19. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\times\left(\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{3/2}\operatorname{tg}\alpha$. 20. $(1/4)\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^3\times\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 21. $(1/4)\sin^3 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. 22. $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-2q}}{2}}$; $0<q\leqslant 1/2$. 23. $8R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}/\cos\alpha$. 24. $a^2\sqrt{3}/4\cos\alpha$. 25. $r/3$. Указание. Центры четырех шаров, о которых идет речь в условии задачи, образуют правильную треугольную пирамиду со стороной основания $2r$, высотой $r-x$ и боковым ребром $r+x$, где x — радиус четвертого шара. 26. Указание. Центр описанной сферы проектируется на каждую грань в центр описанной около этой грани окружности. Поскольку радиусы описанных окружностей одинаковы, центр описанной сферы одинаково удален от всех граней пирамиды. 27. Указание. Все диагональные плоскости такого параллелепипеда являются прямоугольниками.

Устный экзамен

1. 2, 6, 18. 2. 5/3, 10/9. 3. 1/4. 4. 1,1. 5. $7\sqrt{2}/10$. 6. Между −2 и −1. 7. Решение. $\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>\log_\pi \pi^2=2$. 8. 3/2. 9. а) $\varnothing$; б) $\{7;\ 8\}$; в) $\{0;\ 3\}$; г) $\{\log_4((\sqrt{29}-5)/2),\ \log_4((1+\sqrt{5})/2)\}$. Указание. Выполните замену $y=4^x-\frac{1}{4^x}$; д) $\{-11,\ -5-\sqrt{14},\ -5+\sqrt{14},\ 1\}$. Указание. Уравнение эквивалентно такому: $(x(x+10))^2=11^2$, откуда либо $x^2+10x-11=0$, либо $x^2+10x+11=0$; е) $\{1;\ 2\}$; ж) $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $(k\in Z)$; з) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}+(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$, $(k,\ l\in Z)$. 10. $\{-3\pi/4\}$. 11. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6l\pm1)$ $(k,\ l\in Z)$. 12. а) $(3;\ 5),\ (5;\ 3)\}$; б) $\{(2,\ 1),\ (1;\ 2),\ (-1;\ -2),\ (-2;\ -1)\}$. 13. а) $]-\infty;\ -2[\,\cup\,]-1/3;\ +\infty[$; б) $]-1;\ 2[\,\cup\,]3;\ 6[$; в) $[-1/4;\ 3/4[$; г) $[-2;\ -1]\cup[4;\ +\infty[$. д) $]0;\ 1[\,\cup\,]\sqrt{3};\ 9[$. 14. $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right[$. 15. а) $]-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty[$; б) $]4;\ 4{,}5[\,\cup\,]4{,}5;\ 7]$; в) $]-\infty;\ 0]$; г) $[-5;\ -4[\,\cup\,]-4;\ -3[$. 16. $p=q=0$; $p=q=-\frac{1}{2}$; $p=1$, $q=-2$. 17. $a=2$, $-3<x\leqslant 2$. 18. а) См. рис. 5; б) см. рис. 6; в) см. рис. 7.

Анализ

1. $\{1\}$. 2. $y_{\min}=y(\pi/4)=15-2\sqrt{2}$; $y_{\max}=y(\pi/2)=15$. 3. а) Возрастает при $x\in\,]-\infty;\ 1/5]$ и при $x\in[1;\ +\infty[$. Убывает при $x\in[1/5;\ 1]$; б) возрастает при $x\in[2;\ +\infty[$; убывает при $x\in\,]-\infty;\ 2]$. 4. Указание. $y'=5x^4+8>0$.

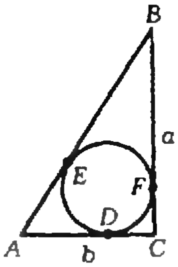


Рис. 4.

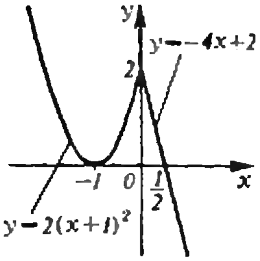


Рис. 5.

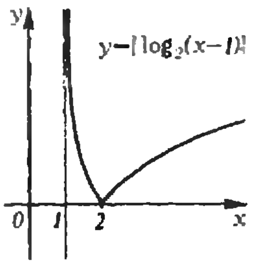


Рис. 6.

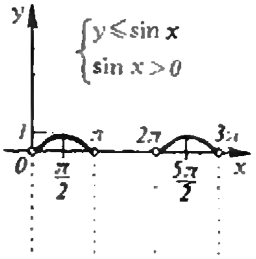


Рис. 7.

Геометрия

1. $(-1;\ -3)$. 2. $\vec{AB}=\vec{c}+2\vec{b}$; $\vec{AC}=2\vec{c}+\vec{b}$. 3. 18,5. 4. $a-r+\frac{ar}{a-2r}$. 5. 5/3. 6. $\pi/6$. 7. 4. 8. $\frac{Q\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; 12.

Физика

Механика

1. $a=(v_2^2-v_1^2)/(2l)=8$ м/с².
2. $l=5(gt^2/2)=25$ м (здесь $t=1$ с).
3. $v_0=\sqrt{2E_k/m}-gt=40$ м/с.
4. а) $t=\sqrt{2h/g}\approx1{,}8$ с; б) $l_{3-4}=3$ м.
5. $h_A=gt_1t_2/2$.
6. а) $t=\sqrt{2h/g}\approx10$ с; б) $t=\frac{v_0}{g}+\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{2h}{g}}\approx10{,}6$ с.
7. $v_0=\sqrt{gl^2/(2h)}=10$ м/с.
8. $V>V_п\geqslant(1-\rho_в/\rho_ж)$.
9. $m_м=m\frac{(\rho_в/\rho_д)-(\rho_в/\rho_ж)}{1-\rho_в/\rho_м}\approx0{,}27m$ (здесь $\rho_в=1$ г/см³ — плотность воды).
10. $H=h\frac{\rho_д-\rho_ж}{\rho_ж}\frac{D^2}{d^2}$.
11. $h=\frac{\sigma_{пр}}{(\rho_с-\rho_в)g}\approx7{,}2\cdot10^3$ м$=7{,}2$ км.
12. $V_1/V=(\rho_2-\rho)/(\rho_2-\rho_1)$.
13. $v=\frac{5}{4}v_0$.
14. $a_1=8g\frac{8m_1-m_2}{64m_1+m_2}$; $a_2=g\frac{8m_1-m_2}{64m_1+m_2}$; $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{8}$.
15. $F_{\min}=mg/\mu=600$Н.
16. $t_{\min}=v/(\mu g)=10$ с; $s_{\min}=v^2/(2\mu g)=100$ м.
17. $h=lv^2/(Rg)=0{,}084$ м$=8{,}4$ см.
18. $F_{\max}=mg\left(3-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где $\alpha=2$ рад.
19. $F=m(g-(v_0^2+al)/R)\approx8{,}5\cdot10^3$ Н.
20. $\alpha_{\min}=\arcsin(r/(\mu R))$.
21. $A=(m_1+m_2)g(l_2-l_1)/2$.

22. $H=\dfrac{(v-M\sqrt{2gh/m})^2}{2g}$.

23. а) $\Delta E_p=m_1gl(1-\cos\alpha)=100$ Дж; б) $H=lm_1^2(1-\cos\alpha)/(m_1+m_2)^2=0{,}16$ м.

24. $v=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)/3}$.

25. $\alpha_1=12°$; $\alpha_2=24°$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $v_в/v_к=\sqrt{M_к/M_в}=4$.

2. $m=\rho V\left(1-\dfrac{p}{p_а+\rho gh}\right)=6$ кг.

3. Да, диссоциация произошла.

4. $T_3=T_2^2/T_1$.

5. $p=p_0\dfrac{T}{T_0}+\dfrac{mRT}{MV}\approx1{,}89\cdot10^5$ Па.

6. Нет, не вся вода превратится в пар.

7. $A=\eta mq(1-T_2/T_1)\approx1{,}6\cdot10^9$ Дж.

8. $v=\sqrt{2(c(T_п-T)+\lambda)}\approx346$ м/с.

9. $\Delta m=m_0\dfrac{s}{s_0}-\dfrac{N\tau}{q\eta/100\%}=9{,}6$ кг.

Основы электродинамики

1. $l=\Delta l(2+\sqrt{2})\approx170$ см$=1{,}7$ м.

2. $d=4qU/(3mg)\approx7\cdot10^{-3}$ м$=7$ мм.

3. $U'=3U/\varepsilon\approx278$ В.

4. $h=H\dfrac{\rho}{\rho_0}+\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S^2\rho_0g}$.

5. $\mathcal{E}=\dfrac{4U_1U_2}{5U_1-U_2}\approx27$ В.

6. $I=\dfrac{I_3(I_1^2+I_2I_2+I_2^2)}{I_3(I_1+I_2)-I_1I_2}\approx5{,}4$ А.

7. $0{,}75R<R_{кв}<R$.

8. $r=\sqrt{R_1R_2}=6$ Ом.

9. $\eta=1-rI/\mathcal{E}$; см. рис. 8.

10. $P'=P_1(P-P_1)/P$.

11. а) $Q=I^2R\tau=24\,000$ Дж$=24$ кДж;
б) $k=1+Q/(cmT)=1{,}4$.

12. $\mathcal{E}=\dfrac{q^2I_0}{C(qI_0-PC)}\approx51{,}1$ В.

13. $P_2/P_1=1/9$.

14. Веществу с более высоким значением электрохимического эквивалента соответствует график *1* (см. рис. 8 в статье).

15. $A=2UpVF/(RT)\approx1{,}5\cdot10^5$ Дж (здесь $F=96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).

16. $\dfrac{e}{m}=\dfrac{2U}{B^2R^2}=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

17. $\dfrac{N_1}{N_2}=\dfrac{IR}{lBv}=50$.

18. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{B}\sqrt{\dfrac{m_0U}{e}}(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1})\approx$
$\approx16\cdot10^{-3}$ м$=16$ мм (здесь $m_0=1{,}67\times10^{-27}$ кг — атомная единица массы, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд одновалентного иона).

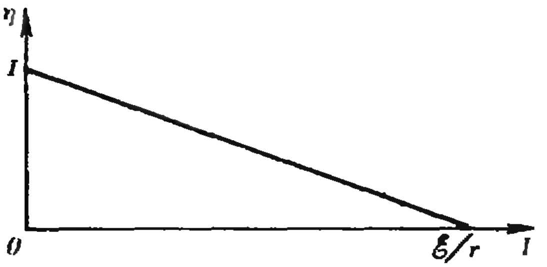


Рис. 8.

19. $v<eBd/m$.

20. $q=BdS/(2\rho)$.

Колебания и волны

1. $T=6$ с.

2. $l=\Delta l\dfrac{k^2}{k^2-1}=9\cdot10^{-2}$ м$=9$ см.

3. $l_2/l_1=(N_1/N_2)^2=4$.

4. $\dfrac{E_k}{E_p}=\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

5. а) $T=mg-qE=8{,}1\cdot10^{-2}$ Н;
б) $\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{1-\dfrac{qE}{mg}}=0{,}9$.

6. $\lambda=2\pi c\sqrt{LC}\approx1{,}8\cdot10^3$ м.

7. $T=2\pi\sqrt{LC}\approx63$ мкс.

8. $\nu_1=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}\approx5\cdot10^7$ Гц; $\nu_2=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}\approx1{,}7\cdot10^7$ Гц; $\lambda_1=\dfrac{c}{\nu_1}\approx6$ м; $\lambda_2=\dfrac{c}{\nu_2}\approx18$ м.

9. $T_2/T_1=\sqrt{C_2/C_1}=2$.

Оптика

1. Согласно закону преломления света, преломленный луч распространяется в направлении 4 (см. рис. 10 в статье).

2. $\varphi=60°$.

3. $h=a\sqrt{n^2-1}/2\approx1{,}7$ м.

4. $\beta=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin\alpha}{n-\cos\alpha}\right)$.

5. $\beta=\arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha}{n}\right)$.

6. $\dfrac{\pi}{4}>\varphi>\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

7. $\Gamma=f/F-1=15$.

8. $v_2=v_1F/(d-F)=0{,}5$ м/с.

9. $l'/l=8$.

10. $l=\dfrac{dr}{d-F}=3$ см.

11. $x=\dfrac{d_0(F+l)-l^2}{d_0-l+F}\approx6{,}8$ см; $\Gamma=\dfrac{d_0}{x-l}\approx14$.

12. $h=\dfrac{E_k}{\nu-\nu_{min}}=\dfrac{9{,}9\cdot10^{-20}\,Дж}{1{,}5\cdot10^{14}\,Гц}=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с; $A=h\nu_{min}\approx4\cdot10^{-19}$ Дж.

13. $d=(W_1-W_2-A)/(eE)=9{,}2\cdot10^{-3}$ м$=9{,}2$ мм.

14. $P=\dfrac{\eta W_0mN_A}{Mt}\approx52$ МВт (здесь $M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана, $t=1$ сут$=24\cdot60\cdot60$ с).

С помощью обратной функции

(см. «Квант» № 5)

1. а) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; б) $x\cdot\ln x-x$.

2. а) $\dfrac{1}{2}[x^2+x\sqrt{x^2-1}-\ln(\sqrt{x^2-1}+x)]$;
б) $\dfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-\ln(\sqrt{x^2-1}+x)]$. Указание. $\sqrt{x^2-1}=(\sqrt{x^2-1}+x)-x$.

3. а) $\pi-1$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $3\ln2-\dfrac{3}{2}$; г) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$. Указание. $\dfrac{y^2}{1-y^2}=\dfrac{1}{2(1+y)}+\dfrac{1}{2(1-y)}-1$.

Избранные школьные задачи

(см. «Квант» № 5)

1. $1-1/2+1/3-1/4+\ldots+1/99-1/100=1+1/2+1/3+\ldots+1/100-2(1/2+1/4+1/6+\ldots+1/100)=1+1/2+1/3+\ldots+1/100-(1+1/2+1/3+\ldots+1/50)=1/51+1/52+\ldots+1/100$.

2. а) 69999. Решение. Пусть число a, имеющее сумму цифр k, оканчивается в точности n девятками ($n=0, 1, 2, \ldots$). Тогда сумма цифр числа $a+1$ равна $k+1-9n$. Поэтому $9n-1$ должно делиться на 7. Наименьшее такое n равно 4. Далее, подбором находим ответ. б) Среди 13 последовательных натуральных чисел a как минимум 7 принадлежат одному и тому же десятку, суммы их цифр — семь последовательных натуральных чисел, поэтому одна из них делится на 7. Число 13 в условии задачи нельзя заменить меньшим: среди 12 чисел 994, 995, ..., 1005 нет ни одного с суммой цифр, делящейся на 7.

3. $S/30$. Решение. Проведем $MN \| AC$ (рис. 9). Тогда $MN=\frac{1}{2}LC$. С другой стороны, треугольники AKL и MKN подобны, откуда $AL/MN=AK/MK=1/2$. Следовательно, $AL=MN/2=CL/4$, то есть $AL=AC/5$. Далее, $S_{AMC}=\frac{1}{2}S$, $S_{AKC}=S_{AMC}/3=S/6$, наконец, $S_{AKL}=S_{AKC}/5=S/30$.

4. $x=y=z=1$ или $x=y=z=-1$. Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=0,$$

откуда $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, но это означает, что $x=y=z$.

5. Пусть требуемый треугольник ABC построен, A' и A'' — точки, симметричные точке A относительно сторон угла (рис. 10). Поскольку $A'B=AB$, $A''C=AC$, периметр треугольника ABC равен длине ломаной $A'BCA''$. Поэтому периметр будет наименьшим в том случае, когда B и C — точки пересечения $A'A''$ со сторонами угла (рис. 11).

6. Разложим $x^3+y^3+z^3-3xyz$ на множители, одним из которых окажется $x+y+z$. Имеем: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=(x+y+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)+(x+y)^2-3xy)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

7. $2\sqrt{m_1^2+m_2^2}/3$. Решение. Площадь четырехугольника $ABMN$ (рис. 12) равна $\frac{1}{2}\ m_1m_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями AM и BN этого четырехугольника. С другой стороны, $S_{ABMN}=S_{ABC}-S_{NMC}=\frac{3}{4}S_{ABC}$, поэтому

$$S_{ABC}=4S_{ABMN}/3=2m_1m_2\sin\alpha/3.$$

Из условия следует, что $\sin\alpha=1$. Следовательно, медианы AM и BN перпендикулярны. Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику.

8. $2^{2800}>3^{3500}$. Решение. Поскольку $2^{2800}=4^{2799}$, достаточно доказать, что $2^{799}>3^{500}$, то есть неравенство $2^{800}/3^{500}>2$. Имеем: $2^{800}/3^{500}=(256/243)^{100}=(1+13/243)^{100}$. Воспользуемся теперь несколько раз неравенством $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$, верным для любого α. Получим $(1+13/243)^{100}>(1+26/243)^{50}>(1+52/243)^{25}>$ $>(1+52/243)^{24}>(1+104/243)^{12}>$ $>(1+208/243)^{6}>(1+416/243)^{3}>2^3>2$.

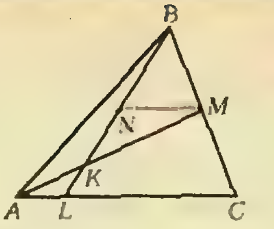


Рис. 9.

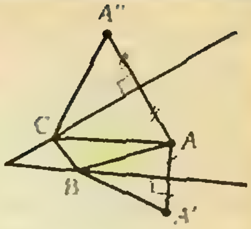


Рис. 10.

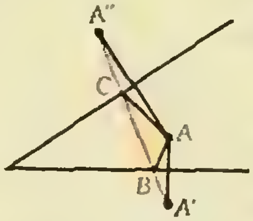


Рис. 11.

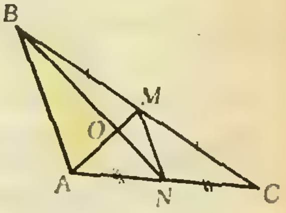


Рис. 12.

9. $a/\sqrt{3}$. Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми $A'D$ и $D'C$ равно расстоянию между содержащими их параллельными плоскостями $A'BD$ и $B'CD'$ (рис. 13). Для того чтобы найти это расстояние, докажем, что диагональ AC' перпендикулярна этим плоскостям. По теореме о трех перпендикулярах $(AC')\perp BD$ (так как $(BD)\perp(AC)$, а прямая AC — проекция прямой AC' на плоскость $ABCD$). Аналогично $AC'\perp A'D$, поэтому диагональ AC' перпендикулярна плоскостям $A'BD$ и $B'D'C$. Пусть она пересекает их в точках E и F соответственно. Поскольку параллельные отрезки AA' и DD' конгруэнтны, то равны и их проекции на прямую AC' — отрезки AE и EF. Точно так же доказывается, что $|EF|=|FC'|$. Итак, $|EF|=|AC'|/3$. Осталось заметить, что диагональ куба равна $a\sqrt{3}$ и что $|EF|$ и есть искомое расстояние.

10. 1:4. Решение. Обозначим $u=\sqrt{x}$, $v=3-\sqrt{x}$. Тогда $u+v=3$, а уравнение примет вид $\sqrt{1-u^4}=v^2$, откуда $u^4+v^4=17$. Следовательно, u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u^4+v^4=17, \\ u+v=3. \end{cases}$$

Для решения этой системы преобразуем сумму четвертых степеней: $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=(9-2uv)^2-2u^2v^2=17$. Решая полученное квадратное уравнение относительно uv, получим $uv=2$ или $uv=16$. Осталось решить две системы:

$$\begin{cases} u+v=3, \\ uv=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Решение второй: (1; 2) и (2; 1). Итак, либо $\sqrt{x}=1$, откуда $x=1$, либо $\sqrt{x}=2$, откуда $x=4$. Проверка показывает, что найденные значения x удовлетворяют уравнению.

11. $\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$. Указание. Из неравенства $|2\sin^3 x\cos^3 4x|\leqslant 2|\sin x||\cos 4x|\leqslant\sin^2 x+\cos^2 4x$ следует, что либо $\begin{cases}\sin x=1\\ \cos 4x=1,\end{cases}$ либо $\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos 4x=-1.\end{cases}$

12. а) Второе; б) первое. Решение. Для того чтобы выяснить, какое из двух чисел α^β и β^α $(\alpha>1,\ \beta>1)$ больше, достаточно срав-

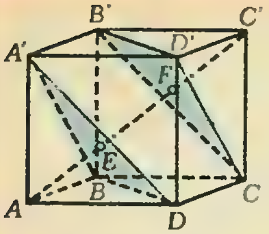


Рис. 13.

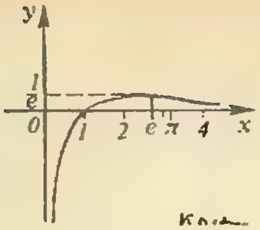


Рис. 14.

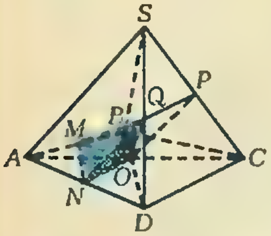


Рис. 15.

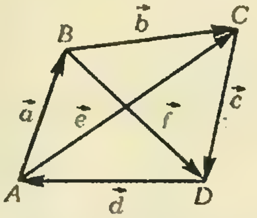


Рис. 16.

нить числа $\alpha\ln\beta$ и $\beta\ln\alpha$. Рассмотрим функцию $y=\ln x/x$ и построим ее график (рис. 14). Эта функция возрастает на $]0;\ e]$ и убывает на $[e,\ +\infty[$. Поскольку $e>1{,}0002>1{,}0001$, получаем, что $\ln 1{,}0002/1{,}0002>\ln 1{,}0001/1{,}0001$, и поэтому $1{,}0002^{1{,}0001}>1{,}0001^{1{,}0002}$. Так как $\pi>e$, получаем, что $\ln\pi/\pi<\ln e/e$, и поэтому $e^{\pi}>\pi^{e}$.

13. $v/16$. **Решение.** Из равенства площадей треугольников ABD и BCD следует, что $|AO|=|OC|$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 15). Отрезки OP и QN — средние линии треугольников ASC и ASD, поэтому они параллельны прямой AS. Следовательно, прямые OP и QN параллельны и, значит, (OP) параллельна плоскости MQN. Отсюда вытекает, что тетраэдры $MNQP$ и $MNQO$ равновелики (у них общее основание MNQ, а длины высот равны, так как точки P и O одинаково удалены от плоскости MNQ). Вычислим теперь объем тетраэдра $MNQO$. В основании этого тетраэдра лежит треугольник MON, образованный средними линиями треугольника ABD. Площадь его равна $S_{ABD}/4=S_{ABCD}/8$. Расстояние от точки Q до плоскости $ABCD$ равно половине высоты пирамиды $SABCD$. Поэтому $V_{MNOQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}V_{SABCD}=V/16$.

14. Нет. **Доказательство.** Пусть $3=aq^k$, $5=aq^l$, $7=aq^m$, где $k<l<m$. Тогда $q^{k-l}=3/5$; $q^{k-m}=3/7$, откуда $(3/5)^{k-m}=(3/7)^{k-l}$, то есть $7^{l-k}=3^{m-l}\cdot 5^{m-k}$. Полученное равенство невозможно при натуральных $k,\ l,\ m$, так как его левая часть делится на 7, а правая — нет.

15. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 16). Из условия следует, что

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}, \qquad (1)$$

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2=\vec{e}^2+\vec{f}^2. \qquad (2)$$

Так как $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$, получаем из (2), что $\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2$, откуда $\vec{d}^2=2\vec{b}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}^2$. Заменяя $\vec{a}+\vec{c}$ на $-(\vec{b}+\vec{d})$ (из равенства (1)), получим $\vec{d}^2=-2\vec{b}\,\vec{d}-\vec{b}^2$, то есть $\vec{d}^2+2\vec{b}\,\vec{d}+\vec{b}^2=(\vec{b}+\vec{d})^2=0$. Следовательно, $\vec{b}=-\vec{d}$, но это и означает, что $ABCD$ — параллелограмм.

Бег по кругу и длинный рассказ
(см. «Квант» № 2)

Задачи

1. **Ответ:** 20 лет. **Решение.** Прежде всего, ясно, что попугайчик родился в XX веке (сумма цифр любого номера года не больше чем $1+9+9+9=28$). Пусть x и y — последние две цифры года его рождения. Из условия следует, что $1984-19xy=1984-(1900+10x+y)=1+9+x+y$. Поэтому $11x+2y=74$. Поскольку x и y — цифры, причем x — четно, получаем $x=6$, $y=4$. Итак, попугайчик родился в 1964 году и ему исполнилось 20 лет.

2. **Ответ.** Найдутся. **Указание.** Пусть $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7$ — возрасты данных 7 людей, причем $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=100$. Предположим, что сумма возрастов любых трех из них не больше 49. Тогда $x_5+x_6+x_7\leqslant x_5+x_5+1+x_5+2\leqslant 49$. Поэтому $3x_5<46$, то есть $x_5\leqslant 15$. Отсюда следует, что $x_4\leqslant 14$, но тогда $x_1\leqslant 11$, $x_2\leqslant 12$, $x_3\leqslant 13$. Поэтому $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\leqslant 11+12+13+14+49=99<100$.

3. **Ответ.** Эду 2 года, Мыши 12 лет, Додо — 72 года. **Указание.** Пусть отношение возрастов Мыши и Эда равно k, а x — возраст Эда. Из условия следует, что $k^2x+kx=84$. Считая k целым числом и предполагая, что возрасты тоже выражаются целыми числами, получим, что 84 делится на x. Перебирая делители числа 84, находим, что $x=2$, откуда $k=6$.

4. **Ответ:** $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)=(n-1)!$, где n — число участников бега. Пусть всего участников бега — n. Сам Додо занимает какое-нибудь место (все равно какое). На круге остается $n-1$ место. Первого из участников он может поставить на любое из оставшихся $n-1$ мест, второго на оставшиеся $n-2$ места и т. д. Всего способов, таким образом, $(n-1)(n-2)\ldots 1$.

5. Скорее 60 000 мышек съедят кошку!

6. **Ответ:** $\frac{a}{v}$. **Указание.** Из соображений симметрии ясно, что в каждый момент времени участники бега будут находиться в вершинах квадрата меньших размеров, чем исходный (см. рис. 17), как-то повернутого по отношению к исходному. Поэтому движение каждого бегуна можно представить себе так: он бежит по диагонали большого квадрата к его центру, а квадрат вращается вокруг своего центра. Скорость каждого из бегунов в любой момент времени направлена по стороне меньшего квадрата. Поэтому вдоль диагонали бегун движется со скростью $v/\sqrt{2}$. Отсюда следует, что в точке O все бегуны окажутся через время $t=\frac{a/\sqrt{2}}{v/\sqrt{2}}=\frac{a}{v}$.

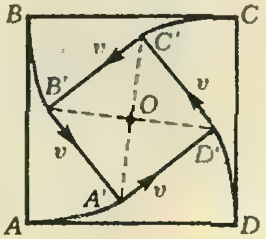


Рис. 17.

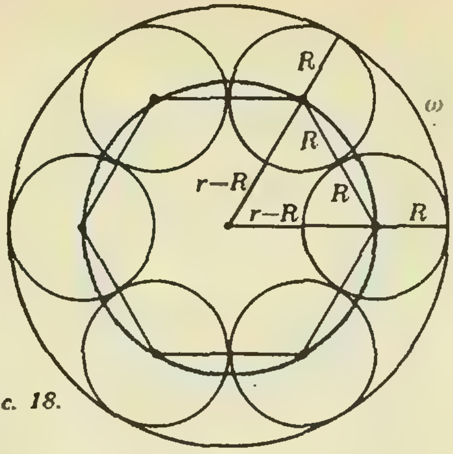


Рис. 18.

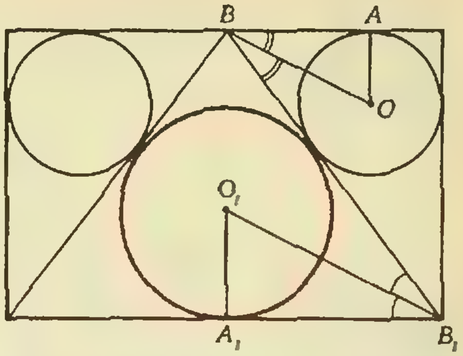


Рис. 19.

Наша обложка

(см. «Квант» № 5)

Задача с обложки прошлого номера служит отличной иллюстрацией того, как правильный выбор сечений (или проекций) позволяет свести стереометрическую задачу к нескольким планиметрическим.

Первое сечение (рис. 18) мы проведем через центры шести данных шаров — они удалены от верхнего основания цилиндра на одно и то же расстояние R, и поэтому лежат в одной плоскости, параллельной этому основанию. (Отметим, что рис. 18 можно рассматривать и как ортогональную проекцию цилиндра и шаров на плоскость основания.) Плоскость этого сечения пересекает поверхность цилиндра по окружности ω радиуса r, равного радиусу основания цилиндра, а шары — по шести кругам радиуса R, касающимся друг друга и окружности ω. Рассмотрим шестиугольник, образованный центрами этих кругов. Очевидно, он вписан в окружность радиуса $r-R$, концентрическую с окружностью ω, а все его стороны равны $2R$. Следовательно, этот шестиугольник правильный и радиус его описанной окружности равен стороне, то есть $r-R=2R$ или $r=3R$.

Теперь рассечем данную конфигурацию плоскостью, проходящей через ось цилиндра и центр O одного из данных шаров (рис. 19). В обозначениях рисунка 19 прямоугольные треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (поскольку BO и B_1O_1 — биссектрисы равных углов ABB_1 и BB_1A_1), поэтому

$$\frac{O_1A_1}{A_1B_1}=\frac{OA}{AB}.$$

Но O_1A_1 — это искомый радиус, $A_1B_1=r=3R$, $OA=R$, а $BA=r-R=2R$. Отсюда получаем **ответ**: $O_1A_1=3R/2$.

Замечание. При построении второго сечения (рис. 19) мы опирались на полученное из рисунка 18 соотношение $r=3R$. На нашем чертеже оказалось, что красная окружность касается двух других (конечно, в решении этим фактом мы не пользовались). Читателям предлагается выяснить, действительно ли это так. А тех, кто не поленится вычислить длину образующей конуса и высоту цилиндра (которые также не понадобились в нашем решении), ждет приятный сюрприз.

В. Н., П. И.

Наша обложка

(см. «Квант» № 6)

Как и многие геометрические задачи на максимум и минимум, задача с 4-й страницы обложки этого номера решается аналитически: объем пересечения пирамид мы запишем в виде функции от некоторого числового параметра, а затем исследуем ее средствами математического анализа. Своеобразие данной задачи в том, что эта функция на разных участках будет задаваться разными формулами, так как вид многогранника пересечения существенно зависит от положения центра симметрии O.

Данную пирамиду обозначим $SABC$, симметричную — $S'A'B'C'$, их высоты — SH и $S'H'$. Прежде, чем начать вычисления, заметим, что когда точка O лежит на верхней половине высоты ($SO<SH/2$), основание каждой из наших пирамид не пересекает другой пирамиды (случай 1 на обложке). Следовательно, в этом случае пересечение пирамид совпадает с пересечением трехгранных углов $SABC$ и $S'A'B'C'$ и его объем будет тем больше, чем ниже расположена точка S', а наибольшего значения достигает при $S'=H$ ($SO=SH/2$). Отметим, что здесь пересечение пирамид есть параллелепипед (как шестигранник с тремя парами параллельных граней).

Итак, в дальнейшем можно считать, что $SO>SH/2$. При этом условии плоскость $A'B'C'$ отсекает от данной пирамиды тетраэдр T_S, и так как она параллельна плоскости ABC, этот тетраэдр гомотетичен пирамиде $SABC$ с коэффициентом $x=SH'/SH$ (рис. 20); очевидно, $0<x<1$. Через этот параметр мы и будем выражать объем пересечения.

Плоскости боковых граней пирамиды $S'A'B'C'$ также отсекают от пирамиды $SABC$ тетраэдры — T_A, T_B, T_C, равные между собой и гомотетичные $SABC$ с некоторым коэффициентом y. Выразим y через x. На рисунке 21 изображено сечение наших пирамид плоскостью SAH; она пересекает пирамиды $SABC$,

$S'A'B'C'$ и T_A по треугольникам ASM, $A'S'M'$ и AA_1N. Поскольку $NH:HM = NH:H'M' = S'H:S'H' = x$ (отрезки HM и $H'M'$ симметричны относительно O, $\triangle S'HN \sim \triangle S'H'M'$), а $AH:HM=2$ (H — центр правильного треугольника ABC),

$$y=\frac{AN}{AM}=\frac{AH-NH}{AM}=$$
$$=(2-x)\frac{HM}{AM}=\frac{2-x}{3}.$$

Пересечение пирамиды $SABC$ с $S'A'B'C'$ можно получить, отрезая от нее тетраэдры T_S, T_A, T_B и T_C. Пользуясь этим мы и будем вычислять его объем; надо только учесть, что тетраэдры могут пересекаться друг с другом.

Рассмотрим, например, тетраэдры T_S и T_A. Они пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются их соответственные ребра SS_1 и AA_1 (рисунки 20 и 21), то есть когда выполнено неравенство

$$SA < SS_1 + AA_1 = xSA + ySA$$

или $x+y>1$; подставляя сюда *$y=(2-x)/3$, получим $x>1/2$.* При этом условии пересечение тетраэдров T_S и T_A само является тетраэдром, гомотетичным данной пирамиде $SABC$ с коэффициентом $S_1A_1/SA = x+y-1 = (2x-1)/3$. То же самое, очевидно справедливо и для пересечений тетраэдра T_S с T_B и T_C. Аналогично, при $2y>1$, то есть при $x<1/2$ пересекаются друг с другом тетраэдры T_A, T_B и T_C. Их попарные пересечения — это тетраэдры, гомотетичные $SABC$ с коэффициентом $2y-1=(1-2x)/3$. Все три тетраэдра при $x>0$ общих точек не имеют, а при $x=0$ такая точка одна — точка H.

Теперь можно выписать выражение для объема $v(x)$ пересечения пирамид $SABC$ и $S'A'B'C'$. Объем пирамиды $SABC$ примем за 1, тогда объемы пирамид T_A, T_B и T_C равны $(2-x)^3/27$, пирамиды T_S — x^3, пересечений T_S с остальными пирамидами — $(2x-1)^3/27$, попарных пересечений T_A, T_B и T_C — $(1-2x)^3/27$. Отсюда получаем, что

$$v(x)=v_1(x)=1-x^3-$$
$$-\frac{1}{9}(2-x)^3+\frac{1}{9}(1-2x)^3$$
$$\text{при } 0<x<\frac{1}{2},$$

$$v(x)=v_2(x)=1-x^3-$$
$$-\frac{1}{9}(2-x)^3+\frac{1}{9}(2x-1)^3$$
$$\text{при } \frac{1}{2}<x<1$$

(из объема всей пирамиды мы вычитаем объемы тетраэдров T_S, T_A, T_B, T_C и добавляем к этой разности объемы их попарных пересечений, так как каждый из этих объемов вычитался дважды). Теперь остается найти производные:

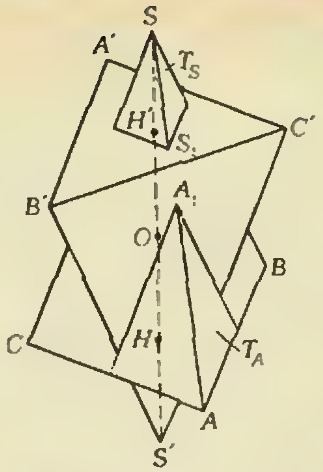


Рис. 20.

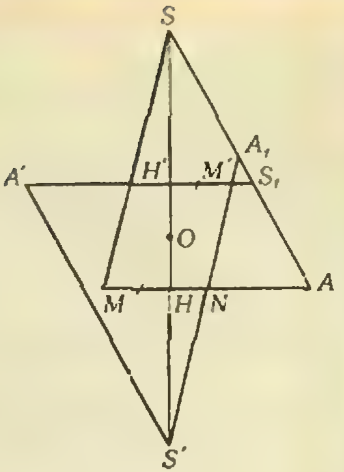


Рис. 21.

$$v_1'(x)=-3x^2+$$
$$+\frac{1}{3}(2-x)^2-\frac{2}{3}(1-2x)^2,$$
$$v_2'(x)=-3x^2+$$
$$+\frac{1}{3}(2-x)^2+\frac{2}{3}(2x-1)^2,$$

убедиться, что $v_1'(x)>0$ при $0<x<1/2$ и $v_2'(x)<0$ при $1/2<x<1$ (причем $v_1'(1/2)=v_2'(1/2)=0$) и вывести отсюда, что функция $v(x)$ возрастает на отрезке $[0;\ 1/2]$ и убывает на отрезке $[1/2;\ 1]$, следовательно, достигает при $x=1/2$ своего наибольшего значения $v(1/2)=1/2$. Поскольку $OH=OH'=\frac{1-x}{2}SH$, получаем ответ: объем рассматриваемого пересечения *пирамид достигает наибольшего* значения, когда точка O делит высоту пирамиды в отношении $SO:OH=3$ (случай 3 на обложке).

В. Н.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Нет. Пусть при делении трехзначного числа на 11 *получается* число $10a+b$. Если $a+b$ меньше 10, то цифрами нашего трехзначного числа будут a, $a+b$ и b, что противоречит убыванию цифр, так как $a+b$ не меньше a, а если $a+b$ больше 10, то цифрами будут $a+1$, $a+b-10$ и b, что противоречит убыванию цифр, так как $a+b-10$ меньше b.
2. *Например, числа 2, 6 и 5.*
3. См. рис. 22.
4. Из первого рисунка следует что сверху лежала либо красная, либо коричневая тетрадь. А тогда из второго — что сверху лежала коричневая тетрадь. Зная, что сверху лежала коричневая тетрадь, из первого рисунка получаем, что второй могла быть красная или синяя тетрадь, а из второго — что ею могла быть только красная или желтая. Отсюда следует, что второй была красная тетрадь. Теперь из второго рисунка следует, что третьей лежала желтая тетрадь, четвертой — серая и пятой — синяя тетрадь.

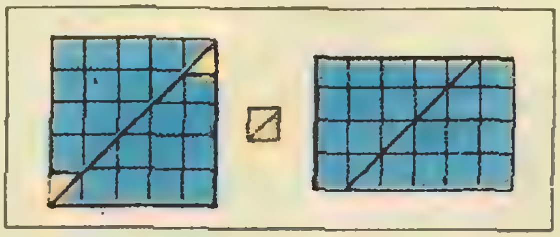


Рис. 22.

5. Провода гудят из-за того, что они колеблются под действием даже небольшого ветра как большие струны.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Из того, что $10a+b$ делится на a, следует, что b делится на a. А из делимости этого числа на b следует, что либо a делится на b, либо $2a$ делится на b, либо $5a$ делится на b. В первом случае $a=b$, что дает числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, во втором — это числа 12, 24, 36 и 48, а в третьем — число 15.

2. Юра — москвич, Толя — горьковчанин, Алеша — свердловчанин, Коля — пермяк, Витя — ленинградец.

3. Пусть первые две цифры образуют двузначное число x, а вторые — двузначное число y, тогда по условию $100x+y=x^2+2x\sqrt{y}+y$. Отсюда $x=100-2\sqrt{y}$. Четырехзначное число $100x+y$ тем меньше, чем меньше x, а из выражения x через y следует, что x минимально, когда $y=81$ — максимальному двузначному числу, являющемуся полным квадратом. Отсюда искомое число — 8281.

4. Если бы весь флакон равномерно нагрелся, то все его части равномерно расширились бы. Но стекло — плохой проводник тепла. Поэтому пробка нагреется меньше, чем горлышко, следовательно, она и расширится меньше, в результате чего возникнет зазор между ней и горлышком флакона.

5. а) $264:12=22$ или $264:22=12$; б) $390:13=30$; в) $288=2\cdot 12^2$; г) $10\cdot 1-9=1$; д) $100\cdot 1-99=1$; е) $99+99=198$; ж) $11\cdot 91=1001$; з) $11\cdot 1=9+2$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

Обе задачи-миниатюры (на доске 7 фигур) принадлежат классику советской шахматной композиции Л. Куббелю.

Задание 5. 1. Фа2! Кр:а8 2. с8Ф×, 1... Кс8 2. d8К×!, 1... Крс6 2. Фd5×, 1... Кс6(b5) 2. с8Ф×.

Задание 6. 1. Фе3! Кра4(b4) 2. Фb3×, 1... Крс4(а5—а4) 2. Ф:с5×, 1... с4 2. Фе8×!

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. В. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. М. Аратовский, Е. В. Винодаров, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, В. Ф. Лактионов, П. И. Лахтунов, И. Л. Лилье, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, И. Э. Чудновский
Фото представили
Л. Б. Мелихов, Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественные редакторы Т. М. Макарова, [illegible] В. Морозова

Корректор Н. В. Румянцева

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
тел. 250-33-54

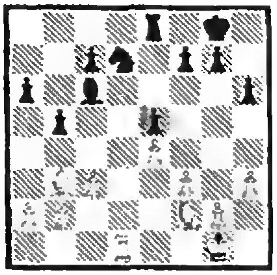
Сдано в набор 17.04.85. Подписано в печати 20.05.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,52. Т-12303.
Тираж 179254 экз. Цена 40 коп. Заказ 1001

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

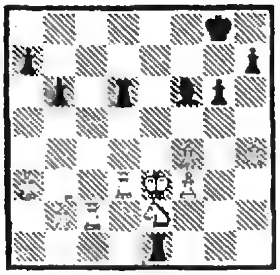
ИНЕРЦИОННОСТЬ МЫШЛЕНИЯ

Каждый шахматист, от перворазрядника до гроссмейстера, может привести множество примеров из своей практики, в которых он допускал просчет, связанный с так называемым «остаточным образом» — фигуры, свои или неприятельские, при расчете варианта оставались на своих местах, в то время как на самом деле они перескакивали на новые. Приведем несколько примеров из работ доктора психологических наук гроссмейстера Н. Крогиуса.



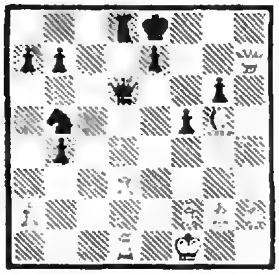
Таль — Крогиус
(31-й чемпионат СССР)

Положение черных чуть хуже, но, подтягивая своего короля к центру, они могли создать почти непробиваемую крепость. Однако последовало **26...Кb6? 27. С:b6 cb 28. Лd6!**, и черным впору сдаваться. Ход ладьи оказался для Крогиуса неожиданным. Дело в том, что пешка с7 в его сознании все время держала под контролем пункт d6.



Дарга — Лендьел
(Амстердам, 1964 г.)

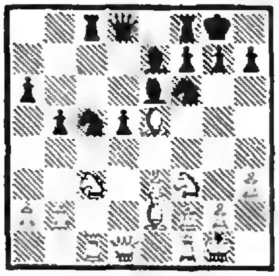
В этой партии после **40...Ле6+ 41. Крf2 Л6:е2+** белые сдались. Редчайший случай шахматной слепоты, причем одновременно у обоих партнеров. Гроссмейстеры полагали, что после **42. Л:е2 С:h4+** у белых единственный ответ **43. Крg2**, не заметив простого **43. Кре3!** Каждый считал, что поле е3 недоступно королю, выпустив из виду, что ладья е6 к тому моменту уже покинет поле боя. Комбинация с жертвой качества, очевидно, была некорректной.



Созин — Кириллов
(Москва, 1931 г.)

В этой старой партии решало 26. Ле1, и нельзя 26...Лd7 (27. Фg8×). Однако было сыграно **26. С:е7?** и ответ **26...Лd7!** спас черных. Только сейчас белые заметили, что Фg8 уже не мат — остаточный образ.

А вот пример из матча за шахматную корону.



Петросян — Спасский
(Москва, 1969 г.)

Положение белых предпочтительнее, но вот что произошло. **14. Сd3? d4! 15. С:d4 К:d3 16. Ф:d3 Сс4 17. Фb1 С:f1.** Черные выиграли качество, а вместе с ним и партию. По поводу грубой ошибки белых, допустивших d5 — d4, гроссмейстер И. Бондаревский писал: «Просмотр, который легко понять с психологической точки зрения. Пункт d4, сильнейший в позиции белых, защищен три раза! Оно, казалось бы, навечно принадлежит им. Именно в таких случаях внимание часто ослабляется».

Что можно посоветовать против подобных тактических просчетов, как бороться с остаточными образами? Можно было бы привести много рецептов, но все они в конечном итоге сводятся к одному, довольно простому — при составлении собственного плана игры нельзя без должного внимания относиться к замыслу противника, даже если на первый взгляд он кажется самым парадоксальным.

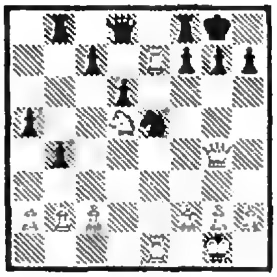
В заключение — пример из учебника, знаменитой книги И. Рабиновича «Эндшпиль».

Белые: Крb4, Кf7, п. g3; черные: Крd2.

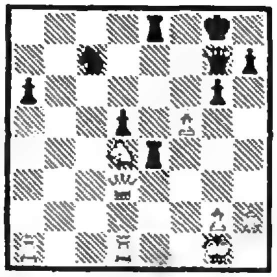
Изучая это положение, автор книги справедливо указывает, что при ходе черных — ничья, а затем приводит выигрыш при ходе белых: **1. Крс5! Кре3! 2. Кg5 Крf2 3. Ке4+ Крf3 4. Крd5**, делая вывод: «белым удалось форсировать победу лишь потому, что их король успел защитить коня». Но... простое движение пешки «g» вело к цели, ведь неприятельский король находится вне квадрата. Дальнейший текст комментария диктовался тем же остаточным образом: «Если в начальной позиции король белых стоял бы на линии «а», то выигрыш был бы невозможен даже при ходе белых».

Конкурсные задания

Найдите две комбинации, приводящие к цели.

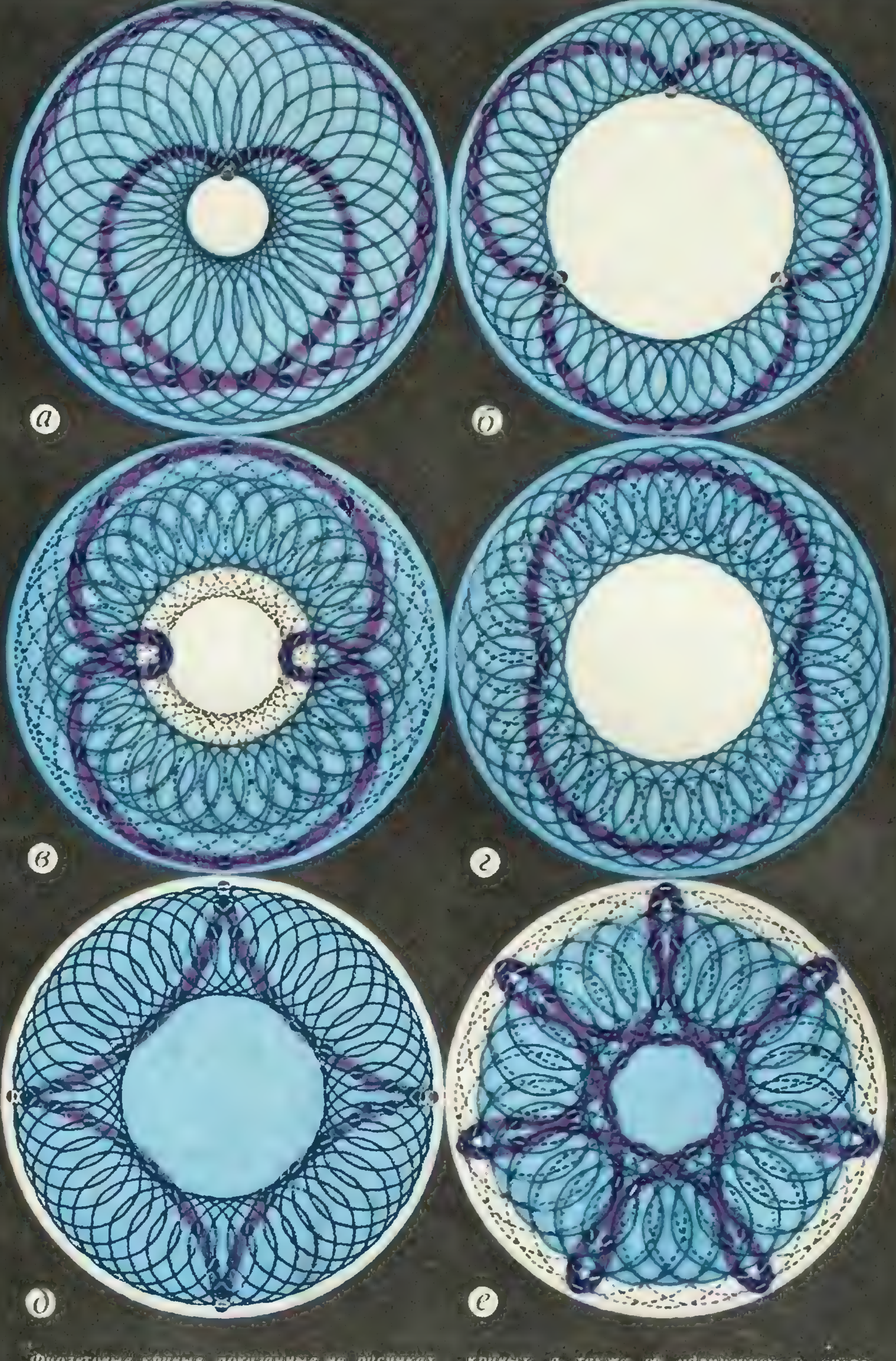


11. Белые начинают и выигрывают.



12. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 августа 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).



Фиолетовые кривые, показанные на рисунках а и б, называются эпициклоидами — их вычерчивает точка подвижной окружности, когда эта окружность катится по внутренней стороне неподвижной окружности. Об этих кривых, а также об удлиненной и укороченной эпициклоиде, гипоциклоиде и удлиненной гипоциклоиде (рисунки в, г, д и е соответственно) рассказано в статье С. Г. Гиндикина в этом номере журнала.

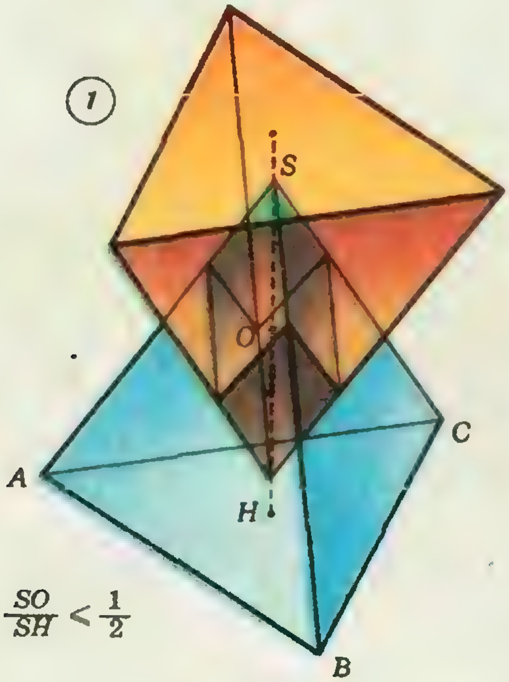
Цена 40 коп.

Индекс 70465

В нескольких предыдущих номерах «Кванта» (втором, третьем и пятом) мы отвели 4-ю страницу обложки под чертежи к стереометрическим задачам, призванным помочь читателям развить пространственное воображение. При решении задач эти чертежи играли в основном вспомогательную, иллюстративную роль. В задаче, предлагаемой здесь, четкое представление конфигурации, правильные и точные чертежи составляют, пожалуй, половину решения. Поэтому мы рекомендуем читателям попробовать сначала представить себе эту конфигурацию и нарисовать ее самостоятельно, не глядя на наши чертежи. Полное решение вы найдете в ответах под заголовком «Наша обложка».

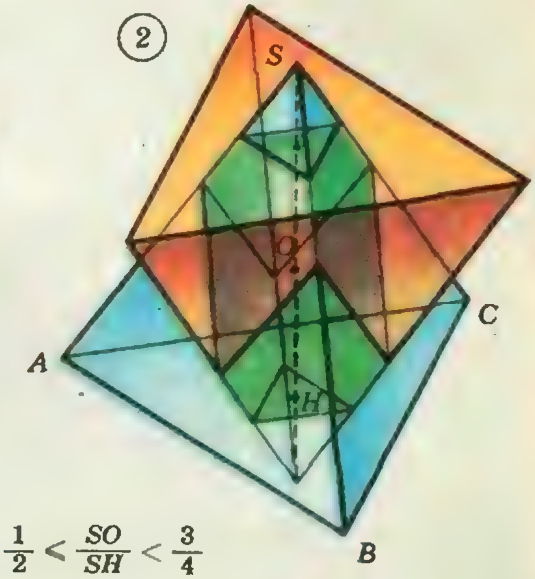
Задача. На высоте правильной треугольной пирамиды, опущенной на ее основание, выбирается произвольная точка O. Вторая пирамида симметрична данной относительно этой точки. При каком положении точки O объем пересечения этих пирамид будет наибольшим?

①



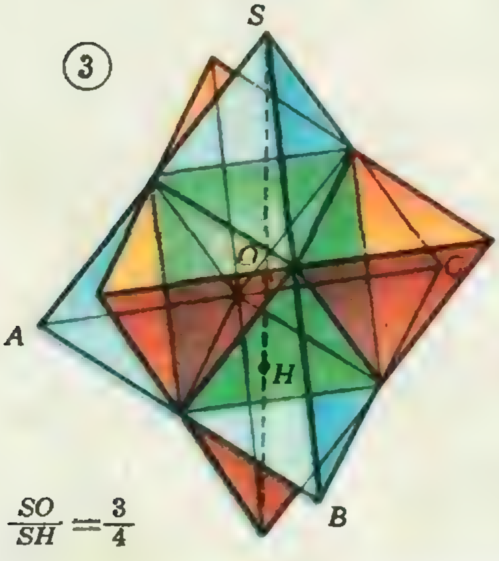
$\frac{SO}{SH} < \frac{1}{2}$

②



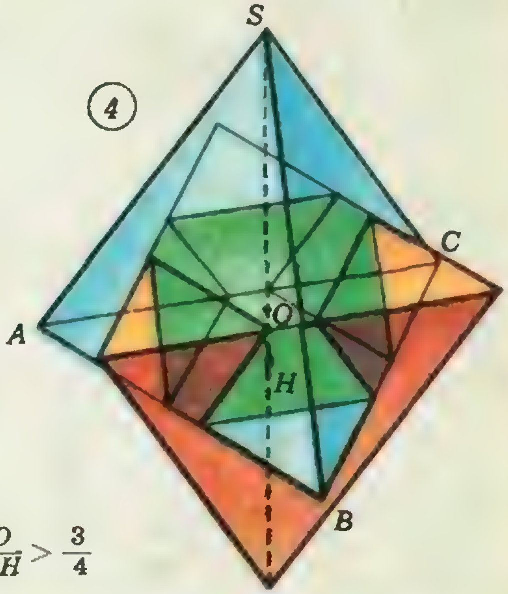
$\frac{1}{2} < \frac{SO}{SH} < \frac{3}{4}$

③



$\frac{SO}{SH} = \frac{3}{4}$

④



$\frac{SO}{SH} > \frac{3}{4}$

НОМЕР
7

*Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

Квант **7** 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

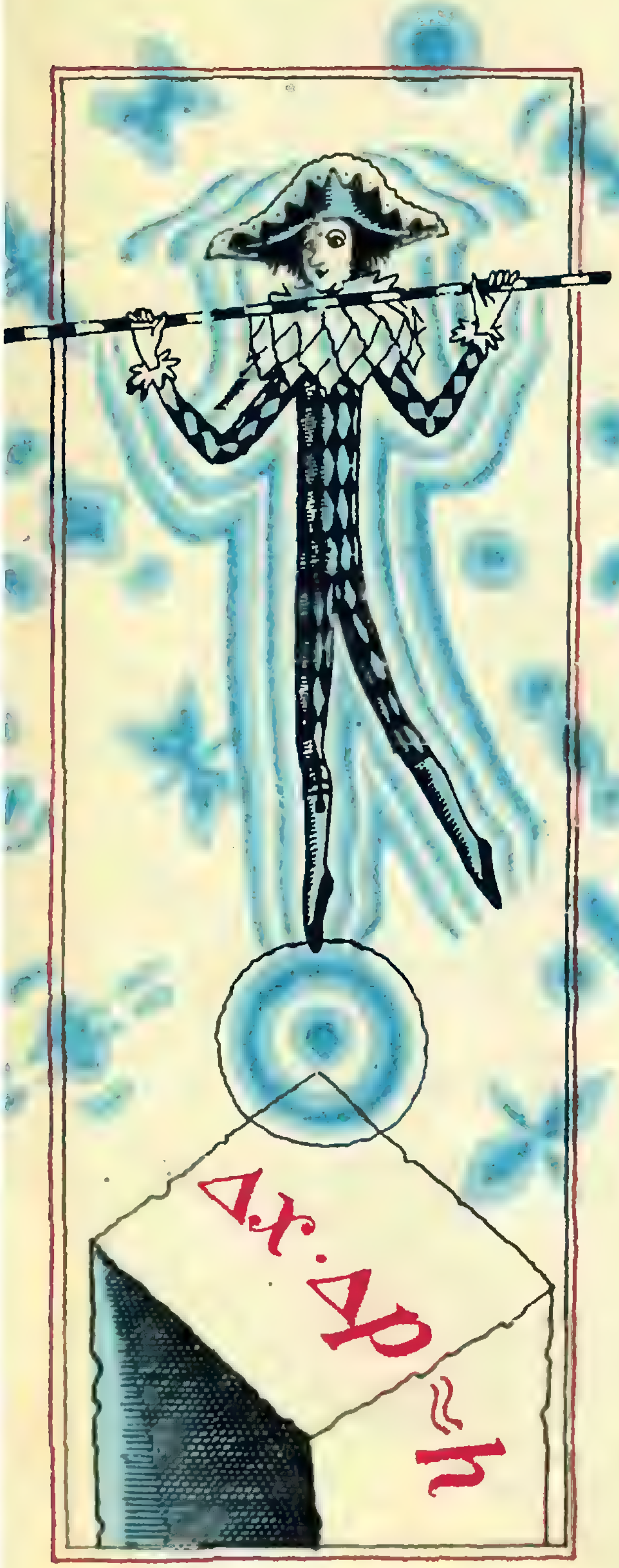
	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Л. Г. Асламазов.* Соотношение неопределенностей	*L. G. Aslamasov.* The uncertainty principle
9	*В. А. Успенский, А. Л. Семенов.* Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы	*V. A. Uspenski, A. L. Semionov.* Decidable and undecidable algorithmic problems
16	*С. Р. Филонович.* Роберт Гук	*S. R. Filonovich.* Robert Hooke
23	*Я. С. Бродский, А. К. Слипенко.* Функциональные уравнения и группы	*Ya. S. Brodski, A. K. Slipenko.* Functional equations and groups
	Наш календарь	**Our calendar**
27	Игорь Евгеньевич Тамм	Igor Evgenievich Tamm
	Лаборатория «Кванта»	**Kwant's lab**
28	*Л. В. Тарасов, М. Л. Тарасов.* Струя воды и... движущийся кораблик	*L. V. Tarasov, M. L. Tarasov.* Frowing water and... moving toy ships
30	*А. А. Варламов.* Из старых опытов	*A. A. Varlamov.* From old experiments
	Математический кружок	**Mathematics circle**
33	*С. В. Дворянинов, Э. А. Ясиновый.* Как получаются симметричные неравенства	*S. V. Dvoryaninov, E. A. Yasinovyi.* Obtaining symmetric inequalities
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
37	Задачи	Problems
38	*Л. Кэрролл.* Синяя гусеница дает совет	*L. Carroll.* Advice from a caterpillar
	Задачник «Кванта»	**Kwant's problems**
42	Задачи М931—М935; Ф943—Ф947	Problems М931—М935; Р943—Р947
44	Решения задач М911—М915; Ф923—Ф926	Solutions М911—М915; Р923—Р926
51	*М. Л. Концевич.* Равномерные расположения	*M. L. Kontsevich.* Uniform disposition
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
54	*А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Фазовые превращения	*A. I. Buzdin, S. S. Krotov.* Phase transformations
	Игры и головоломки	**Puzzles and games**
60	*В. Г. Чванов.* Задача о доминировании ферзей	*V. G. Chvanov.* Queens dominate the chessboard
63	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(53)*	**Kvant smiles** *(53)*
	Смесь *(8)*	**Miscellaneous** *(8)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Цилиндрические шахматы *(3-я с. обложки)*	Cylindrical chess *(3rd cover page)*

Модели стереометрических фигур (фирмы VEB MANTISSA, ГДР), показанные на первой странице обложки, демонстрировались прошлым летом в Москве на выставке школьного оборудования; на переднем плане — конические сечения.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985

Соотношение неопределенностей

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ


$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$

С квантовой механикой в школе сталкиваются совсем немного. Но даже такая краткая встреча оставляет глубокий след — уж слишком необычен квантовый мир. И хочется, чтобы вы сразу увлеклись этой наукой, лежащей в основе современной физической картины мира. Поэтому давайте устроим здесь еще одно свидание. Будем надеяться, что для некоторых из вас оно послужит поводом к более глубокому знакомству с квантовой механикой в будущем.

1. Импульс и координата

Немецкий физик Вернер Гейзенберг, открывший соотношение неопределенностей в 1927 году, сформулировал его следующим образом: если, исследуя какое-то тело, нам удается определить проекцию импульса тела с неопределенностью Δp_x, то мы не сможем одновременно определить соответствующую координату тела с точностью, большей чем $\Delta x \approx \hbar/\Delta p_x$, где $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Поначалу это соотношение может вызвать чувство недоумения. Ведь законы Ньютона, которые изучают в школе, позволяют найти закон движения тела, то есть рассчитать зависимость координат от времени. Зная закон движения, можно найти проекции скорости тела $\vec{v}$ (производные от координат по времени) и проекции его импульса $\vec{p} = m\vec{v}$. Получается, что можно одновременно определять координату и импульс, и никакого соотношения неопределенностей нет. Действительно, в классической физике все происходит именно так, а вот в микромире дело обстоит иначе (рис. 1).

Представьте себе, что надо следить за движением электрона. Как это сделать? Глаз — инструмент для этих целей неподходящий. Его разрешающей силы недостаточно, чтобы разглядеть электрон. Ну что ж, посмотрим на электрон в микроскоп. Разрешающая способность микроскопа определяется длиной волны света, в котором ведется наблюдение. Для обычного видимого света эта величина порядка 1000 ангстрем ($\approx 10^{-5}$ см), и частицы меньших размеров в микроскоп не разглядишь. Атомы имеют размеры порядка ангстрема, так что надеяться различить их, а тем более отдельные электроны, не приходится.

Но давайте пофантазируем.

Предположим, что нам удалось сконструировать микроскоп, использующий не видимый свет, а электромагнитные волны с меньшей длиной волны, например рентгеновское или даже γ-излучение. Чем жестче γ-излучение мы будем применять, то есть чем короче соответствующая длина волны, тем меньшие объекты можно наблюдать. Казалось бы, такой воображаемый γ-микроскоп был бы идеальным инструментом для наблюдения за электроном. С его помощью можно было бы измерить координату электрона сколь угодно точно. При чем же тут соотношение неопределенностей?

Вдумаемся глубже в этот мысленный эксперимент. Для того чтобы мы получили информацию о положении электрона, от него должен отразиться хотя бы один γ-квант — носитель минимальной порции энергии $\hbar\omega$*). Чем меньше длина волны, тем больше частота излучения ω и тем больше порция энергии, которой обладает квант. А импульс кванта пропорционален его энергии. Сталкиваясь с электроном, γ-квант обязательно передает ему часть своего импульса. Таким образом, измеряя координату, мы всегда вносим неопределенность в импульс электрона, и чем точнее мы хотим провести измерение, тем большей будет неопределенность. Подробный анализ этого процесса показывает, что произведение неопределенностей $\Delta x \times \Delta p_x$ нельзя сделать меньшим, чем постоянная Планка.

Может создаться впечатление, что мы рассмотрели только частный случай, придумали «плохой» прибор для измерения координаты, и можно провести измерение гораздо тоньше, не «толкая» электрон, не изменяя его состояние. Но увы это не так.

Лучшие умы (среди них и А. Эйнштейн) пытались придумать такой прибор, который смог бы измерить координату тела и его импульс одновременно с точностью, большей, чем позволяет соотношение неопределенностей. Но никому не удалось это сделать. Сделать это просто нельзя. Таков закон природы.

Все это может показаться несколько туманным, и трудно сразу построить какую-то четкую мысленную модель. Настоящее понимание приходит только в результате серьезного изучения квантовой механики, но это для наших читателей еще впереди. А пока, согласитесь, похоже, что природа в микромире ведет себя таким необычным способом.

Для первого знакомства, будем считать, этого достаточно.

Чтобы понять, где лежит граница между макро- и микромиром, сделаем небольшую оценку. Например, в опытах по броуновскому движению используются очень маленькие частички — размером около 1 мкм и массой всего 10^{-10} г. Но все-таки это кусочки вещества, содержащие огромное количество атомов. Из соотношения неопределенностей в этом случае имеем $\Delta v_x \cdot \Delta x \sim (\hbar/m) \sim 10^{-17}$ см^2/с*). Если, скажем, определять положение частички с точностью до одной сотой ее размера ($\Delta x \sim 10^{-6}$ см), то $\Delta v_x \sim$ $\sim 10^{-11}$ см/с. Получилась очень маленькая величина и причина этому — малое значение постоянной Планка.

Скорость броуновского движения такой частички $\sim 10^{-4}$ см/с. Как видно, погрешность в скорости, связанная с соотношением неопределенностей, пренебрежимо мала (одна десятимиллионная доля!) даже у такого небольшого тела. Тем более она не играет роли для бóльших тел (ведь в правой части соотношения стоит $\hbar/m$!). А вот если мы будем уменьшать массу частицы (возьмем, например, электрон) и увеличивать точность

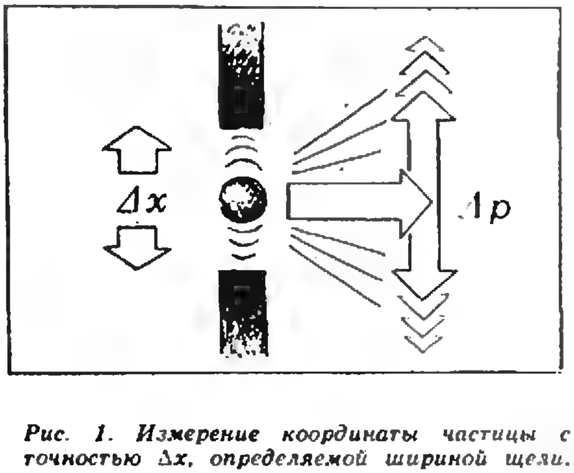


Рис. 1. Измерение координаты частицы с точностью Δx, определяемой шириной щели, через которую частица пролетает, приводит к неопределенности соответствующей проекции импульса частицы Δp.

---

*) Энергия кванта $E = h\nu = \hbar\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$ угловая частота.

*) Знак « ~ » означает оценку по порядку величины.

определения координаты ($\Delta x \sim 10^{-8}$ см — атомные размеры), то неопределенность в скорости становится сравнимой с самой скоростью микрочастицы. При описании электронов в атоме соотношение неопределенностей уже работает в полной мере, с ним не считаться нельзя. И это приводит к удивительным следствиям.

2. Волны вероятности

В простейшей модели атома — модели Резерфорда — электроны кружатся по орбитам вокруг ядра подобно тому, как планеты движутся вокруг Солнца. Но электроны — заряженные частицы, и при их вращении обязательно создаются переменные электрические и магнитные поля — возникает излучение, приводящее к потери энергии. Вот почему в планетарной модели электроны ждет незавидная судьба — они обязательно упадут на ядро, и атом разрушится. Но ведь стабильность атомов — это твердо установленный экспериментальный факт.

Нужно было «подправить» модель Резерфорда, и сделал это Нильс Бор в 1913 году. Электронам в модели Бора разрешается вращаться только по определенным орбитам, где они обладают строго заданными энергиями. Изменять эту энергию электроны могут только скачком, излучая и поглощая кванты при переходе с одной орбиты на другую. Такое «квантовое» поведение электронов в атоме позволяет объяснить многое — в частности, устойчивость атома и атомные спектры, но оно противоречит соотношению неопределенностей. Ведь при движении даже по квантовой орбите импульс и координата могут быть определены одновременно, а в микромире, как мы теперь знаем, такого быть не может.

Пришлось отказаться и от этой модели атома. Картина, описывающая поведение электрона в атоме, оказалась еще более сложной.

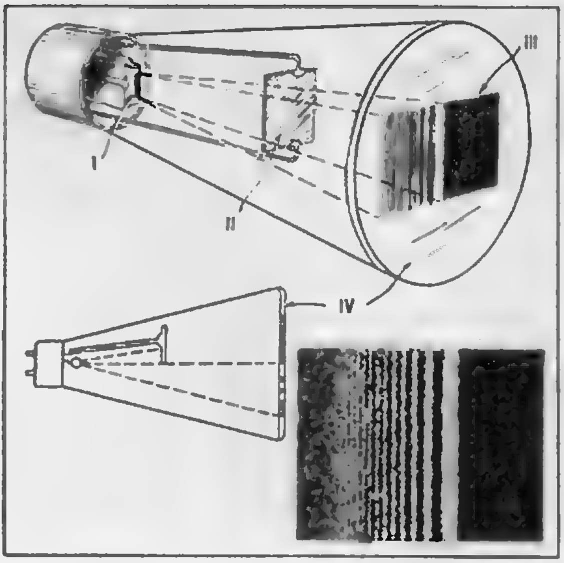


Рис. 2. Такая картина возникает в опыте по дифракции электронов: I *— электронная пушка;* II *— препятствие;* III *— область тени;* IV *— флуоресцентный экран.*

Представьте себе, что нам удалось определить положение электрона в атоме в какой-то момент времени. Сможем ли мы точно сказать, где он будет в следующий момент (для определенности, скажем, через одну секунду)? Нет, измерение координаты, как мы знаем, всегда вносит неопределенность в импульс электрона, и, пользуясь даже самыми лучшими экспериментальными устройствами, нельзя точно предсказать, куда попадет электрон. Что же нам остается в таком случае делать?

Давайте отметим точкой то место в пространстве, где мы обнаружили электрон. Результат еще одного измерения координат электрона в точно таком же атоме снова изобразим точкой в пространстве. Еще измерение — опять точка и т. д. Оказывается, что хотя и нельзя сказать заранее, где точно будет находиться следующая точка, в характере расположения точек в пространстве имеется определенная закономерность. В некоторых областях точки располагаются гуще, в других — реже, указывая на то, где с большей, а где с меньшей вероятностью может встретиться электрон.

Нам пришлось отказаться от точного описания движения электрона, но мы в состоянии предсказывать шансы обнаружить его в разных точках пространства. Поведение электрона в микромире описывается вероятностно! Такая картина поведения частиц в микромире читателю может не понравиться — уж больно она непривычна, уж больно противоречит нашей интуиции, нашему опыту. Но ничего не поделаешь — так устроена природа. В микромире действуют совсем другие законы, нежели те, к которым мы привыкли в обычной жизни. По образному выражению А. Эйнштейна, приходится «играть в кости» для того, чтобы предсказывать поведение электронов. Без этого, увы, обойтись нельзя.

Итак, в микромире состояние электрона определяется заданием вероятности его обнаружения в разных точках пространства. В нашей наглядной модели мерой вероятности будет плотность меток, и можно представить себе, что эти метки образуют некое подобие облака, определяющего образ жизни электрона.

Как устроены облака вероятности? Аналогично тому, как в классической механике законы Ньютона определяют движение тел, в квантовой механике имеется свое уравнение, из которого можно найти «размазку» электрона в пространстве. Такое уравнение придумал в 1925 году австрийский физик Эрвин Шредингер (заметьте, раньше, чем было открыто соотношение неопределенностей, то есть раньше, чем прояснилась причина размазки микрочастиц — такое в физике бывает). Уравнение Шредингера количественно, точно и подробно описывает атомные явления. Но рассказать об этом без сложной математики нельзя. Мы приведем здесь просто ответы — покажем точные портреты размазки электрона в некоторых случаях.

На рисунке 2 показана схема опыта по дифракции электронов и фотография системы полос, возникающей на экране. Картина совершенно аналогична той, которая возникает при дифракции света. Если считать, что элек-

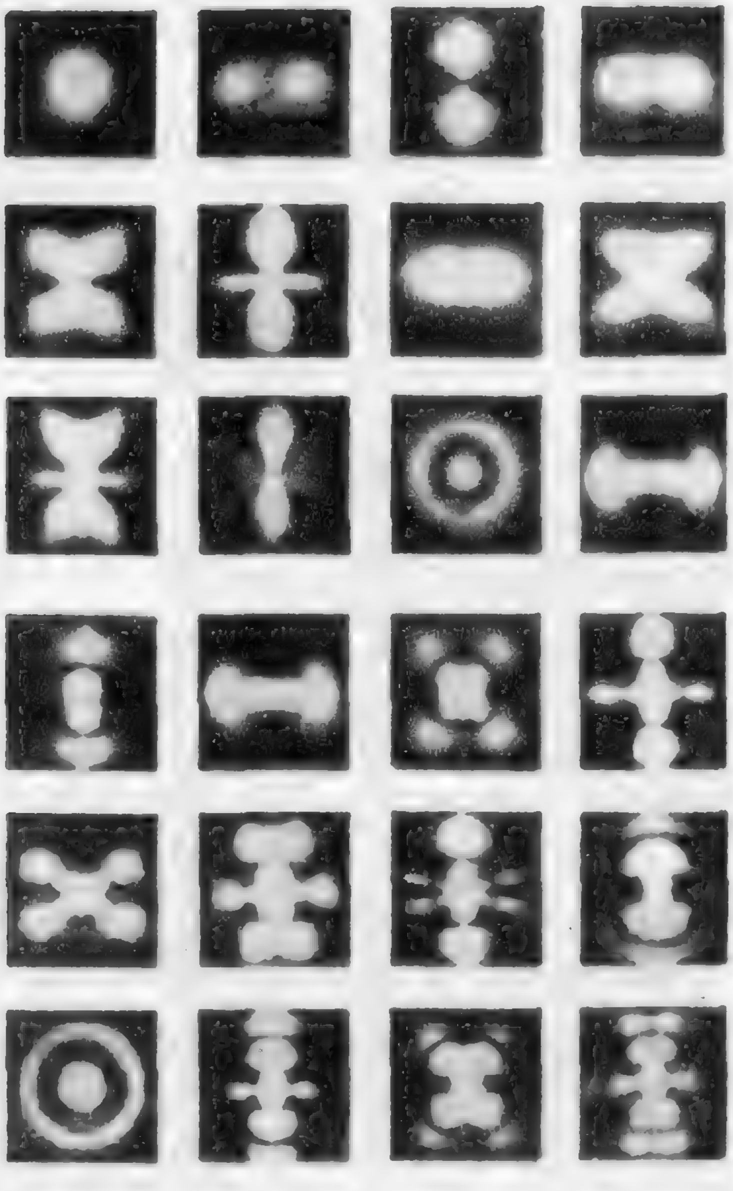


Рис. 3. Это, конечно, не фотографии реальных электронов, а результаты расчетов, показывающих, как «размазаны» электроны в атоме. Симметрия этих картинок во многом определяет симметрию молекул и кристаллов. Можно даже сказать, что здесь находится ключ к пониманию красоты упорядоченных форм живой природы.

троны движутся по прямолинейным траекториям, как им положено в данном случае по законам классической физики, объяснить этот опыт нельзя. А вот если они размазаны в пространстве, то результат опыта можно понять. Более того, из опыта следует, что облако вероятности обладает волновыми свойствами. С волнами вероятности мы встречаемся и в обычной жизни — например, волны эпидемии, рождаемости, преступности и т. п. В том месте, где амплитуда волны максимальна,— наибольшая вероятность чему-то произойти. В нашем случае в этих местах с наибольшей вероятностью можно обнаружить электрон, и такие области на фотографии получаются более светлыми.

На рисунке 3 представлена размазка электрона в различных состояниях атома водорода, найденная на основе точных математических расчетов. Чем светлее область, тем вероятнее встретить в ней электрон. Рисунки напоминают картины стоячих волн, возникающих, когда волновой процесс происходит в ограниченной области пространства. Какие удивительные формы могут принимать облака вероятности! И эти красивые абстрактные картинки действительно определяют поведение электронов в атоме и объясняют, например, уровни энергии и все, что касается химической связи.

Не вдаваясь в детали устройства облаков вероятности, можно с помощью соотношения неопределенностей оценить их характерный размер. Если облако вероятности имеет размер порядка Δx, то бессмысленно говорить о большей, чем Δx, неопределенности в координате частицы. Следовательно, неопределенность импульса частицы Δp_x не может быть меньшей, чем $\hbar/\Delta x$. По порядку величины это же выражение определяет и минимальное значение импульса частицы.

Чем меньше размер облака вероятности, тем бо́льшим становится импульс и, следовательно, тем быстрее движется частица внутри области локализации. Оказывается, что уже этих общих рассуждений достаточно, чтобы правильно оценить размер атома.

Электрон в атоме обладает кинетической и потенциальной энергиями. Кинетическая энергия электрона — это энергия его движения. Она связана с импульсом по известной формуле $E_к=(mv^2/2)=(p^2/2m)$. Потенциальная энергия — это энергия кулоновского взаимодействия с ядром. Для нее также имеется формула: $E_п=(-Ke^2/r)$, где знак минус соответствует притяжению, e — заряд электрона, r — расстояние от электрона до ядра, K — коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения.

В каждом состоянии у электрона имеется определенное значение полной энергии E. Состояние с минимальной энергией называется основным (невозбужденным) состоянием. Оценим размер атома в основном состоянии.

Пусть электрон размазан в некоторой области размером $\sim r_0$. Притяжение электрона к ядру стремится уменьшить r_0, «схлопнуть» облако вероятности. Этому соответствует уменьшение потенциальной энергии электрона, которая по порядку величины равна $-Ke^2/r_0$ (при уменьшении r_0 растет модуль отрицательной величины). Если бы электрон не обладал кинетической энергией, то он упал бы на ядро. Но, как вы уже знаете, кинетическая энергия у локализованной частицы всегда имеется вследствие соотношения неопределенностей. Оно и «мешает» электрону упасть на ядро! При уменьшении r_0 увеличивается минимальный импульс частицы $p_0\sim\hbar/r_0$, а, следовательно, растет кинетическая энергия $\sim\hbar^2/2mr_0^2$. Из условия равенства нулю производной от полной энергии частицы получаем, что ее минимуму соответствует значение

$$r_0\sim\hbar^2/Kme^2,$$

которое определяет характерный размер области локализации электрона в основном состоянии, то есть размер атома. Величина $(\hbar^2/Kme^2)$ равна 0,5 ангстрем, а мы знаем, что таковы по порядку величины размеры атомов в действительности. Ясно, что соотношение неопределенностей, позволяющее правильно оценить размер атомов,— один из самых глубоких законов микромира.

Для сложных атомов существует определенная закономерность, также непосредственно вытекающая из соотношения неопределенностей. Экспериментально довольно точно определяется работа, которую надо совершить, чтобы вырвать электрон из атома (она равна энергии ионизации $E_и$).

Так вот, для самых разных атомов произведение $\sqrt{E_и}$ на размер атома d с точностью до 10—20 % одинаково. Читатель, наверное, догадался, в чем тут дело: импульс электрона $p \approx \approx \sqrt{2mE_и}$, и постоянство произведения pd следует из соотношения неопределенностей.

3. Нулевые колебания

Весьма впечатляющие результаты получаются при исследовании с помощью соотношения неопределенностей колебаний атомов в твердых телах. Атомы (или ионы) совершают колебания в узлах кристаллической решетки. Обычно такие колебания связаны с тепловым движением атомов — чем выше температура, тем сильнее колебания. А что будет, если температуру понизить? С классической точки зрения амплитуда колебаний будет уменьшаться, и при абсолютном нуле атомы вовсе остановятся. Но возможно ли это с точки зрения квантовых законов?

Уменьшение амплитуды колебаний на квантовом языке означает уменьшение размера облака вероятности (области локализации частицы). А за это, как мы уже знаем, приходится, в силу соотношения неопределенностей, расплачиваться увеличением импульса частицы — попытка остановить микрочастицу не приводит к успеху. Оказывается, что даже при абсолютном нуле температур атомы в твердом теле совершают колебания. Их называют нулевыми колебаниями, и проявляются они в целом ряде красивых физических эффектов.

Попробуем прежде всего оценить энергию нулевых колебаний. В колебательной системе при отклонении тела на малую величину x от положения равновесия на него действует возвращающая сила $F=-kx$ (в случае пружины k — ее жесткость; у атома в твердом теле величина k определяется силами межатомного взаимодействия). Соответственно, у тела появляется потенциальная энергия

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

где $\omega=\sqrt{k/m}$ — частота колебаний.

Отсюда следует, что амплитуда колебаний $x_{\max}$ связана с запасом энергии тела E формулой

$$E = \frac{m\omega^2 x_{\max}^2}{2}; \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.$$

Но амплитуда колебаний на квантовом языке как раз определяет характерный размер области локализации частицы, который в силу соотношения неопределенностей связан с минимальным импульсом частицы. Получается, с одной стороны, чем меньше энергия колебаний, тем меньшей должна быть амплитуда; с другой стороны, уменьшение амплитуды приводит к увеличению импульса, а следовательно, и энергии частицы. Минимальная энергия, которой может обладать частица, определяется из оценки

$$E_0 \sim \frac{p_0^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{mx_0^2} \sim \frac{\hbar^2}{m}\frac{m\omega^2}{E_0}.$$

Сравнивая здесь первое и последнее выражения, находим $E_0 \sim \hbar\omega$. Точный расчет дает вдвое меньшее значение. Энергия нулевых колебаний равна $\hbar\omega/2$. Она максимальна у легких атомов, которые колеблются с большей частотой.

Пожалуй, самое яркое проявление нулевых колебаний — это существование жидкости, которая вообще не замерзает, даже при абсолютном нуле температур. Ясно, что жидкость не замерзает, если кинетической энергии колебаний атомов достаточно для того, чтобы разрушить кристаллическую решетку. При этом совершенно

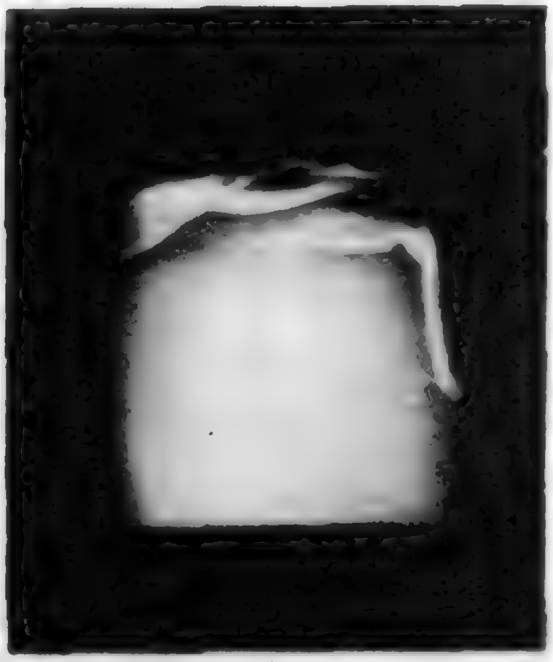


Рис. 4. Волны на границе между твердым (светлая область) и жидким гелием.

неважно происхождение кинетической энергии — связана ли она с тепловым движением атомов или с нулевыми квантовыми колебаниями. Наиболее вероятные кандидаты в незамерзающие жидкости — водород и гелий. В этих легчайших веществах энергия нулевых колебаний максимальна. Но гелий к тому же — инертный газ. Его атомы взаимодействуют друг с другом очень слабо, и расплавить кристаллическую решетку гелия сравнительно легко. Оказывается, что энергии нулевых колебаний в гелии для этого достаточно, и он не замерзает даже при абсолютном нуле. А вот водород, хотя его атомы и обладают большей, чем у гелия, энергией нулевых колебаний, все-таки замерзает, так как взаимодействие атомов водорода гораздо более сильное.

Все остальные вещества также замерзают при абсолютном нуле температур. Так что гелий — единственное вещество, которое при нормальном давлении всегда остается жидким. Можно даже сказать, что именно соотношение неопределенностей не позволяет ему замерзнуть. Физики называют жидкий гелий квантовой жидкостью. Она обладает таким удивительным свойством, как сверхтекучесть. Академик Л. Д. Ландау говорил, что жидкий гелий — это окно в квантовый мир.

При давлении около 30 атмосфер жидкий гелий все-таки затвердевает. Твердый гелий, правда, тоже совсем необычный кристалл. В нем нулевые колебания определяют, например, кинетическую энергию атомов на границе, и вследствие этого поверхность кристалла может совершать гигантские колебания, словно граница между двумя неперемешивающимися жидкостями (рис. 4). Твердый гелий физики назвали квантовым кристаллом, и его свойства сейчас интенсивно исследуются.

* * *

Наш рассказ о соотношении неопределенностей подошел к концу. Надеемся, что читатель постепенно стал привыкать к удивительному квантовому миру, где частицы нельзя остановить, жидкости не замерзают, а электроны размазаны вокруг ядра самым причудливым образом. Такой мир трудно себе представить. Но его можно понять, и именно в этом, как считал Ландау, состоит главная заслуга современной теоретической физики.

Марк Колтун
Мир физики

Советуем прочесть

В 1984 году издательство «Детская литература» выпустило книгу профессора М. М. Колтуна «Мир физики».

В книге показан сложный, многообразный и противоречивый, но вместе с тем единый мир неразрывно связанных физических явлений и процессов, популярно и занимательно рассказано об основных законах, управляющих этим миром, и об истории их открытия. Автору удалось проследить внутреннюю логику развития физики и вскрыть связь этой науки с различными сферами человеческой деятельности — с другими областями науки, техники и даже с искусством. Книга прекрасно оформлена, в ней много интересных иллюстраций — редких исторических фотографий, красочных схем, репродукций картин, изображений современных приборов и экспериментальных установок. Словом, это — превосходная книга для чтения по физике, способная увлечь любого читателя.

КОЗА
КОЗА-КОЗА-КО
КОЗА
ЛОЗА-ЛОЗА
ЛК-ВОЛ
ЛК-ВОЛК
ВОЛК-ВОЛ
ВОЛК-ВОЛК-ВОЛ
ПОЛА
ПОЛ
ВОЛК-ПОЛ

Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы

Профессор
В. А. УСПЕНСКИЙ,
доктор физико-математических наук
А. Л. СЕМЕНОВ

Алгоритмы

Все мы умеем складывать многозначные числа — этому учат в детстве. Давайте задумаемся, в чем состоит наше умение? Когда в пьесе Э. Ионеско «Урок» ученица демонстрирует замечательные способности к перемножению десятизначных чисел, потрясенный учитель узнает, что ее способ очень прост — она выучила (бесконечную!) таблицу умножения всех чисел. По-видимому, наш способ — иного рода. Мы знаем единый конечный способ, позволяющий решать бесконечное множество задач. В нашем случае бесконечное множество образуют задачи о нахождении суммы: для каждой пары чисел — своя задача. Способ единый, поскольку он один и тот же для всех задач. Способ конечный в том смысле, что он может быть изложен конечным числом слов (а если бы это было не так, то ведь этому способу нельзя было бы и научить!). Как известно, способ этот называется «сложение столбиком» и состоит в том, что одно число (например, 8257) подписывается снизу под другим (например, 64) с выравниванием правого края (то есть так: $\begin{array}{r}64\\8357\end{array}$, а не, скажем, так: $\begin{array}{l}64\\8357\end{array}$) и далее начинается последовательное применение таблицы сложения однозначных чисел (которую нужно заранее выучить) с переносом, где надо, в следующий разряд. В результате этого постепенно будет сформировано число 8421.

Здесь мы не столько изложили способ, сколько напомнили его, будучи уверены, что он известен. Однако читателю было бы полезно записать этот способ на бумаге полностью — так, чтобы его мог понять и использовать человек, не знавший ранее, как складывать многозначные числа. Упражнение, которое мы предложили читателю, на научном языке формулируется так: записать алгоритм, решающий проблему сложения чисел. Эту и другие проблемы построения алгоритмов мы будем далее формулировать, указывая, что от алгоритма требуется, примерно в таком виде:

Проблема. Дано: два произвольных натуральных числа. Требуется: найти их сумму.

Такая форма записи будет служить для нас сигналом, что решение проблемы состоит не в том, чтобы для каждых двух чисел найти свой отдельный способ вычисления результата, а в том, чтобы найти единый общий способ, годящийся для всех пар чисел, то есть найти алгоритм (в данном случае — алгоритм сложения).

В этой статье под *алгоритмом* мы будем понимать всякую конечную систему правил, которая задает вычислительный процесс. Этот процесс начинается с предъявления (*подачи на вход* алгоритма) произвольного (но выбранного из фиксированной для данного алгоритма совокупности) *исходного данного*. Процесс может завершиться получением полностью определенного этим исходным данным результата; тогда говорят, что результат образуется *на выходе* алгоритма. Однако процесс может продолжаться и неограниченно, у алгоритма результат существует не всегда. Например, алгоритм, выписывающий частное двух чисел в виде десятичной дроби, может никогда не кончить работу (так 1:3=0,33333...).

Понятие алгоритма принадлежит к числу основных понятий математики. Теория алгоритмов вместе с математической логикой образует фундаментальную теоретическую базу построения и использования вычислительной техники. Именно наличие алгоритмов для тех или иных задач позволяет решать эти задачи на ЭВМ.

Замечателен сам термин «алгоритм». В самом деле, много ли терминов науки, в состав которых входит географическое название? Подобное название не сразу разглядишь в слове «алгоритм», однако оно там есть — это название города «Хорезм». Ведь в основе термина «алгоритм» лежит имя аль Хорезми (что значит «из Хорезма») — великого математика IX века. Крупнейшие математики и алгоритмисты всего мира воздали дань основополагающей роли аль Хорезми, съехавшись в сентябре 1979 года в Хорезмскую область Узбекистана, в город Ургенч, где они обсудили насущные вопросы теории алгоритмов и ее приложений на современном этапе. Подробнее об этой встрече в Ургенче рассказал один из ее организаторов, академик А. П. Ершов (см. «Квант», 1984, № 8, с. 29).

Мы собираемся продемонстрировать читателю наиболее знаменитые и наглядные примеры *нерешимых* алгоритмических проблем, то есть таких алгоритмических проблем, для которых не существует решения. Для контраста, эти примеры будут соседствовать с такими, где алгоритм есть (хотя, иногда, и очень сложен) или вопрос о наличии алгоритма еще не решен.

Решение алгебраических уравнений

Выпишем уравнение

$$x^2+2=y^3 \qquad (1)$$

и будем интересоваться его решениями. Решение в данном случае — это пара чисел $(a;\ b)$, подчиненная условию $a^2+2=b^3$, например, пара (5; 3).

Решая какое-либо уравнение, надо всегда точно знать, какие числа дозволяется брать в качестве его решений. Если, к примеру, решением уравнения должен служить прирост количества коз в таком-то стаде за такой-то срок, вряд ли нас устроит ответ «две трети» (но ответ «минус десять» будет осмыслен: он означает, что количество коз в стаде, к сожалению, не возросло, а уменьшилось). Для уравнения (1) можно интересоваться его действительными решениями, то есть парами действительных чисел, рациональными решениями, то есть парами рациональных чисел, целыми решениями, то есть парами целых чисел. Уравнение (1) имеет бесконечно много действительных решений: достаточно взять любое a и положить $b=\sqrt[3]{a^2+2}$, тогда пара $(a;\ b)$ будет решением (вопрос к читателю: можно ли взять любое b и положить $a=\sqrt{b^3-2}$?). Нетрудно доказать, что (1) имеет бесконечно много рациональных решений; вот одно из них: (0,383; 0,129). Целых же решений только два : (5; 3) и (—5; 3). Однако доказать это нелегко.

Решение уравнений в целых числах представляет собой очень древнюю (ею занимался еще сам Пифагор в VI в. до н. э.) и — в общем случае — очень трудную задачу. Основная трудность состоит в том, чтобы выяснить, имеет ли данное уравнение хотя бы одно целочисленное решение. Например, неизвестно (во всяком случае было неизвестно до сравнительно недавнего времени) имеют ли решения в целых числах уравнения $x^3+y^3+z^3=30$ и $x^4+y^4+z^4=u^4$.

Задача для читателей. Для каждого из уравнений $x^4+y^4=5z^2$, $3x^2-y^2=1$, $x^2+y^3=z^4$ найдите какое-нибудь решение в целых числах или докажите, что такого решения не существует.

Указание. Об этих и других уравнениях в целых числах можно прочесть в популярных брошюрах: Гельфонд А. О. «Решение уравнений в целых числах», М., 1952. (серия «Популярные лекции по математике», вып. 8); Серпинский В. «О решении уравнений в целых числах», М., 1961.

Задача «уметь по произвольному алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами выяснять, имеет ли оно решение в целых числах» составляет одну из двадцати трех так называемых *проблем Гильберта*. Что это за проблемы?

Когда Давид Гильберт (1862—1943), один из величайших математиков XX века, готовил свой доклад на Всемирном математическом конгрессе в Париже в 1900 г., он выбрал 23 проблемы из различных областей математики. Эти проблемы были его попыткой «проникнуть в предстоящие успехи нашей науки и тайны ее развития в начинающемся столетии». Попытка эта оказалась необычайно успешной и ценной. И по сей день решение (даже частичное) какой-либо проблемы Гильберта расценивается во всем мире как высшее математическое достижение. Обязательным требованием, предъявляемым к действительно фундаментальной проблеме, Гильберт считал «возможность изложить ее содержание первому встречному». Задача о выяснении наличия целочисленных решений составляет десятую проблему из списка Гильберта. Читатель может сам судить, в какой степени ее формулировка является общедоступной. Сейчас мы сформулируем десятую проблему Гильберта в соответствии с принятыми здесь стандартами.

Проблема 1 (десятая проблема Гильберта). Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в целых числах.

Искомый алгоритм: в 1970 г. советский математик Ю. В. Матиясевич доказал невозможность алгоритма, решающего эту проблему (см. «Квант», 1970, № 7, с. 39).

В связи со сформулированной проблемой уместно сделать замечание, применимое не только к ней, но, с соответствующими изменениями, и в других случаях. Алгоритм отыскания какого-нибудь решения любого уравнения, о котором известно, что у него есть решение, существует! Действительно, вот такой алгоритм: надо просто подставлять в уравнение все наборы натуральных чисел. В конце концов будет найден набор, удовлетворяющий уравнению.

Приведем несколько естественных модификаций первой проблемы.

Проблема 2. Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в действительных числах.

Искомый алгоритм: существует!

Решение проблемы 2 было получено известным польским логиком и математиком Альфредом Тарским в 40-е годы XX века. О применении этого результата будет говориться дальше. В действительности, Тарский построил более общий алгоритм, позволяющий выяснить наличие решений у систем равенств и неравенств.

Чтобы оценить степень нетривиальности алгоритма Тарского, попытайтесь решить следующую задачу. По произвольному алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами и одной неизвестной требуется выяснить, существует ли у него решение в действительных числах. (Ясно, что эта задача — простой частный случай проблемы 2). Если степень уравнения нечетна, сразу можно ответить, что корень уравнения существует. А что, если четна?

Проблема 3. Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в рациональных числах.

Искомый алгоритм: существует он или нет — неизвестно.

Посмотрите, как близки друг к другу формулировки наших проблем 1, 2 и 3: эти формулировки различаются лишь в одном слове. И как, тем не менее, различны ответы на вопрос, существует или нет соответствующий алгоритм. Поистине, удивительное рядом!

Преобразование слов

В математике *словами* называются любые конечные последовательности символов. Например, 1985 — слово длины 4. Слова не только не обязаны обладать каким-либо смыслом, но даже быть произносимыми. Так, БРДРОЬЬЩ — слово из русских букв (и притом длины 8), хотя и не слово русского языка. Как правило, исходные данные для алгоритмов — это слова. Когда алгоритм задан, определено и множество *букв*, то есть символов, из которых составляются слова, подаваемые ему на вход. Такое множество называется *алфавитом*. Алфавиты, в которых пишутся тексты на естественных языках и языках программирования, печатаются книги, содержат не более нескольких сот букв. Многозначные числа, участвующие в «школьных» алгоритмах — это слова в десятибуквенном алфавите, состоящем из букв 0, 1, 2, ..., 9; эти буквы, как известно, называются цифрами; а для записи десятичных дробей, помимо этих десяти цифр, используется еще одна буква — запятая.

Современные вычислительные машины работают с двоичными словами, состоящими из букв 0 и 1. Чтобы проиллюстрировать гибкость и емкость понятия «слово», заметим, что пару слов можно закодировать одним словом, например, поставив между членами пары букву, не входящую в алфавит, в котором эти члены записаны. Таким образом, в качестве исходных данных для алгоритмов достаточно рассматривать слова, а рассматривать в этом качестве пары, тройки и т. д. слов нет нужды. Заметим еще, что часто бывает удобно рассматривать слово длины ноль; оно называется *пустым словом*, так как вовсе не содержит букв.

Многие из вас играли в следующую игру. Дается задание, например, «переделать волка в козу». Решение:

ВОЛК→ПОЛК→ПОЛА→ПОЗА→КОЗА

В чем состоит один шаг переделки? — В замене любой буквы уже полученного слова на любую другую букву русского алфавита, причем так, чтобы получаемый объект (слово в математическом смысле этого слова) оказывался снова осмысленным словом русского языка.

Теперь упростим игру — забудем о том, что среди всех последовательностей букв выделены слова русского языка. Будем считать все (в математическом понимании, то есть как осмысленные, так и бессмысленные) слова в русском алфавите равноправными. Можно ли тогда переделать волка в козу? Ну, теперь это совсем легко:

ВОЛК→КОЛК→КОЗК→КОЗА

Может быть, теперь любое слово можно переделать в любое? Конечно нет — слова должны быть одинаковой длины. Но этого условия и достаточно!

Проблема. Дано: два слова в русском алфавите. Требуется: узнать, получается ли одно из другого последовательностью замен буквы на букву.

Искомый алгоритм: сравнить длины слов, если они совпадают, то ответ ДА, если не совпадают, то ответ — НЕТ.

Заметим, что первоначальная проблема — переделать одно заданное слово русского языка, также очевидно решима — для ее решения нужно только иметь (конечный!) словарь всех слов русского языка, которые можно использовать в игре, и достаточный запас времени и бумаги. Несложный подсчет показывает, что эта задача может быть практически решена на сегодняшних ЭВМ.

Теперь, опять забыв о русском языке (но не о русском алфавите) и под словами понимая произвольные конечные последовательности русских букв, усложним задачу в другом отношении. Вместо того, чтобы разрешать заменять (в любом месте слова) любую букву на любую, выберем некоторый конечный список разрешенных замен. Этот список может выглядеть, например, так:

$$\begin{array}{ccc} \text{А} & \text{БББ} & \text{БА} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Б} & \text{АА} & \text{АБА} \end{array}$$

Преобразование слова за один шаг будет, как и раньше, состоять в том, что в любом месте слова мы заменяем участок, который разрешено заменять, на то, на что его разрешено заменять. При этом все разрешенные замены двусторонние: если участок X разрешено заменять на участок Y, то и участок Y разрешено заменять на участок X. Например, если список разрешенных замен таков, какой мы только что выбрали, то преобразование за один шаг может быть таким: БААБ — БББББ, или таким: БАБ — АБАБ, или таким: БАБА — БААА.

Проблема. Дано: два слова в русском алфавите. Требуется: узнать, можно ли переделать одно в другое, пользуясь следующей системой разрешенных замен:

АВ	БВ	АУ	БУ	ДВА	ДУБ	ВВА
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
ВА	ВБ	УА	УБ	ВД	УД	ВВАД

Искомый алгоритм: не существует. Это доказал советский математик Г. С. Цейтин, придумавший указанную систему замен.

Подобную проблему в общем виде (то есть любой системы разрешенных замен) впервые поставил известный норвежский математик Аксель Туэ в 1914 году. Сам он доказал существование алгоритма в ряде частных случаев.

Туэ особо выделил случаи, когда во всякой разрешенной замене один из членов — пустое слово, и, таким образом, всякая разрешенная замена состоит в том, что можно в любое место имеющегося слова вставить указанное в замене слово или вычеркнуть его. Например, вставляя и вычеркивая слова АБ и БА, можно из слова АБББА получить БАБАБ. Попытайтесь построить требуемый алгоритм для вставок и вычеркиваний АБ и БА, то есть для такого списка разрешенных замен:

АБ	БА
↕	↕
пустое слово	*пустое слово*

(Уже этот простейший пример важен для раздела алгебры, называемого «теория групп».)

Для любого набора разрешенных вставок-вычеркиваний алгоритм, устанавливающий, можно ли переделать одно слово в другое, существует. Показал это советский математик С. И. Адян в 1966 году.

Элементарная геометрия

Мы не имеем здесь возможности дать детальное определение, что такое элементарная геометрия в строгом смысле, уточняемом с помощью математической логики. Постараемся, однако, дать приблизительное описание. Исходными понятиями элементарной геометрии служат точки, прямые, плоскости, отрезки, окружности, сферы, отношения «лежать на», «лежать между», «быть конгруэнтными» и т. п. Допускается образование новых понятий — но без использования многоточий и оборота «и так далее» (в этом пункте строгое математико-логическое представление об элементарной геометрии расходится с расплывчатым традиционным). Например, понятие треугольника принадлежит элементарной геометрии: ведь треугольник можно определить как такие три отрезка A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, что $A_2=A_3$, $A_4=A_5$, $A_6=A_1$. А вот общее понятие ломаной не принадлежит элементарной геометрии, потому что в его определении участвуют многоточие и слова «и так далее»: ломаная — это набор отрезков A_1A_2, A_3A_4,... (здесь многоточие!), A_{n-1}, A_n, таких, что $A_2=A_3$, $A_4=A_5$ и т. д.

Проблема. Дано: утверждение элементарной геометрии. Требуется: проверить, истинно ли оно.

Искомый алгоритм: существует.

Существование алгоритма было, по существу, установлено Тарским в 40-е годы нашего века. Оно достаточно просто вытекает из существования того алгоритма Тарского, о котором говорилось ранее. Связь проблем алгебры и геометрии была открыта уже давно (аналитическая геометрия), естественно, что она распространилась и на алгоритмические проблемы.

Результат Тарского выглядит, и действительно является, крайне сильным и даже парадоксальным. Оказывается, существует весьма обширная область классической математики (именно — элементарная геометрия), о которой традиционно считается, что она требует тонкого интеллекта и уж никак не сводится к тупым подсчетам, и в то же время имеется алгоритм, который может проверять истинность теорем этой области (а если нужно, то и искать их доказательства). Утешиться можно лишь тем, что алгоритм Тарского не является реальным: он требует неслыханно большого времени для своего осуществления.

Полезно представить себе: насколько «близко» начинаются те геометрические утверждения, для которых, несмотря на существование общего алго-

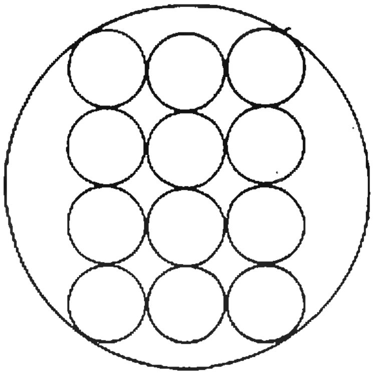


Рис. 1.

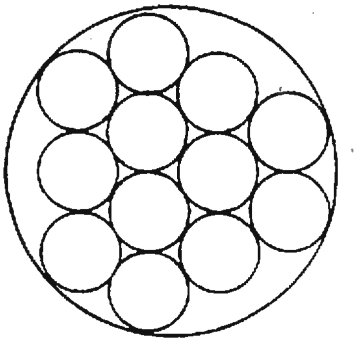


Рис. 2.

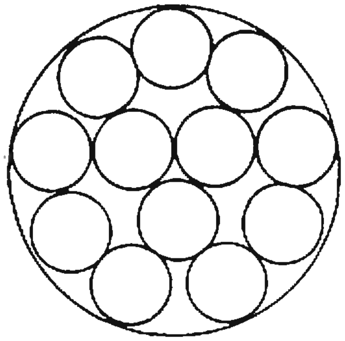


Рис. 3.

ритма, сейчас неизвестна их истинность или ложность.

Вот один наглядный пример. Возьмем двенадцать круглых банок одинакового диаметра (равного, скажем, 10 см). Мы хотим упаковать их, поставив стоймя, в круглую коробку. Это можно сделать, например, так, как показано на рисунке 1). Однако можно расположить банки и более тесно — так, чтобы понадобилась коробка меньших размеров. Например так, как показано на рисунке 2. Наконец, упаковка, показанная на рисунке 3, позволяет использовать еще меньшую коробку. Спрашивается, можно ли найти круглую коробку еще меньшего диаметра, в которую бы влезли все наши банки? Ответа на этот вопрос никто не знает, хотя этот ответ и может быть получен с помощью алгоритма Тарского: надо применить этот алгоритм к утверждению, что третья упаковка — наилучшая, и посмотреть, что получится в результате. ДА или НЕТ. Однако этот способ нереален, поскольку для получения результата работы алгоритма требуется астрономически большое время.

Пример доказательства нерешимости

Предположим, что мы работаем в Вычислительном Центре. В этом центре имеется замечательная Вычислительная Машина. Она может производить вычисления по любой программе p, написанной на неком Языке Программирования, то есть по входному данному m находить результат $p(m)$ программы p (если, конечно, он определен).

Программы можно перенумеровать (например, в алфавитном порядке, ведь каждую программу можно считать словом в символах Языка Программирования), составив Библиотеку всех программ:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$$

Лучше всего иметь дело с такими программами p, которые при любом входном данном m дают результат $p(m)$. Такова, например, стандартная программа для вычисления функции $y=m^2+5m-6$. К сожалению, встречаются и такие программы, которые при некоторых значениях входного данного никогда не заканчивают работы, «зацикливаются», как говорят программисты. Так, программа для вычисления десятичной записи значения функции $y=m/3$ не дает результата, скажем, при $m=10$.

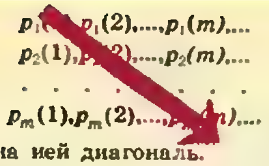
Это очень неприятное обстоятельство. Ведь если мы такую программу введем в Вычислительную Машину вместе с таким «плохим» исходным данным, работа Вычислительной Машины никогда не окончится, и мы будем только зря тратить дорогостоящее Машинное Время.

Чтобы это избежать, хорошо бы иметь некоторую процедуру (алгоритм!), которая по номеру программы заранее говорила бы, даст программа с этим номером при выбранном входном данном результат, или нет.

Проблема. Дано: произвольная пара натуральных чисел (n, m). Требуется: построить алгоритм, выясняющий, заканчивает ли работу n-ная программа p_n при входном данном m.

Искомый алгоритм: не существует, и мы сейчас это докажем.

Доказательство. (*Диагональ Кантора*). Предположим, что искомый алгоритм A существует. Составим таблицу всех программ и исходных данных:



$$\begin{array}{l} p_1(1), p_1(2), \ldots, p_1(m), \ldots \\ p_2(1), p_2(2), \ldots, p_2(m), \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_m(1), p_m(2), \ldots, p_m(m), \ldots \end{array}$$

и выделим на ней диагональ.

Рассмотрим программу $\bar{p}$, результат которой «не такой, как на диагонали», то есть определяется правилом

$$\bar{p}(m) = \begin{cases} p_m(m)+1, & \text{если } p_m(m) \text{ определено,} \\ 0, & \text{если } p_m(m) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Это действительно программа, то есть p вычисляется с помощью алгоритма. (А именно, такого: проверяем условие «$p_m(m)$ определено» по алгоритму A, если оно выполнено, вычисляем $p_m(m)$ и прибавляем единицу, если нет, полагаем $\bar{p}(m)=0$). Но тогда $\bar{p}$ входит в список всех программ Библиотеки, под каким-то номером. Обозначим этот номер через k и рассмотрим $p_k(k)$ (элемент по диагонали!).

Если $p_k k$ не определено, то $\bar{p}(k)=0$ и поэтому $\bar{p}(k) \neq p_k(k)$.

Если $p_k(k)$ определено, то $\bar{p}(k)=p_k(k)+1 \neq p_k(k)$.

В обоих случаях $\bar{p}(k) \neq p_k(k)$, что невозможно, ибо $\bar{p}$ и p_k — одна и та же программа. Это противоречие завершает доказательство.

Читатель, возможно, хотел бы узнать, почему приведенное выше доказательство называется «диагональю Кантора». Дело в том, что изящный метод доказательства, использованный здесь, был придуман немецким математиком Георгом Кантором (1845—1918), основателем теории множеств. Правда, Кантор устанавливал совсем другое утверждение. Именно, что *множество действительных чисел нельзя занумеровать натуральными числами*, то есть составить *список* всех действительных чисел: $d_1, d_2, d_3, \ldots$ (Читателю, которому этот результат показался очевидным — «ведь действительных чисел гораздо больше, чем натуральных»,— мы советуем доказать, что все рациональные числа можно занумеровать — хотя их тоже «гораздо больше, чем натуральных).

Следуя Кантору, мы докажем (от противного), что даже множество действительных чисел на отрезке [0.1] нельзя занумеровать. Предположим, что нам удалось это сделать. Расположим наши числа, представленные в виде десятичных дробей, в порядке номеров:

$$\begin{array}{l} 0{,}a_1\ a_2\ a_3 \ldots \\ 0{,}b_1\ b_2\ b_3 \ldots \\ 0{,}c_1\ c_2\ c_3 \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

(Здесь буквы a, b, c,... с индексами обозначают цифры 1, 2, ..., 9, 0 десятичной записи). А теперь мы предъявим число на отрезке [0, 1], которого нет в нашем списке. Именно, таким будет число, чьи разряды «не такие, как на диагонали», то есть, например, число $0{,}abc$ где a — любая цифра, отличная от a_1; b — любая цифра, отличная от b_2; c — любая цифра, отличная от c_3, и т. д. Противоречие!

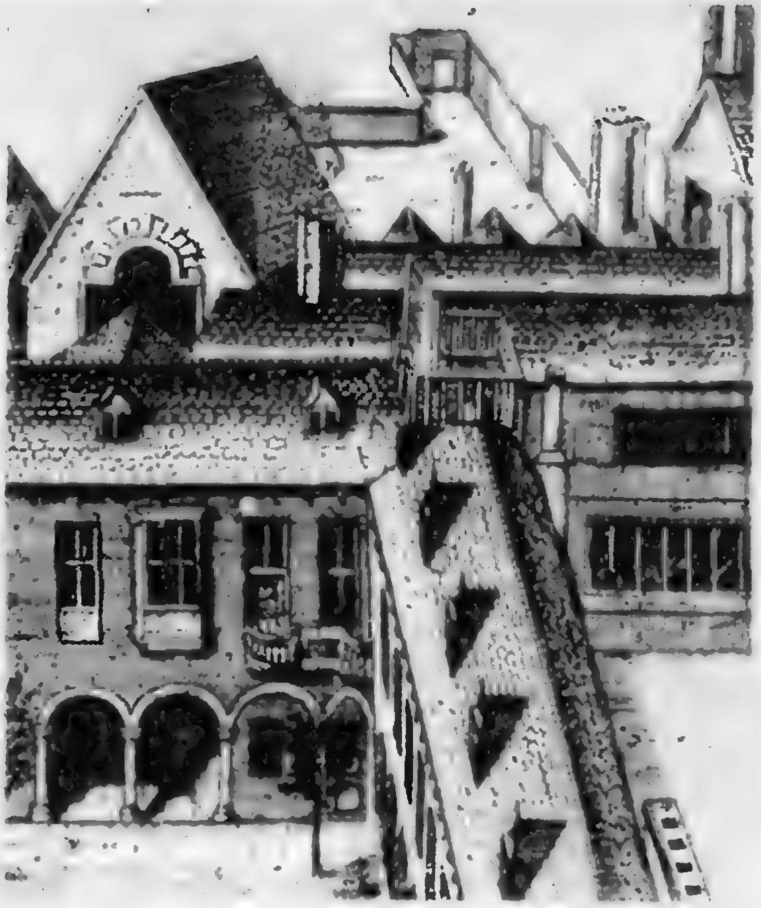
Давайте подведем некоторые итоги. Мы познакомились с понятием алгоритма — важнейшим понятием современной математики и информатики. Разумеется, многие конкретные алгоритмы (например, алгоритм сложения столбиком или алгоритм Евклида нахождения общей меры) были известны очень давно, однако общее представление об алгоритме сформировалось только в первой половине XX века. Всякая попытка использовать вычислительные машины для решения каких-либо задач начинается с построения алгоритма, решающего эти задачи. Пока нет такого алгоритма, нельзя составлять программу для вычислительной машины. А если оказывается, что нужного алгоритма и не может быть, то бессмысленно и пытаться составлять программу. Поэтому результаты о невозможности тех или иных алгоритмов имеют очевидный практический смысл. Кроме того, рассуждения, приводящие к установлению такой невозможности, позволяют глубже проникнуть в природу самого понятия «алгоритм».

У читателя может возникнуть вопрос: всякий ли алгоритм можно запрограммировать, то есть превратить в программу для вычислительной машины? Ответ: теоретически — да. Слово «теоретически» означает здесь, что ответ утвердителен, если допускать программы сколь угодно длинные (для написания которых заведомо не хватит бумаги, чернил и карандашей на всей Земле) и сколь угодно долго работающие (триллионы лет). Отметим, что подобного рода допущения глубоко коренятся в математике. (Мы допускаем многоугольники с любым числом сторон. Мы верим, что алгоритм сложения столбиком позволяет складывать числа любых размеров, хотя и осознаем, что если в слагаемых больше знаков, чем атомов в Земном шаре, то не вполне ясно, как такие слагаемые записать, да и число шагов при их сложении окажется астрономически велико...) К тому же и возможности вычислительной техники непрерывно растут. Если первые вычислительные машины совершали сотни операций в секунду, и управлялись программами, составленными из десятков команд, то быстродействие современных машин доходит до сотни миллионов операций в секунду, а размер их программ — до сотен тысяч команд. Принято считать, что возможности машин удесятеряются за каждое пятилетие. Разумеется, тем не менее, оценки и размера записи алгоритма и числа шагов его работы имеют первостепенную важность. Но это — тема отдельных серьезных обсуждений.

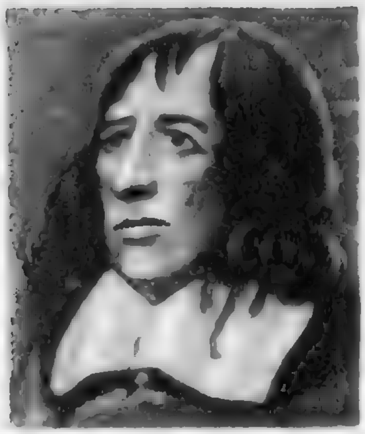
Роберт Гук

(к 350-летию
со дня рождения)

*Кандидат
физико-математических
наук*
С. Р. ФИЛОНОВИЧ



Здание Грешем-колледжа. В этом доме Гук жил и работал почти пятьдесят лет.



«Моделью» для этого портрета Роберта Гука послужило одно из изображений ученого, которое было создано по описаниям его внешности, оставленным современниками. Подлинного портрета ученого до сих пор не удалось обнаружить.

Тому, кто захочет подробнее познакомиться с жизнью этого замечательного ученого, мы рекомендуем прочитать книгу А. Н. Боголюбова «Роберт Гук» (М.: Наука, 1984).

В истории науки есть периоды, когда происходила крутая ломка представлений о природе и методах ее исследования. Такие периоды принято называть научными революциями. Одна из них относится к XVII столетию, в течение которого были заложены основы многих разделов классической физики. Характер революции в физике XVII века определялся, прежде всего, обращением ученых к эксперименту как средству познания законов природы. Одним из величайших экспериментаторов той эпохи был Галилей. Его простые, остроумные и очень убедительные опыты вдохновили многих ученых на исследования в разных областях физики. XVII столетие чрезвычайно расширило круг изучаемых физических законов и явлений. При этом научная специализация еще не зашла в то время очень далеко, и многие выдающиеся ученые успешно работали сразу в нескольких областях физики. К таким ученым-универсалам относятся Галилей, Кеплер, Гюйгенс, Ньютон. К этому перечню следует добавить и имя выдающегося английского естествоиспытателя Роберта Гука, который по широте научных интересов и разнообразию полученных им результатов занимает одно из самых заметных мест в блестящей плеяде ученых XVII века.

О жизни этого ученого, о его научной деятельности и о судьбе его работ мы расскажем в этой статье.

* * *

Роберт Гук родился 18 июля 1635 года в местечке Фрешуотер на английском острове Уайт в семье настоятеля местной церкви. Отец хотел, чтобы Роберт тоже стал священником, но от этих планов пришлось отказаться. У мальчика было такое слабое здоровье, что он даже не мог ходить в начальную школу вместе со сверстниками. (Болезни преследовали Гука всю жизнь, и это сказалось на его характере: современники часто отмечали его вспыльчивость, резкость и раздражительность.)

Имея большой досуг, юный Гук много времени посвящал конструированию и моделированию различных устройств и механизмов. Можно сказать, что страсть к изобретательству проявилась у него еще в раннем детстве. Однако безмятежная жизнь в семье была рано прервана трагическим событием. Когда Роберту было 13 лет, умер его отец, и Гуку пришлось задуматься о своем будущем. Стремясь с пользой истратить оставшиеся ему в наследство 100 фунтов стерлингов, Гук поступает учеником к одному лондонскому живописцу. Однако вскоре он убеждается, что и без специальной подготовки достаточно хорошо рисует, а запах масляной краски вызывает у него головную боль. Отсюда и решение уйти от живописца и поступить в школу известного педагога Р. Башби. В школе Роберт изучил латинский и греческий языки, познакомился с геометрией Евклида, одним словом, получил подготовку, достаточную для поступления в университет.

В 1653 году Гук становится студентом знаменитого Оксфордского университета. К тому времени деньги, оставленные ему отцом, были исчерпаны, и молодому человеку надо было искать средства для продолжения учебы. Роберт устраивается хористом в церковь. Однако петь ему пришлось недолго, поскольку очень скоро он находит место, лучше отвечающее его склонностям: молодого человека берет к себе в качестве ассистента химик Т. Уиллис. Видимо, Гук работал добросовестно, и Уиллис рекомендовал его в том же качестве молодому аристократу, увлеченному наукой, имя которого вошло во все учебники физики,— Роберту Бойлю.

Бойль, человек столь же знатный, сколь и богатый, не желая участвовать в сложной политической борьбе, раздиравшей Англию в середине XVII века, удалился в Оксфорд, где на свои средства организовал химическую лабораторию. Ранее он получил прекрасное образование во Франции, Италии и Швейцарии и занимался научными исследованиями не как дилетант, а вполне профессионально. К тому времени, когда Гук стал его ассистентом, Бойль был заинтересован изобретенным О. Герике воздушным насосом и опытами, произведенными немецким естествоиспытателем с помощью этого устройства. Понимая, что конструкция насоса Герике далека от совершенства и что для проведения количественных экспериментов

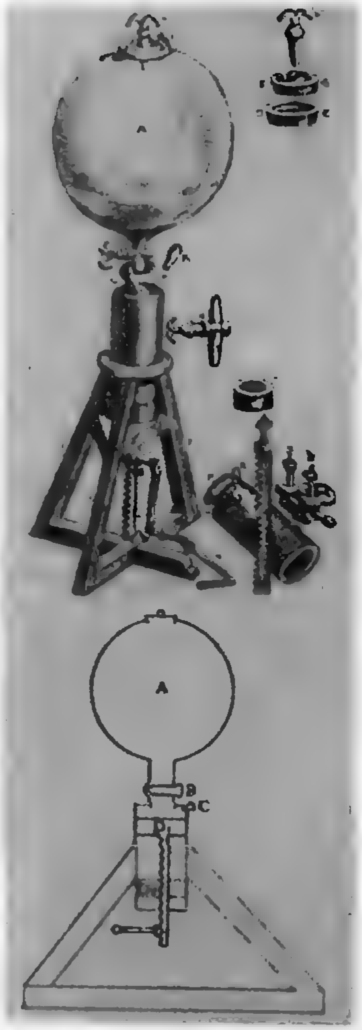
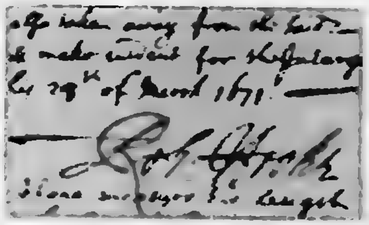


Рис. 1. Внешний вид и схема сечения насоса Бойля — Гука. Для создания в сосуде А давления меньше атмосферного требовалось несколько раз последовательно выполнить такие действия: открыть клапан В, перевести поршень из положения $Д_1$ в положение $Д_2$, открыть клапан С, вернуть поршень в положение $Д_1$, закрыть клапан С. Для повышения давления в сосуде А перечисленные действия надо было провести в обратном порядке.



Фрагмент служебной записки Гука с его автографом.

требуется ее серьезное усовершенствование, Бойль поручил Гуку заняться этим вопросом. Новый ассистент блестяще справился с заданием.

На рисунке 1 изображен внешний вид устройства, которое вошло в историю физики под названием «насос Бойля — Гука». Используя этот насос, Бойль выполнил цикл экспериментов, которые привели к установлению одного из основных газовых законов, впоследствии названного «законом Бойля — Мариотта» *).

Итак, еще во время учебы в университете Гук приобщился к научным исследованиям. Знакомство с Уиллисом и Бойлем имело для начинающего ученого особое значение еще и потому, что они ввели Гука в кружок любителей естествознания, регулярно собиравшийся в Оксфорде, многие члены которого несколько лет спустя (в 1660 году) стали основателями Лондонского Королевского общества (Академии наук Англии). Члены кружка были хорошо осведомлены о талантах Гука, и когда в 1662 году встал вопрос о кандидатуре на должность демонстратора Королевского общества, они без колебаний обратились к Гуку. Гук принял это предложение. В его обязанности входила подготовка трех-четырех экспериментов, которые демонстрировались на еженедельных заседаниях Королевского общества.

Середина XVII века — это время, когда экспериментальные исследования только входят в практику ученых. Поэтому Гуку приходилось очень много работать, чтобы удовлетворить требования членов Общества: ведь он должен был не только ставить опыты, придуманные им самим, но и повторять эксперименты, сообщения о которых дошли до Англии, проводить астрономические наблюдения и т. д. И Гук с честью справлялся с этими обязанностями в течение нескольких десятилетий.

С 1665 года Гук становится профессором геометрии в Грешем-колледже и читает там лекции. В 1666 году меценат Кутлер предлагает Гуку за довольно большое вознаграждение начать чтение лекций для членов Лондонского Королевского общества по различным проблемам науки. Гук, нуждавшийся в средствах, принимает и это предложение, и в течение многих лет регулярно выступает с лекциями на разнообразные темы.

Кажется, что дел, которыми занимался Гук, хватило бы на нескольких людей. Но он находит все новые применения своему таланту. В 1666 году произошло трагическое событие: в результате страшного пожара была уничтожена значительная часть английской столицы (он вошел в историю как Большой Лондонский Пожар — с большой буквы). Сразу после трагедии отцы города обратились в Королевское общество с просьбой предста-

Отрывки из сочинений Гука

Без обращения к первоисточникам невозможно составить правильное представление о том, как излагали свои взгляды ученые прошлого. Иногда современная формулировка закона, носящего имя того или иного ученого, в действительности очень сильно отличается от той, которую давал ему автор. Но чаще знакомство с работами классиков естествознания вызывает восхищение именно тем, как точно ученым прошлого удавалось представлять свои идеи: высказанные ими несколько столетий назад суждения звучат вполне современно. Последнее относится ко многим работам Р. Гука. Мы предлагаем читателю несколько отрывков из произведений ученого, касающихся природы света и закона упругости.

Публикацию подготовил С. Р. Филонович.

О свете

«Свет — колебательное или дрожательное движение в среде..., происходящее из подобного же движения в светящемся теле, подобно звуку, который обычно объясняется дрожательным движением среды, проводящей его, вызванным дрожательным движением звучащего тела. И так же как в звуке пропорциональные колебания производят различные гармоники, так и в свете различные странные и приятные цвета создаются при смешении пропорциональных и гармонических движений. Первые воспринимаются ухом, а вторые — глазом.»

В следующем отрывке речь идет о возбуждении световой волны и, по существу, вводится понятие о сферическом волновом фронте.

«...свет распространяется с одинаковой скоростью, откуда необходимо, чтобы каждый импульс или колебание светящегося тела возбуждал сферу, которая непрерывно увеличивалась бы так же, хотя и намного быстрее, как волны или круги на поверхности воды расходятся вокруг точки,

(Продолжение см. на с. 20)

---

*) Результаты независимых исследований французского физика Э. Мариотта были опубликованы спустя 14 лет после выхода в свет основной работы Р. Бойля.

вить проекты перестройки Лондона. Гук за несколько недель подготовил оригинальный проект. По его плану улицы нового Лондона должны были пересекаться строго под прямыми углами. Хотя этот план не был принят (идея ученого была воплощена в жизнь лишь значительно позже, при застройке Нью-Йорка), проект Гука оценен по достоинству, и он был привлечен к работе по перестройке Лондона в качестве смотрителя. В конце 60-х — начале 80-х годов под руководством Гука в городе было возведено множество зданий. Получили известность и работы Гука как архитектора. В частности, по его проекту было возведено здание печально знаменитой больницы Марии Вифлеемской, превращенной впоследствии в дом для умалишенных. Ее второе название — «Бедлам» — стало нарицательным и обозначает хаос, неразбериху. К сожалению, ни одно из зданий, построенных по проекту Гука, до наших дней не сохранилось.

Вот так, в непрерывной, неустанной деятельности проходили дни Роберта Гука. Однако среди множества его занятий основное место, безусловно, принадлежит научным исследованиям. Какими же открытиями и изобретениями обогатил Гук науку?

Как уже говорилось, свою научную работу Гук начал с участия в экспериментах Бойля. Одно из открытий Бойля послужило темой и первого самостоятельного исследования Гука. Бойль заметил, что жидкость в тонких трубках (капиллярах) не подчиняется закону сообщающихся сосудов: вода в стеклянном капилляре поднимается выше уровня воды в широком сосуде. Гук тщательно исследовал явления подобного рода, которые получили названия капиллярных. Выяснить их причину он не смог, но им было сделано несколько важных наблюдений и обобщений. В частности, он установил связь между капиллярностью и движением соков в стволах деревьев.

Важной особенностью творчества Гука была глубокая взаимосвязь проблем, которыми он занимался. На это обстоятельство надо обратить особое внимание, поскольку широта интересов Гука необычайна. Ярким примером разнообразия занимавших его вопросов является «Микрография» — самое известное произведение Гука, изданное в 1665 году.

В этой относительно небольшой книге Гук описывает множество наблюдений, произведенных с помощью усовершенствованного им микроскопа. На рисунке 2 показан внешний вид этого микроскопа, а на рисунке 3 — изображения микроскопических объектов, исследованных Гуком. (Эти и другие рисунки для книги «Микрография» Гук выполнил сам.)

Усовершенствование микроскопа позволило Гуку провести уникальные по систематичности и разнообразию наблюдения. Исследование глаза мухи было настоящим научным открытием — Гуку удалось объяснить, почему поле зрения этого насекомого очень велико. «... ряды глаз располо-

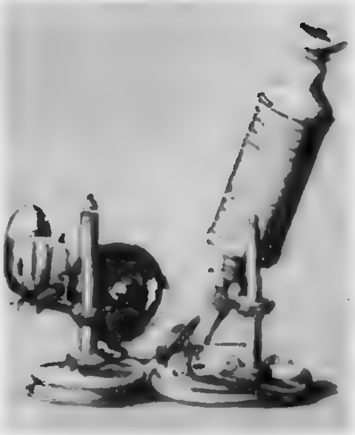


Рис. 2. Микроскоп Гука. Длина тубуса около 7 дюймов (~18 см): перемещение объектива осуществлялось микрометрическим винтом; наблюдаемый предмет помещался на кончике булавки. При работе с искусственным освещением свет (от свечи) фокусировался на предмет с помощью шара, наполненного водой, и плоско-выпуклой линзы.

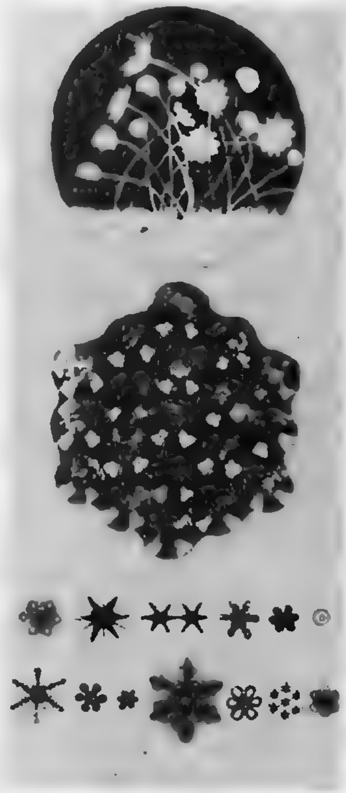


Рис. 3. Изображения микроскопических объектов, исследованных Гуком: грибница плесени; «мозаичный» глаз мухи; различные типы снежинок.

где от упавшего камня началось движение. Из этого следует, что все части этих сфер волнообразно распространяются через однородную среду, пересекая лучи под прямыми углами.»

Гук одним из первых исследовал цвета тонких пленок. Он пытался объяснить их возникновение сложением «импульсов» — волн, отраженных от различных поверхностей пленки. По поводу этого объяснения Т. Юнг, впервые сформулировавший закон интерференции, писал, что среди ученых, занимавшихся оптикой, только у Гука есть намеки на принцип интерференции.

«После двух преломлений и одного отражения распространяется род ослабленного луча, который ослаблен не только вследствие двух преломлений, но и вследствие потери времени, необходимого для прохождения луча туда и обратно между двумя поверхностями... Ослабленный импульс подходит к первому отраженному импульсу так, что смешанный или удвоенный таким образом импульс, передняя часть которого более сильная..., вызывает на сетчатке ощущение желтого цвета. Если немного удалить поверхности друг от друга, то ослабленный импульс совпадает со вторым или следующим импульсом, отраженным от первой поверхности, отставая от него, затем с третьим, четвертым, пятым, шестым, седьмым или восьмым... Таким образом, если есть тонкое прозрачное тело, толщина которого возрастает..., то цвета будут повторяться столь же часто, на сколько ступеней отстает ослабленный импульс от первоначального или первого импульса, совпадая с последующими.»

(Окончание см. на с. 22)

жены таким образом, что нет ни одного направления, видимого от головы, на которое не были бы направлены несколько этих полусфер, так что справедливо говорят, что муха имеет глаза во всех направлениях и что она действительно обозревает все вокруг себя. Замечено также, что когда муха подвигает свое тело назад, эти поверхности поднимаются над поверхностью ее плечей и спины, так что она может смотреть назад над своей спиной»,— так Гук описывал действие глаза мухи.

Среди других биологических наблюдений в первую очередь надо отметить описание клеточного строения растений. Сам термин «клетка», прочно вошедший в язык науки, был введен Гуком.

Хотя «Микрография» в основном посвящена описанию микроскопических наблюдений, в ней немало страниц, где обсуждаются вопросы из разных областей естествознания. Так, Гук касается вопросов, связанных с пневматическими и барометрическими опытами; вновь обсуждает явление капиллярности; излагает оригинальную теорию тепла и горения; описывает свои астрономические наблюдения. Среди астрономических проблем, которые затрагивает Гук, особый интерес представляет вопрос о происхождении лунных кратеров. Для ответа на него ученый ставил модельные опыты; он наблюдал за образованием неровностей, похожих на кратеры, на поверхности кипящего алебастра и на поверхности размягченной глины, в которую падают небольшие ядрышки. Эти модельные эксперименты можно рассматривать как косвенное обоснование двух основных современных гипотез о происхождении кратеров на Луне: вулканической и метеоритной.

Среди обилия наблюдений и гипотез, касающихся самых разных проблем, особое значение для развития физики имела та часть книги, в которой Гук обсуждал вопрос о природе света. Заинтересовавшись явлением цветов тонких пленок и выполнив целый ряд оригинальных наблюдений, он сформулировал гипотезу о природе света, которую считают истоком волновой теории света.*) Гук приобрел такой авторитет в этом вопросе, что именно ему руководство Лондонского Королевского общества поручило в 1672 году высказать суждение о работе по теории цветов, представленной в Общество И. Ньютоном. В работе Ньютона были высказаны некоторые соображения, касающиеся природы света, с которыми Гук не согласился. Будучи человеком решительным, он выступил с резкой критикой точки зрения Ньютона. С этого времени в течение ряда лет Гук и Ньютон полемизировали по вопросам оптики.

В истории физики имя Гука наиболее прочно связано с формулировкой закона упругости, известного каждому старшекласснику как «закон Гука». Исследованиями упругих свойств веществ Гук заинтересовался еще в юности, когда принимал участие в опытах Бойля. Затем он столкнулся со сходными проблемами, занявшись конструированием хронометра со спиральной пружиной. Итогом работ Гука в этой области стала его лекция «О восстановительной способности, или об упругости», изданная отдельной брошюрой в 1678 году, в которой сформулирован закон упругости.

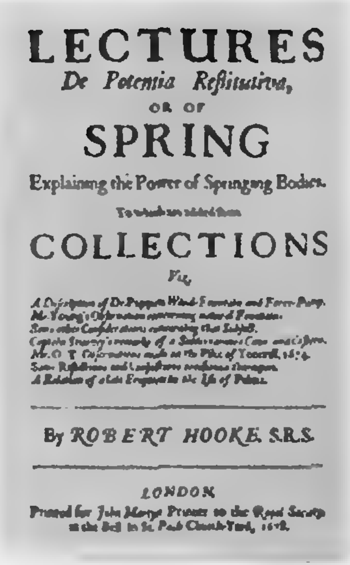
---

*) Читателю, желающему составить представление о том, как Гук формулировал свои научные представления, мы предлагаем отрывки из работ Гука по оптике (с. 18) и механике (с. 22).

В своей лекции Гук описал множество опытов с упругими телами, обобщением результатов которых и стал знаменитый закон. На рисунке 4, заимствованном из указанной брошюры, показаны схемы опытов Гука по исследованию различных видов деформаций. Характерно, что Гук подходил к этим исследованиям, с одной стороны, как практик, изучая, например, деформации часовых пружин или изгиб деревянных балок, использовавшихся в строительной практике, а с другой — как ученый-естествоиспытатель, проводящий точные количественные эксперименты и делающий глубокие обобщения. (Отметим также, что закон упругости — это один из немногих научных результатов, приоритет на который всегда признавался за Гуком.)

Наконец, еще одна проблема физики, вклад Гука в решение которой весьма значителен,— это теория гравитации. Как и многими другими вопросами, гравитацией Гук заинтересовался еще в начале своей научной карьеры. В первые годы деятельности Лондонского Королевского общества он проводил опыты, в которых пытался выяснить, меняется ли сила притяжения, действующая на тело со стороны Земли, при изменении расстояния от центра Земли. Ожидаемых результатов Гук не получил, но не потерял интереса к этой проблеме.

Занятия астрономией, в частности попытка обнаружить параллакс неподвижных звезд — явление, которое непосредственно доказывает движение Земли вокруг Солнца, побудили Гука изложить свои взгляды на движение и взаимодействие тел. В 1674 году он опубликовал работу «Попытка доказать движение Земли наблюдениями», где, в частности, указал на существование универсальной силы гравитации. Однако найти функцию, определяющую зависимость этой силы от расстояния между взаимодействующими телами, Гук не смог. Некоторое время спустя он обратился к Ньютону с вопросом о возможном виде этой функции, а затем высказал предположение, что сила гравитации подчиняется закону обратных квадратов. Ньютон в своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии», где он изложил основные законы динамики, даже не упомянул о заслугах Гука в изучении гравитации, чем глубоко его оскорбил. Между Гуком и Ньютоном, как и в случае дискуссии о природе света и цветов, резко обострились отношения. Известный советский физик и историк науки С. И. Вавилов в научной биографии Ньютона по этому поводу писал: «Ньютон был, очевидно, неправ:



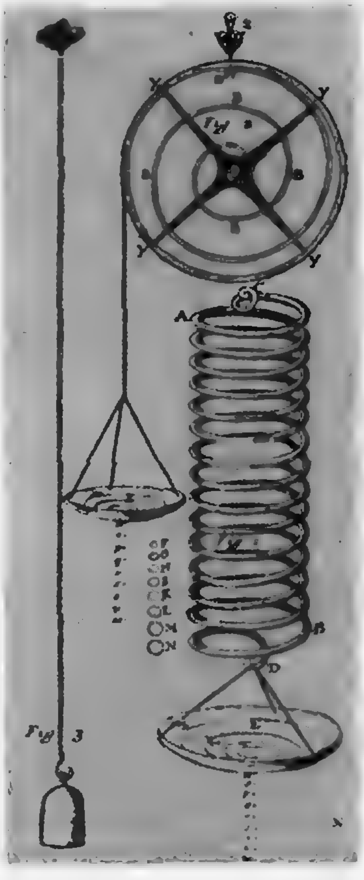
LECTURES
De Potentia Restitutiva,
OR OF
SPRING
Explaining the Power of Springing Bodies.

COLLECTIONS
Viz.

By *ROBERT HOOKE* S.R.S.

LONDON,

Рис. 4. Титульный лист брошюры Гука «О восстановительной способности, или об упругости» и рисунок из брошюры, иллюстрирующий методы исследования деформаций обычной пружины (Fig. 1), *спиральной часовой пружины* (Fig. 2) *и латунной проволоки* (Fig. 3).



скромные желания Гука имели полное основание. Написать «Начала» в XVII веке никто, кроме Ньютона, не мог, но нельзя оспаривать, что программа, план «Начал» были впервые набросаны Гуком».

В этих словах содержится не только оценка дискуссии между двумя учеными, но и признание выдающихся заслуг Гука в развитии нового естествознания.

* * *

Рассказывая о творчестве Гука, мы неизбежно были вынуждены ограничиться лишь наиболее значительными из полученных им результатов. Так, почти ничего не было сказано о его работах по астрономии, географии и картографии, хотя они и были весьма существенными. Тем не менее, даже этот краткий обзор позволяет без всякого преувеличения назвать Гука ученым-энциклопедистом.

Но что за человек был Роберт Гук, талантливый изобретатель, глубокий исследователь и неугомонный спорщик?

Современники пишут о нем по-разному. Одни, не испытывавшие к нему симпатии, подчеркивали его неуживчивый характер, неприятную внешность, резкие манеры. Друзья же оставили о Гуке воспоминания как о человеке добром и отзывчивом, готовом отстаивать не только свой собственный приоритет на то или иное изобретение, но и честь английской науки в целом. Большую роль в формировании представлений о личности Гука сыграла публикация его дневников. Они отразили всю сложность и противоречивость характера ученого, но по ним же можно судить о том, как относился Гук к науке. Для него она всегда оставалась главным в жизни. Уже будучи тяжело больным, почти ослепнув, он продолжал размышлять над важнейшими вопросами естествознания своего времени.

Гук умер в 1703 году. Коллеги по Лондонскому Королевскому обществу выразили глубокое уважение его памяти: на похоронах Гука присутствовали все члены Общества, находившиеся тогда в Лондоне. Однако история не всегда справедлива к выдающимся людям: многие работы Гука были очень скоро забыты. Даже портрет ученого, сыгравшего выдающуюся роль в научной революции XVII века, не сохранился.

Только в наше время, характеризующееся узкой специализацией научных исследований, когда очень остро стоит вопрос о единстве науки, творчество Роберта Гука, ученого-энциклопедиста, получило должную оценку.

* * *

О законе упругости

В приведенных ниже отрывках описывается методика проведения экспериментов по исследованию упругих свойств твердых тел и дается вывод, следующий из их результатов.

«Возьмите проволочную струну 20, 30 или 40 футов [1 фут = 30,48 см — *С. Ф.*] длиной, укрепите ее в верхней части гвоздем, а к нижнему концу подвесьте чашку весов для нагрузки (разновесов). Затем измерьте циркулем расстояние от дна чашки до земли или пола и запишите это расстояние; далее положите в названную чашку гири, измерьте несколько раз удлинения названной струны и запишите их. Затем сравните несколько таких удлинений той же струны, и вы найдете, что они всегда будут относиться друг к другу так же, как вызвавшие их нагрузки.»

«Совершенно очевидно, что правило или закон природы для всякого упругого тела состоит в том, что его сила или способность восстанавливать свое естественное состояние всегда пропорциональны той же мере, на которую оно выведено из этого своего естественного состояния... И наблюдать это можно... во всех каких бы то ни было упругих телах... Исходя из этого принципа, легко можно будет вычислять силу луков, а также баллист или катапульт, находивших применение у древних... Легко будет находить и необходимое сопротивление пружины для часов... Пользуясь тем же законом, легко было бы устроить Философские весы, чтобы определять вес любого тела без применения гирь... Такие весы я изобрел для того, чтобы исследовать притяжение тел к центру Земли, иначе говоря, выяснить, не теряют ли тела на большом удалении от центра Земли несколько в своей силе тяготения к центру Земли...»

Функциональные уравнения и группы

Я. С. БРОДСКИЙ, А. К. СЛИПЕНКО

С функциональными уравнениями вы, наверное, знакомы, хотя, может быть, и не знаете, что они так называются. Так, именно функциональные уравнения $f(x)=f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(x+a)=f(x)$ задают такие свойства функций, как четность, нечетность, периодичность.

Вообще же функциональное уравнение — это некоторое соотношение, из которого нужно найти неизвестную функцию.

Например, $f(x+1)+f(x)=x$,

$$2f(1-x)+1=xf(x),$$

$$xf(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x.$$

Изучать функциональные уравнения математики начали более двухсот лет назад, когда к ним привели некоторые задачи механики. Большой вклад в изучение таких уравнений внес О. Коши (1789—1857). На страницах нашего журнала уже рассматривалось функциональное уравнение $f(x+y)=f(x)+f(y)$, носящее его имя*). В данной статье мы рассмотрим один из методов решения функциональных уравнений, использующий важнейшее понятие современной алгебры — понятие группы.

Композиция функций

Вы, конечно, заметили, что число исходных, основных функций, изучаемых в школьном курсе математики, сравнительно невелико. К ним, например, относятся линейная, степенная, показательная, тригонометрические функции. Другие функции получаются из основных при помощи композиций и алгебраических действий.

Так, функция $f(x)=\sin(2x+1)$ является композицией линейной функции $g(x)=2x+1$ и тригонометрической функции $h(x)=\sin x$, т. е. $f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$.

Функция $f(x)=\lg \arcsin x$ получена в результате композиции функций $g(x)=\arcsin x$ и $h(x)=\lg x$. Обратите внимание на то, что в область определения композиции $h\circ g$ входят те значения x из $D(g)$, для которых $g(x)\in D(h)$. В последнем примере $D(g)=[-1;\ 1]$, $D(h)=]\,0;\ \infty\,[$. Так как $\arcsin x>0$ при $x\in]\,0;\ 1]$, то $D(f)=]\,0;\ 1]$.

Если взять композицию этих же функций в обратном порядке, то есть функцию $f(x)=\arcsin \lg x$, то получим $D(f)=\left[\frac{1}{10};\ 10\right]$.

Композицией дробно-линейных функций $g(x)=\frac{-2x+1}{3x+2}$ и $h(x)=\frac{3x-2}{-x+4}$ является функция $f(x)=h(g(x))=$

$$=\frac{3\cdot\frac{-2x+1}{3x+2}-2}{-\frac{-2x+1}{3x+2}+4}=\frac{-12x-1}{14x+7},\quad x\neq-\frac{2}{3}.$$

Здесь $D(f)=R\setminus\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Как правило, $f\circ g\neq g\circ f$. В то же время для любых функций

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),$$

что непосредственно вытекает из определения композиции.

Упражнения

1. Найдите композиции $f_1\circ f_2$ и $f_2\circ f_1$ следующих функций:

$$f_1=\frac{x-2}{3x+4},\quad f_2=\frac{2x+3}{5x-1}.$$

2. Найдите область определения композиции функции $1-x^2$ и $\sqrt{x}$.

3. Пусть $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Найдите $\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$.

Функциональные уравнения

Решим следующую задачу.

Задача 1. Найдите все функции $y=f(x)$ такие, что

$$2f(1-x)+1=xf(x). \qquad (1)$$

---

*) См. «Квант», 1975, № 1.

Решение. Предположим, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая данному уравнению. Заменив x на $1-x$, получим

$$2f(x)+1=(1-x)f(1-x). \qquad (2)$$

Из (1) находим $f(1-x)=\frac{1}{2}(xf(x)-1)$. Подставляя значение $f(1-x)$ в уравнение (2), получим

$$2f(x)+1=(1-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot(xf(x)-1),$$

откуда $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что полученная функция удовлетворяет уравнению (1).

В рассмотренном уравнении под знаком неизвестной функции стоят функции $f_1=x$ и $f_2=1-x$. Замена x на $1-x$ переводит функции f_1 и f_2 друг в друга. В результате подстановки $x \to 1-x$ получено еще одно уравнение, содержащее $f(x)$ и $f(1-x)$. Решение функционального уравнения мы свели к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим теперь более сложную задачу.

Задача 2. Решите уравнение

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1\,. \qquad (3)$$

Решение. Попробуем действовать так же, как и в первом случае. Выполним замену $x \to \frac{x-1}{x+1}$. Получаем

$$\frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1. \qquad (4)$$

Наряду с выражениями $f(x)$ и $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ у нас появилось новое «неизвестное» — $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Попробуем применить в (3) еще одну подстановку: $x \to -\frac{1}{x}$. Имеем

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=1. \qquad (5)$$

Кроме $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, в уравнении появилось «нежелательное» выражение $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Что же, попробуем выполнить в (3) подстановку $x \to \frac{x+1}{1-x}$. И, наконец, удача. Получаем уравнение

$$\frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2f(x)=1, \qquad (6)$$

где новые неизвестные не возникли — построена система четырех линейных уравнений (3) — (6) с четырьмя неизвестными $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ и $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Последовательно исключая $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, найдем

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}\ (x\neq-1,\ x\neq 0,\ x\neq 1).$$

Как и при решении уравнения (1), мы предполагали, что функция, удовлетворяющая (3), существует. Проверка показывает, что f удовлетворяет уравнению (3).

Появляются группы

Попробуем разобраться почему нам удалось решить уравнения предыдущего параграфа.

Рассмотрим еще одно уравнение

$$f(x+1)+f(x)=x.$$

Оно выглядит не более «страшным», чем уравнение (3), однако все попытки решить его тем же способом окажутся тщетными: при замене $x \to x+1$ появляется «неизвестное» $f(x+2)$, и так далее. Цепочка не замыкается: мы никогда не получим линейной системы.

Вспомним, что, решая первое уравнение, мы выполнили подстановку $x \to 1-x$. При этом $1-x \to x$. То есть две функции $g_1(x)=x$ и $g_2(x)=1-x$ по отношению к операции композиции ведут себя так $g_1\circ g_2=g_2\circ g_1=g_2$, $g_2\circ g_2=g_1$, $g_1\circ g_1=g_1$.

Рассмотрим таблицу «умножения» (на пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит $g_i\circ g_j$).

$\circ$	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

В каждой строке и каждом столбце этой таблицы встречаются и g_1 и g_2.

Допустим теперь, что нам нужно

решить уравнение

$$a(x)f(x)+b(x)f(1-x)=c(x), \qquad (*)$$

где *a*, *b*, *c* — некоторые функции. Ясно, что выполняя подстановку $x\to 1-x$, мы получим уравнение

$$a(1-x)f(1-x)+b(1-x)f(x)=c(1-x), \qquad (**)$$

которое вместе с уравнением (*) образует линейную систему относительно функций $f(x)$ и $f(1-x)$. Дальше решение будет развиваться так же, как и при решении задачи 1.

Во втором рассмотренном примере мы делали подстановки

$$x\to\frac{x-1}{x+1},\quad x\to-\frac{1}{x},\quad x\to\frac{x+1}{1-x},$$

то есть имели дело с функциями

$$g_1(x)=x,\quad g_2(x)=\frac{x-1}{x+1},$$

$$g_3(x)=-\frac{1}{x},\quad g_4(x)=\frac{x+1}{1-x}.$$

Посмотрим, как ведут себя функции g_1, g_2, g_3, g_4 по отношению к операции композиции. Составим таблицу 2, аналогичную таблице 1 (в пересечении *i*-й строки и *k*-го столбца запишем $g_i\circ g_k$).

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Таблица эта симметрична относительно своей диагонали (это значит, что $g_i\circ g_k=g_k\circ g_i$ при любых *k* и *i*). Кроме того, все функции g_i встречаются в каждой строке и каждом столбце равно один раз, и, наконец, легко заметить, что $g_3=g_2^2$, $g_4=g_2^3$, $g_1=g_2^4$. Здесь $g_2^i=\underbrace{g_2\circ g_2\circ\ldots\circ g_2}_{i\ \text{раз}}$.

Таким образом, система функций $G=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ обладает следующими свойствами: а) она замкнута относительно композиций; б) среди этих функций есть тождественное отображение $g_1(x)=x$; в) у каждой из функций g_i есть обратная g_i^{-1}: $g_1^{-1}=g_1$, $g_2^{-1}=g_4$, $g_3^{-1}=g_3$, $g_4^{-1}=g_2$.

Теми же свойствами обладает и система функций $G=\{g_1, g_2\}$ из примера 1.

Если бы теперь нам предложили решить любое функциональное уравнение вида

$$a(x)f(x)+b(x)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c(x)f\left(-\frac{1}{x}\right)+d(x)f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=h(x), \qquad (***)$$

мы сделали бы это, выполнив замены $x\to g_2(x)$, $x\to g_3(x)$, $x\to g_4(x)$, после чего пришли бы к линейной системе. Для примера запишем, что получится из (***) после замены $x\to g_2(x)$.

При этом $g_2(x)\to g_3(x)$, $g_3(x)\to g_4(x)$, $g_4(x)\to g_1(x)$, так что получится уравнение

$$a\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+b\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(-\frac{1}{x}\right)+c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+d\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f(x)=h\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Теперь дадим следующее определение.

Определение. Произвольное множество *G* функций, определенных на некотором множестве *M*, называется *группой* относительно операции $\circ$, если оно обладает теми же свойствами, что и система (g_1, g_2, g_3, g_4), то есть

1. Для любых двух функций $f\in G$, $g\in G$ их композиция $f\circ g$ тоже принадлежит *G*.

2. Функция $e(x)=x$ принадлежит *G*.

3. Для всякой функции $f\in G$ существует обратная функция f^{-1}, которая также принадлежит *G*.

Это определение есть частный случай общего определения понятия группы — одного из важнейших понятий современной математики. Подробно и популярно основные понятия теории групп изложены в книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Библиотечка «Квант», вып. 7, М.: Наука, 1980).

Два примера групп функций мы уже видели. Приведем еще некоторые примеры.

а) Множество *G* линейных функций $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0,\ b\in\mathbb{R})$;

б) $G=\left\{x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x}\right\}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ 1\}$;

в) $G=\left\{x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x}\right\}$ $x\in R\setminus\{0,\ 1\}$;

г) Множество G функций вида $f(x)=x+a$.

Докажем, например, что линейные функции образуют группу. Все эти функции определены из числовой прямой R. Пусть $f_1=a_1x+b_1$, $f_2=a_2x+b_2$, тогда

$$f_1\circ f_2=a_1(a_2x+b_2)+b_1=a_1a_2x+a_1b_2+b_1,$$

снова есть линейная функция. Функция $e(x)=x$ — также линейная. Если $f(x)=ax+b$, то функцией, обратной к f, будет линейная функция $f^{-1}=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$.

Упражнения

4. Докажите, что множества функций примеров б) и г) образуют группы.

5. Образует ли множество функций $G=\left\{x, \frac{1}{1-x}; \frac{x-1}{x}; 1-x; \frac{1}{x}; \frac{x}{x-1}\right\}$, где $x\in R/\{0,1\}$ группу относительно композиции?

Подведение итогов

Теперь мы можем изложить общий метод решения некоторых функциональных уравнений с использованием понятия группы функций.

Пусть в функциональном уравнении

$$a_1f(g_1)+a_2f(g_2)+\ldots+a_nf(g_n)=b \qquad (7)$$

выражения, стоящие под знаком неизвестной функции $f(x)$ являются элементами группы G, состоящей из n функций: $g_1(x)=x$; $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, причем коэффициенты уравнения (7) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b — некоторые функции от x. Предположим, что уравнение (7) имеет решение. Заменим $x\to g_2(x)$. В результате последовательность функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ перейдет в последовательность $g_1\circ g_2$, $g_2\circ g_2$, ..., $g_n\circ g_2$, состоящую опять таки из **всех** элементов группы.

Поэтому «неизвестные» $f(g_1)$, $f(g_2)$, ..., $f(g_n)$ переставятся и мы получим новое линейное уравнение того же вида, что и (7). Далее в уравнении (7) делаем замены $x\to g_3(x)$, $x\to g_4(x)$, ..., $x\to g_n(x)$, после чего получим систему из n линейных уравнений, которую следует решить. Если решения есть, то мы еще должны проверкой убедиться в том, что они удовлетворяют уравнению (7).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$2xf(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x. \qquad (8)$$

Множество функций $g_1=x$, $g_2=\frac{1}{1-x}$, $g_3=\frac{x-1}{x}$ образует группу с «таблицей умножения»,

∘	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

Заменяя в уравнении (8) x на $\frac{1}{1-x}$, и на $\frac{x-1}{x}$, получим систему

$$\begin{cases} 2xf_1+f_2=2x, \\ \frac{2}{1-x}f_2+f_3=\frac{2}{1-x}, \\ \frac{2(x-1)}{x}f_3+f_1=\frac{2(x-1)}{x}, \end{cases}$$

где $f_1=f(x)$, $f_2=f(g_2(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $f_3=f(g_3(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$, решая которую получим, выполнив проверку

$$f_1=f(x)=\frac{6x-2}{7x} \text{ при } x\neq 0,\ x\neq -1.$$

Приведем в заключение некоторые примеры групп функций, которые могут быть использованы при решении функциональных уравнений.

$G_1=\{x, a-x\}$, $G_2=\left\{x, \frac{a}{x}\right\}$ (здесь и далее $a\neq 0$), $G_3=\left\{x, \frac{a}{x}, -x, -\frac{a}{x}\right\}$, $G_4=\left\{x, \frac{1}{x}, -x, -\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1-x}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{x+1}{1-x}\right\}$, $G_5=\left\{x, \frac{a^2}{x}, a-x, \frac{ax}{x-a}, \frac{ax-a^2}{x}, \frac{a^2}{a-x}\right\}$, $G_6=\left\{x, \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}, \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}, \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}\right\}$.

Упражнения

6. Решить функциональные уравнения

а) $xf(x)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=3$, $x\neq 0$;

б) $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2$, $D(f)=R\setminus\{0; 1\}$;

в) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x$.

(Окончание см. на с. 32)

Игорь Евгеньевич Тамм

В июле этого года исполняется 90 лет со дня рождения выдающегося советского физика-теоретика Игоря Евгеньевича Тамма (1895—1971).

Научные достижения И. Е. Тамма относятся к самым разным областям физики: к электромагнитным явлениям, физике твердого тела, ядерной физике, физике элементарных частиц.

Для Игоря Евгеньевича Тамма было характерно, что он неизменно интересовался труднейшими и важнейшими вопросами физики и с большой целеустремленностью добивался ясности для себя и для других. Правда, нередко получалось так, что значение его работ выяснялось существенно позднее, когда другие исследователи находили применения тем явлениям, которые впервые рассмотрел или предсказал Игорь Евгеньевич.

Например, в 1932 году И. Е. Тамм опубликовал работу «О возможной связи электронов на поверхности кристалла». В ней было предсказано существование особых состояний электронов на поверхности кристалла («уровни Тамма»), когда электроны как бы привязаны к поверхности, то есть не могут ни выйти наружу, ни войти внутрь. Прошло несколько десятков лет после опубликования работы, и выяснилось, что «уровни Тамма» определяют контактные свойства твердых тел, то есть электрические свойства переходного слоя, образованного при соприкосновении двух тел. Без учета «уровней Тамма» было невозможным объяснить работу полупроводниковых диодов и транзисторов, а ведь когда И. Е. Тамм изучал поверхностные состояния, слова «транзистор» еще не существовало. Работа И. Е. Тамма оказалась также очень важной для быстро развивающейся в наши дни физики поверхностных явлений. Интересно, что, когда тридцать пять лет спустя Игорю Евгеньевичу сказали о большой важности его работы по поверхностным состояниям для физики поверхностей, он очень удивился и попросил ему напомнить об этой работе. К тому времени он ее забыл, а точнее говоря, потерял к ней интерес, полностью переключившись на работы по ядерной физике.

В 1937 году И. Е. Тамм вместе с И. М. Франком создали теорию явления, которое было тремя годами ранее найдено и исследовано П. А. Черенковым и С. И. Вавиловым. Было обнаружено слабое свечение жидкостей под действием радиоактивного излучения. Тамм и Франк указали, что источником свечения являются быстрые заряженные частицы, пролетающие через прозрачное вещество со скоростью, превосходящей скорость света в этом веществе. Очень красивая эта теория, как и само явление, сначала не привлекли к себе большого внимания, потому что свечение было очень слабым и казалось, что его невозможно использовать. Однако прошло полтора десятка лет после открытия, и появились приборы — черенковские счетчики, позволяющие регистрировать быстрые заряженные частицы по излучаемому ими свечению.

Сам Игорь Евгеньевич считал одной из лучших своих работ работу по теории ядерных сил, опубликованную в 1934 году. В этой работе он не смог объяснить природу сил, действующих между частицами в атомном ядре, но указал путь, на котором несколько лет спустя такое объяснение было получено. Оно принадлежит известному японскому физику Х. Юкаве. В своей работе он ссылался на И. Е. Тамма как на своего предшественника.

Невозможно в краткой заметке рассказать обо всех, или хотя бы о важнейших, работах И. Е. Тамма. Добавим лишь, что он был в числе советских ученых, предложивших новый, перспективный и практически неисчерпаемый источник энергии — управляемые термоядерные реакции.

Игорь Евгеньевич был очень хорошим человеком — справедливым, доброжелательным, веселым. Он радовался каждому научному успеху своих товарищей по работе, и эта радость всегда была искренней. Сам работая очень много (сохранились черновики его вычислений — страницы, помеченные четырехзначными номерами), он находил время для того, чтобы выслушать и обсудить чужую работу. Его критика всегда была доброжелательной, и даже после самых резких его замечаний у докладчика не опускались руки, а возникало желание работать дальше. После общения с ним у молодежи появлялась уверенность в своих силах. Может быть, именно поэтому среди его учеников так много выдающихся физиков.

По натуре своей Игорь Евгеньевич был очень активен. Он и отдых любил активный: ходил в горы, в походы на байдарках, с большим азартом играл в шахматы, был неистощимым рассказчиком. Его принципиальность тоже носила активный характер. Если он сталкивался с проявлениями лженауки, с незаслуженным восхвалением одних или осуждением других, он неизменно начинал борьбу за восстановление справедливости. Его выступления на страницах газет, на собраниях и обсуждениях были проникнуты заботой о развитии советской науки. Эти качества отчасти объясняют тот факт, что известность Игоря Евгеньевича, любовь и уважение к нему далеко выходили за пределы круга физиков.

Б. М. Болотовский

Струя воды и ... движущийся кораблик

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ,
М. Л. ТАРАСОВ

Уже несколько раз на страницах «Лаборатории «Кванта» рассказывалось об очень интересном и важном физическом явлении — о наличии реакции вытекающей струи и об отсутствии реакции втекающей струи жидкости (см. «Квант», 1978, № 9; 1980, № 9).
В этом номере публикуется еще одна статья на эту тему.

Начнем с рассказа об одной забытой детской игрушке, которая была достаточно популярной в 30-е годы. Называлась она «Самоходный катер». Сейчас эту игрушку в магазинах уже не продают, но ее нетрудно сделать своими руками дома или в кружке «Умелые руки».

Устройство «Самоходного катера» изображено на рисунке 1. На лодочке *1* укреплена герметичная жестяная плоская коробочка *2*, которая может подогреваться свечой *3* (в современных опытах вместо свечи лучше использовать таблетку сухого спирта). Из коробочки под дно лодки выходит изогнутая металлическая трубка *4* (плотность соединений обеспечивается пайкой *5*). Для большего эффекта одну сторону коробочки можно изготовить в виде щелкающей мембраны (см. «Юный техник», 1983, № 8, с. 65).

Работала эта игрушка следующим образом. Жестяная коробочка заполнялась водой (через отверстие с пробкой *6*), и игрушка опускалась на поверхность воды. Затем зажигалась свеча. Через некоторое время лодка начинала двигаться — сначала медленно и плавно, потом рывками,

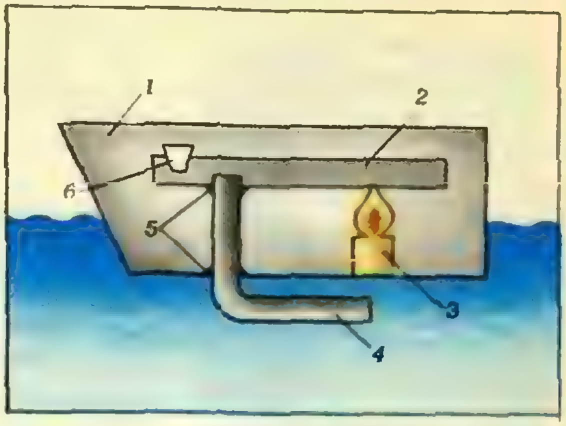


Рис. 1.

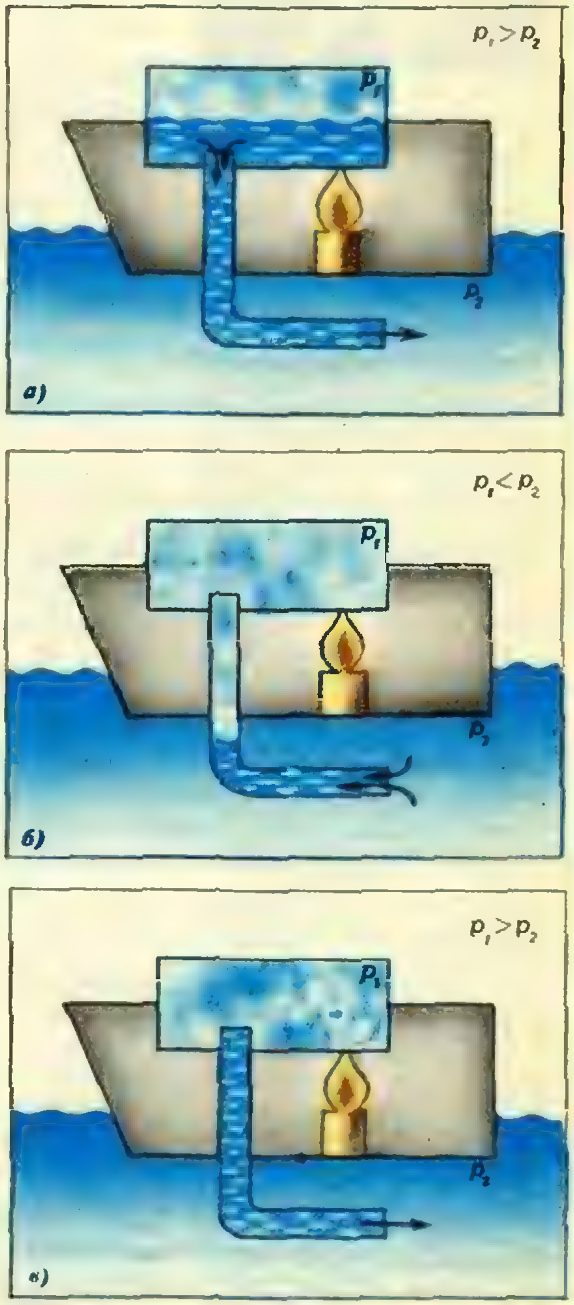


Рис. 2.

издавая характерные звуки, имитирующие работу паровой машины. И двигалась все время, пока горела свеча.

Попробуем теперь разобраться в том, почему же движется «самоходный катер».

Когда мы зажигаем свечу, вода в коробочке нагревается и закипает (рис. 2, *а*). При этом давление в коробочке повышается, вода начинает через трубочку выходить наружу, а лодочка приходит в плавное и медленное движение. Эта, первая, фаза работы игрушки заканчивается, когда вся вода в коробочке выкипает.

Поскольку теплопроводность пара мала, пар практически не отбирает тепло от коробочки и не нагревается, а значит, и не расширяется. Более того, он конденсируется в трубке (в месте контакта с водой), в результате чего давление в коробочке *падает, и вода постепенно поднимается* вверх по трубке (рис. 2, *б*). Это — вторая фаза работы игрушки.

Когда вода поднимется по трубке до самого верха и какое-то количество воды, перелившись через край, упадет на раскаленное дно коробочки, произойдет моментальное испарение воды. При этом давление в коробочке подскочит, и некоторое количество воды из трубки вытолкнется наружу (рис. 2, *в*). Это — третья фаза работы игрушки.

В дальнейшем, *пока горит свеча*, вторая и третья фазы чередуются. Когда же свеча потухнет, коробочка остынет, весь пар сконденсируется, и коробочка вновь заполнится водой.

Может показаться непонятным, как перемещениями одного и того же количества воды — выталкиваемого из трубки в третьей фазе и всасываемого трубкой во второй фазе — можно добиться поступательного движения лодочки. Оказывается, все дело в существовании реакции вытекающей струи и отсутствии реакции втекающей струи жидкости.

Для наглядной иллюстрации этого факта обратимся к другой любопытной самоделке (рис. 3) — «картезианскому водолазу» с пристроенным к нему сегнеровым колесом. (О том, как сделать эту игрушку, рассказывается в «Кванте» № 9 за 1980 год.) Если нажать на поршень *1*, давление в сосуде *2* увеличивается, вода через трубки *4* заходит внутрь «водолаза» *3*, сила тяжести его увеличивается, и он опускается на дно, не вращаясь при этом. Если поршень поднять, давление в сосуде уменьшается, объем воздуха в «водолазе» увеличивается, сила тяжести «водолаза» уменьшается и он всплывает, вращаясь под действием вытекающих из трубок струй. *Периодически поднимая и опуская* поршень, можно заставить «водолаза» вращаться с довольно большой угловой скоростью. Это явно свидетельствует о различной роли вытекающих и втекающих струй.

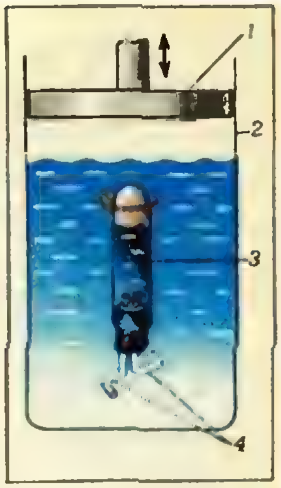
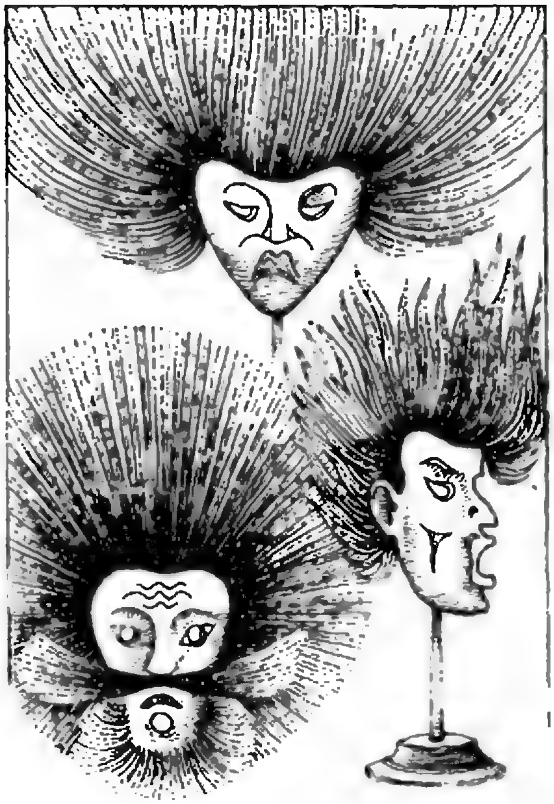


Рис. 3.

Можно ли дать этому теоретическое объяснение?

Наличие реакции вытекающей струи — это известное реактивное движение. А вот с втекающей струей дело обстоит сложнее. Строго отсутствие реакции втекающей струи доказал известный русский ученый, основоположник современной гидроаэродинамики Н. Е. Жуковский, но его теория непроста.

Итак, при вытекании струи тело получает какой-то импульс, а при втекании струи оно импульса не получает. Совершая последовательные втягивание и выталкивание некоторого количества воды, тело может двигаться в сторону, противоположную выталкиванию воды. На этом принципе и основано действие игрушечного «самоходного катера».



Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Под таким заголовком мы публикуем статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных старых опытах по физике.*) Сегодня вниманию читателей предлагается рассказ о том, как легко «добыть» электрические заряды в домашних условиях, как была «открыта» лейденская банка и какие опыты можно с ней провести.

Маски, изображенные на верхнем рисунке, вовсе не являются атрибутами жреца какого-нибудь языческого племени. В прошлом веке с их помощью почтенные профессора физики демонстрировали на своих лекциях в университетах явление электростатического отталкивания. Для этого маску с волосяным париком укрепляли на диэлектрической подставке и заряжали от электростатической машины. Иногда для демонстрации приглашался кто-либо из студентов (из числа наиболее любознательных). Как и маску, его устанавливали на изолирующей подставке и подсоединяли к кондуктору электростатической машины. Через некоторое время, когда на нем накапливался достаточно большой заряд, волосы на его голове становились дыбом, а в притихшем зале слышалось слабое потрескивание — это с кончиков волос стекали электрические заряды.

Существует много различных забавных опытов по электричеству, которые довольно легко воспроизвести самостоятельно. О некоторых опытах мы уже рассказывали раньше (см. «Квант», 1983, № 5, с. 29), еще с несколькими хотим познакомить теперь.

В книге Гастона Тисандье «Научные развлечения», изданной более ста лет назад, есть описание очень простой в изготовлении электростатической машины, с помощью которой можно легко «получать» необходимые для опытов электрические заряды.

Возьмите металлический лакированный поднос длиной 35—40 сантиметров и установите его на столе на нескольких стеклянных рюмках (рис. 1). Вырежьте по форме подноса лист плотной оберточной бумаги так, чтобы он хорошо ложился на плоскую часть подноса. С помощью расплавленного сургуча приклейте к листу две бумажные ленты, за которые можно было бы его поднимать.

Заготовленный лист бумаги поднесите к какому-нибудь источнику тепла, например к печке, чтобы бумага хорошенько просохла и по возможности сильно нагрелась. После этого быстро положите ее на деревянный стол и сильно потрите сухой и жесткой платяной щеткой — благодаря электризации трением лист бумаги приобретет некоторый заряд.

Теперь, взявшись за ленты, перенесите лист бумаги на поднос, заземлите последний, прикоснувшись к его краю пальцем, и тотчас же поднимите бумагу. В результате этого поднос окажется заряженным (причем зарядом противоположного бумаге знака). Чтобы убедиться в этом, приблизьте к подносу согнутый палец руки — на достаточно малом расстоянии от подноса в палец ударит маленькая молния — искра. Можно снова опустить лист бумаги на поднос и, повторяя тот же прием, получить еще одну искру и так далее, вплоть до 7—8 раз.

---

*) См. статьи А. А. Варламова в «Кванте» № 10 за 1982 год, в № 5 за 1983год и в № 8 за 1984 год.

Эту электростатическую машину можно использовать для зарядки конденсатора, называемого лейденской банкой.

Впрочем, история открытия лейденской банки стоит того, чтобы рассказать о ней отдельно.

В 1745 году профессор Лейденского университета (Голландия) Мушенбрек решил с помощью электростатической машины зарядить воду. Для этого он взял стеклянную банку и вставил в нее, для подвода к воде заряда, металлический стержень. Совершив процесс зарядки, он, держась одной рукой за банку, другой взялся за стержень. Впоследствии в письме к французскому физику Реомюру он писал, что все его тело при этом содрогнулось, как от молнии, и что он даже ради короны Франции не стал бы повторять этот ужасный эксперимент.

Примерно в то же время немецкий каноник Клейст проводил опыты по получению электризованной воды, которая, как предполагалось, обладала целебными свойствами. Зарядив воду в бутылке, он прикоснулся к гвоздю, по которому подавался заряд в воду, и его постигла та же участь, что и Мушенбрека.

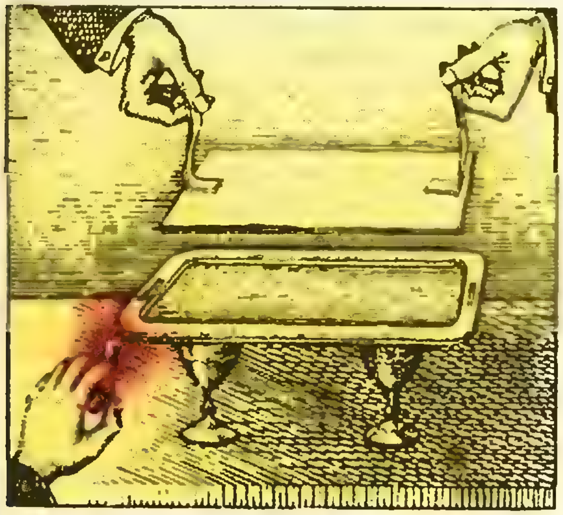


Рис. 1.

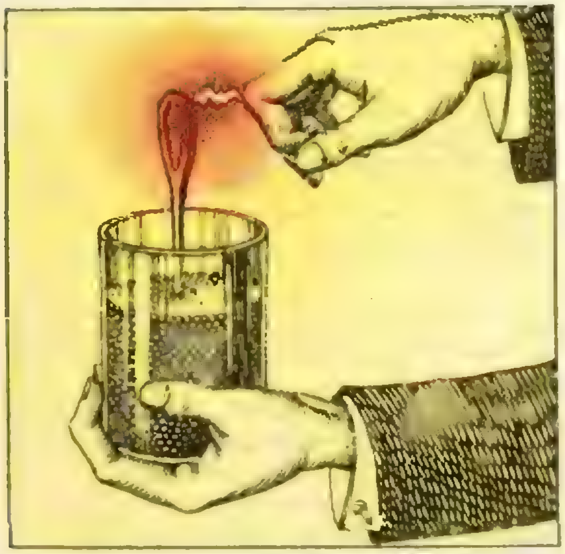


Рис. 2.

Так был открыт первый электрический конденсатор, который впоследствии получил название лейденской банки.

Известия об этих опытах быстро распространились по свету, и их стали повторять во многих местах.

Интересны, например, опыты одного из создателей учения об электричестве американского естествоиспытателя Франклина. Для начала он проделал обычный опыт с лейденской банкой. Опустив палец одной руки в воду и дотронувшись другой рукой до наружной поверхности банки, он получил ощутимый удар. Предположив, что заряд содержится в самой воде, он в следующем опыте осторожно перелил ее в другую банку и испытал ее действие на себе — удара не последовало. Следовательно, дело не в воде. Налив в первую банку свежей воды и повторив свой опыт, Франклин снова получил удар и таким образом убедился в том, что «сила, дающая его, заключена в самом стекле».

Прошло совсем немного времени, и лейденская банка приняла «современный» вид — стеклянная банка, оклеенная с обеих сторон металлической фольгой.

Превосходную лейденскую банку можно изготовить, например, так (рис. 2). Возьмите наполненный охотничьей дробью стеклянный стакан и вставьте в него металлическую чайную ложку (конечно, все эти предметы должны быть абсолютно сухими). Для зарядки полученного конденсатора (подумайте, а что служит его обкладками?) обратимся к помощи только что описанной электростатической машины. В то время как вы касаетесь пальцем подноса и поднимаете лист бумаги, пусть ваш помощник, держа банку за дно, поднесет ее к краю подноса так, чтобы искра ударила в конец ложки. После нескольких таких разрядов лейденская банка получит вполне достаточный заряд, и с ее помощью можно будет проделать множество интересных опытов. Опишем некоторые из них.

Самый простой опыт — разрядите лейденскую банку через плотную бумагу, и вы увидите, что искра пробьет в бумаге отверстие причудливой формы.

Теперь понаблюдайте так называемые фигуры Лихтенберга. Профессор физики Геттингенского университета Лихтенберг (живший в XVIII веке) придумал способ, как сделать видимым невооруженным глазом распределение зарядов на электризованной поверхности. Для этого им была использована способность различных

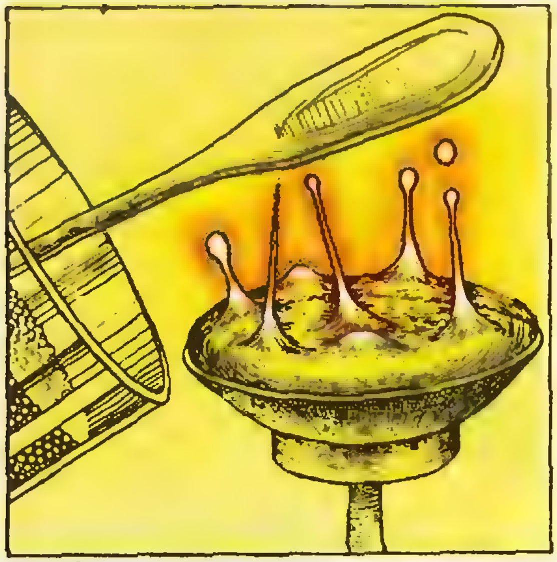


Рис. 3.

порошков электризоваться по-разному. Так например, было замечено, что при просеивании сквозь марлю порошок сурика (сухая красная краска) электризуется положительно, а порошок серы — отрицательно.

Возьмите какой-нибудь диэлектрик, скажем кусок смолы. Тиндаль в своих «Уроках по электричеству» рекомендует предварительно обмахнуть его поверхность лисьим хвостом (если такового у вас нет, постарайтесь найти ему замену), а затем провести по ней концом ложки вашей лейденской банки, написав на смоле, например, свое имя. При этом поверхность смолы становится заряженной отчасти положительно, отчасти отрицательно. Если теперь посыпать ее тонким слоем смеси сурика и серы, то сера соберется там, где сосредоточены положительные заряды, а сурик — где находятся отрицательные заряды. В результате может возникнуть очень красивый рисунок. (Подумайте, как с помощью этих порошков определить знак заряда, возникающего на бумаге при ее электризации трением.)

Еще один опыт, известный в истории науки как опыт флорентийских академиков. Налейте в маленькое часовое стекло растительного масла так, чтобы оно образовало выпуклую поверхность, несколько выступающую над краями стекла. Установите стекло на маленькую подставку и поднесите к поверхности масла конец ложки *заряженной лейденской банки.* Вы увидите, как на поверхности масла будут зарождаться выступы, из которых, при дальнейшем приближении банки, брызнут струи масла (рис. 3).

Функциональные уравнения и группы

(Начало см. на с. 23)

7. Найти $f(x)$, если

$$af(x^n)+f(-x^n)=bx,$$

где $a\neq 1$, n — нечетное число.

8. Найти функцию, определенную при $x\neq 0$ и удовлетворяющую уравнению

$$(x-2)f(x)+f\left(-\frac{2}{x}\right)-xf(2)=5.$$

9. Найти хотя бы одну функцию, удовлетворяющую уравнению $f(f(f(x)))=-\frac{1}{x}$ и не удовлетворяющую уравнению $f(f(x))=-x$.

10. Доказать, что если $G=\{g_1=x, g_2, \dots, g_n\}$ — конечная группа функций относительно композиции, $\varphi=\varphi(x)$ — произвольная обратимая функция, то множество

$$G_\varphi=\{\varphi^{-1}\circ g_1\circ\varphi, \varphi^{-1}\circ g_2\circ\varphi, \dots, \varphi^{-1}\circ g_n\circ\varphi\}$$

также является группой относительно композиции. Обычное замечание об области определения каждого элемента остается в силе.

Мы изложили один из методов решения функциональных уравнений. Существуют *и другие методы,* использующие понятие предела, непрерывности, производной и др. Но это уже предмет особого разговора.

Как получаются симметричные неравенства

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДВОРЯНИНОВ,
кандидат педагогических наук
Э. А. ЯСИНОВЫЙ

Во многих задачниках по алгебре и анализу, на математических олимпиадах, а иногда и на экзаменах встречаются задачи, в которых требуется доказать неравенство с несколькими переменными. Самые простые из них доступны ученикам 5—6 класса. Разнообразным методам их доказательства, общим теоремам о замечательных неравенствах посвящены многочисленные математические статьи, обзоры, монографии. Немало статей о неравенствах накопилось и в портфеле нашего «Математического кружка».

В этой заметке рассказывается о теореме Мюрхеда про неравенства, связывающие симметрические многочлены специального вида (суммы всевозможных одночленов с одинаковыми показателями). Эта теорема, доказанная в 1903 году, замечательна не только своей общностью и окончательностью, но и тем, что возникающие в связи с ней комбинаторные понятия («диаграммы Юнга» и их сравнение — «мажоризация») столь же естественно появляются в различных разделах теоретической и прикладной математики, активно развивающихся в последнее время.

Введение

Мы будем заниматься неравенствами такого типа:

$$x^2+y^2\geqslant 2xy, \qquad (1)$$

$$x^5+y^5\geqslant x^3y^2+y^3x^2, \qquad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx, \qquad (3)$$

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz, \qquad (4)$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy, \qquad (5)$$

$$x^4+y^4+z^4+w^4\geqslant 4xyzw. \qquad (6)$$

Эти неравенства справедливы при всех неотрицательных значениях входящих в них букв. Для случая двух переменных такие неравенства легко доказать группировкой слагаемых и разложением на множители. Докажем, например, что при любых неотрицательных x и y выполнено неравенство (2). Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned}x^5+y^5-x^3y^2-y^3x^2&=\\&=x^3(x^2-y^2)-y^3(x^2-y^2)=\\&=(x^3-y^3)(x^2-y^2).\end{aligned}$$

Последнее произведение, очевидно, неотрицательно: обе скобки не меньше 0 при $x\geqslant y\geqslant 0$ и не больше 0 при $y\geqslant x\geqslant 0$.

Более трудно додуматься до симметричного доказательства неравенства с тремя или большим числом переменных. Продемонстрируем общую идею пока на одном примере (5). Здесь удобно, перенеся все члены в левую часть неравенства, умножить их на 2 и собрать в три группы:

$$\begin{aligned}&x^2(y^2-2yz+z^2)+\\&\quad+y^2(x^2-2xz+z^2)+\\&\quad+z^2(x^2-2xy+y^2)=\\&=x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Упражнение 1. Постарайтесь доказать неравенства (1), (3) и (6).

Чтобы научиться доказывать всевозможные неравенства такого типа и сформулировать общую теорему, необходимо познакомиться с некоторыми новыми понятиями. Сейчас мы их опишем.

Симметризация одночлена

Пусть у нас есть несколько неотрицательных переменных — для определенности, три переменных x, y и z. Кроме того, пусть задан набор из такого же количества целых неотрицательных чисел, $\alpha=(k;\ j;\ i)$, где $k\geqslant j\geqslant i$; назовем их *показателями*. Нарисуем таблицу из трех квадратов и в верхнем правом углу каждого напишем соответствующий показатель. В эти квадраты впишем наши три буквы x, y, z и, глядя на таблицу, напишем одночлен $x^ky^jz^i$. Теперь в ту же таблицу впишем переменные в другом

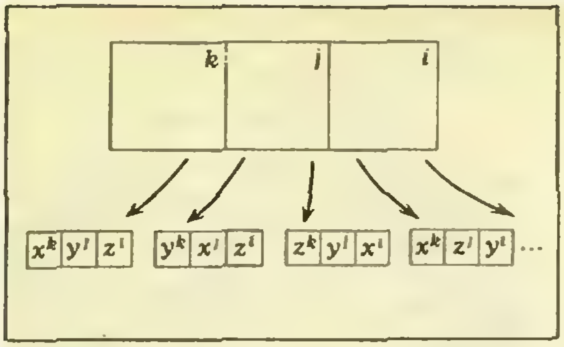


Рис. 1.

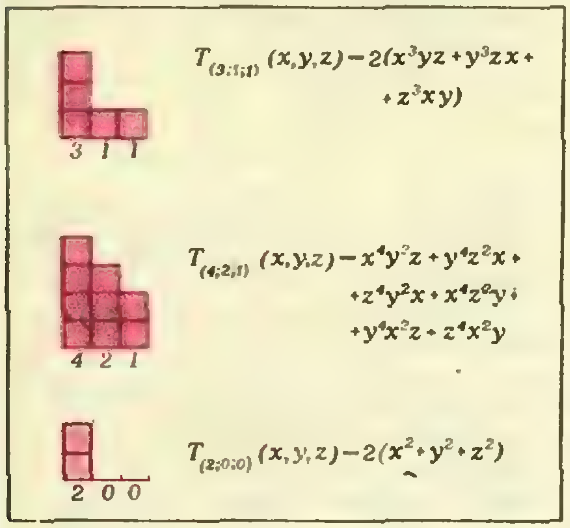

$T_{(3;1;1)}(x,y,z)=2(x^3yz+y^3zx+z^3xy)$
3 1 1
$T_{(4;2;1)}(x,y,z)=x^4y^2z+y^4z^2x+z^4y^2x+x^4z^2y+y^4x^2z+z^4x^2y$
4 2 1
$T_{(2;0;0)}(x,y,z)=2(x^2+y^2+z^2)$
2 0 0

Рис. 2.

порядке; получим, например, такой одночлен $y^k x^j z^i$, и так далее (рис. 1). (Нетрудно сосчитать, сколько всего разных одночленов у нас получится. В первый квадрат можно поместить любую из трех букв x, y, z — это дает три варианта; во второй квадрат — любую из двух оставшихся букв, так что всего имеется $3 \cdot 2=6$ вариантов.) Затем сложим все написанные одночлены; получившийся многочлен от трех переменных x, y, z обозначим через $T_{(k,j,i)}(x,y,z)$, или $T_\alpha(x,y,z)$, или просто T_α (T — от слова «таблица»). Этот многочлен будет, как говорят, ***симметрическим*** — он не меняется при любых перестановках переменных. Степень каждого его одночлена равна $s=k+j+i$.

Например,

$$T_{(2;1;0)}(x,y,z)=x^2y+y^2x+z^2x+x^2z+y^2z+z^2y;$$

$$T_{(3;1;1)}(x,y,z)=x^3yz+y^3xz+z^3xy+x^3zy+y^3zx+z^3yx=2(x^3yz+y^3zx+z^3xy);$$

$$T_{(2;2;2)}(x,y,z)=6x^2y^2z^2.$$

Последние два примера показывают, что когда среди показателей есть равные, в многочлене T_α можно привести подобные члены и записать его короче.

Если набор показателей $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ состоит из n чисел, то надо нарисовать таблицу с n квадратами и взять n переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$. При этом в многочлене $T_\alpha(x_1,\dots,x_n)$ до приведения подобных будет $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ одночленов.

Итак, каждому набору целых чисел $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)$, где $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant 0$ соответствует многочлен T_α — «симметризация» одночлена с показателями $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

Будем каждый такой набор α изображать в виде лесенки из n ступенек: высота каждой ступеньки равна соответствующему показателю, ширина — единице. Такую лесенку удобно рисовать на клетчатой бумаге; общее число клеточек — «кирпичей» 1×1, из которых состоит лесенка, равно $s=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ — степени многочлена T_α. На рисунке 2 изображены лесенки, соответствующие некоторым из многочленов T_α, встречающихся в наших неравенствах.

Научное название этих лесенок, которые оказываются полезными в разных задачах комбинаторики, алгебры и анализа — «диаграммы Юнга» (см. [3]).

Упражнение 2. Напишите многочлены T_α и нарисуйте соответствующие им лесенки для следующих наборов α: (3, 2); (3, 2, 1); (3, 3, 0, 0); (4, 1, 1, 0); (5, 0, 0, 0, 0); (1, 1, 1, 1, 1).

Сравнение диаграмм Юнга

На рисунке 3 изображены пары лесенок, соответствующие неравенствам (1)—(6) из введения. Мы видим, что бóльшему из двух многочленов соответствует более крутая лесенка: вторую, более пологую, можно получить из первой, свалив несколько кирпичей направо — вниз (см. рис. 4). Сформулируем точнее, что означают здесь слова «более крутая»,— сначала для лесенок из трех ступеней.

Пусть $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ и $\beta=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ — два набора целых чисел с одинаковой суммой $s=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$; $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant 0$ и $\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\beta_3\geqslant 0$). Будем считать, что $\alpha>\beta$ (α *мажорирует* β), если выполнено такое условие:

β можно получить из α, проделав несколько раз (быть может,

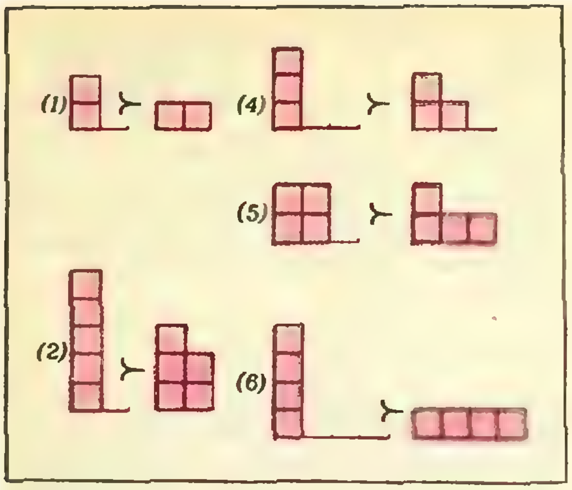


Рис. 3.

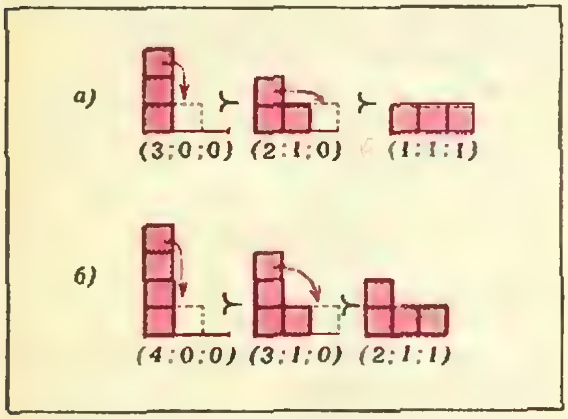


Рис. 4.

один раз или ни одного) операцию

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (k,i,j) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (k-1,j+1,i) & (k-1,j,i+1) & (k,j-1,i+1) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Этому условию можно придать и другую, эквивалентную форму: $\alpha \succ \beta$, если выполнены условия

$$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant \beta_1, \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant \beta_1+\beta_2, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3. \end{cases} \qquad (**)$$

Аналогично, для невозрастающих наборов целых неотрицательных чисел $\alpha=(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$, и $\beta=(\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ будем писать $\alpha \succ \beta$, если

$$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant \beta_1, \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant \beta_1+\beta_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1} \geqslant \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{n-1}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n. \end{cases}$$

Например, $(4;\ 2;\ 1) \succ (3;\ 2;\ 2)$, поскольку $4 \geqslant 3$, $4+2 \geqslant 3+2$, $4+2+1=3+2+2$.

Отношение $\succ$ между наборами аналогично отношению порядка между числами: $\alpha \succ \alpha$ для любого α; если $\alpha \succ \beta$, $\beta \succ \gamma$, то $\alpha \succ \gamma$. Однако порядок между наборами лишь частичный — бывает, что два набора с одинаковой суммой не сравнимы (см. упражнение 6).

Упражнения

3. Проверьте, что для пар диаграмм Юнга на рис. 3 выполнены условия (*) и (**).

4. Докажите, что условия (*) и (**) эквивалентны (то есть если выполнены неравенства (**), то набор β можно получить из α «сваливанием кирпичей», и обратно).

5. Нарисуйте все лесенки из $s=4$ кирпичей в порядке убывания, начиная от самой крутой (4; 0; 0; 0) и кончая самой пологой (1; 1; 1; 1); то же — для лесенок из 5 кирпичей.

6. а) Проверьте, что диаграммы Юнга (4; 1; 1) и (3; 3; 0) не сравнимы,— ни одна из них не мажорирует другую. Есть ли еще такие несравнимые наборы с суммой 6?

б) Найдите все такие пары наборов для $s=7$.

Теорема Мюрхеда

Теперь все готово для формулировки основной теоремы.

Пусть $\alpha=(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ — два набора показателей с одинаковой суммой. Если $\alpha \succ \beta$, то при всех неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$T_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Обратно, если выполнено такое неравенство, то $\alpha \succ \beta$.

Мы не будем приводить формального доказательства теоремы в общем виде (его можно найти в книгах [1], [2] — вторая из них целиком посвящена различным вариантам отношения «мажоризации», его применениям и обобщениям), вместо этого опишем его основные идеи и продемонстрируем их на конкретных примерах.

Доказательство второй части утверждения теоремы — необходимости условия $\alpha \succ \beta$ — вытекает из того простого факта, что из двух многочленов от одной переменной t (с положительными старшими коэффициентами) при больших значениях t больше тот, у которого больше степень (см. упражнение 8).

Доказательство достаточности условия $\alpha \succ \beta$ основано на двух идеях. Первая — «сваливание кирпичей»: два набора $\alpha \succ \beta$ можно соединить цепочкой наборов так, что соседние наборы в этой цепочке отличаются лишь в двух местах, так что от каждого набора к следующему можно перейти, «свалив кирпич» с одной ступеньки на другую на соответствующей лесенке. Вторая — «симметричная группировка»: разность многочленов для соседних наборов можно записать как сумму (по всем парам переменных x, y) одинаковых групп вида

$$(x^{p+r}y^q+y^{p+r}x^q-x^py^{q+r}-y^px^{q+r})Z$$

(см. рис. 5), где Z — произведение остальных переменных, соответствующих одинаковым показателям в соседних наборах. Последнее вы-

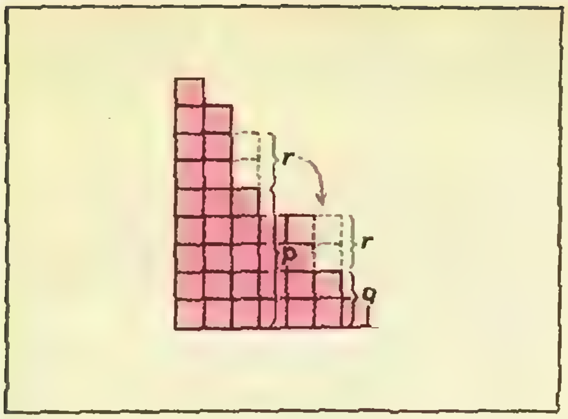


Рис. 5.

ражение раскладывается на множители и, как легко видеть, при $p > q$, $r \geqslant 0$, неотрицательно. (Проверьте!)

Все это станет понятным для тех, кто внимательно, подробно выписывая все выкладки, разберет несколько примеров. Мы приведем два.

Неравенство между средними

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех неотрицательных чисел

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

после переобозначений $a_1=x^3$, $a_2=y^3$, $a_3=z^3$ превращается в неравенство (4), которое уже упоминалось выше. Покажем, как оно доказывается по способу Мюрхеда. Глядя на рисунок 4 а), мы видим, что нужно доказать два неравенства:

$$T_{(3;\,0;\,0)}(x, y, z) \geqslant T_{(2;\,1;\,0)}(x, y, z) \geqslant T_{(1;\,1;\,1)}(x, y, z).$$

Рассмотрим первое из них и составим разность

$$R_1 = T_{(3;\,0;\,0)}(x, y, z) - T_{(2;\,1;\,0)}(x, y, z) = 2(x^3+y^3+z^3) - x^2y - y^2z - z^2x - x^2z - y^2x - z^2y.$$

Сгруппируем теперь слагаемые по четыре по следующему принципу: для каждой пары переменных в одну группу включаются слагаемые, в которых показатели при этих переменных меняются с (3, 0) на (2, 1) (а общий показатель в наборах здесь 0 на последнем месте). Получим

$$R_1 = (y^3+z^3-y^2z) + (x^3+y^3-x^2y-y^2x) + (z^3+x^3-z^2x-x^2z) = (y^2-z^2)(y-z) + (x^2-y^2)(x-y) + (z^2-x^2)(z-x) \geqslant 0$$

при всех неотрицательных x, y, z.

Теперь докажем второе неравенство

$$R_2 = T_{(2;\,1;\,0)}(x, y, z) - T_{(1;\,1;\,1)}(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2z + z^2y - 6xyz.$$

Здесь в показателях общая единица на втором месте, а (2; 0) превращается в (1, 1). В соответствии с этим, получим:

$$R_2 = x(y^2+z^2-2yz) + y(z^2+x^2-2zx) + z(y^2+z^2-2yz) = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geqslant 0.$$

Это и доказывает неравенство (4).

Решение задачи M762.

В этой задаче (из «Задачника «Кванта» № 9, 1982) требовалось для положительных a, b, c доказать неравенства

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Читатели предложили несколько различных методов их решения. Один из них — способ Мюрхеда (к другим мы надеемся вернуться в одном из следующих номеров «Кванта»). Умножив данные неравенства на $2abc$, мы приведем их к такому «мюрхедовскому» виду:

$$2(a^4+b^4+c^4) \geqslant a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c. \qquad (7)$$

$$a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c \geqslant 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab). \qquad (8)$$

Соответствующие диаграммы Юнга изображены на рисунке 4, *б*. Разность левой и правой части каждого неравенства можно записать, как и выше, в виде суммы трех групп по четыре одночлена. Экономя место, мы запишем только одну группу — две другие получаются заменой букв a, b, c на b, c, a и c, a, b.

Доказательство (7):

$$(a^4+b^4-a^3b-b^3a) + \ldots = (a^3-b^3)(a-b) + \ldots \geqslant 0.$$

Доказательство (8):

$$(a^3b+c^3b-a^2cb-c^2ab) + \ldots = b(a^2-c^2)(a-c) + \ldots \geqslant 0.$$

Тем самым, задача M762 решена.

Еще несколько упражнений и задач для исследования

7. Выпишите все неравенства Мюрхеда для многочленов степени 4.

8. а) Пусть $T_{(\alpha_1;\,\alpha_2;\,\alpha_3)}(x,y,z) \geqslant T_{(\beta_1;\,\beta_2;\,\beta_3)}(x,y,z)$ для всех неотрицательных x,y,z. Докажите, что тогда выполнены неравенства (**). (Указание. Рассмотрите несколько случаев: $x=y=z=t$; $x=y=t$, $z=1$; $x=t$, $y=z=1$ и сравните степени полученных многочленов от t.)

9. Докажите следующие неравенства (для неотрицательных x, y, z, v, w):

а) $x^4y^2z + y^4x^2z + z^4yx^2 + x^4z^2y + z^4x^2y \geqslant 2(x^3y^2z^2 + y^3z^2x^2 + z^3x^3y^2)$;

б) $x^5+y^5+z^5 > x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$;

в) $x^3+y^3+z^3+v^3 > xyz + xyv + xzv + yzv$.

10. Выведите из теоремы Мюрхеда неравенство для средних арифметического и геометрического n неотрицательных чисел.

Сколько «кирпичей» нужно свалить, чтобы от набора $(n, 0, 0, \ldots, 0)$ из n чисел перейти к набору $(1, 1, \ldots, 1)$?

11. Сформулируйте и докажите теорему Мюрхеда *для любых неотрицательных* (*не обязательно целых*) показателей.

12. Для некоторых наборов показателей (с четной суммой s) неравенство, о котором идет речь в теореме Мюрхеда, верно для всех, а не только для неотрицательных значений переменных. Постарайтесь описать все такие случаи.

Литература

1. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. *Неравенства* — М.: ИЛ, 1948.

2. Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* — М.: Мир, 1983.

3. *Заочные математические олимпиады* (задачи 5—9). — М.: Наука, 1981.

Квант для младших школьников

Задачи

1. У меня замечательный номер телефона: первые три цифры одинаковы, остальные четыре цифры тоже одинаковы. Более того, сумма всех цифр номера равна двузначному числу, первая цифра которого совпадает с первой цифрой номера моего телефона, а последняя — с последней. Найдите этот семизначный номер.

2. Решите следующий числовой ребус:

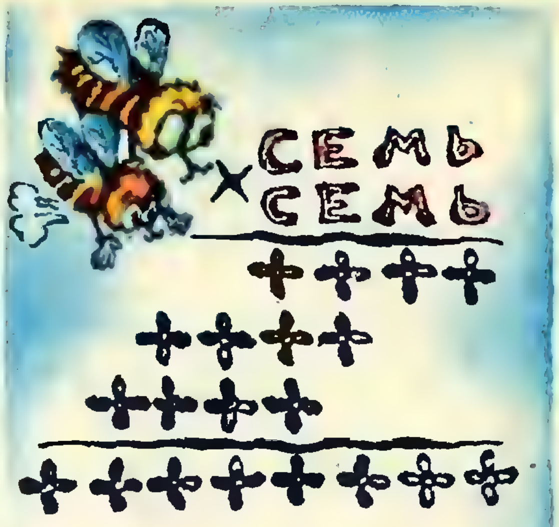
```
  ×СЕМЬ
   СЕМЬ
   ****
  ****
 ****
********
```

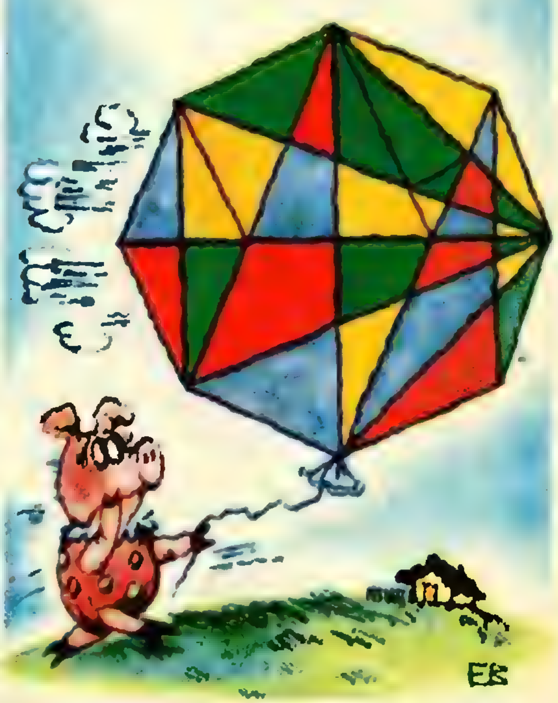
3. На круглом столе лежат 11 шашек: 5 черных и 6 белых. Пятеро сидящих за столом ребят играют в следующую игру. Сначала каждый берет по две шашки, потом начинающий берет оставшуюся шашку. Если у него оказываются все три шашки одинакового цвета, то он выиграл и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе две шашки одинакового цвета, а третью передает партнеру справа. Если у того окажутся все шашки одинакового цвета, то выиграл он, если нет, то он поступает аналогично предыдущему и т. д. Может ли так случиться, что каждый сделает не меньше двух ходов?

4. Попросите товарища стать спиной к стене, прислонив к стене пятки, а потом попытаться достать пальцами рук пальцы ног, не сгибая ноги в коленях. Наверняка это ему не удастся сделать. Почему?

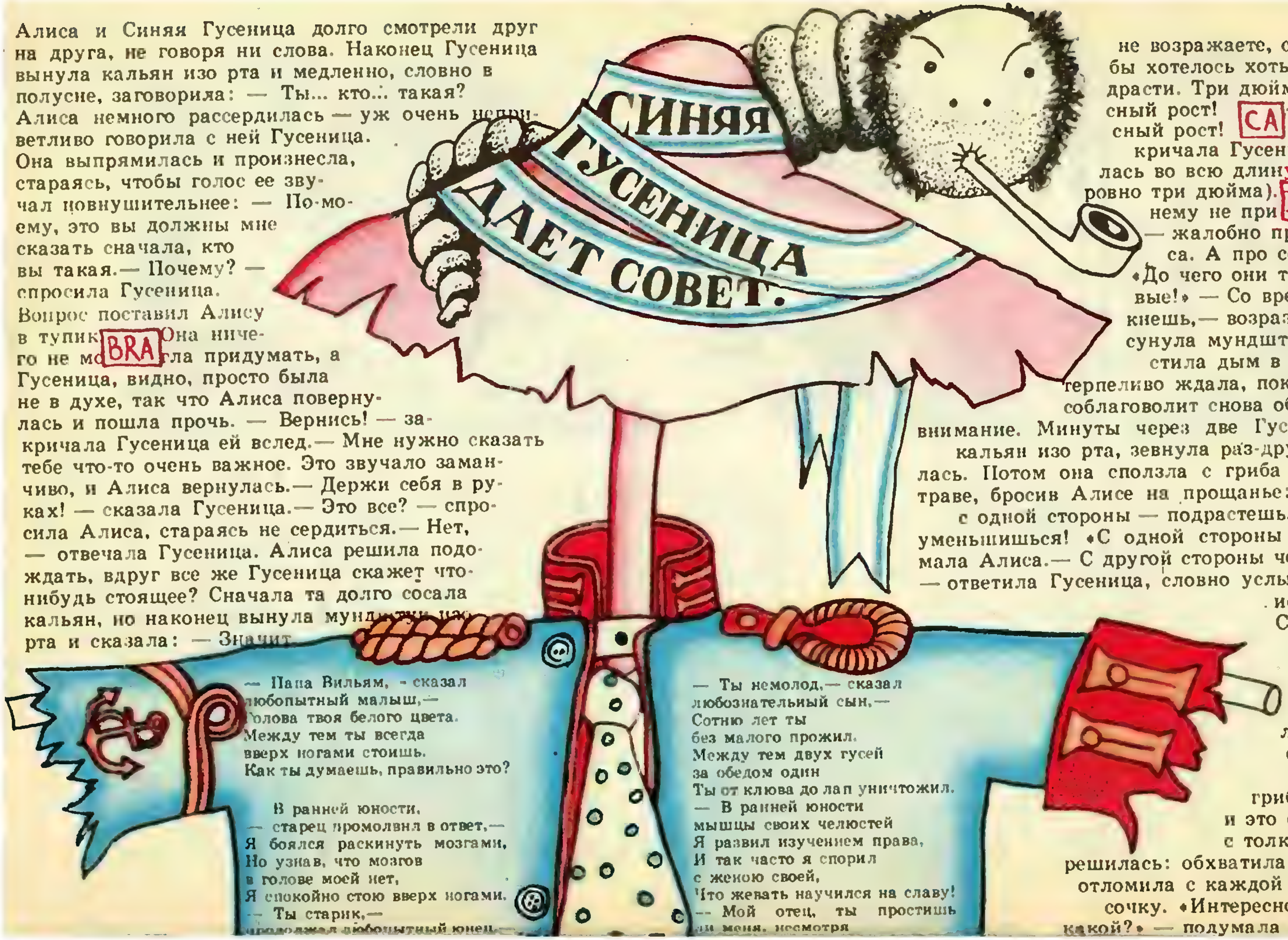
5. Правильный восьмиугольник разделен на части, которые раскрашены так, как на рисунке. Докажите, что сумма площадей, закрашенных каждым цветом, одна и та же.

Эти задачи нам предложили:
Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов, А. П. Савин, С. С. Кротов, В. В. Произволов





СИНЯЯ ГУСЕНИЦА ДАЕТ СОВЕТ.



Алиса и Синяя Гусеница долго смотрели друг на друга, не говоря ни слова. Наконец Гусеница вынула кальян изо рта и медленно, словно в полусне, заговорила: — Ты... кто... такая? Алиса немного рассердилась — уж очень неприветливо говорила с ней Гусеница. Она выпрямилась и произнесла, стараясь, чтобы голос ее звучал повнушительнее: — По-моему, это вы должны мне сказать сначала, кто вы такая.— Почему? — спросила Гусеница. Вопрос поставил Алису в тупик BRA Она ничего не могла придумать, а Гусеница, видно, просто была не в духе, так что Алиса повернулась и пошла прочь. — Вернись! — закричала Гусеница ей вслед.— Мне нужно сказать тебе что-то очень важное. Это звучало заманчиво, и Алиса вернулась.— Держи себя в руках! — сказала Гусеница.— Это все? — спросила Алиса, стараясь не сердиться.— Нет, — отвечала Гусеница. Алиса решила подождать, вдруг все же Гусеница скажет что-нибудь стоящее? Сначала та долго сосала кальян, но наконец вынула мундштук изо рта и сказала: — Значит

— Папа Вильям, — сказал
любопытный малыш,—
Голова твоя белого цвета.
Между тем ты всегда
вверх ногами стоишь.
Как ты думаешь, правильно это?

В ранней юности,
— старец промолвил в ответ,—
Я боялся раскинуть мозгами,
Но узнав, что мозгов
в голове моей нет,
Я спокойно стою вверх ногами.
— Ты старик,—
продолжал любопытный юнец,—

— Ты немолод,— сказал
любознательный сын,—
Сотню лет ты
без малого прожил.
Между тем двух гусей
за обедом один
Ты от клюва до лап уничтожил.
— В ранней юности
мышцы своих челюстей
Я развил изучением права,
И так часто я спорил
с женою своей,
Что жевать научился на славу!
— Мой отец, ты простишь
ли меня, несмотря

не возражаете, сударыня, мне бы хотелось хоть капельку подрасти. Три дюйма такой ужасный рост! CA — Это прекрасный рост! — сердито закричала Гусеница и вытянулась во всю длину. (В ней было ровно три дюйма). DA BRA Но я к нему не привыкла! — жалобно протянула Алиса. А про себя подумала: «До чего они тут все обидчивые!» — Со временем привыкнешь,— возразила Гусеница, сунула мундштук в рот и пустила дым в воздух. Алиса терпеливо ждала, пока Гусеница не соблаговолит снова обратить на нее внимание. Минуты через две Гусеница вынула кальян изо рта, зевнула раз-другой и потянулась. Потом она сползла с гриба и скрылась в траве, бросив Алисе на прощанье: — Откусишь с одной стороны — подрастешь, а с другой — уменьшишься! «С одной стороны чего? — подумала Алиса.— С другой стороны чего?» — Гриба, — ответила Гусеница, словно услышав вопрос, и исчезла из виду. С минуту Алиса задумчиво смотрела на гриб, пытаясь определить, где у него одна сторона, а где — другая. гриб был круглый и это совсем сбило ее с толку. Наконец она решилась: обхватила гриб руками и отломила с каждой стороны по кусочку. «Интересно, какой из них какой?» — подумала она и откусила изменилась?

— Да, сударыня, — отвечала Алиса,— и это очень грустно. То одного становлюсь роста, то другого и ничего не помню.

— Ничего не помнишь? — спросила Гусеница.

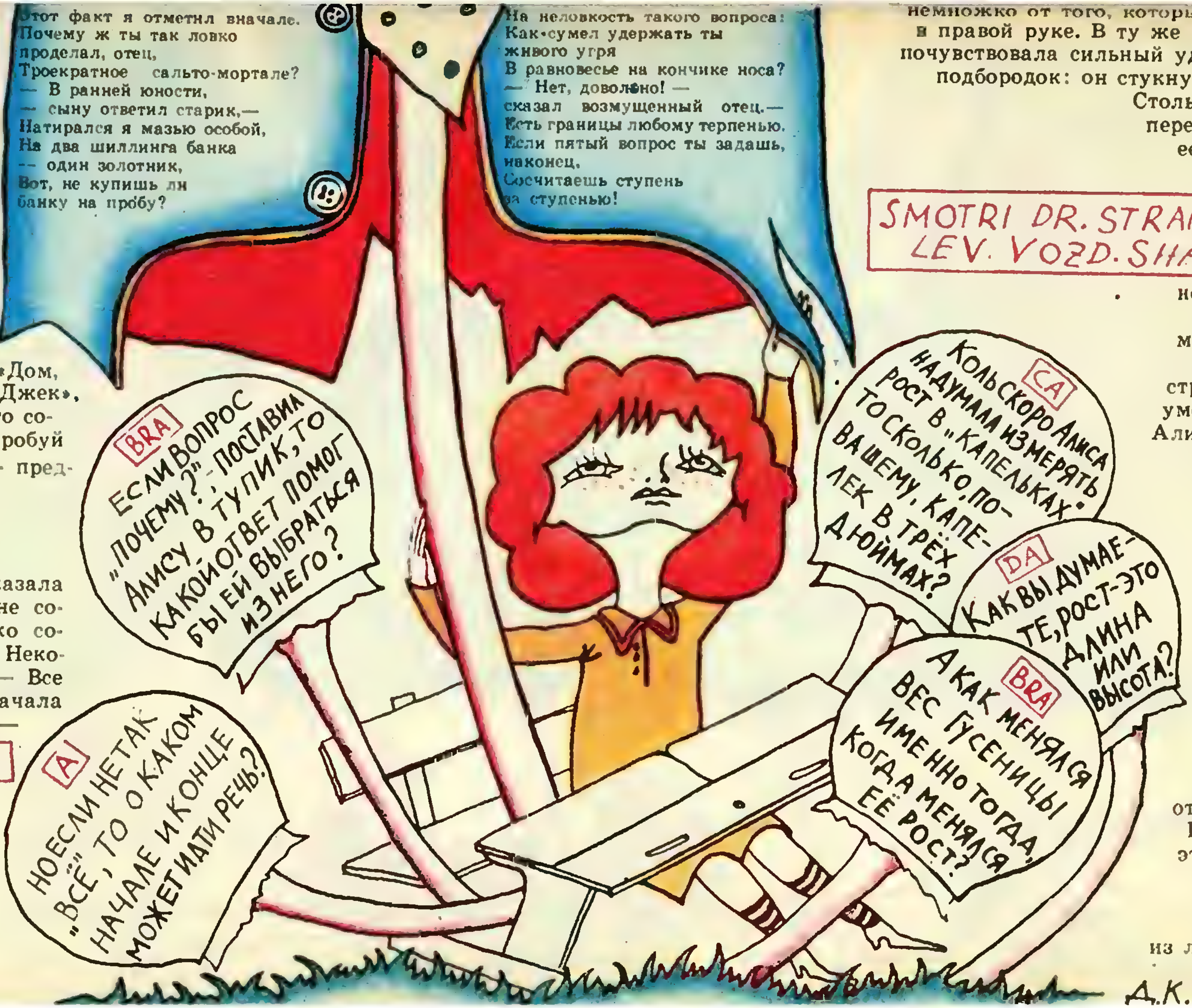
— Ничего! — сказала с тоской Алиса.— Я пробовала прочитать «Дом, который построил Джек», а получилось что-то совсем другое.— Попробуй «Папу Вильяма»,— предложила Гусеница. Алиса начала. (Прочти и ты стихи на мундире...)

— Все неверно,— сказала Гусеница. — Да, не совсем верно,— робко согласилась Алиса.— Некоторые слова не те.— Все не так, от самого начала и до самого конца,— строго проговорила Гусеница. Наступило молчание.— А какого роста ты хочешь быть? — спросила наконец Гусеница.— Ах, все равно,— быстро сказала Алиса.

— Если вы

Этот факт я отметил вначале.
Почему ж ты так ловко
проделал, отец,
Троекратное сальто-мортале?
— В ранней юности,
— сыну ответил старик,—
Натирался я мазью особой,
На два шиллинга банка
— один золотник,
Вот, не купишь ли
банку на пробу?

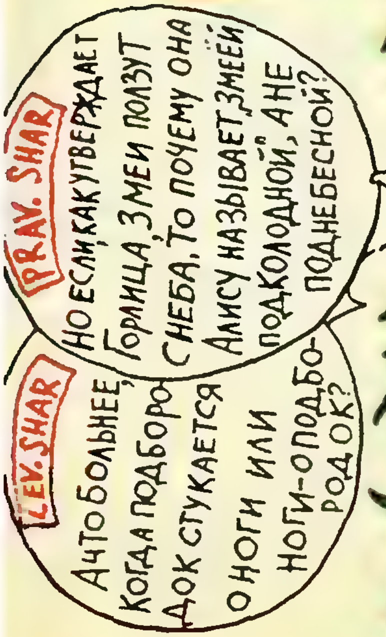
На неловкость такого вопроса:
Как сумел удержать ты
живого угря
В равновесье на кончике носа?
— Нет, довольно! —
сказал возмущенный отец.—
Есть границы любому терпенью.
Если пятый вопрос ты задашь,
наконец,
Сосчитаешь ступень
за ступенью!


A
A
НО ЕСЛИ НЕ ТАК „ВСЁ", ТО О КАКОМ НАЧАЛЕ И КОНЦЕ МОЖЕТ ИДТИ РЕЧЬ?
BRA
ЕСЛИ ВОПРОС „ПОЧЕМУ?" ПОСТАВИЛ АЛИСУ В ТУПИК, ТО КАКОЙ ОТВЕТ ПОМОГ БЫ ЕЙ ВЫБРАТЬСЯ ИЗ НЕГО?
CA
КОЛЬ СКОРО АЛИСА НАДУМАЛА ИЗМЕРЯТЬ РОСТ В „КАПЕЛЬКАХ", ТО СКОЛЬКО, ПО-ВАШЕМУ, КАПЕЛЕК В ТРЁХ ДЮЙМАХ?
DA
КАК ВЫ ДУМАЕТЕ, РОСТ - ЭТО ДЛИНА ИЛИ ВЫСОТА?
BRA
А КАК МЕНЯЛСЯ ВЕС ГУСЕНИЦЫ ИМЕННО ТОГДА, КОГДА МЕНЯЛСЯ ЕЁ РОСТ?
SMOTRI DR. STRANITSU
LEV. VOZD. SHAR
Д.К.

немножко от того, который держала
в правой руке. В ту же минуту она
почувствовала сильный удар снизу
подбородок: он стукнулся о ноги
Столь внезапная
перемена очень
ее напугала

нельзя было
терять ни
минуты, ибо
она
стремительно
уменьшалась
Алиса взялась
за другой
кусок
но
по-
дбо-
ро-
док
ее так
прочно
прижало
к
ногам
что она
никак
не могла
открыть рот.
Наконец ей
это удалось
и она
откусила
немного
из левой руки.

— Ну вот, голова наконец освободилась! — радостно воскликнула Алиса. Впрочем, радость ее тут же сменилась тревогой: куда-то пропали плечи. Она взглянула вниз, но увидела только шею невероятной длины, которая возвышалась, словно огромный шест над зеленым морем листвы.— Что это за зелень? — промолвила Алиса.— И куда девались мои плечи? Бедные мои ручки, где вы? Почему я вас не вижу? С этими словами она пошевелила руками, но увидеть их все равно не смогла. Убедившись, что поднять руки к голове не удастся, Алиса решила нагнуть к ним голову и с восторгом убедилась, что шея у нее словно змея, гнется в любом направлении. Алиса выгнула шею изящным зигзагом, готовясь нырнуть в лес (ей уже стало ясно, что это верхушки деревьев, под которыми она только что стояла), как вдруг послышалось громкое шипение. Она вздрогнула и отступила. Прямо в лицо ей, яростно бия крыльями, кинулась горлица.— Змея! — крикнула Горлица.— Никакая я не змея! — возмутилась Алиса.— Оставьте меня в покое! — А я говорю — змея! — повторила Горлица несколько сдержаннее. — Стоило мне устроиться на самом высоком дереве,— продолжала Горлица громче и громче и наконец срываясь на крик,— стоило мне подумать, что наконец-то от них избавилась, как нет! Они тут как тут! Лезут на меня прямо с неба! У-у! Змея подколодная!


PRAV. SHAR
НО ЕСЛИ, КАК УТВЕРЖДАЕТ ГОРЛИЦА, ЗМЕИ ПОЛЗУТ С НЕБА, ТО ПОЧЕМУ ОНА АЛИСУ НАЗЫВАЕТ "ЗМЕЕЙ ПОДКОЛОДНОЙ", А НЕ ПОДНЕБЕСНОЙ?
LEV. SHAR
А ЧТО БОЛЬНЕЕ, КОГДА ПОДБОРОДОК СТУКАЕТСЯ О НОГИ ИЛИ НОГИ — О ПОДБОРОДОК?

SMOTRI PRAV. VOZD. SHAR

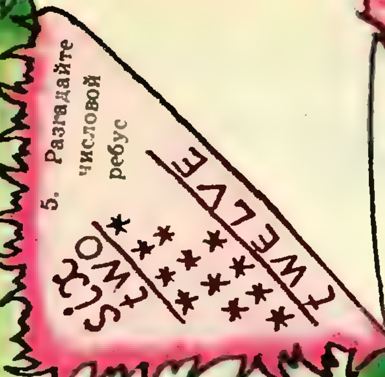
— Никакая я не змея! — сказала Алиса.— Я просто... просто...— Ну скажи, скажи, кто ты такая? — подхватила Горлица.— Сразу видно, хочешь что-то выдумать.— Я... я... маленькая девочка,— сказала Алиса не очень уверенно, вспомнив, сколько раз она менялась за этот день.— Ну уж, конечно,— ответила Горлица с величайшим презрением.— Видала я на своем веку много маленьких девочек, но с такой шеей — ни одной! Нет, меня не проведешь!

Самая настоящая змея — вот ты кто! Ты мне еще скажешь, что ни разу не пробовала яиц.— Нет, почему же, пробовала,— отвечала Алиса. (Она всегда говорила правду). — Девочки, знаете, тоже едят яйца.— Я этому не верю,— сказала Горлица.— Но если это так, тогда они тоже змеи! Больше мне нечего сказать. Мысль эта так поразила Алису, что она замолчала. А Горлица прибавила:

— Знаю, знаю, ты яйца ищешь! А девочка ты или змея — мне это безразлично.— Но мне это совсем не безразлично,— поспешила возразить Алиса.— И, по правде сказать, яйца я не ищу! А если даже и искала б, то ваши мне все равно бы не понадобились. Я сырые не люблю! — Ну, тогда убирайся!— сказала хмуро Горлица и снова уселась на свое гнездо. А Алиса стала спускаться на землю, что оказалось совсем не просто: шея то и дело запутывалась среди ветвей. Немного спустя Алиса вспомнила, что все еще держит в руках кусочки гриба, и принялась понемножку откусывать сначала от одного, а потом от другого, то вырастая, то уменьшаясь, пока наконец не приняла прежнего своего вида. Поначалу это показалось ей очень странным, так как она успела уже отвыкнуть от собственного роста, но вскоре она освоилась и начала опять беседовать сама с собой.

— Ну вот, половина задуманного сделана! Как удивительны все эти перемены! Не знаешь, что с тобой будет в следующий миг... Ну ничего, сейчас у меня рост опять прежний. А теперь надо попасть в тот сад. Хотела бы я знать, как это сделать? Тут она вышла на поляну, где стоял маленький домик, не более четырех футов вышиной. «Интересно, кто там живет? — подумала Алиса.— Но мне нельзя туда идти, я слишком большая, перепугаю их до смерти!» Она принялась за гриб и не подходила к дому до тех пор, пока не уменьшилась до девяти дюймов.

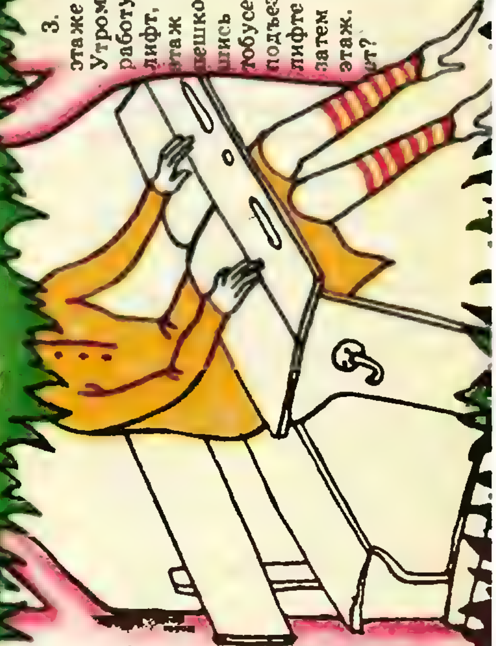
5. Разгадайте числовой ребус



4. Улитка ползет по прямой дорожке. В течение 6 минут за ней постоянно наблюдают несколько человек. Каждый наблюдает ровно одну минуту, а затем уходит. Все наблюдатели сообщили, что за время их наблюдения улитка проползла ровно один метр.

Какое наибольшее расстояние могла преодолеть улитка?

3. Некто живёт на 1 этаже 16 этажного дома. Утром, отправляясь на работу, он входит в лифт, спускается на 1-й этаж и до работы идет пешком. Вечером, вернувшись с работы на автобусе, он входит в свой подъезд, поднимается на лифте до 14 этажа, а затем пешком — на свой этаж. Зачем он это делает?



2. Два животных, A и B, находятся на огромной гладкой равнине. Если A хочет схватить B, а B стремится убежать от A и B расположен от A в 20 метрах, то A всегда может схватить B. В то же время, если B хочет схватить A, а A стремится убежать от B и A находится в 20 метрах от B, то B всегда может схватить A. Что это за животные и как это может быть?

1. Гусеница длиной 5 дюймов ползет по вертикальному стволу дерева, стремясь добраться до зеленой ветки, находящейся на высоте 100 дюймов. За день она поднимается на 20 дюймов, ночью спит и сползает под действием собственной тяжести на 15 дюймов. За сколько дней она доберется до зеленой ветки?

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М931, М932» или «Ф943». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи по математике этого номера предлагались на Московских городских олимпиадах последних лет. Задачи 1985 года, в котором олимпиада отметила свой 50-летний юбилей, будут помещены в «Кванте» № 9.

Задачи

М931 — М935; Ф943 — Ф947

М931. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Известно, что длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

А. Н. Дранишников

М932. В квадратной клетке со стороной 1 м находится анаконда длиной 10 м. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он в любой момент может одним выстрелом прострелить анаконду сразу в 6 местах. Не преувеличивает ли барон? (Анаконду можно считать произвольной ломаной длины 10, расположенной внутри квадрата 1×1.)

С. Б. Гашков

М933. 13 рыцарей из k разных кланов ($1 < k < 13$) сидят за круглым столом. Каждый держит золотой или серебряный кубок, причем золотых кубков ровно k. Король Артур приказал рыцарям одновременно передать кубки своим соседям справа, потом сделать то же самое еще раз и т. д. Докажите, что в некоторый момент найдутся два рыцаря из одного клана, в руках у которых золотые кубки.

А. А. Болотов

М934.* В пространстве расположено $2n$ ($n \geqslant 2$) точек (так, что никакие 4 не лежат в одной плоскости) и проведено n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведенные отрезки образуют а) хотя бы один треугольник; б) не менее n треугольников.

М935. (Задача о гайке.) Если внутри правильного $2n$-угольника со стороной a и центром O поместить произвольным образом правильный $2n$-угольник со стороной $a/2$, то он накроет точку O. Докажите это утверждение: а) для $n=2$, б)* для $n=3$, в)* для любого натурального $n > 1$.

С. Б. Гашков

Ф943. Небольшое тело падает с огромной высоты на землю. Считая удар тела о землю абсолютно упругим, определить ускорение тела сразу после того, как оно отскочит от земли.

А. Г. Шихкеримов

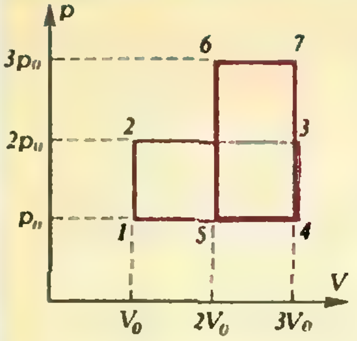


Рис. 1.

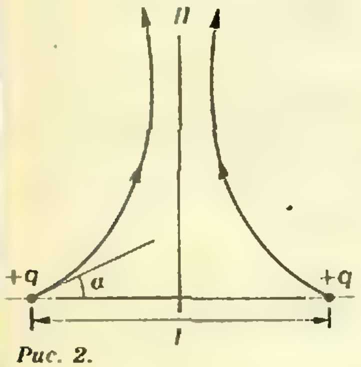


Рис. 2.

Ф944. На твердое тело, движущееся поступательно по шероховатой горизонтальной поверхности, в момент времени $t_0=0$, когда скорость тела равна v_0, начинает действовать сила $F(t)$, направленная все время вдоль вектора $\vec{v}_0$ и возрастающая со временем. Через время t скорость тела оказывается равной v_t, причем $v_t=5$ м/с, если $v_0=1$ м/с, и $v_t=13$ м/с, если $v_0=10$ м/с. Определить зависимость $v_t=f(v_0)$ при всех возможных v_0.

Р. Л. Мкртчян, О. М. Худавердян

Ф945. Определите отношение η_1/η_2 коэффициентов полезного действия двух циклических процессов, проведенных с идеальным газом (рис. 1): первый процесс 1-2-3-4-1, второй процесс 5-6-7-4-5.

Ф946. Два одинаковых точечных заряда $q>0$ находятся на расстоянии l друг от друга. На какое минимальное расстояние «подойдет» к плоскости симметрии II (рис. 2) силовая линия, выходящая *из левого заряда под углом α к прямой, соединяющей* заряды? Под каким углом к плоскости симметрии будет расположена эта линия при удалении на большое расстояние от зарядов?

С. С. Кротов

Ф947. Оболочка космической станции представляет собой зачерненную сферу, температура которой за счет работы аппаратуры внутри станции равна $T=500$ К. Какой будет температура оболочки, если станцию окружить тонким черным сферическим экраном почти такого же радиуса, как оболочка? Количество тепла, излучаемого с единицы площади поверхности, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры.

А. И. Буздин

Problems

M931 — M935; P943 — P947

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not

M931. The incircle of triangle ABC touches sides AB, BC and CA at the points C_1, A_1, B_1 respectively. It is known that the segments AA_1, BB_1, CC_1 are of equal length. Prove that ABC is equilateral.

A. N. Dranishnikov

M932. A 10 *meter long anaconda* lives in a square cage of side 1 meter. Baron Münhausen claims that he can shoot through the anaconda in 6 places anytime with a single shot. Is the baron exaggerating? (The anaconda may be viewed as an arbitrary polygonal line of length 10 in a 1 by 1 square.)

S. B. Gashkov

M933. 13 knights from k different clans ($1<k<13$) sit at the Round Table. Each holds a gold or silver cup, the number of gold ones

all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 15 th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN RHYSICS (or MATHEMATICS).

being k. King Arthur orders all the knights to pass the cups to their neighbours to the right simultaneously, and then to continue this procedure. Prove that at some moment it will be possible to find two knights from the same clan both holding gold cups.

A. A. Bolotov

M934.* There are $2n$ ($n \geqslant 2$) points (no 4 of which are coplanar) in space and n^2+1 line segments joining them. Prove that the segments constitute a) at least one triangle; b) no less than n triangles.

M935 (the bolt problem). A regular polygon of $2n$ sides of length $a/2$ placed inside another regular $2n$-gon of side a always covers the centre O of the latter. Prove this for a) $n=2$; b)* $n=3$; c)* for any natural $n>1$.

S. B. Gashkov

P943. A solid body falling from a great height bounces off the ground. Assuming the collision absolutely elastic, determine its acceleration immediately after the bounce.

A. G. Shihkerimov

P944. A small solid, remaining parallel to itself, moves along a rough horizontal surface. At time $t_0=0$, when the velocity of the solid is v_0, a force $F(t)$ directed along v_0 and increasing with time is applied to the solid. At time t the solid aquires the velocity $v_t=5$ m/s, if $v_0=1$ m/s and $v_t=13$ m/s, if $v_0=10$ m/s. Find the dependence $v_t=f(v_0)$ for all possible v_0.

R. L. Mkrtchyan, O. M. Khudaverdyan

P945. Determine the ratio η_1/η_2 of the efficiency coefficients of two cyclic processes involving an ideal gas (sec рис. 1, p. 43), the first process being *1—2—3—4—1*, the second one *5—6—7—4—5*.

P946. Two identical point charges $q>0$ are placed at the distance l from each other. Consider the line of force originating from the left charge and forming the angle α with the line joining the charges (sec рис. 2, p. 43). How near the symmetry plane Π will it approach? What will be the angle between this line of force and the plane Π at points far away from the charges?

S. S. Krotov

P947. The envelope of a space station is a blackened sphere, whose temperature (due to the work of the apparatus inside the sphere) is $T=500$ K. What will the temperature of the envelope be if the station is surrounded by a thin black spherical screen of radius slightly larger than that of the envelope? The quantity of heat irradiated by a unit surface is proportional to the fourth power of absolute temperature.

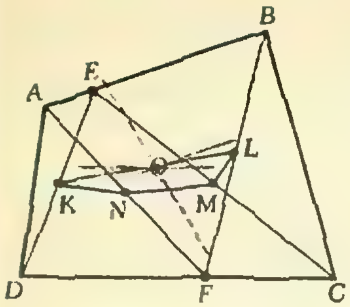
A. I. Buzdin

Решения задач

М911 — М915; Ф923 — Ф926

М911. *На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F.*

Обозначим середины отрезков AF, BF, CE и DE через N, L, M, K соответственно (см. рисунок). Отрезки LN и KM — средние линии треугольников ABF и CDE, поэтому они имеют общую внутреннюю точку — середину O отрезка EF, равны по длине $AB/2$ и $CD/2$, а угол между ними равен углу α между прямыми AB и CD. Отсюда вытекает, что $KLMN$ — выпуклый четырехугольник



(возможно, вырождающийся в треугольник или отрезок) с диагоналями KM и LN, а его площадь S по известной формуле равна

$$S=\frac{1}{2}KL\cdot MN\cdot\sin\angle KON=\frac{1}{8}AB\cdot CD\cdot\sin\alpha,$$

то есть не зависит от выбора точек E и F.

Из доказательства видно, что утверждение задачи верно и для невыпуклого четырехугольника $ABCD$.

М. В. Старк

◆

М912. *Докажите, что а) многочлен x^2, б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.*

а) Нужное представление нетрудно найти в явном виде:

$$x^2=\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{3}(x^3+3x+1).$$

б) Доказательство проведем индукцией по степени многочлена. Для многочленов нулевой степени (постоянных функций) утверждение задачи очевидно. Пусть оно справедливо для всех многочленов степени меньше n. Произвольный многочлен n-й степени $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_n(x)=ax^n+P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, для которого наше утверждение верно по предположению индукции. Поэтому его достаточно доказать для одночлена ax^n (если утверждение задачи верно для двух многочленов, то оно, очевидно, верно и для их суммы). Ясно, что ax^n — монотонная функция при нечетном n; при четном n существование нужного представления следует из формулы

$$(n+1)x^n=(x+1)^{n+1}-x^{n+1}-Q_{n-1}(x),$$

в которой $(x+1)^{n+1}$ и x^{n+1} — возрастающие функции ($n+1$ нечетно), а для многочлена $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$ утверждение задачи выполняется по предположению индукции.

При четном $n=2k$ можно рассуждать и иначе. По предположению индукции $x^k=P(x)-Q(x)$, где P и Q — монотонно возрастающие многочлены; следовательно,

$$x^{2k}=2P^2(x)+2Q^2(x)-(P(x)+Q(x))^2.$$

Подставляя в формулу пункта а) $P(x)$ вместо x, мы получим представление $P^2(x)$ в виде разности двух возрастающих многочленов. То же самое можно проделать с $Q(x)$ и $P(x)+Q(x)$, что в конечном счете даст нужное представление для x^{2k}.

А. Ю. Вайнтроб, В. Н. Дубровский

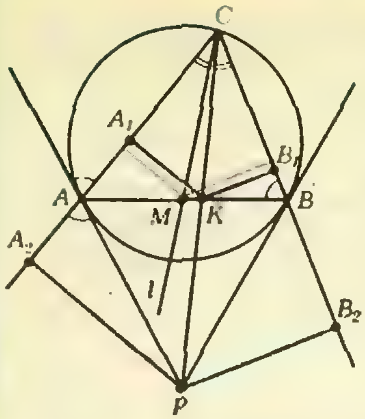
◆

М913. *Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PC*

а) пересекает сторону AB в точке K, делящей ее в отношении $AC^2:BC^2$;

б) симметрична медиане, проведенной из C, относительно биссектрисы угла C треугольника.

а) Воспользуемся тем, что для всех точек прямой, проходящей через вершину угла, отношение расстояний до его сторон (точнее, до прямых, содержащих стороны) будет одним и тем же. В частности, равны отношения KA_1/KB_1 и PA_2/PB_2 расстояний от точек K и P до сторон CA и CB угла ACB (см. рисунок: на нем угол C острый, для тупого угла C рассуждение аналогично). Первое из этих отношений, очевидно, равно $AK\sin\angle A/BK\sin\angle B$ ($\angle A$ и $\angle B$ — углы треугольника ABC). Чтобы



найти второе, заметим, что $\angle PAA_2$ является вертикальным к углу между хордой AC описанной окружности треугольника ABC и касательной к ней в точке A, то есть равен по величине половине дуги AC и, следовательно, $\angle PAA_2 = \angle B$; аналогично, $\angle PBB_2 = \angle A$. Таким образом,

$$\frac{PA_2}{PB_2} = \frac{PA \sin \angle PAA_2}{PB \sin \angle PBB_2} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} \qquad (*)$$

($PA = PB$ по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки). Приравнивая полученные выражения

$$\frac{AK \sin \angle A}{BK \sin \angle B} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A}$$

и пользуясь теоремой синусов $\sin \angle B / \sin \angle A = AC/BC$, получим нужное соотношение:

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

б) Рассмотрим прямую l, симметричную CP относительно биссектрисы угла ACB (см. рисунок). Ясно, что для всех ее точек отношение расстояний до прямых CA и CB обратно такому же отношению для CP, то есть равно $\sin \angle A / \sin \angle B$ (см. (*)). Для точки M, в которой прямая l пересекает сторону AB, это отношение, очевидно, равно $AM \sin \angle A / BM \sin \angle B$. Следовательно, $AM = BM$, то есть CM — медиана треугольника ABC.

В. Н. Дубровский

◆

M914. *На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?*

Ответ: не может. Мы должны доказать, что из тройки (13, 15, 17) с помощью операций, описанных в условии, то есть увеличения одного из чисел на 2 и одновременного уменьшения двух других на 1 (если они положительны), нельзя получить ни одну из троек (45, 0, 0), (0, 45, 0) и (0, 0, 45) ($45 = 13 + 15 + 17$). Как и в большинстве аналогичных задач с отрицательным ответом, для доказательства надо постараться подобрать *инвариант* — величину, определенную на тройках целых чисел ($с$, $б$, $м$) и не меняющуюся при указанных преобразованиях троек, которая бы принимала разные значения для первой тройки и трех последних.

Таким инвариантом является, например, остаток r от деления на 3 разности $с - б$ первых двух чисел тройки ($с$, $б$, $м$).

Действительно, при «смене окраски хамелеонов» числа $с$ и $б$ могут замениться на $с-1$, $б-1$, на $с+2$, $б-1$ или на $с-1$, $б+2$; в первом случае $с - б$ не меняется, в двух других — изменяется на 3, значит, остаток r остается прежним. Остается заметить, что для исходной тройки (13, 15, 17) он равен 1, а для трех последних $r = 0$.

Несложно ответить и на общий вопрос — при каком условии из одной тройки чисел нашими операциями можно получить другую. Поскольку сумма $s = с + б + м$ всех чисел тройки, очевидно, тоже инвариант, мы можем воспользоваться удобной и красивой геометрической интерпретацией нашей задачи: каждую тройку ($с$, $б$, $м$) с заданной суммой s будем изобра-

$$c+б+м=\frac{2S_{AOB}}{AB}+\frac{2S_{BOC}}{BC}+\frac{2S_{COA}}{CA}=\frac{2S_{ABC}}{AB}=s$$

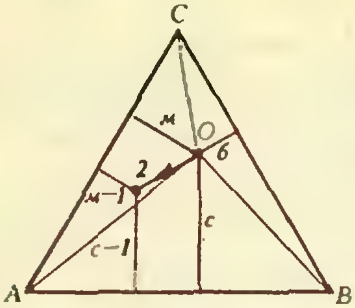


Рис. 1.

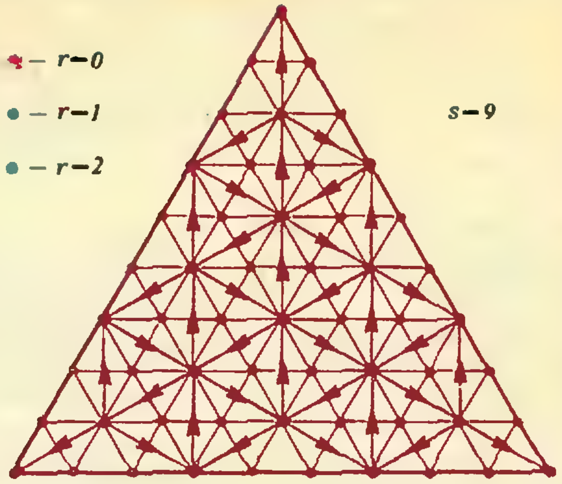


Рис. 2.

жать точкой внутри равностороннего треугольника высоты s, удаленной от его сторон на расстояния c, $б$, $м$ соответственно (рис. 1). При этом каждой нашей операции отвечает сдвиг точки в треугольнике на расстояние 2 перпендикулярно одной из сторон. Разобьем треугольник на s^2 одинаковых правильных треугольников высоты 1 (рис. 2); очевидно, их вершины отвечают всем целочисленным тройкам с заданной суммой s. Возьмем одну из этих вершин, проведем из нее стрелки в те точки, куда ее можно сдвинуть с помощью наших операций, из концов стрелок проведем новые стрелки и т. д. Все эти стрелки образуют еще одну сеть правильных треугольников со стороной 2. Их вершины изображают все тройки чисел, которые можно получить из исходной «перекрашиванием хамелеонов». Легко убедиться, что из любой красной точки за исключением вершин большого треугольника, можно перейти по красным стрелкам в любую другую. Остальные точки аналогичным образом разобьются еще на два класса «связанных» точек (зеленые и синие на рисунке 2; стрелки для них не показаны). Значение инварианта r для всех точек одного класса будет, разумеется, одним и тем же; причем легко проверить, что для красных точек $r=0$, для зеленых — $r=1$, для синих — $r=2$.

Таким образом, из тройки (c, $б$, $м$) можно получить другую тройку (c', $б'$, $м'$) тогда и только тогда, когда в первой тройке хотя бы два числа положительны и значения инвариантов s и r для данных троек совпадают (значения любого другого инварианта будут совпадать уже автоматически; докажите непосредственно, что, например, остаток от деления $м-б$ на 3 выражается через s и r). В частности, если s кратно трем, для всех вершин большого треугольника $r=0$, то есть они достижимы только из точек с $r=0$ (на рисунке 2 — из красных точек); если же s не делится на 3, то в одной из них будет $r=0$, в другой — $r=1$, в третьей — $r=2$, то есть из любой точки (c, $б$, $м$) можно попасть в одну (и только одну) вершину.

В. Г. Ильичев, Н. Б. Васильев

◆

М915.* *Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

Первое решение. Группируя первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства с третьим, а второе — с четвертым, и пользуясь оценкой $xy\leqslant(x+y)^2/4$ при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ (вытекающей из тождества $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$), получим

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+$$

$$+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}\geqslant\frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd)}{(a+b+c+d)^2}=$$

$$=2\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geqslant 2.$$

Второе решение. Положим $x_1=\sqrt{a/(b+c)}$, $x_2=\sqrt{b/(c+d)}$, $x_3=\sqrt{c/(d+a)}$, $x_4=\sqrt{d/(a+b)}$ и $y_1=\sqrt{a(b+c)}$, $y_2=\sqrt{b(c+d)}$, $y_3=\sqrt{c(d+a)}$, $y_4=\sqrt{d(a+b)}$. В силу неравенства Коши — Буняковского, которое доказано на полях,

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$

$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\right)(2ac+2bd+ab+bc+$$

$$+cd+da)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2=(a+b+c+d)^2. \quad (*)$$

Очевидно, $a^2+c^2\geqslant 2ac$, $b^2+d^2\geqslant 2bd$, поэтому

$$(a+b+c+d)^2\geqslant 4ac+4bd+2(ab+bc+cd+da).$$

Подставляя эту оценку в (*), получим требуемое неравенство. Доказанное неравенство является частным случаем неравенства

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2} \quad (\text{при } a_i>0),$$

которое в 1954 году предложил доказать американский математик Шапиро. В нашей задаче $n=4$; случай $n=3$ рассматривался в задачах М182 и М749 «Задачника «Кванта». Вопрос о справедливости этого неравенства при других значениях n оказался довольно трудным и до сих пор не получил полного ответа. В будущем мы рассчитываем вернуться к этой теме.

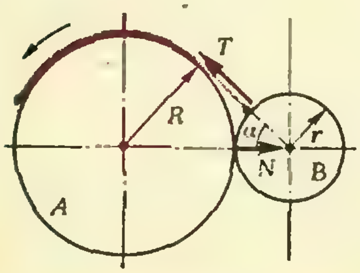
Л. Д. Курляндчик

Неравенство Коши — Буняковского:
для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\boxed{(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\geqslant(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2.}$$

Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что квадратичная функция $P(t)=(x_1+y_1t)^2+\ldots+(x_n+y_nt)^2$ неотрицательна при всех t и записать вытекающее отсюда условие неположительности ее дискриминанта.

Ф923. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два касающихся друг друга диска, скрепленных нерастяжимой нитью (см. рисунок). Диск радиуса R начинает вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, причем скорость вращения линейно возрастает со временем. В некоторый момент диск меньшего радиуса r отрывается от большого диска (перестает его касаться). На какой угол повернется к этому моменту большой диск? Трение между дисками отсутствует. Считать, что вся масса диска сосредоточена в его центре.*



◆

Пусть диск начал вращаться в момент времени $t_0=0$. Тогда в момент времени t угловая скорость диска A равна $\omega_t=\beta t$, где β — постоянное угловое ускорение, с которым вращается диск. С такой же угловой скоростью движется в этот момент центр диска B по окружности радиуса $R+r$. Линейная скорость диска B при этом равна $v_t=\beta t(R+r)$; его центростремительное ускорение — $a_ц=(\beta t)^2(R+r)$, а тангенциальное ускорение — $a_\tau=(v_t)'=\beta(R+r)$.

В плоскости, в которой происходит движение, на диск B действует сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила нормальной реакции со стороны большого диска $\vec{N}$. Запишем уравнение движения диска B в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$T\cos\alpha-N=ma_ц=m(\beta t)^2(R+r),$$

$$T\sin\alpha=ma_\tau=m\beta(R+r).$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{N}{m\beta(R+r)}+\beta t^2.$$

В момент отрыва $N=0$, и

$$\operatorname{ctg}\alpha=\beta t_{отр}^2.$$

Угол φ, на который повернется за время $t_{отр}$ диск A, равен

$$\varphi=\beta\frac{t_{отр}^2}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}.$$

Подставляя выражение для ctg α (см. рисунок), находим:

$$\varphi=\frac{\sqrt{2Rr+r^2}}{2R}.$$

Л. Г. Маркович

Ф924. *В жаркую погоду для быстрого охлаждения воды ее наливают в обросшую льдом формочку, вынутую из морозильной камеры холодильника. Воду «перекатывают» от одного края формочки к другому, потом выливают. Оцените, больше или меньше воды становится при этой операции.*

◆

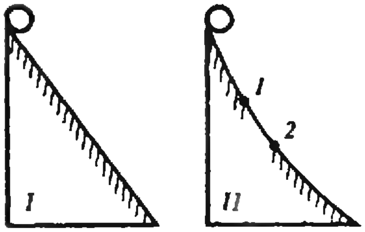
При этой операции возможны следующие процессы: охлаждение и замерзание воды, нагрев и плавление льда, нагрев формочки. Последний процесс заведомо несуществен, так как масса формочки мала по сравнению с массой воды, а теплоемкость алюминия существенно меньше теплоемкости воды.

Если процесс длится долго, то конечная ситуация определяется исходными количествами льда и воды. Поскольку воды обычно больше, чем льда, а охлаждаться ей до замерзания надо на большую разность температур, чем нагреваться льду до плавления, лед согревается и плавится, а вода даже не остывает до нуля и, тем более, не замерзает. (Разумеется, при малом количестве воды она может замерзнуть.) В результате воды становится больше.

Если процесс длится недолго, ситуация сохраняется: температура всей воды в результате перемешивания успевает выровняться, а лед прогреться не успевает, плавятся только его верхние слои. В этом случае вода охлаждается меньше.

Л. А. Ашкинази

Ф925. *Две одинаковых массивных трубы скатываются с горок одинаковой высоты, но разного профиля (см. рисунок). По первой горке труба на всем участке движется без проскальзывания; на второй горке имеется абсолютно гладкий участок (участок 1—2), но в конце пути (у подножия горки) труба вновь движется без проскальзывания. У какой трубы в конце горки скорость больше?*



◆

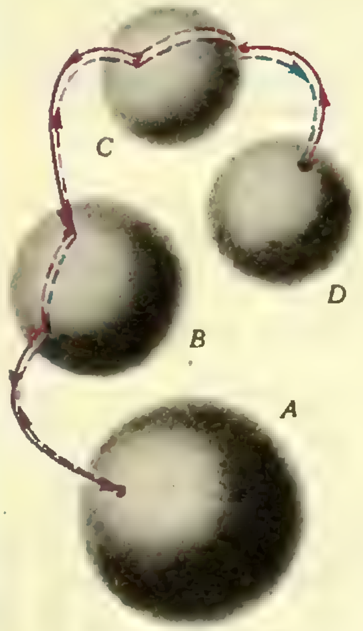
В случае движения без проскальзывания по горке *I* первоначальный запас потенциальной энергии трубы переходит в ее кинетическую энергию (которая «делится» между вращательным и поступательным движениями трубы).

При движении по горке *II* на абсолютно гладком участке *1—2* скорость вращения трубы остается постоянной, в то время как скорость поступательного движения растет. В результате при переходе трубы на шероховатый участок (ниже точки *2*) скорость поступательного движения трубы оказывается больше линейной скорости вращения ее точек. Значит, после прохождения точки *2* труба начинает двигаться с проскальзыванием. Таким движение будет до тех пор, пока скорости не сравняются. На участке выравнивания скоростей часть потенциальной энергии трубы будет расходоваться на работу против силы трения. Поэтому в тот момент, когда труба вновь станет двигаться без проскальзывания, ее скорость будет меньше, чем скорость на той же высоте трубы, скатывающейся по горке *I*.

Следовательно, в конце горки большая скорость будет у трубы, которая скатывается по горке *I*.

А. И. Буздин

Ф926. *В пространстве находятся 1985 несоприкасающихся металлических шаров, заряды которых равны, соответственно, q, $-2q$, $3q$, $-4q$, ..., $1984q$, $1985q$ ($q>0$). Докажите, что среди них есть шар, у которого поверхностная плотность заряда всюду неотрицательна. Расстояния между шарами конечны.*



Представим себе электростатическое поле заряженных шаров в виде некоторой картины силовых линий. Так как поле внутри каждого шара отсутствует, силовые линии начинаются и кончаются на поверхности шаров.

Возьмем любой шар, например шар A, и найдем на его поверхности место, в котором находится конец какой-нибудь силовой линии (красная линия на рисунке). Если такого места мы не обнаружим, то это будет означать, что шар A и есть искомый — он везде заряжен неотрицательно (ведь силовые линии кончаются на отрицательных зарядах).

Будем переносить положительный пробный заряд из найденного нами на шаре места вдоль силовой линии противоположно ее направлению. Следуя по этому пути, мы придем на поверхность какого-то другого шара B. Пройдем по его поверхности, найдем на ней конец другой силовой линии и вновь пойдем по ней («навстречу»). Будем продолжать этот процесс, следуя через шары C, D и т. д. (синий пунктир на рисунке).

Справедливы следующие утверждения:

1. Такое движение не уведет нас в бесконечность, так как полный заряд системы —

$$Q=q-2q+3q-4q+\ldots-1984q+1985q=993q$$

— положителен (по условию $q>0$), и следовательно, силовые линии не приходят из бесконечности. Действительно, во всех точках, достаточно удаленных от нашей системы, которая имеет ограниченные линейные размеры (расстояния между шарами конечны), поле, создаваемое системой, эквивалентно полю точечного положительного заряда, и силовые линии в таких точках направлены от системы и уходят в бесконечность.

2. В нашем путешествии мы не можем побывать снова ни на одном из шаров, которые уже были пройдены. Если бы такое случилось, то это означало бы, что какая-то часть нашего пути является замкнутой линией, чего не может быть в электростатическом поле.

Следовательно, поскольку число шаров конечно, наше передвижение рано или поздно закончится, то есть мы найдем шар, в который силовые линии не входят. Поверхность такого шара повсюду заряжена неотрицательно.

В. А. Ясинский

Равномерные расположения

М. Л. КОНЦЕВИЧ

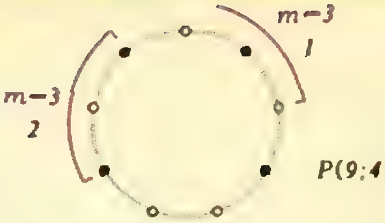
Пусть на окружности расположено n точек, и некоторые k из них выделены — будем называть их черными, а остальные — белыми. Легко указать самое неравномерное расположение k черных точек среди остальных: нужно расставить их все подряд. Оказывается, можно дать вполне естественное определение и для самого равномерного расположения черных точек. Такие равномерные расположения *обнаруживаются во многих математических, да и* не только математических, ситуациях. О них и рассказывается в этой заметке; здесь приводится решение задачи М818 из «Задачника «Кванта», опубликованной в № 9, 1983 г.

Определение, примеры и основная теорема

Назовем расположение черных точек *равномерным*, если для каждого натурального $m < n$ (где n — общее количество точек — черных и белых) количества черных точек в наборах из m последовательных точек на окружности отличаются друг от друга не более чем на 1. Например, расположение 4 точек среди 9 на рисунке 1 равномерно — в этом легко убедиться перебором, а расположение 7 точек среди 17 на рисунке 2 не равномерно. Равномерное расположение k черных точек среди n точек на окружности будем обозначать $P(n; k)$. Заметим, что замена цветов — черного на белый — превращает $P(n; k)$ в $P(n; n-k)$, поэтому всегда можно свести дело к случаю $k \leqslant n/2$.

Расположение $P(12; 5)$ нам особенно хорошо знакомо — это расположение пяти коротких (менее 31 дня) месяцев в году, а также пяти черных клавиш среди 12 клавиш одной октавы; легко убедиться, что это — одинаковые расположения: январю соответствует нота «фа», февралю — «фа диез» и т. д., так что, чтобы проиграть хроматическую гамму, достаточно вспомнить, сколько дней в каждом из 12 месяцев (рис. 3, 4). *Изображение равномерных* расположений не на окружности, а в виде периодической последовательности черных и белых точек на прямой, встретившееся в последнем примере, оказывается очень удобным для новых интерпретаций и обобщений, которые мы укажем в заключительных задачах.

На внешних окружностях рисунков 5 и 6 показаны расположения $P(17; 7)$ и $P(84; 19)$. Мы объясним общий способ, которым они построены; одновременно будет доказана следующая



m	1	2	3	4
Черных точек	0:1	0:1	1:2	1:2

Рис. 1.

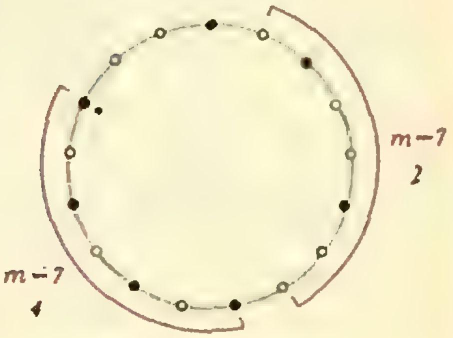


Рис. 2.

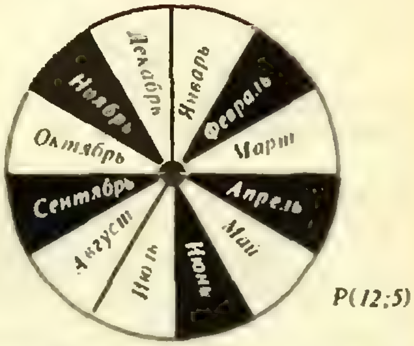


Рис. 3

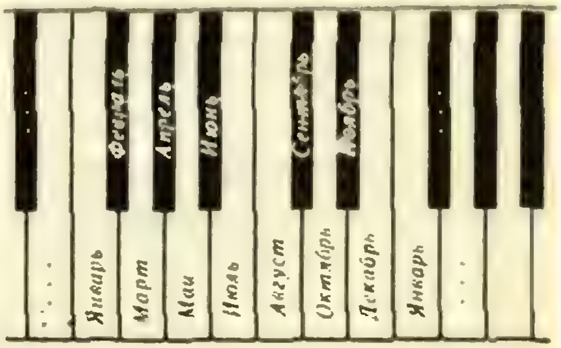


Рис. 4.

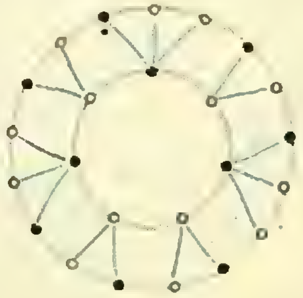


Рис. 5. P(7:3) и P(17:7)

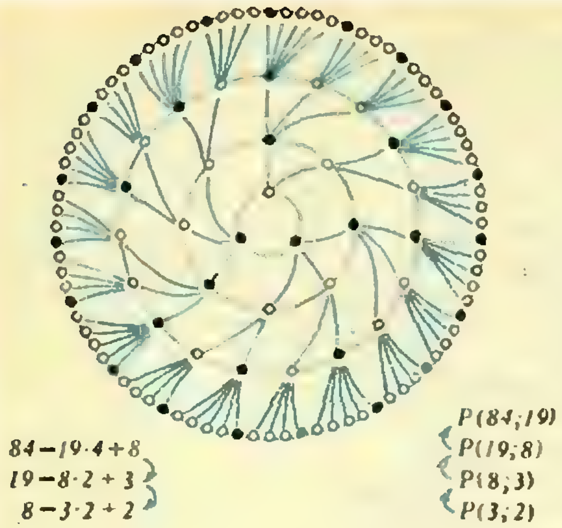


Рис. 6.

Основная теорема: *для любых натуральных чисел n и k ($k \leqslant n$) существует равномерное расположение* P$(n; k)$, *причем только одно* (с точностью до передвижения точек по окружности без изменения порядка их расположения).

Это и требовалось сделать в задаче М818.

Лемма «о спуске» и построение P$(n; k)$

Условимся расстояние между двумя крайними точками A и B отрезка из m последовательных точек на окружности считать равным $m-1$ (при этом между A и B лежит еще $m-2$ точки); это расстояние мы будем ниже называть также «длиной» отрезка AB и обозначать $|AB|$.

Рассмотрим сначала очевидный случай, когда n делится на k. При расстановке k черных точек на равных расстояниях $d=n/k$ друг от друга получаем равномерное расположение P$(n; k)$: среди m вершин, расположенных подряд, всегда будет $[m/d]$ или $[m/d]+1$ черных точек ($[x]$ — целая часть числа x). При любой другой расстановке k черных точек их расположение не будет равномерным: среди расстояний между соседними черными точками встретится хотя бы одно не меньше $d+1$ и одно — не больше $d-1$, так что среди $m=d$ последовательных точек может оказаться и 2, и 0 черных.

Для произвольных n и k, как показывает аналогичное рассуждение, расстояния между соседними черными точками равномерного расположения также должны отличаться друг от друга не более чем на 1. В сумме все эти k расстояний равны n, поэтому если $n=kd+r$ (мы разделили n на k с остатком), то r из этих расстояний имеют длину $d+1$, а остальные — d. Но важно еще (сравните рисунки 2 и 5), как r более длинных отрезков расположены среди всех k отрезков по окружности.

Например, на рисунке 2 (с неравномерным расположением) последовательность длинных и коротких отрезков, выписанная по часовой стрелке от точки со звездочкой, выглядит так: дкддккк, а на рисунке 5 (для P(17; 7)) — дкдккдк. Видно, что во второй последовательности буквы д расположены равномерно, а в первой — нет. Такие последовательности удобно снова изображать точками на меньшей окружности: длинные отрезки — черными, короткие — белыми (рис. 5, 6). И вот ключевая

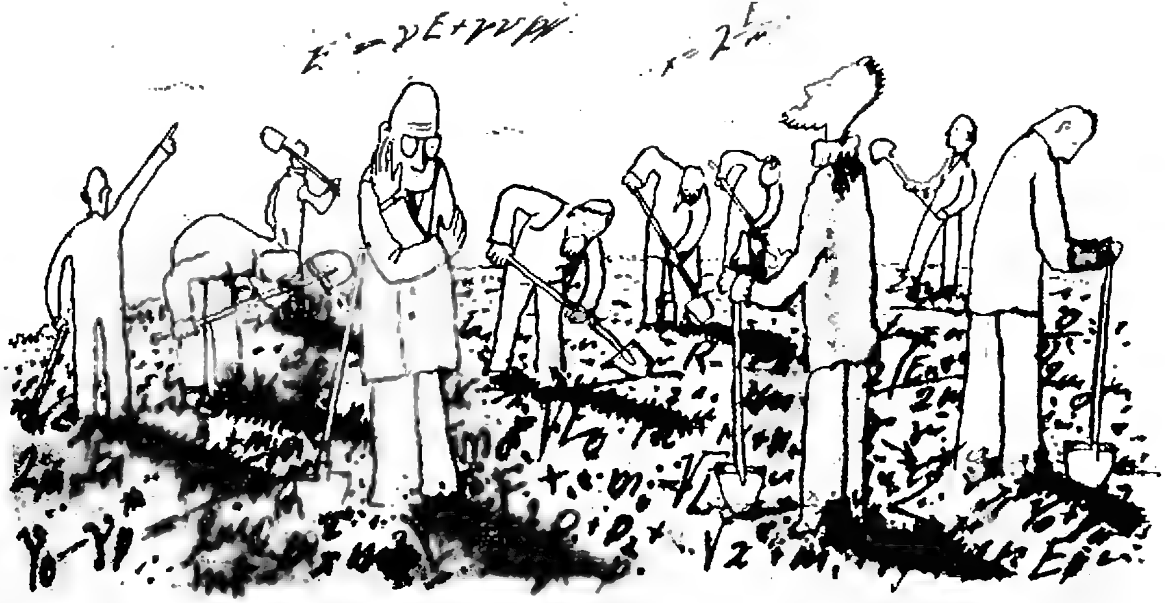
Лемма. *Пусть k черных точек среди n точек на окружности, разбивают ее на отрезки длины $d+1$ и d. Для того чтобы расположение черных точек было равномерным, необходимо и достаточно, чтобы было равномерным соответствующее расположение r черных точек среди k точек на меньшей окружности.*

По этой лемме, которую мы докажем чуть ниже, из существования и единственности P$(k; r)$ следует существование и единственность P$(n; k)$. Отсюда сразу получается доказательство основной теоремы (по индукции) и удобный способ построения равномерных расположений при любых n и k. Ведь начатый «спуск» можно продолжить: k разделить (с остатком $r_2<r$) на $r_1=r$, затем — r_1 (с остатком $r_3<r_2$) на r_2 и т. д., пока какой-то остаток r_{s-1} не разделится нацело на следующий r_s. (Это — известный алгоритм Евклида отыскания наибольшего общего делителя чисел n и k: $r_s=$ НОД $(n; k)$.) Таким образом, за несколько шагов спуска мы придем к очевидному случаю P$(r_{s-1}; r_s)$, когда r_{s-1} делится на r_s. Проделав для данной пары чисел n и k необходимые деления с остатком (как в алгоритме Евклида), мы узнаем, какая цепочка расположений P$(r_{s-1}; r_s)$, P$(r_{s-2}; r_{s-1})$,... ведет к P$(n; k)$ и может «вырастить» расположение P$(n; k)$ (как показано на рисунке 6), построив из «бусин» двух цветов в концентрических ярусов-окружностей. Потренируйтесь в построении этих «ожерелий». В наших примерах n и k взаимно просты, то есть $r_s=1$ и спуск приводит к расположению вида P$(r_{s-1}; 1)$ с единственной выделенной среди остальных точкой. Заметим, что практически спуск можно несколько ускорить; если на некотором шагу окажется больше половины черных точек, то можно «поменять цвет» (перейти от пары (n, k) к паре $(n; n-k)$), так что на каждом шаге число точек будет убывать более чем вдвое.

Доказательство леммы

Занумеруем по порядку (скажем, по часовой стрелке) черные точки: $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Расстояние (отсчитываемое также по часовой стрелке) от B_i до q-й от нее черной точки B_{i+q} обозначим $|B_iB_{i+q}|$, здесь $B_{k+1}=B_1$, $B_{k+2}=B_2$ и т. д. Среди отрезков B_iB_{i+1}, $B_{i+1}B_{i+2}$, ..., $B_{i+q-1}B_{i+q}$ ровно $|B_iB_{i+q}|-qd$ имеют длину $d+1$, остальные — длину d. Таким образом, мы должны доказать, что равномерность расположения точек B_i эквивалентна условию: при каждом $q<k$ расстояния $|B_iB_{i+q}|$ отличаются друг от друга не больше чем на 1. Доказательство в обе стороны проведем от противного. Если наше расположение не равномерно, то найдутся два отрезка одинаковой длины, на одном из которых расположено лишь $q-1$ черных точек $B_{i+1}, \ldots, B_{i+q-1}$, на другом — по крайней мере на 2 больше $B_j, B_{j+1}, \ldots, B_{j+q}$, но тогда $|B_iB_{i+q}|-|B_jB_{j+q}|\geqslant2$. Обратно, если выполнено последнее неравенство, то на отрезке B_jB_{j+q} лежит $q+1$ черная точка, а на отрезке той же длины, начинающемся со следующей за B_i точки, — по крайней мере на две меньше.

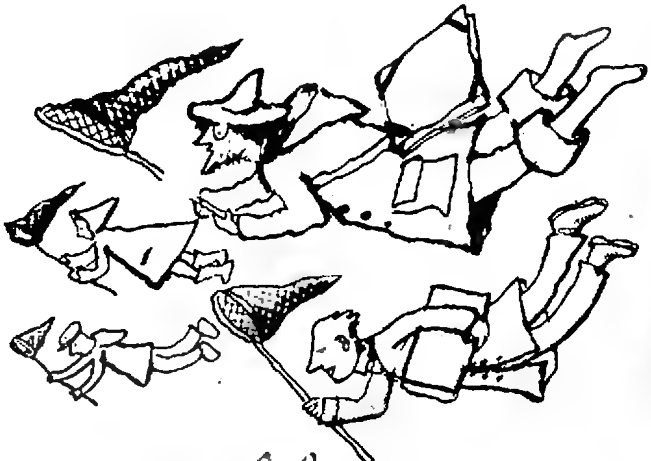
(Окончание см. на с. 59)

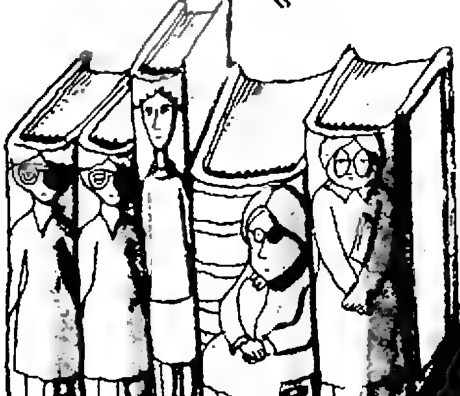


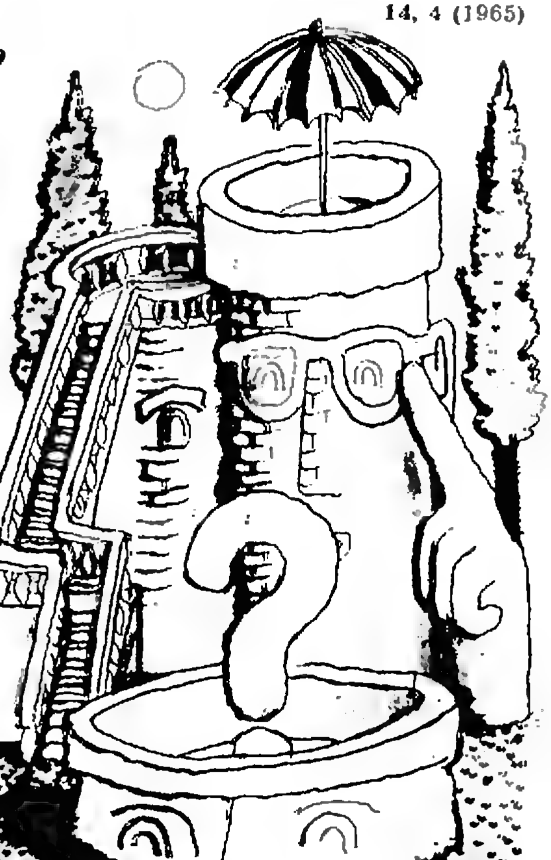
Названия коллективов в естественных науках

Колония бактериологов
Кипа библиотекарей
Выводок генетиков
Галактика космологов
Множество математиков
Сплав металлургов
Туча метеорологов
Стая орнитологов
Комплекс психологов
Сеть связистов
Тьма синоптиков
Линия спектроскопистов
Котел физиков-атомщиков
Поле физиков-теоретиков
Взвесь химиков
Пачка экономистов

По материалам
Journal of
Irreproducible Results
14, 4 (1965)







Фазовые превращения

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

> *Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.*
> К. Прутков. Плоды раздумья

В этой статье речь пойдет о процессах, при которых происходит смена одного агрегатного состояния вещества на другое (одной фазы на другую). Такие процессы относятся к *фазовым превращениям*, или *фазовым переходам*. Это плавление твердого тела (и обратный ему процесс отвердевания, или кристаллизации, жидкости), конденсация пара (и обратный ему процесс испарения жидкости) и сублимация, или возгонка, — переход вещества из твердого состояния в газообразное, минуя жидкое (и обратный процесс, также называемый кристаллизацией).

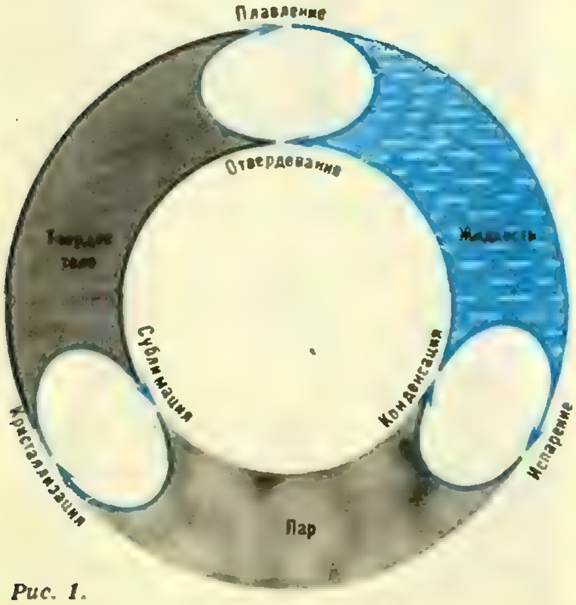


Рис. 1.

С фазовыми превращениями мы часто сталкиваемся в повседневной жизни — когда кипятим воду для чая или варим суп, дышим на обледенелое стекло автобуса или любуемся сосульками, образовавшимися на карнизе дома. Мы уже привыкли и поэтому не задумываемся над тем, зачем зимой тротуар посыпают солью (а почему не сахаром?) или почему при пайке радиосхем пользуются оловом (а почему, скажем, не алюминием?). Впрочем, зачем далеко ходить за примером? Основа существования всего живого в природе — вода — постоянно претерпевает различные фазовые переходы. Внимательно посмотрев на рисунок 1, скажите, какой процесс происходит при:

— сушке белья на морозе;

— образовании зимних узоров на стеклах (кстати, с какой стороны стекла образуются эти узоры?);

— запотевании стекол очков у человека, входящего с мороза в теплое помещение;

— образовании инея на деревьях или росы на траве и т. д. (Попробуйте самостоятельно продолжить этот перечень.)

Опыт проведения приемных экзаменов в вузы показывает, что отношение абитуриентов к данной теме различное. Одни считают, что здесь все просто, другие испытывают трепет при встрече с любым вопросом по этой теме. И обе точки зрения, на наш взгляд, правомерны. С одной стороны, для решения подавляющего большинства задач, где встречаются фазовые превращения, достаточно воспользоваться лишь уравнением теплового баланса, то есть частным случаем закона сохранения энергии. С другой стороны, в таких задачах не всегда очевиден ответ на вопрос о том, каким будет конечное состояние рассматриваемой системы: например, весь ли лед, брошенный в воду, растает или будет сосуществование двух фаз — льда и воды?

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач и вопросов. Многие из них предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы.

Начнем с задач, в которых центральное место занимает процесс плавления (или обратный ему процесс — отвердевание).

Задача 1. *В теплоизолированном сосуде находится вода, масса которой $m_1 = 1$ кг, а температура $t_1 = 30$ °С. В воду опускают лед, находящийся при температуре $t_2 = -20$ °С. Через некоторое время в сосуде оказалась вода с температурой $t_3 = 20$ °С. Найдите массу льда, опущенного в сосуд. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.*

Обозначим массу льда через m_2. Тогда количество теплоты, полученное льдом при его нагревании до температуры таяния $t_0 = 0$ °С, будет равно

$$Q_1 = c_2 m_2 (t_0 - t_2).$$

Превращаясь в воду (при неизменной температуре!), этот лед получит количество теплоты

$$Q_2 = \lambda m_2.$$

Образовавшаяся вода при последующем нагревании ее до температуры t_3 получит количество теплоты

$$Q_3 = c_1 m_2 (t_3 - t_0).$$

Вода, первоначально находящаяся в сосуде, при охлаждении до температуры t_3 отдаст количество теплоты

$$Q_4 = c_1 m_1 (t_1 - t_3).$$

Воспользовавшись уравнением теплового баланса $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$, найдем массу льда, опущенного в сосуд:

$$m_2 = m_1 \frac{c_1 (t_1 - t_3)}{c_1 (t_3 - t_0) + c_2 (t_0 - t_2) + \lambda} \approx 0{,}09 \text{ кг}.$$

Задача 2. *В теплоизолированный сосуд, в котором находился лед массой $m_1 = 3$ кг при температуре $t_1 = -10$ °С, ввели воду, масса которой $m_2 = 0{,}5$ кг, а температура $t_2 = 10$ °С. Найдите массу льда в сосуде после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкость сосуда не учитывать.*

Эта задача отличается от предыдущей тем, что заранее неизвестно, в каком конечном агрегатном состоянии будет находиться система, в частности, — какой будет ее конечная температура. Для ответа на этот вопрос найдем, прежде всего, количество теплоты, которое потребуется для того, чтобы весь находящийся в сосуде лед

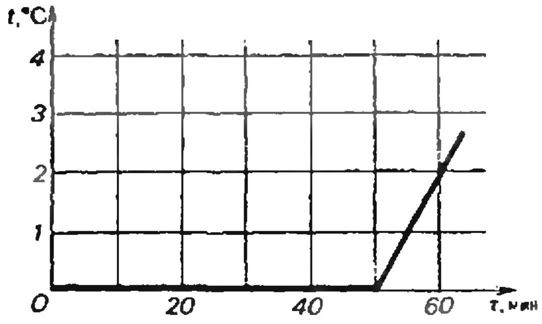


Рис. 2.

нагреть до температуры плавления $t_0 = 0$ °С:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1) = 63 \text{ кДж}.$$

Если вся введенная в сосуд вода охладится до этой температуры, выделится количество теплоты

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_0) = 21 \text{ кДж} < Q_1.$$

Превратившись в лед, вся вода может выделить еще количество теплоты

$$Q_3 = \lambda m_2 = 165 \text{ кДж} > Q_1.$$

Таким образом, получаем, что конечная температура системы будет равна $t_0 = 0$ °С, при этом некоторая часть воды замерзнет. Ее массу Δm найдем из уравнения теплового баланса:

$$\Delta m = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \approx 0{,}1 \text{ кг}.$$

Следовательно, после установления равновесия в сосуде будет $m_1' = m_1 + \Delta m \approx 3{,}1$ кг льда.

Задача 3. *Ведро, в котором находится смесь воды со льдом массой $m = 10$ кг, внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости температуры t от времени τ изображен на рисунке 2. Какая масса льда была в ведре, когда его внесли в комнату? Теплоемкостью ведра пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.*

Как видно из графика, первые 50 минут температура смеси не менялась и оставалась равной $t_0 = 0$ °С. Все это время тепло, получаемое смесью из комнаты, шло на таяние льда. Через 50 минут весь лед растаял, и температура воды (бывшей в ведре и образовавшейся из льда) начала повышаться.

За 10 минут (от $\tau_1 = 50$ мин до $\tau_2 = 60$ мин) температура повысилась на $\Delta t = 2$ °С. Количество теплоты, поступившее к воде из комнаты за это время, равно

$$Q_1 = cm\Delta t = 84 \text{ кДж}.$$

Значит, за первые 50 минут (от 0 до τ_1) к смеси поступило количество теплоты

$$Q_2 = 5Q_1 = 420 \text{ кДж}.$$

Это тепло и пошло на таяние льда. Таким образом, масса льда равна

$$m_л = \frac{Q_2}{\lambda} \approx 1{,}3 \text{ кг}.$$

* * *

До сих пор мы считали, что температура плавления льда равна $t_0 = 0\ ^\circ C$ ($T_0 = 273$ К). Однако это справедливо лишь при нормальном внешнем давлении $p_0 = 10^5$ Па. С изменением давления меняется и температура плавления, то есть та температура, при которой находятся в равновесии (сосуществуют) две различные фазы — лед и вода. Аналогично, при фиксированном внешнем давлении вода и пар сосуществуют только при единственной температуре (речь идет о закрытом сосуде). То же относится и к случаю сосуществования льда и пара. Для переменных значений давления p и температуры T можно получить три различных кривых сосуществования фаз вода — пар, вода — лед и лед — пар. На рисунке 3 им соответствуют кривая испарения *OK*, кривая плавления *OB* и кривая сублимации *AO*. Все три кривые имеют общую точку *O* — так называемую *тройную точку*. Только в ней возможно одновременное сосуществование всех трех фаз. Для тройной точки воды, например, $T_{кр} = 273{,}16$К и $p_{кр} = 609$Па (4,6 мм рт. ст.).

Заметим, что кривая испарения заканчивается в определенной точке (точке *K*), называемой критической. В этой точке теряется всякое различие между жидкостью и ее паром. При температурах выше критической газ сконденсировать нельзя, как бы сильно мы не сжимали его. Интересно, что именно благодаря этому обстоятельству так долго не удавалось получить кислород, водород и гелий в жидком состоянии — критические температуры этих веществ очень низкие, а для ожижения вещество, прежде чем сжимать, предварительно нужно охладить до температуры ниже критической.

Удельная теплота плавления (а также парообразования и сублимации) как количественная характеристика фазового превращения вещества зависит от температуры и от внешнего давления. Для одного и того же вещества удельные теплоты плавления, парообразования и сублимации связаны друг с другом. Проиллюстрируем это следующими задачами.

Задача 4. *На сколько изменится удельная теплота плавления вещества при понижении температуры плавления на ΔT, если удельные теплоемкости вещества в жидкой и твердой фазах равны соответственно c_1 и c_2?*

Пусть, первоначально находясь в жидкой фазе при температуре T, вещество массой m переходит в твердое состояние, а затем охлаждается до температуры $T' = T - \Delta T$. Выделившееся при этом количество теплоты будет равно $(\lambda + c_2\Delta T)\,m$ (здесь λ — удельная теплота плавления при температуре T). Переход в состояние с температурой T' может осуществляться и другим путем — сначала вещество, оставаясь в жидкой фазе, охлаждается до температуры T', а затем переходит в твердую фазу. Во время этого перехода выделится количество теплоты, равное $(c_1\Delta T + \lambda')\,m$ (где λ' — удельная теплота плавления при температуре T').

Воспользуемся далее законом сохранения энергии для тепловых процессов (первым законом термодинамики). Будем считать, что в пределах интервала температур ΔT удельный объем вещества и в жидком, и в твердом состоянии не зависит от температуры. Тогда работа, связанная со скачком удельного объема в точке фазового превращения, в обоих случаях будет одной и той же. Учитывая, что изменение внутренней энергии системы не зависит от пути перехода, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы, запишем закон сохранения энергии в виде

$$(\lambda + c_2\Delta T)\,m = (c_1\Delta T + \lambda')\,m.$$

Отсюда найдем изменение удельной теплоты плавления:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = (c_1 - c_2)\Delta T.$$

Задача 5. *В тройной точке удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}48 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления $\lambda = 3{,}32 \cdot 10^5$ Дж/кг. Найдите удельную теплоту δ сублимации воды в тройной точке.*

Рассмотрим цикл, окружающий тройную точку (см. рис. 3), в котором по очереди происходят следующие

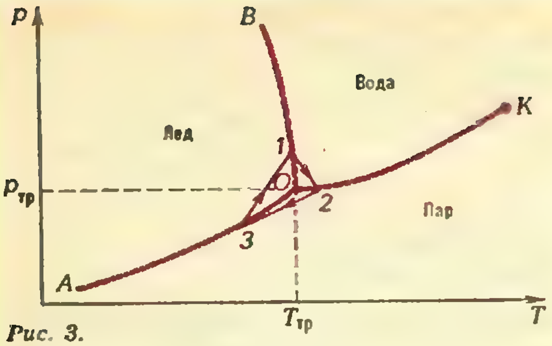


Рис. 3.

превращения: плавление (в точке *1*) → испарение (в точке *2*) → конденсация газа в твердое тело (в точке *3*). Если этот цикл проводится с некоторой массой вещества m и притока тепла извне нет (система теплоизолирована), то, согласно первому закону термодинамики (закону сохранения энергии), полное изменение внутренней энергии за цикл равно работе внешних сил:

$$m\lambda + mr - m\delta = A.$$

Неограниченно сжимая цикл около тройной точки, найдем, что $A \to 0$, а удельная теплота сублимации в этой точке равна

$$\delta = \lambda + r = 2{,}81 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

* * *

Вспомним теперь, что кипение жидкости начинается при температуре, когда давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению. Как видно из кривой сосуществования жидкость — пар, давление насыщенного пара растет по мере увеличения его температуры, и, наоборот, с уменьшением температуры давление паров падает.

Рассмотрим несколько задач, связанных с процессом кипения.

Задача 6. *Приготовление пищи в кастрюле-скороварке происходит при повышенном давлении. При этом температура превышает $t_к = 100$ °C. Было обнаружено, что сразу после разгерметизации скороварки испарилось 3 % содержащейся в ней воды. Определите температуру, которую имела вода до разгерметизации. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}3$ МДж/кг. Теплообменом за время установления нового состояния равновесия и изменением удельной теплоты парообразования с температурой пренебречь.*

После разгерметизации скороварки давление станет равным атмосферному. Поскольку температура воды t в скороварке превышает температуру $t_к = 100$ °C кипения воды при нормальном атмосферном давлении, то начнется интенсивное испарение (кипение) воды. Оно будет происходить до тех пор, пока ее температура не уменьшится до значения $t_к$. При этом на испарение 3 % воды, то есть массы $0{,}03m$, где m — исходная масса воды в скороварке, потребуется количество теплоты $0{,}03mr$. Это тепло выделяется при охлаждении воды от температуры t до $t_к$. В результате мы можем записать

$$0{,}03mr = cm(t - t_к),$$

откуда следует, что температура воды в скороварке была равна

$$t = t_к + 0{,}03r/c \approx 116 \text{ °C}.$$

Обратим внимание на тот факт, что при расчете выделяющегося при охлаждении воды количества теплоты мы пренебрегаем уменьшением ее массы. Это оправдано, поскольку испаряется всего лишь 3 % воды.

Вопрос 1. *Будет ли кипеть вода в пробирке, опущенной в кастрюлю с кипящей водой?*

Процесс кипения, как известно, требует непрерывного подвода тепла. Когда вода в пробирке нагреется до температуры 100 °C, подвод тепла из кастрюли прекратится. Поэтому вода в пробирке кипеть, естественно, не будет.

Вопрос 2. *А что будет, если в пробирку поверх воды налить толуол (это более легкая жидкость, не смешивающаяся с водой), температура кипения которого 111 °C?*

Здесь мы сталкиваемся с интересным явлением — так называемым пограничным кипением. Суть его состоит в том, что кипение начинается на границе двух жидкостей, когда сумма парциальных давлений их насыщенных паров равна внешнему атмосферному давлению. Ясно, что при этом давление насыщенных паров воды меньше атмосферного, а значит, и температура ниже 100 °C. Таким образом, при добавлении толуола в пробирку с водой кипение на границе толуол — вода начнется гораздо раньше, чем закипит вода в кастрюле.

Задача 7. *Во сколько раз плотность водяного пара под крышкой ка-*

стрюли, в которой кипит жирный бульон, больше плотности масляного пара? Давление насыщенного пара масла при температуре $t=100$ °С равно $p_{нм}=120$ Па. Молярная масса масла $M_м=80$ г/моль.

Давление насыщенных паров масла при температуре $t=100$ °С примерно в тысячу раз меньше атмосферного давления ($p_{атм}=10^5$ Па), а значит, и кипеть жирный бульон будет практически при этой температуре (обсуждавшийся выше эффект пограничного кипения в этом случае приводит к сдвигу температуры кипения лишь на 0,2 °С). Из закона Менделеева — Клапейрона следует, что отношение плотности водяного пара $\rho_{вп}$ и масляного пара $\rho_{мп}$ будет равно

$$\frac{\rho_{вп}}{\rho_{мп}}=\frac{p_{нв}M_в}{p_{нм}M_м}=\frac{p_{атм}M_в}{p_{нм}M_м}\approx 190.$$

Задача 8. *В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $m_1=18$ г насыщенного пара. В цилиндр впрыскивают $m_2=18$ г воды при температуре $t_0=0$ °С. На сколько опустится поршень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, удельная теплоемкость воды $c=4,2$ кДж/кг, удельная теплота парообразования $r=2,3$ МДж/кг. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей в окружающую среду можно пренебречь.*

По условию задачи пар в сосуде насыщенный. Поскольку поршень невесомый, давление пара равно атмосферному давлению $p_0=10^5$ Па, а температура пара до впрыскивания воды была равна $t=100$ °С. Этот момент — самый важный в данной задаче. Нетрудно далее убедиться в том, что конечная температура системы после установления равновесия также будет равной t (покажите это самостоятельно). Следовательно, введенная в цилиндр вода нагреется до температуры t, что может произойти только за счет конденсации некоторой массы пара $m_п$:

$$cm_2(t-t_0)=m_пr,$$

откуда

$$m_п=cm_2(t-t_0)/r\approx 3,3 \text{ г}.$$

Объем V, который занимал этот пар до конденсации, найдем из уравнения газового состояния:

$$V=\frac{m_пRT}{Mp_0}\approx 5,7\cdot 10^{-3}\text{ м}^3.$$

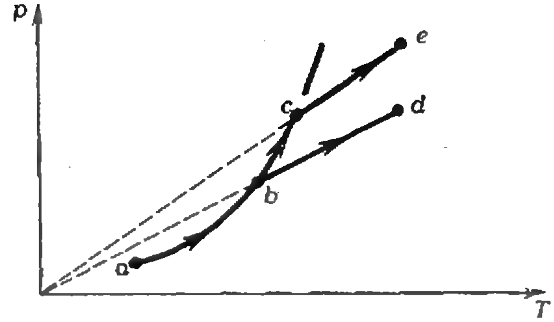


Рис. 4.

Считая объем, который занимает сконденсировавшаяся из пара вода, пренебрежимо малым (убедитесь в этом самостоятельно), получим, что перемещение поршня равно

$$h=\frac{V}{S}\approx 0,57\text{ м}=57\text{ см}.$$

* * *

В заключение остановимся на одном любопытном факте: давление насыщенных паров может зависеть еще и от формы поверхности жидкости (а не только от ее температуры). Так, например, при одной и той же температуре плотность (а значит, и давление) насыщенных паров над выпуклой поверхностью воды больше, чем над плоской. (Постарайтесь объяснить это явление.)

Упражнения

1. В закрытый сосуд объемом $V=166$ л поместили воду, масса которой $m=0,5$ кг, а затем сосуд нагрели до температуры $t=127$ °С. Какова масса воды, оставшейся в сосуде при этих условиях? Объемом, занимаемым водой, по сравнению с объемом сосуда можно пренебречь. Давление насыщенных паров воды при температуре t равно $p_н=2,5\cdot 10^5$ Па.

2. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108$ °С и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=4,2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2,3$ Дж/кг. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

3. На рисунке 4 представлена зависимость давления от температуры для двух процессов, *abd* и *abce*, происходящих с двумя изолированными системами. Участок кривой *abc* является частью кривой сосуществования жидкости и пара. Считая объемы систем одинаковыми, объясните причину их различного поведения с ростом температуры.

4. Известно, что если обычную воду подсолить, то температура ее кипения станет выше. Как при этом изменится плотность насыщенных водяных паров при температуре кипения?

5. В таблицах температуры плавления и удельной теплоты плавления вещества не приводятся данные для стекла. Почему?

6. Почему в сухом воздухе человек выдерживает температуру, превышающую 100 °C?

7. Почему в резиновой одежде трудно переносить жару?

8. Удельная теплота парообразования воды значительно больше, чем серного эфира. Почему же эфир, налитый на руку, производит значительно большее охлаждение, чем вода?

9. Почему при нагревании воды пузырьки пара образуются сначала у дна сосуда?

10. Где кипящая вода горячей — на уровне моря или в глубокой шахте?

11. Почему приготовление пищи в горах требует значительно большего времени, чем при обычных условиях?

12. Почему в специально охлаждаемых помещениях часто бывает сыро?

13. Зубные врачи, применяющие для осмотров зубов небольшое зеркальце, предварительно его нагревают до температуры несколько выше 37 °C. Зачем?

14. Почему не бывает росы под густым деревом?

15. Почему после выпадения росы с течением времени исчезают мелкие капли и увеличиваются размеры более крупных?

Равномерные расположения

(Начало см. на с. 51)

Несколько задач

1. Разделим окружность на n равных дуг и впишем в нее правильный k-угольник (вершины которого не попадают в концы дуг, рис. 7). Закрасим в черный цвет те k дуг, в которые попали вершины. Докажите, что их расположение среди всех n дуг равномерно. (Эта задача дает новый способ построения P (n; k).)

2. а) Будем располагать n (черных и белых) точек в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что черные точки равномерного расположения P (n; k) образуют множество, симметричное относительно некоторой прямой. б)* Сколько таких осей симметрии у P (n; k)?

В следующих задачах изучается несколько более общее понятие: равномерное расположение на прямой. Пусть на прямой задана бесконечная (в обе стороны) последовательность точек — в частности, например, целочисленных точек числовой оси, — «раскрашенных» в черный и белый цвет. Она называется *равномерной*, если для любого натурального m количество черных среди m последовательных ее точек колеблется не более чем на 1. Докажите следующие теоремы.

3. Для данных чисел a, b ($a > 1$) целые числа $[al + b]$, где l пробегает всевозможные целые числа, назовем черными, остальные целые числа — белыми. Полученное расположение равномерно. Оно периодично, если и только если a — рациональное число (при $a = \frac{n}{k}$ оно имеет период n и расположение черных и белых точек на периоде совпадает с расположением P (n; k) на окружности).

4*. Для любого равномерного расположения найдется число α такое, что количество черных точек среди любых m последовательных точек расположения отличается от αm менее чем на 1.

5*. Проведем на бесконечном листе клетчатой бумаги прямую, не проходящую через узлы, отметим черным точки ее пересечения с линиями одного направления, белым — другого (рис. 8). Полученное расположение равномерно.

6. Две бесконечные (в обе стороны) арифметические прогрессии $a_1l + b_1$, $a_2l + b_2$ ($l \in \mathbb{Z}$) не имеют общих членов. На числовой прямой числа одной прогрессии помечены черным, другой — белым. Полученное расположение черных и белых точек равномерно.

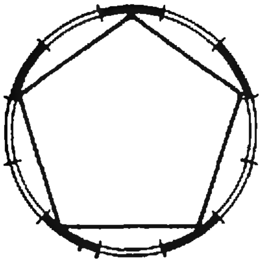


Рис. 7.

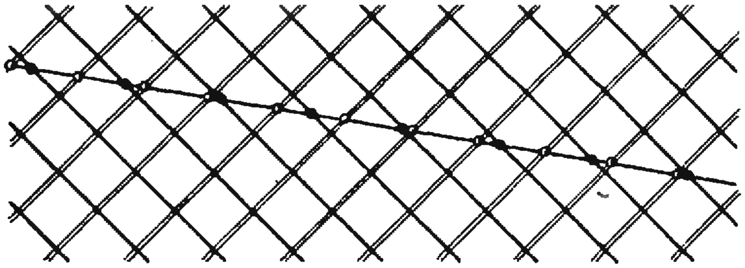


Рис. 8.

Задача о доминировании ферзей

В. Г. ЧВАНОВ

В статье М. Мамикона в «Кванте» 1977 г., № 12 рассматривалась следующая до конца еще не решенная задача:

Задача о доминировании. *Какое минимальное число ферзей $F(n)$ можно разместить на шахматной доске $n \times n$ так, чтобы они атаковали все ее свободные поля?*

Числа $F(n)$ известны лишь для малых n ($n \leqslant 11$), приведенных в таблице 1.

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	?	...

На рисунке 1 приведены размещения ферзей на досках 3×3, 8×8, 11×11, для которых $F(n)$ равны соответственно 1, 5 и 5. Для больших n задача ждет своего решения.

В статье М. Мамикона приводятся следующие оценки для $F(n)$:

$$F(n) \geqslant \frac{n-1}{2}, \tag{1}$$

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + 16\sqrt{n}. \tag{2}$$

Наша цель — указать некоторые приемы, позволяющие улучшить эти оценки и сформулировать связанные с ними задачи в надежде на то, что читатель самостоятельно продвинется в решении задачи о доминировании.

Первая геометрическая идея — пробивание каймы

Размещение ферзей на доске $n \times n$, для которых $F(n) = (n-1)/2$ (реализуется нижняя оценка М. Мамикона), назовем *идеальным.* Примерами могут служить размещения, показанные на рисунке 1 (при $n=3$ и $n=11$).

Посмотрим на *кайму* доски (совокупность из $4(n-1)$ клеток, расположенных вдоль ее края). При идеальном размещении (см. рис. 1*а*, *б*) каждый ферзь бьет ровно 8 клеток на кайме, при том никакая ее клетка не пробивается двумя ферзями, поэтому число ферзей равно $4(n-1):8 = (n-1)/2$, откуда и получается нижняя оценка (1). Полное доказательство дано в статье М. Мамикона.

Задача 1 (нерешенная). Существуют ли идеальные размещения кроме двух указанных? Конечно ли число идеальных размещений? (Гипотеза: ответ на последний вопрос — положительный.)

Необходимым условием доминирования, разумеется, является доминирование на кайме. Поэтому интересно знать, для каких досок возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. М. Мамикон доказал, что такими досками являются доски $n \times n$ при $n = 2(k^2+l^2)+1$, где k и l — взаимно-простые числа разной четности. Но этим списком такие доски не исчерпываются. Примером может служить размещение на рисунке 2 ($n=15$); еще одно такое размещение я придумал для доски $n \times n$, $n=27$. Эти размещения примечательны тем, что в них соблюдается численное равенство фигур, расположенных лишь в противоположных квадрантах, образованных пересечением главных диагоналей.

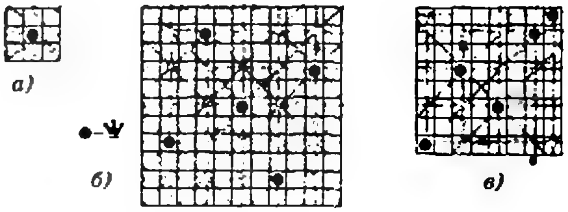


Рис. 1.

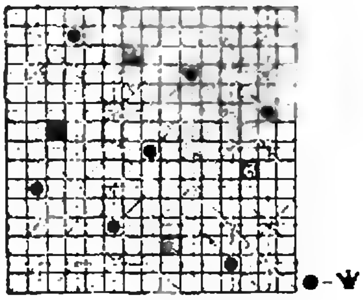


Рис. 2.

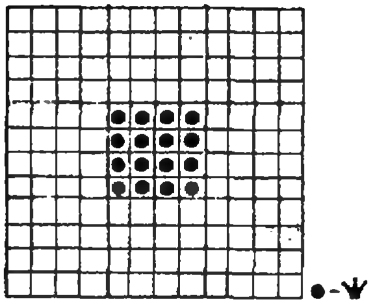
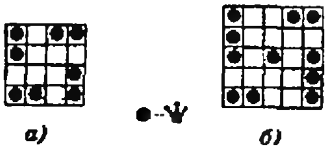


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.

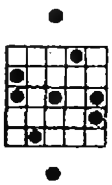


Рис. 5.

Задача 2 (нерешенная). Указать полный список досок $n\times n$, на которых возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. (**Гипотеза:** кроме указанной выше серии, в этот список входят все доски вида $n=12k+3$ и только они.)

Вторая геометрическая идея — «комбинированный ферзь»

Эта нехитрая идея состоит в имитации идеального размещения на доске 3×3 на досках большего размера. Рассмотрим для начала доску размера $3m\times 3m$ и в центральном квадрате $m\times m$ разместим несколько ферзей так, чтобы они пробивали все диагонали, все вертикали и все горизонтали центрального квадрата; тогда очевидно, что такой «комбинированный ферзь» будет доминировать по всей доске $3m\times 3m$ (рис. 3).

Дадим теперь определение *комбинированного* ферзя (коротко — *k-ферзя*) в общем случае. Пусть на бесконечной шахматной доске выделен квадрат $m\times m$ и выбран набор ферзей, которые 1) пробивают все $2m-1$ нисходящие и все $2m-1$ восходящие диагонали выделенного квадрата; 2) пробивают все m горизонталей и все m вертикалей выделенного квадрата; такой набор ферзей мы назовем k-ферзем.

Задача 3. Для каждого m постройте k-ферзь из минимального числа ферзей, целиком расположенный внутри квадрата $m\times m$.

Решение эквивалентной задачи дано в «Кванте», 1980, № 7 (решение задачи М577). При четном m число ферзей равно $2m$, при нечетном, — оно равно $2m+1$ (рис. 4,а,б).

Таким образом, для n кратного 3, $n=3m$, мы получим оценку $F(n)\leqslant 2n/3$ при m четном, $F(n)\leqslant (2n/3)+1$ при n нечетном. Но мы увидим, что эту оценку можно еще улучшить, если воспользоваться еще одной геометрической идеей.

Третья геометрическая идея — вывести k-ферзя за пределы центрального квадрата

Рассмотрим k-ферзя на рисунке 4,б и заменим четыре угловых ферзя на два ферзя, лежащие за пределами центрального квадрата $m\times m$ $(m=5)$, как показано на рисунке 5. Тогда мы получим k-ферзя из $2m-1$ фигур, доминирующего на доске $3m\times 3m$. Дальнейшее сокращение числа фигур невозможно, так как в квадрате $m\times m$ имеется $2m-1$ диагонали.

Однако, когда мы выносим фигуры по своим диагоналям за пределы центрального квадрата, оказывается, что можно получить k-ферзя, доминирующий на доске большего размера, чем $3m\times 3m$, за счет увеличения числа атакуемых горизонталей и вертикалей (см. рисунок на четвертой странице обложки). Естественно спросить

Задача 4. Каков максимальный размер квадрата, на котором доминирует k-ферзь из $2m-1$ фигур?

Я не знаю ответа на этот вопрос, однако, удается строить серии k-ферзей указанным приемом, которые позволяют заметно улучшить оценку сверху для $F(n)$. В частности, для любого m из серии $m=12c+9$ $(c=0, 1, 2, \ldots)$ можно построить k-ферзя из $2m-1$ ферзей, который доминирует на доске $n\times n$, где $n=42c+31=(7m-1)/2$. Таким образом, для всех n из серии $n=42c+31$ $(c=0, 1, 2, \ldots)$, мы получаем оценку

$$F(n)\leqslant\frac{4n-5}{7}. \tag{3}$$

Заметим, что число вертикалей (а также — горизонталей), атакуемых таким k-ферзем, равно $l=(3m-1)/2$.

k-ферзь, изображенный на обложке, и есть один из k-ферзей этой серии (при $c=0$). Рассмотрим его подробнее. Он состоит из 3-х, обладающих определенными «конструктивными» достоинствами, групп фигур. Каждая, взятая отдельно, группа атакует во всех направлениях столько рядов, сколько содержится в ней фигур. Причем, в вертикальном и одном из диа-

Таблица 2

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7				9
μ	0,33	0,5	0,6	0,5	0,57	0,62	0,55	0,5	0,45	0,5	0,54				0,53

гональных направлений ряды атакованы без разрывов, в другом — атакован каждый третий ряд, в горизонтальном — каждый второй. Крайние группы содержат $\frac{2}{3}m-1$, а средняя — по $\frac{2}{3}m$ фигур, размещенных последовательным ходом коня вдоль параллельных линий 1—1, 2—2, 3—3. Линия 1—1 проходит через центральную клетку доски. Расстояния между линиями 2—2, 3—3 и линией 1—1 выбирается так, чтобы за пределами доски $m\times m$ с 2-х ее сторон (см. рисунок на обложке) находилось по $\frac{m-1}{4}$ фигур каждой крайней группы. Но при этом часть фигур каждой группы выходит из синей зоны и в ней образуется разрыв (показано зеленым) в сплошном диагональном пробое. Фигуры, вышедшие из синей зоны, возвращают в нее параллельным переносом по своим диагоналям так, чтобы ликвидировать образовавшийся разрыв.

Улучшение нижней оценки для $F(n)$

Теперь вернемся к нижней оценке $F(n)$. Ее можно улучшить, раздельно оценивая $F(n)$ для досок $n\times n$, сравнимых по модулю 4.

Задача 5. Докажите для каждого вида досок $n\times n$ выполняемость следующих оценок $F(n)$:

$$n=4k \qquad F(n)\geqslant\frac{n}{2}, \tag{4}$$

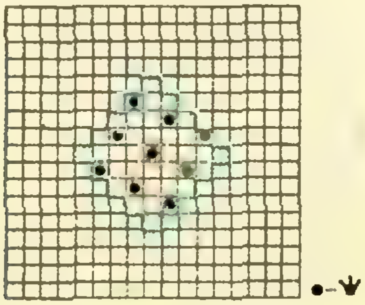


Рис. 6.

$$n=4k+1 \quad F(n)\geqslant\frac{n+1}{2}, \tag{5}$$

$$n=4k+2 \quad F(n)\geqslant\frac{n}{2}, \tag{6}$$

$$n=4k+3 \quad F(n)\geqslant\frac{n-1}{2}. \tag{7}$$

Указание. Число полей краевой каймы доски, на которой доминируют $\frac{n-1}{2}$ ферзей, кратно 8; число фигур идеальной расстановки $F(n)=2k+1$.

Задача 6. Дано по $\frac{n-1}{2}$ вертикальных, горизонтальных, восходящих и нисходящих диагональных линий. Укажите все значения n, для которых возможно этими линиями (они идут через центры клеток) зачеркнуть все клетки доски $n\times n$.

Задача 7 (нерешенная). Конечно ли число досок, для которых выполняются оценки (4), (5), (6)? Гипотеза: число таких досок конечно.

Оценки (4), (5), (6) позволяют нам расширить таблицу 1. Действительно, с их учетом можно записать, что $F(12)\geqslant 6$; $F(13)\geqslant 7$; $F(17)\geqslant 9$; $F(12)=6$ и $F(13)=7$ легко получить, достраивая размещения $F(11)=5$ (рис. 1«б») до размеров 12×12 и 13×13 с установкой дополнительной фигуры в угловой клетке доски. Размещение же $F(17)=9$ показано на рисунке 6.

«Качество» того или иного доминирующего размещения удобно оценивать отношением $\mu=\frac{F(n)}{n}$. Итак, наши результаты можно представить в виде Таблицы 2.

Таблица 2 заслуживает внимания, но ее анализ мы оставляем читателям. Отметим лишь следующее: М. Мамиконом высказывалась гипотеза о том, что доска 8×8 является наихудшей в смысле максимальности μ. Формула (6) и полученные нами значения $F(n)$ позволяют нам ответить на этот вопрос пока утвердительно.

Задача 8 (о внешнем доминировании). Какое максимальное число ферзей можно разместить на бесконечной шахматной доске так, чтобы они атаковали все поле доски $n\times n$?

Фазовые превращения

1. $m_в = m - pVM/(RT) \approx 0{,}3$ кг.

2. $\alpha = c(t - t_к)/\lambda \approx 0{,}015 = 1{,}5\ \%$ (здесь $t_к = 100\ ^\circ C$ — температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении).

3. Масса системы, с которой проводится процесс *abce*, больше массы системы, с которой проводится процесс *abd*.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. 10 белых грибов.

2. Очевидно, что первая цифра частного 1, а первая цифра делителя — 2. Теперь нетрудно найти, что последняя цифра частного — 6. Зная делитель 23 и частное 136, находим все цифры в примере.

3. На рисунке 1а показана полоска длины 1×12, на которой пунктиром намечены линии сгиба. Согнув полоску по этим линиям, получим двуслойную зигзагообразную полоску, изображенную на рисунке 1б, после чего оклеиваем кубик этой полоской так, как показано на рисунке 1в.

4. Ответ: $h=3$. Наибольшая из высот h треугольника не превосходит длины средней по величине стороны этого треугольника. Поэтому $h \leqslant 3$. Если $b=h=3$, $a=2$, то $c=\sqrt{13}<4$.

5. Ответ: 4,3 м. Продолжим линию горизонта (рис. 2). Представим себе, что рядом с лодкой находится вертикальная палка AB, верхний конец которой совпадает с горизонтом. Так как линию, проходящую через фотоаппарат при съемке, можно считать параллельной поверхности моря (из фотографии видно, что катер находится довольно близко к точке съемки, так что кривизной Земли можно пренебречь), длина палки равна высоте фотоаппарата над уровнем моря. Так как катер расположен параллельно линии горизонта ($AF \parallel l$) и перпендикулярно к оси объектива фотоаппарата, будет $\frac{CD}{AB} = \frac{l}{h}$, где l — длина лодки, h — высота фотоаппарата. Измерив на чертеже CD и AB и считая, что $h \approx 1{,}6$ м, получим

$$l \approx h \cdot \frac{CD}{AB} = 1{,}6 \cdot \frac{3{,}2}{1{,}2} \approx 4{,}3 \text{ м.}$$

Замечание. Мы допустили, что $h \approx 1{,}6$ м, зная рост автора фотографии и исходя из среднего роста человека. При других h, естественно, будут получаться другие ответы.

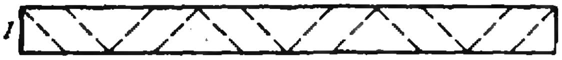


Рис. 1а.

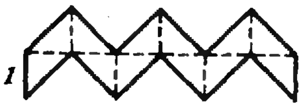


Рис. 1б.

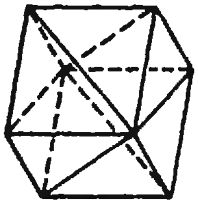


Рис. 1в.

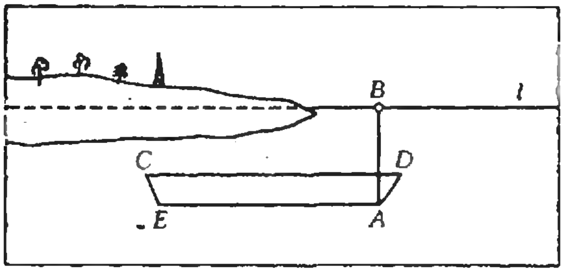


Рис. 2

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 5)

Головоломки

1. См. рис. 3.

2. 24017 · 2 = 48034
6492 : 3 = 2164
83296 · 7 = 583072
17692 · 4 = 70768

3. Одно из решений изображено на рисунке 4.

4	8	3
9	1	5
2	6	7

Рис. 3.

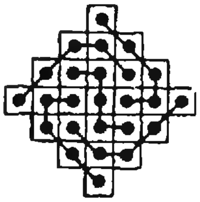


Рис. 4.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 6)

Наблюдения и эксперименты

1. Если предмет попал точно в центр сосуда, то он возбудит круговую волну, которая одновременно во всех точках отразится от краев сосуда и сфокусируется в центре.

2. Маятники будут обмениваться энергией благодаря поперечной нити и станут попеременно останавливаться, приводя в движение «соседа». (Подробное объяснение — в статье «Связанные маятники», «Квант», 1984, № 5.)

3. Следует вывести маятники из положения равновесия и одновременно отпустить их, затем дождаться, когда они одновременно вернутся в исходное положение. Если первый маятник за это время совершил n_1 колебаний, а второй n_2, то $\frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}$, откуда $T_2 = \frac{n_1}{n_2} T_1$.

4. Так как крылья стрекозы покрыты тонкой прозрачной пленкой, имеющей различную толщину, то при падении на пленку солнечных лучей образуются цветные интерференционные полосы. Положение этих полос меняется, если смотреть на пленку под разными углами.

Задачи и задачки

1. Для увеличения массы струны. Чем больше масса, тем меньше частота упругих колебаний, тем ниже тон создаваемого струной звука.

2. Колеблются векторы электрической напряженности $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

3. Энергия колебаний больших по глубине слоев воды передается у берегов более тонким слоям, и амплитуда колебаний увеличивается.

4. На мелком месте скорость волн меньше, чем на глубоком. Волны испытывают преломление и изменяют направление своего распространения.

5. Звуковые волны огибают дверь за счет дифракции, а она, как известно, проявляется тогда, когда длина волны сравнима с размерами препятствия. Для световых волн это условие в данном случае не выполняется.

6. Обе части полоски будут выглядеть смещенными, причем фиолетовая сместится благодаря дисперсии больше, чем красная.

7. Штриховка играет роль дифракционной решетки, создающей спектр в отраженных лучах.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 4)

Задание 7 (З. Колодиный, 1927 г.). **1. e7 Крс7** (1... Крb5 2. e8Ф+ и 3. Фea4×) **2. e8C! Крс8 3. Фd7×.**

Задание 8 (В. Шпекман, 1964 г.). **1. Крс4! Кра7 2. Фс7! Кра6 3. b8К×!**

Бег по кругу и длинный рассказ
(см. «Квант» № 2)

Вопросы

1. Когда птица намокает, перьям это очень не нравится и они взъерошиваются. (Если говорить серьезно, то первое, что делает попавшая под дождь птица, — это встряхивается, сбрасывая с себя излишки воды. После этого отдельные волоски пера, впитавшие влагу, «собираются» из-за смачивания около его остова. Таким образом перья превращаются в торчащие во все стороны «стрелки», придавая птице взъерошенный вид.)

2. От ощущения своей беспомощности перед «силами природы» и от досады. (Ну, а серьезно — испаряющаяся с мокрой одежды вода, забирает тепло у всего окружающего, в том числе и у вас. Поэтому вам и становится холодно.)

3. Правда, если бежать не очень быстро. От очень быстрого бега скорее еще больше взмокнешь.

4. Он может подняться страшно-страшно высоко.

5. Приблизительно затем, зачем бьют палкой по ковру, когда его чистят.

6. Величина силы обратно пропорциональна вашей воспитанности.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, Б. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, А. И. Клименов,
А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, Г. В. Мурышкин,
Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Э. А. Смирнов,
Е. К. Тенчурина, Н. А. Ящук
Фото представили: Б. Е. Лахметкин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

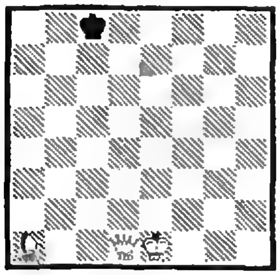
Сдано в набор 21.05.85. Подписано к печати 3.07.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,03. Т-12332
Тираж 172 290 экз. Цена 40 коп. Заказ 1311

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

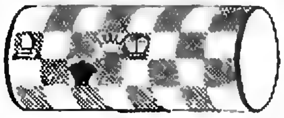
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Задание, которое указано под первой диаграммой, наверняка удивит читателей.



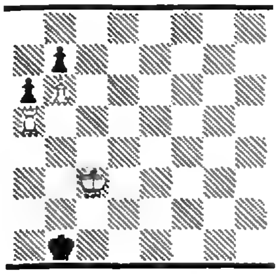
В. Хуторной, 1985 г. Мат в 0 ходов.

А между тем мат действительно дается в 0 ходов, причем сразу двумя способами! Белые не переставляют ни одной из своих фигур, но зато... сворачивают доску в цилиндр! Из одной доски можно соорудить две цилиндрические — горизонтальную и вертикальную. На каждой из них черный король сразу оказывается заматованным.



На горизонтальном цилиндре это хорошо видно невооруженным глазом, вертикальный цилиндр рассмотрите сами.

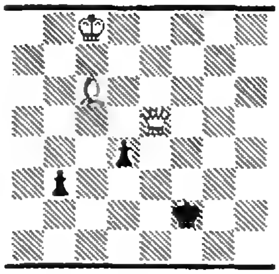
В цилиндрических шахматах, с одной стороны, открываются новые возможности, а с другой — становится невозможным то, что легко достигается на обычной доске. Так, на цилиндрической доске король с ладьей не в состоянии поставить мат голому королю, не существует ни одной расстановки 8 ферзей, не угрожающих друг другу (на обычной доске, как известно, существуют 92 таких расстановки).



Мат в 2 хода на вертикальной цилиндрической доске.

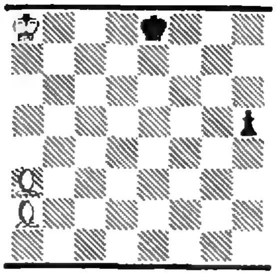
В цилиндрических шахматах у доски, как правило, отрезаются соответствующие границы, что мы и видим на данном рисунке. На стандартной доске задание невыполнимо — королем ходить бесполезно, а если движется ладья, то выручает ход пешкой a6—a5. На цилиндре решает удивительный маневр: 1. Ла5—а5! Ладья пробежалась по горизонтальному кругу и вернулась на свое место. Теперь все ясно — **1...Крс1 2.Ла1 ×.**

Рассмотрим задачи посложнее.



А. Мандлер, 1962 г. Мат в 3 хода на вертикальной цилиндрической доске.

1.Сb7. Занимая слоном диагональ c8 — a6 — h5 — d1 и угрожая 2. Фf4+ Кре(g)1 3. Фf8× (с поля f8 ферзь держит поля d2, e1 по диагонали f8—h6—a5—e1, а поля g1, h2 — по диагонали f8—a3—h2—g1). 1...d3. Теперь после 2.Фf4+Кре1 3.Фf8+ есть защита 3...d2. Но опасно оголилась диагональ a7—g1, что и решает дело. **2.Фа5+** (шах по диагонали d8—a5—h4—e1) **2...Кре3 3. Фа7×!** Как легко убедиться, все белые поля около черного короля держит слон, а все черные — ферзь (включая e3 — по диагонали b8—a7—h6—c1).



Д. Никсон, 1936 г. Мат в 5 ходов на вертикальной цилиндрической доске.

На обычной доске для того, чтобы заматовать неприятельского короля двумя слонами, его предварительно загоняют в угол. На цилиндре углов вообще нет! Но это не беда — сила слонов здесь значительно возрастает, и поставить мат можно и на краю доски.

1.Сh4 Крf8 2.Крh7 Кре8 3.Крg6 Крf8 4.Са3+ Кре8 5.Сh3×.

Разыграв эту позицию «вслепую» (без доски), вы хорошо потренируете свое геометрическое воображение!

В следующей задаче, как и в самой первой, задание полусерьезное, полушуточное.

Б. Рябикин, 1983 г. Белые: Крс2; черные: Кре2, п. g7. Ничья.

Шансы белых на ничью, прямо скажем, не слишком велики. Черная пешка, как будто, беспрепятственно движется вперед, пока не станет ферзем. В отчаянии белые приклеивают друг к другу первую и последнюю горизонтали доски, превращая ее в горизонтальный цилиндр! В результате пешка совершенно неожиданно лишается всяких перспектив — превращение в ферзя отменяется. Перпетуум — мобиле...

Конкурсные задания

13. Белые: Крh5, Фh6, Се6; черные: Кре7. Мат в 3 хода.

14. Белые: Крf3 Фf7, Сb4; черные: Крb8. Мат в 3 хода на вертикальной цилиндрической доске.

Срок отправки решений — 25 сентября 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14»).

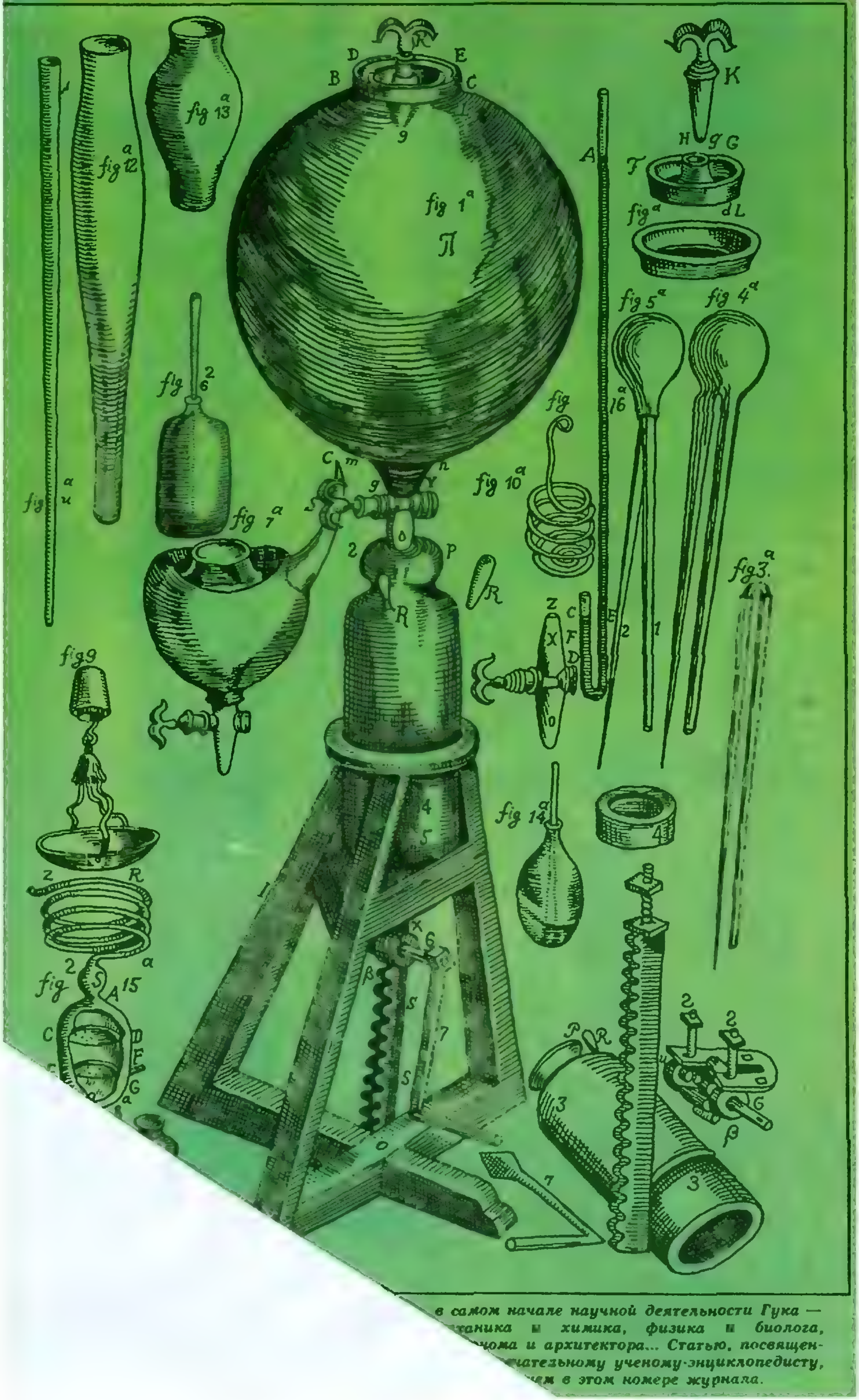


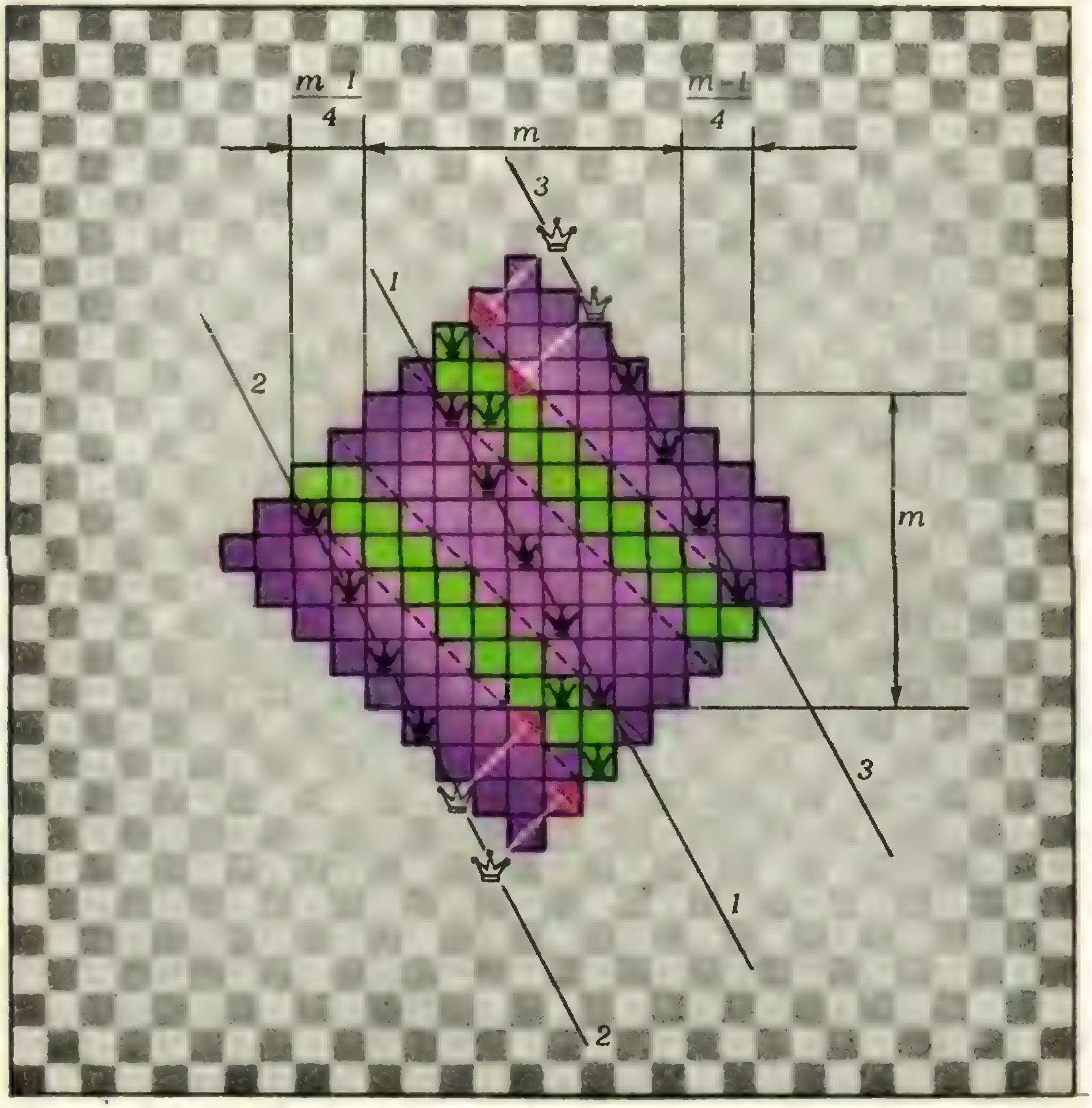
fig 1ª
fig 12ª
fig 13ª
fig 6²
fig 7ª
fig 9
fig 15ª
fig 10ª
fig 14ª
fig 16ª
fig 5ª
fig 4ª
fig 3ª
K
D
E
B
C
A
R
P
H
G
L
Z
X
F
S

в самом начале научной деятельности Гука —
ханика и химика, физика и биолога,
нома и архитектора... Статью, посвящен-
ательному ученому-энциклопедисту,
ем в этом номере журнала.

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Семнадцать черных ферзей, стоящих на этой «шахматной доске 30×31», доминируют на ней, то есть пробивают все ее 930 клеток без исключения. Можете проверить! Эту остроумную расстановку ферзей придумал В. Г. Чванов, она лишь одна из бесконечной серии решений «Задачи о доминировании на доске n×n» — именно, для случая $n=(7m-1)/2$, $m=9$, $n=31$. Эта хитрая расстановка получается из более простой расстановки семнадцати ферзей (13 черных, 4 белых) по линиям 1—1, 2—2, 3—3. Эти ферзи не пробивают все клетки доски (какие именно?), но после сдвига четырех белых ферзей (по красным стрелкам), полученная система из 17 черных ферзей уже решает задачу о доминировании на доске 30×31. Впрочем, можно прибавить еще 31 клетку к этой доске (в каком месте?) и получить решение задачи для доски 31×31. Подробнее об этих построениях можно прочитать в статье В. Г. Чванова внутри этого номера.



НОМЕР
8

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 8 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*В. А. Фабрикант.* Что такое нелинейная оптика	*V. A. Fabrikant.* What is non-linear optics
9	*Ю. П. Соловьев, А. Б. Сосинский.* Геометрия скользящих векторов	*Yu. P. Soloviev, A. B. Sossinski.* The geometry of sliding vectors
18	*И. И. Мазин.* Приглашение в парную (или Физика в бане)	*I. I. Mazin.* Invitation to a sauna (or Physics in the bath)
22	*Ю. С. Петров.* Висячие мосты	*Yu. S. Petrov.* Suspension bridges
	Наш календарь	**Our calendar**
25	Открытие рентгеновских лучей	The discovery of X-rays
	Математический кружок	**Mathematics circle**
26	*С. Б. Белый, Е. А. Ровенский.* Обобщенная задача о ферзях	*S. B. Belyi, E. A. Rovenski.* The generalized Queen problem
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*Н. А. Родина.* О всемирном тяготении, приливах и отливах	*N. A. Rodina.* About universal gravitation and tides
32	Фестиваль задач	Problem festival
36	*Л. Кэрролл.* Поросенок и перец	*L. Carroll.* Pigs and peppers
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
40	Задачи М936—М940; Ф948—Ф952	Problems M936—M940; P948—P952
43	Решения задач М916—М920; Ф927—Ф932	Solutions M916—M920; P927—P932
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
52	*С. М. Козел.* Парадоксы плоского конденсатора	*S. M. Kozel.* Paradoxes of the plane capacitor
	Информация	**Information**
28	Традиционный праздник юных математиков	Traditional feast of young mathematicians
50	Вечерняя физическая школа при МГУ	Moscow university evening physics school
57	VII Московский турнир юных физиков	7th Moscow young physicist's tournament
58	VIII турнир юных физиков	8th young physicist's tournament
60	Заочная школа при НГУ	Novosibirsk university correspondence school
62	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(51)*	**Kvant smiles** *(51)*
	Смесь *(8, 17, 21)*	**Miscellaneous** *(8, 17, 21)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Шахматы на параллельных досках *(3-я с. обложки)*	Chess on parallel boards *(3rd cover page)*

© *Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1985*

Лазерная экспериментальная установка для изучения нелинейно-оптических явлений. (Фотографии к статье сделаны в лаборатории лазерной биофизики и биомедицины физического факультета МГУ.

Что такое нелинейная оптика

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

За последние двадцать пять лет произошло быстрое развитие нового раздела физической науки — нелинейной оптики. Справедливости ради надо сказать, что еще в двадцатых годах нашего столетия С. И. Вавилов упорно *искал нелинейные оптические эффекты*. Результатом этих исследований стала работа С. И. Вавилова и В. Л. *Лёвшина* 1926 года, в которой впервые наблюдался нелинейный оптический эффект — уменьшение коэффициента поглощения уранового стекла при прохождении через него света от яркой искры. В честь этой пионерской работы, по предложению академика Р. В. Хохлова, советские конференции, посвященные нелинейной оптике, называются вавиловскими. Создание в 1960 году лазеров вызвало буквально взрыв работ по нелинейной оптике.

Прежде чем перейти к рассказу о некоторых нелинейных оптических явлениях, напомним основные положения линейной оптики, которые, несмотря на свою привычность, в действительности далеко не тривиальны.

«Несовершенство опыта способствует развитию науки»

Одним из основополагающих принципов, лежащих в основе линейной оптики, служит принцип суперпозиции, согласно которому при прохождении одной световой волны сквозь другую обе распространяются, не взаимодействуя друг с другом. Правда, часто говорят, что при интерференции темная полоса образуется там, где одна из интерферирующих волн «гасит» другую. Это, однако, не означает, что волны взаимодействуют друг с другом. Здесь просто происходит векторное сложение противоположно направленных электрических полей обеих волн. При взаимодействии же волн должны были бы измениться под влиянием друг на друга сами эти электрические поля, что при интерференции не имеет места.

Дальше мы увидим, что в действительности взаимодействие волн должно быть всегда, однако результаты его заметны лишь при определенных условиях. Прежде всего — когда интенсивности *) взаимодействующих волн велики. Это условие и определяло направление поисков. Так С. И. Вавилов пытался обнаружить

---

*) Интенсивность волны — это энергия, проходящая через единицу площади волнового фронта за единицу времени. Величина интенсивности пропорциональна квадрату амплитуды волны.

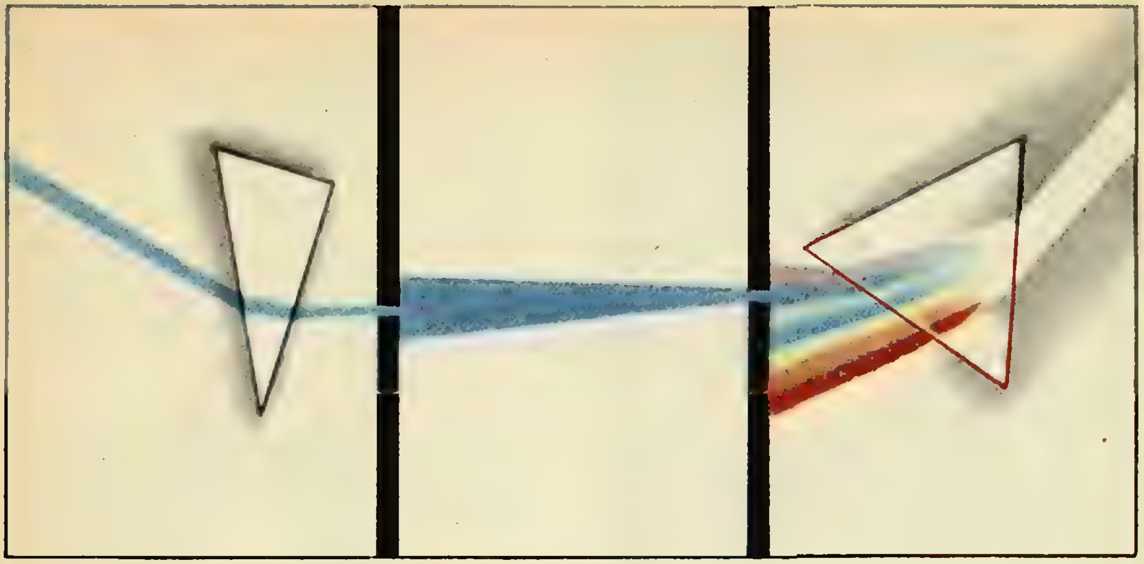


Рис. 1.

нарушение принципа суперпозиции в солнечной короне, где он надеялся найти следы рассеяния света на свете. Однако эти исследования завершились безрезультатно. Заметим, что если бы рассеяние света на свете происходило при обычных (для земных условий) интенсивностях света, то для человека это имело бы весьма неприятные последствия: ведь видимый мир был бы затянут, как туманом, световой пеленой.

Другой важной основой линейной оптики служит принцип неизменности частоты света при прохождении его сквозь различные среды. Он был открыт Ньютоном в процессе его замечательных оптических экспериментов. В 1671 году на их основании Ньютон сформулировал следующее положение: «Вид цвета, свойственный каждому отдельному сорту лучей, не изменяется ни преломлением, ни отражением от естественных тел, ни какой-либо другой причиной, которую я мог наблюдать» (рисунок 1).

Счастливым для развития физики оказалось то обстоятельство, что экспериментальные возможности Ньютона, в смысле интенсивности источников света, были весьма ограничены (солнечный луч, прошедший сквозь щель в оконной ставне). Если бы у него в руках оказался лазер, то наблюдаемая картина могла бы сильно осложниться, что задержало бы развитие оптики. В связи с опытами Ньютона С. И. Вавилов подчеркивал: «Несовершенство опыта способствует развитию науки». Это утверждение звучит парадоксально, но преждевременное обнаружение некоторых деталей в эксперименте может задержать на долгие годы истолкование экспериментальных данных и развитие теории.

Границы применимости линейной оптики — где они?

Практически все нелинейные эффекты наблюдаются при распространении света в веществе. В принципе, теория предсказывает возможность их наблюдения и в вакууме, однако до сих пор там они обнаружены не были.

В классической оптике при объяснении процесса распространения света в среде используют модель атома как системы, в которой электрон как бы закреплен на пружине. Проходящая световая волна вызывает своим электрическим полем вынужденные колебания электрона. Эти колебания в свою очередь порождают в окружающем атом пространстве электромагнитные волны, то есть сам атом начинает излучать. Возникающая вторичная волна по частоте совпадает с первичной волной (при вынужденных колебаниях частота колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы). При этом разность фаз этих волн остается постоянной (такие волны называются когерентными). Сложение всех вторичных волн, излучаемых различными атомами, с первичной дает результирующую волну, распространяющуюся в среде со скоростью v, отличной от скорости c распространения света в вакууме. Это и приводит к тому, что показатель преломления среды $n=c/v$ оказывается отличным от единицы.

Смещения электрона, вызванные световой волной от обычного источника света, весьма малы. Они определяются соотношением напряженностей электрического поля световой волны и внутриатомного поля. В волнах от обычных источников света напряженность поля не превышает 10^3 В/см. Напряженность же внутриатомного поля — порядка 10^9 В/см. Таким образом, при воздействии поля световой волны смещение электрона не превышает 10^{-6} от радиуса атома, что составляет 10^{-14} см. Величина порядка процентов от радиуса атомного ядра!

В лазерных пучках напряженности поля достигают 10^6—10^7 В/см и, соответственно, смещения могут быть гораздо большими.

При малых относительных смещениях электрона можно считать, что действующая на электрон возвращающая сила выражается законом: $F=-kx$, то есть имеет место линейная зависимость силы F от смещения x (закон Гука для обычной пружинки). Однако с ростом величины смещений (например, в поле лазерного пучка) должны проявиться отклонения от этого закона. В простейшем случае, который будет рассмотрен ниже, отклонение от линейной зависимости можно принять в виде $F=-kx+\alpha x^2$, где нелинейное слагаемое αx^2 сказывается лишь при достаточно больших смещениях (квадрат малой величины мал по сравнению с самой величиной). Заметим, что теперь величина силы асимметрично изменяется при изменении знака смещения (рисунок 2). В одну сторону электрон оказывается сместить легче, чем в другую (например, при $\alpha>0$ в сторону положительных x легче, чем в сторону отрицательных).

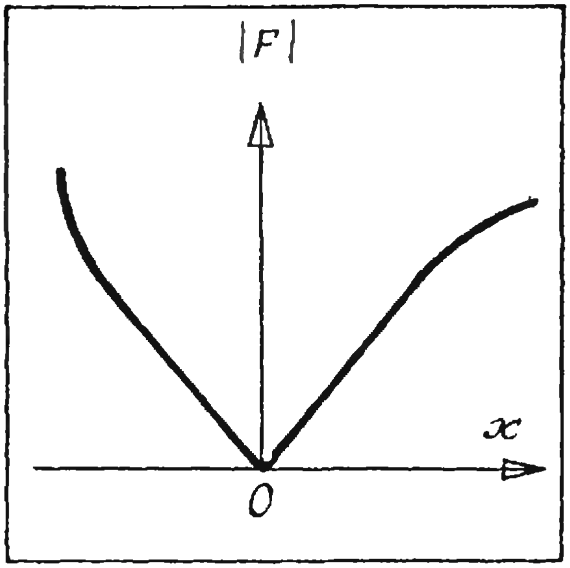


Рис. 2.

Итак, можно сказать, что приближение линейной оптики соответствует выбору простой линейной зависимости возвращающей силы, действующей на электрон, от смещения. Мир нелинейной оптики начинается там, где становятся существенными отклонения от этого простого закона и следует принимать во внимание реальный нелинейный характер этой зависимости.

В линейной оптике оптические характеристики вещества (например, показатель преломления) зависят только от свойств самой среды и частоты проходящего через нее света, однако на них не влияет его интенсивность. Если же интенсивность проходящей через среду световой волны оказывается столь большой, что нелинейность возвращающей силы не учитывать уже нельзя, то свойства среды начинают сами зависеть от интенсивности проходящей волны. К чему это приводит, вы сейчас увидите.

Генерация гармоник

Рассмотрим простейший случай, о котором уже шла речь выше. Уравнение движения электрона будет иметь вид

$$ma=-kx+\alpha x^2+eE_0\cos\omega t, \qquad (1)$$

где m — масса электрона, $a=x''$ — его ускорение, а $eE_0\cos\omega t$ — сила, действующая на электрон со стороны электрического поля световой волны (E_0 — амплитуда поля, ω — частота). Задача состоит в том, чтобы найти из этого уравнения зависимость $x(t)$ и на ее основании уже судить о свойствах вторичных волн в рассматриваемой среде. К сожалению, математика не дает нам точных методов решения подобных нелинейных уравнений.

Замечательный английский физик Рэлей, занимавшийся теорией колебаний, предложил приближенный метод решения задачи, обладающий большой эффективностью. Так как нелинейное слагаемое αx^2 проявляет себя лишь при достаточно больших x, Рэлей в качестве нулевого приближения пренебрег членом αx^2. После этого осталось линейное уравнение

$$ma=-kx+eE_0\cos\omega t$$

такое же, как уравнение вынужденных колебаний грузика на пружинке под действием периодической внешней силы. Понятно, что в этом случае движение будет происходить по гармоническому закону, но не с собственной частотой $\omega_0=\sqrt{k/m}$, а с частотой ω вынуждающей силы:

$$x_0(t)=beE_0\cos(\omega t+\varphi),$$

где beE_0 — амплитуда вынужденных колебаний грузика (для удобства рассмотрения в амплитуде выделен сомножитель eE_0), а φ — сдвиг фазы этого колебания по сравнению с фазой вынуждающей силы.

Для получения следующего приближения Рэлей в уравнении (1) заменил в нелинейном слагаемом величину $x^2(t)$ найденной приближенной величиной $x_0^2(t)$. В результате уравнение (1) из нелинейного превращается в линейное (x в него входит только в первой степени):

$$ma=-kx+\alpha b^2e^2E_0^2\cos^2\omega t+eE_0\cos\omega t. \quad (2)$$

Воспользоваашись известным тригонометрическим соотношением

$$\cos^2\omega t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t),$$

получаем окончательно

$$ma=-kx+\left(\frac{1}{2}\alpha b^2e^2E_0^2+\frac{1}{2}\alpha b^2e^2E_0^2\cos 2\omega t+\right.$$
$$\left.+eE_0\cos\omega t\right).$$

Из этого уравнения движения мы видим, что на электрон как бы действуют три вынуждающих силы (слагаемые, заключенные в скобки). Первая из них, не зависящая от времени, вызовет просто постоянное смещение электрона из положения равновесия (асимметрия, о которой мы уже упоминали выше).

Вторая сила, изменяющаяся с частотой 2ω, вызывает появление в смещении электрона составляющей, изменяющейся с той же частотой 2ω. Подчеркнем, что амплитуда этой составляющей пропорциональна квадрату амплитуды световой волны. Наконец, последняя сила, изменяющаяся с частотой ω, нам уже знакома. Она соответствует полю падающей световой волны, благодаря которому и возникают вторичные волны. Амплитуда этой составляющей пропорциональна амплитуде падающей световой волны. С ростом интенсивности световой волны роль второй силы по отношению к третьей увеличивается (квадрат большой величины велик по сравнению с самой величиной).

Таким образом, вынужденные колебания электрона будут состоять из двух гармонических колебаний с частотами ω и 2ω. Соответственно и вторичные волны, испускаемые атомами (ионами) кристалла, будут состоять из волн с той же частотой ω, что и первичная волна, а также из волн с удвоенной частотой. Получается, что из-за нелинейного слагаемого αx^2 в действующей на электрон возвращающей силе в кристалле возникает вторичная волна с удвоенной частотой (ее называют второй гармоникой) и тем

На фотографии показано, как инфракрасный луч лазера (λ=1064 нм) преобразуется в видимый свет (λ=532 нм) при прохождении через нелинейную оптическую среду. Ход невидимого инфракрасного луча от лазера до нелинейного преобразователя можно проследить по выходящему обратно из преобразователя слабому «отраженному» лучу.

самым нарушается принцип постоянства частоты, царивший в линейной оптике.

С помощью нелинейных эффектов можно преобразовать частоту светового луча, не нарушая его направленности. Это крайне важно для практики, особенно в лазерной технике. Например, лазер на неодимовом стекле дает мощное, но невидимое инфракрасное излучение с длиной волны 1064 нм. Если удвоить его частоту, длина волны станет в два раза короче — 532 нм, что соответствует зеленому свету, прекрасно видимому глазом человека.

В радиотехнике нелинейный эффект преобразования частоты наблюдался задолго до появления нелинейной оптики. Когда в Москве была построена мощная радиостанция, то при приеме в Горьком передач радиостанций, находящихся в городах к западу от Москвы, стали прослушиваться и московские передачи. Это объясняется тем, что мощные волны московской радиостанции изменяют ионосферу над Москвой и тем самым модулируют проходящие радиоволны, принимаемые в Горьком (рисунок 3).

Условие синхронизма

И все же не следует думать, что преобразование частоты света с высоким коэффициентом полезного действия (КПД) представляет собой простую задачу. Так, в работе Франкена с сотрудниками, опубликованной в 1961 году и содержащей описание первых наблюдений удвоения частоты света, КПД (то есть отношение интенсивности входящей волны с частотой 2ω к интенсивности падающей волны с частотой ω) составлял всего лишь 10^{-10}! В этих опытах красный свет рубинового лазера с длиной волны 0,6943 мкм превращался в ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}3471$ мкм (напомним, что длина волны обратно пропорциональна ее частоте). В качестве кристаллической нелинейной среды был использован кварц.

Для того чтобы эффект генерации гармоник проявился в полной мере, необходимо, чтобы фазы вторичных волн на выходе из кристалла были согласованы (условие волнового синхронизма). Только в этом случае сложение вторичных волн дает интенсивную результирующую волну.

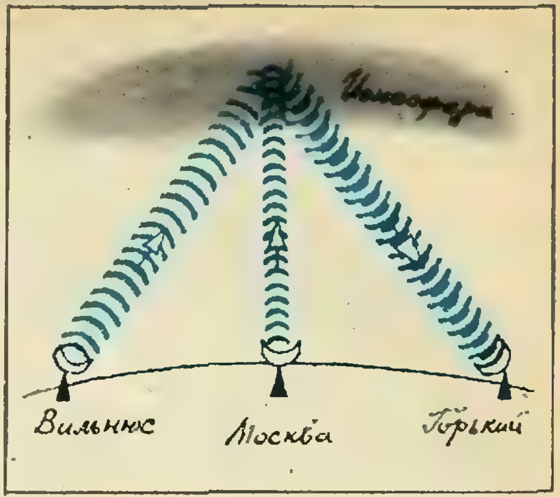


Рис. 3.

Атомы же распределены по всей длине кристалла, сквозь который проходит свет. Поэтому генерируемые ими вторичные волны будут иметь различные начальные фазы (рисунок 4). Чем дальше от источника находится атом, тем позднее до него дойдет первичная волна и тем позже сам он начнет излучать вторичную. С другой стороны, этот, более далекий от источника, атом окажется ближе к приемнику. Следовательно, его вторичной волне придется пройти меньший путь, чем волне, испущенной более близким к источнику света атомом.

В линейной оптике первичная и вторичная волны имеют одинаковые частоты, а следовательно, и одинаковые скорости распространения в среде. Поэтому в таком случае не важно, где произошло преобразование первичной волны во вторичную — все они приходят к приемнику с одной и той же фазой. Иначе обстоит дело в нелинейной оптике. Показатель преломления среды зависит от частоты (дисперсия), поэтому вторичная волна с частотой

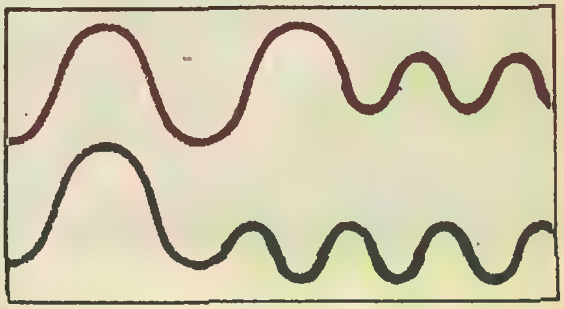


Рис. 4.

2ω распространяется, вообще говоря, уже с другой скоростью, чем первичная (частота которой ω). Поэтому фаза, с которой вторичная волна приходит к приемнику, существенно зависит от того, на каком расстоянии от источника произошло преобразование частоты. Понятно, что наибольшая интенсивность результирующей вторичные волны будет достигнута в том случае, если все вторичные волны от отдельных атомов придут к приемнику с одинаковыми фазами.

Этого можно добиться подбором среды, у которой показатели преломления окажутся одинаковыми для волн с частотами ω и 2ω.

Так, например, обеспечив выполнение условия волнового синхронизма, в кристаллах KH_2PO_4 удается удваивать частоту световой волны с КПД, превышающим 90 %!

«Квантовые» нелинейные эффекты

До сих пор, рассматривая оптические нелинейные явления, мы не выходили за рамки представлений классической физики. Однако есть ряд нелинейных эффектов, которые объяснимы только на языке квантовой физики.

Так, например, в настоящее время широкое применение в лазерной технике нашло резкое просветление, то есть уменьшение коэффициента поглощения некоторых растворов (крипто- и фталоцианина в бензоле) при прохождении через них мощных световых пучков. Кювета с таким раствором представляет как бы автоматический затвор, пропускающий мощный световой пучок и задерживающий слабые. Попробуем разобраться в этом явлении.

Согласно квантовым представлениям атом может обладать только определенными запасами энергии — находиться на определенных энергетических уровнях («Физика 10», § 13). Атом (или молекула) может поглощать свет с частотой ν, удовлетворяющей условию Бора:

$$h\nu = E_2 - E_1, \qquad (3)$$

где h — постоянная Планка, а E_1 и E_2 — энергии атома на двух уровнях. При этом атом переходит с уровня E_1 на уровень E_2. Очень важно, что возбужденный атом (или молекула), поглотивший энергию фотона $h\nu$, задерживается на верхнем энергетическом уровне конечное время. У молекулы фталоцианина оно в масштабах атомного мира огромно — порядка 10^{-3} с. Коэффициент поглощения среды пропорционален, естественно, числу «голодных» молекул, находящихся на нижнем энергетическом уровне E_1, ибо только они способны поглощать фотоны с частотой, удовлетворяющей условию (3). Но при прохождении мощного светового пучка произойдет большое число актов поглощения фотонов веществом, при которых многие молекулы перейдут в разряд «сытых», поднявшись на уровень E_2, где и застрянут на время порядка 10^{-3} с. Это приведет к заметному уменьшению числа «голодных» молекул, находящихся на нижнем уровне E_1. Коэффициент поглощения резко уменьшится. Мощный световой пучок как бы пробивает себе путь в поглощающей среде.

Остановимся немного на многофотонных процессах, когда квантовая «разборчивость в еде» атомов и молекул ослабляется. Оказывается, что в мощных световых пучках среда начинает поглощать излучение самых различных частот. Объясняется это тем, что условие Бора учитывает возможность поглощения атомом лишь одного фотона, чему соответствует выражение (3). При учете возможности многофотонных процессов поглощенная атомом или молекулой порция энергии должна быть равна разности энергий между какими-либо двумя уровнями, а уж сколько фотонов при этом поглотится — это дело хозяйское.

В обычных условиях, при малых интенсивностях световых пучков, плотность фотонов невелика, а вероятность одновременного поглощения двух или нескольких фотонов мала. Однако боровское условие (3) в общем случае следует записать в виде

$$h\nu_1 + h\nu_2 + \ldots = E_2 - E_1.$$

Это приводит к эффекту, обратному описанному выше просветлению среды. В случае мощных пучков среда начинает поглощать свет с теми частотами, для которых она была прозрачна при малых интенсивностях.

Интересно, что в мощных лазерных пучках за счет многофотонных процессов фотоэффект теряет свой квантовый характер. Известное уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu=P+\frac{mv^2}{2},$$

где P — работа выхода, $mv^2/2$ — кинетическая энергия вырванного светом электрона, заменяется уравнением

$$Nh\nu=P+\frac{mv^2}{2}, \qquad (4)$$

где N — число фотонов, поглощаемых электроном одновременно. Из уравнения (4) следует, что с ростом N (интенсивности света) должна расти и кинетическая энергия вырванных электронов. Кроме того, красная граница фотоэффекта смещается в область малых частот $\left(\nu_{\text{кр}}=\frac{P}{hN}\right)$.

Характерно, что в работе Эйнштейна 1905 года, удостоенной Нобелевской премии и содержащей вывод основного уравнения теории фотоэффекта, имеется весьма существенное замечание: «Простейшим будет случай, когда один световой квант (фотон) отдает всю свою энергию одному электрону; мы и будем предполагать, что это и происходит в действительности». Это замечание показывает, что Эйнштейн понимал принципиальную возможность многофотонных процессов, но считал возможным им пренебречь. Это было вполне законно до появления лазеров, и многочисленные эксперименты подтверждали справедливость уравнения Эйнштейна. В данном случае опять-таки была полезна ограниченность возможностей эксперимента (в смысле интенсивности света). Она способствовала укреплению позиций квантовой теории. Когда эта теория развилась и окрепла, ей стали по плечу и более сложные эффекты нелинейной оптики, наблюдаемые в мощных лазерных пучках.

Встреча с читателями журнала

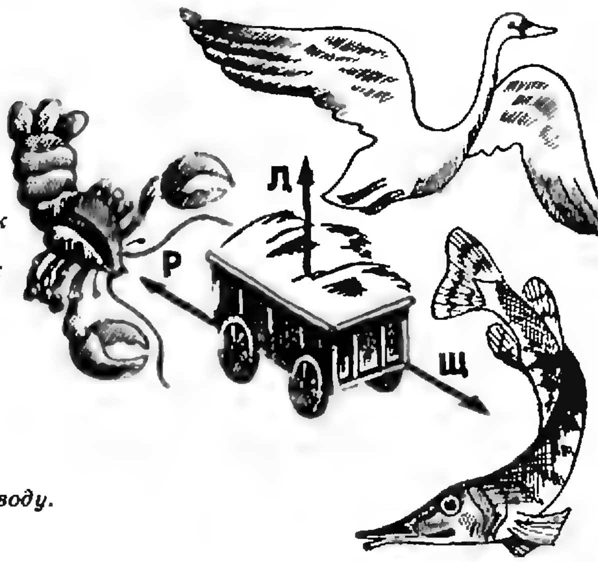
7 июня состоялась встреча членов редакционной коллегии журнала «Квант» с преподавателями математики, занимавшимися на курсах повышения квалификации учителей средних школ при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. В этой встрече, проходившей на механико-математическом факультете МГУ, приняли участие заместитель главного редактора журнала Ю. П. Соловьев, члены редакционной коллегии В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, А. П. Савин, заведующий отделом математики журнала А. Б. Сосинский. Они подробно рассказали об истории журнала, его задачах и структуре, о планах работы. Особое внимание было уделено проблеме дальнейшего совершенствования материалов журнала, прежде всего в связи с реформой общеобразовательной и профессиональной школы. Большой интерес вызвало обсуждение вопроса о формах участия журнала в решении проблемы компьютеризации школы, помощи ученикам и учителям в изучении нового школьного предмета «Основы информатики и вычислительной техники». Члены редакционной коллегии ответили на многочисленные вопросы участников встречи.

Подчеркивая большое значение журнала в развитии интереса учащихся к физике и математике, многие выступившие на встрече учителя высказали в то же время критические замечания и конструктивные предложения, направленные на дальнейшее улучшение «Кванта». Состоявшееся обсуждение показало, что у журнала имеется еще немало возможностей для того, чтобы лучше и полнее удовлетворять запросы читателей, чтобы стать более доступным и популярным среди школьников, учителей, студентов и любителей математики. Итоги состоявшегося полезного разговора членов редакционной коллегии с учителями будут учтены при планировании дальнейшей работы журнала.

Н. Р.

Геометрия скользящих векторов

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ



> *...Да Лебедь рвется в облака,*
> *Рак пятится назад, а Щука тянет в воду.*

Вы, конечно, помните вынесенные в эпиграф строчки замечательной басни И. А. Крылова. А задумывались ли вы над тем, как рассчитать движение воза, если известно, с какими силами его тащат лебедь, рак и щука? Задача эта совершенно естественная, можно сказать, типичная: к некоторому твердому массивному телу в определенных местах приложены силы — что произойдет? Как ни странно, привычный векторный аппарат, изучаемый в школе на уроках физики и математики, совсем непригоден для решения подобных задач. Когда мы должны принимать в расчет не только массу, но и размеры тела, когда мы имеем дело не с абстрактной материальной точкой, а с настоящим предметом, то не всегда ясно, как складывать векторы, приложенные к предмету в разных местах, что можно и чего нельзя делать с этими векторами и, собственно говоря, что представляют собой такие «настоящие» векторы.

Ответ на эти вопросы — в виде небольшой математической теории (*теории скользящих векторов*) — и составляет предмет нашей статьи.

Какие бывают векторы?

Вектор в пространстве или на плоскости принято изображать направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. Он задается двумя точками: своим *началом* (или *точкой приложения*) A и *концом* B. Если отрезок AB неограниченно продолжить в обе стороны, получится прямая, которая называется *линией действия* вектора AB.

Все векторы, в зависимости от того, какие геометрические или физические величины они представляют, могут быть разбиты на три следующих типа.

1°. Может случиться, что два *геометрически равных* вектора изображают одну и ту же физическую или механическую величину. (Напомним, что в геометрии два вектора (направленных отрезка) называются *равными*, если их линии действия параллельны, длины равны и порядок точек задает одно и то же направление на их линиях действия, или, другими словами, если они совмещаются параллельным переносом.) Такого рода векторы, не имеющие ни определенной линии действия, ни определенной точки приложения, называют свободными. Например, вектор магнитной индукции постоянного магнитного поля или вектор скорости одной инерциальной системы относительно другой — свободные векторы; их можно считать приложенными к любой точке. Математики, как правило, тоже изучают свободные векторы; простейший пример — вектор, задающий параллельный перенос: приложенный к любой точке, он указывает своим концом образ этой точки при данном переносе.

2°. С другой стороны, встречаются такие физические величины, что изображающие их векторы не могут быть отделены от своей точки приложения. Такого рода векторы называются связанными (или закрепленными). Так, вектор мгновенной скорости движущейся точки в данный момент времени — пример связанного вектора.

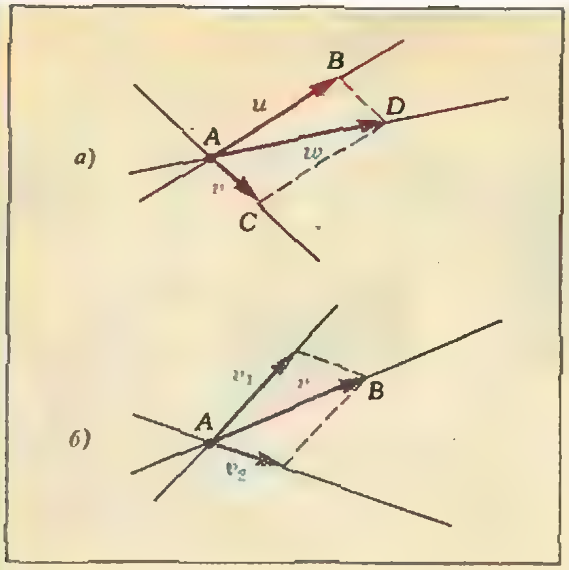


Рис. 1.

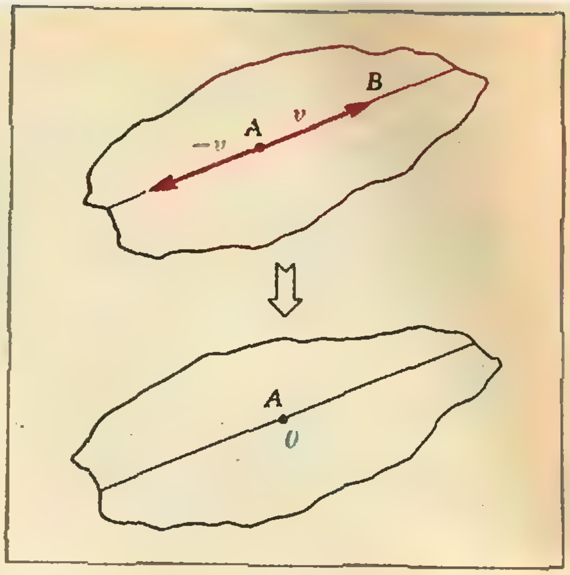


Рис. 2.

Его нельзя отделить от движущейся точки (если, конечно, все остальные точки пространства не перемещаются с той же скоростью).

3°. Наконец, может случиться, что два геометрически равных вектора изображают равные физические величины лишь при условии, что эти векторы имеют одну и ту же линию действия, и изображают не равные физические величины, если они имеют *различные линии действия*. Таковы, например, векторы, изображающие силы, действующие на твердое тело. Такие неотделимые от линии действия векторы называются *скользящими*. Это, так сказать, «настоящие» силовые векторы, реально действующие не на абстрактные «бесконечно малые» тела, а на жесткие предметы, имеющие определенные размеры и форму. Заметим, что здесь условие жесткости тела существенно: тело не растягивается и не сжимается, без потерь передает усилие вдоль линии действия, поэтому не важно, к какой именно точке на линии действия приложена сила; точка приложения *может как бы* скользить по линии действия.

О скользящих векторах и пойдет наш рассказ. В дальнейшем слово «вектор» без определения следует *понимать* именно как «скользящий вектор»; а когда речь пойдет о свободных или закрепленных векторах, это будет оговорено.

Мы будем обозначать (скользящие) векторы либо одной полужирной буквой, например $\mathbf{v}$, либо двумя буквами с чертой сверху, например $\overline{AB}$. Свободные же векторы мы будем обозначать буквами со стрелками, например $\vec{v}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Системы скользящих векторов

Итак, *(скользящий) вектор* $\mathbf{v}=\overline{AB}$ задается прямой $l=AB$ — своей линией действия — и направленным отрезком AB, лежащим на этой прямой. Два вектора $\mathbf{v}=\overline{AB}$ и $\mathbf{u}=\overline{CD}$ *считаются совпадающими*, если они задают один и тот же свободный вектор ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$) и, кроме того, у них одна и та же линия действия (прямые AB и CD совпадают).

В дальнейшем нас будут интересовать не отдельно взятые векторы, а конечные *системы* векторов ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$), ведь именно такие системы отвечают системам сил, действующим на твердое тело. Порядок перечисления векторов, разумеется, не существен; однако один и тот же вектор может встречаться в системе несколько раз, и его нужно считать столько раз, сколько он в ней встречается.

Наша цель — *научиться преобразовывать* системы друг к другу, сводить — если это возможно — произвольную систему к системам простейшего вида. Для этого нам потребуются

Элементарные операции и эквивалентность систем векторов

Когда линии действий двух векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ пересекаются, эти векторы можно *сложить* естественным образом: если $u=\overline{AB}$, $v=\overline{AC}$ (A — общая точка линий действия), то *суммой* $w=u+v$ векторов u и v называется вектор $w=\overline{AD}$, где точка D получена сложением $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$ по *правилу параллелограмма* (рис. 1,*а*). Такое сложение «пересекающихся» векторов будет нашей первой элементарной операцией; она сводит систему из двух векторов (u, v) к системе из одного вектора (w).

У этой операции есть обратная: если дан любой вектор $v=\overline{AB}$, то можно выбрать две произвольные прямые, проходящие через любую точку линии действия (скажем, через точку A), и *разложить* вектор $\vec{AB}$ по правилу параллелограмма (рис. 1,*б*). Из одного вектора (v) мы получим систему из двух векторов (v_1, v_2).

Обратите внимание, что складывать можно только векторы, чьи линии действия пересекаются или совпадают. Особенно просто складываются векторы с общей линией действия. В частности (рис. 2), так складываются два противоположных вектора, то есть векторы вида $v=\overline{AB}$ и $-v=\overline{BA}$; их суммой будет нуль-вектор $0=\overline{AA}$.

Наша вторая элементарная операция состоит в *уничтожении нуль-вектора*, то есть в переходе от системы вида $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v, -v)$ к системе $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. В частности (при $k=0$), простейшая система $(v, -v)$ сводится к пустой или нулевой системе, которую мы будем обозначать так же, как нуль-вектор — через 0.

У второй элементарной операции тоже есть обратная — *рождение нуль-вектора*, то есть переход от системы $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ к системе $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v, -v)$, где v — произвольный вектор.

Мы будем говорить, что две системы векторов $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ *эквивалентны*, или *приводятся друг к другу*, если от одной системы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности элементарных операций.

С точки зрения механики понятно, почему мы интересуемся элементарными операциями и эквивалентными системами. Ведь две эквивалентные системы сил всегда оказывают одинаковое воздействие на твердое тело, в чем можно убедиться не только экспериментально, а просто продумав физический смысл элементарных операций. Приводя же сложные системы к более простым, мы получаем возможность легко разобраться в том, какое именно результирующее воздействие данная сложная система сил оказывает на твердое тело.

Простейшие системы на плоскости; пары

Рассмотрим теперь подробнее приведение систем векторов к более простым для случая систем векторов на плоскости.

На рисунке 3 показано, как с помощью элементарных операций осуществляется приведение некоторых простейших систем векторов к другим таким системам. Мы советуем читателю внимательно проследить за всеми операциями и даже проделать их самостоятельно на бумаге.

Особое внимание следует обратить на рисунок 3,*г*. На нем показаны системы из двух противоположных векторов равной длины на параллельных линиях действия; такие системы коротко называют *парами*. Из рисунка видно, что пары не удается упростить, а можно только «повернуть», превратить в другую пару.

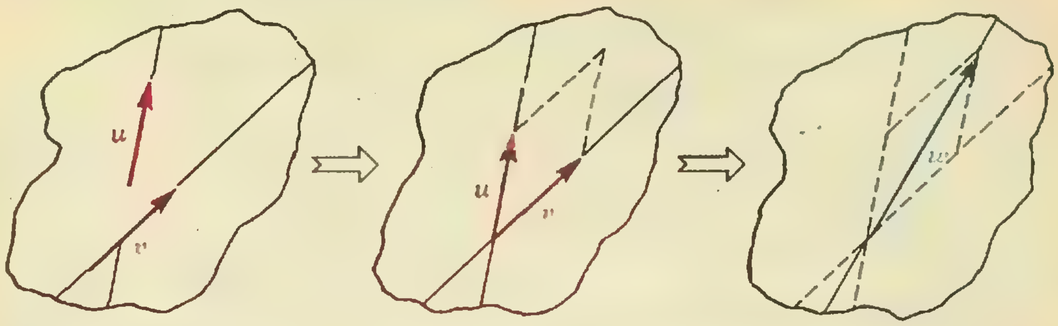
На рисунке 4 показана еще одна серия элементарных операций. Здесь происходит не упрощение исходной системы (из одного вектора), а ее усложнение: из данного вектора мы получаем вектор с другой линией действия и пару; впрочем, если этот рисунок прочитать в обратном порядке (а это осмысленно, ибо каждая элементарная операция имеет обратную), мы получим упрощение (система, состоящая из пары и вектора, приводится к системе из одного вектора). Переход $(v)\to(u, x, y)$ стоит запомнить, он нам потребуется несколько позже.

Заметим еще, что приемы приведения плоских систем бывают полезны и при рассмотрении пространственных задач. Так, пространственная система (**л**, **р**, **щ**, **т**) (**л** $=-$**т**, $|$**р**$|=|$**щ**$|$) применением операции разложения вектора приводится (рис. 5,*а*) к паре (u, v): **л** $=a+v$, **щ** $=b+u$, а плоская система (a, b, **л**, **т**), остающаяся после выделения из системы (**л**, **р**, **щ**, **т**) пары (u, v) (рис. 5,*а*), как легко видеть, приводится к нулю (рис. 5,*б*)

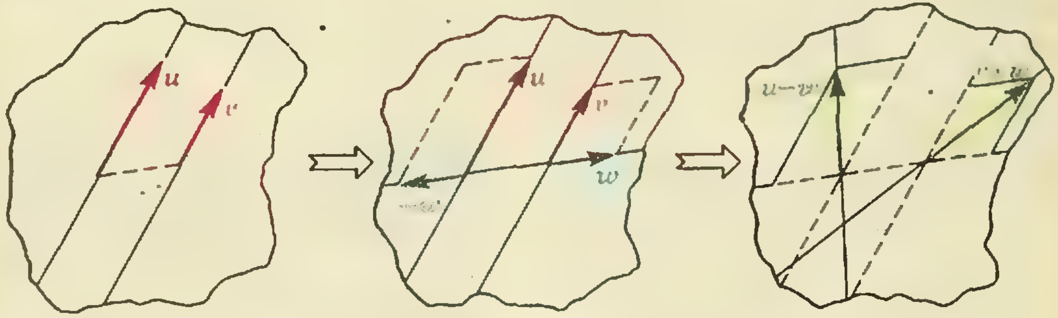
Момент вектора и момент пары

Выше мы видели, что пару векторов нельзя привести к одному скользящему вектору. Однако пара допускает

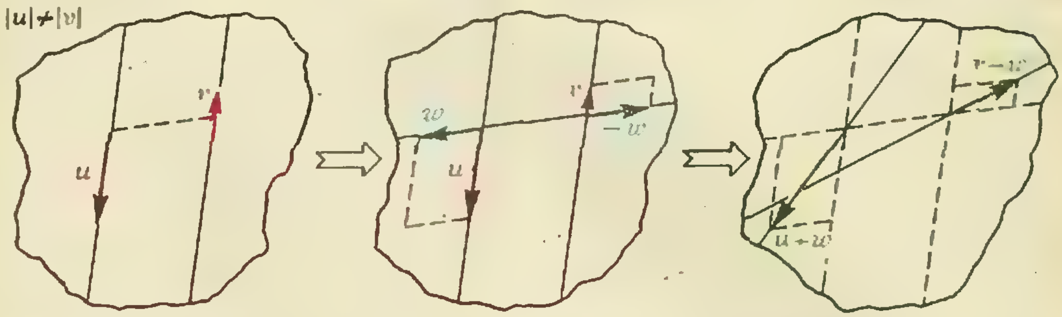
Простейшие преобразования плоских систем:



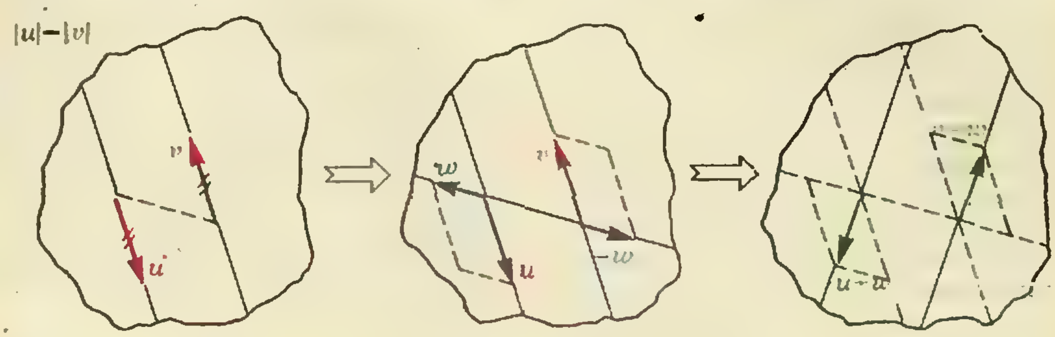
а) два пересекающихся вектора → один вектор;


u
v
u
v
w
−w
u−w
v+w

б) два сонаправленных вектора → два пересекающихся вектора;


|u|≠|v|
v
u
w
v
−w
u
v−w
u+w

в) два противонаправленных вектора разной длины → два пересекающихся вектора;


|u|=|v|
v
u
w
v
−w
u
u−w
u+w

г) два противонаправленных вектора равной длины (пара) → другая пара.

Рис. 3.

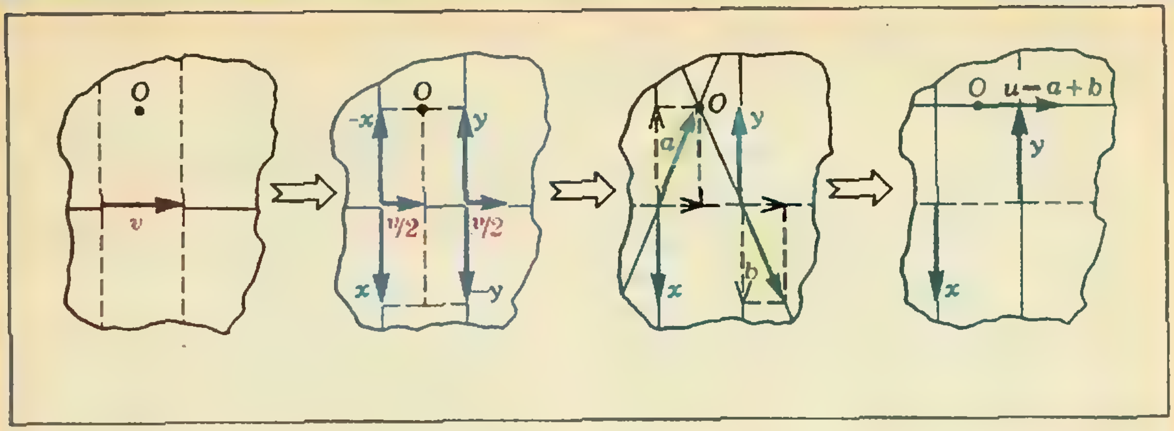


Рис. 4. Один вектор → вектор, проходящий через данную точку, и пара.

удобную векторную характеристику. Чтобы получить ее, нам придется начать издалека.

Пусть дан вектор $v=\overline{AB}\neq 0$ и точка O, не лежащая на его линии действия; тогда *моментом вектора v относительно точки O* называется (закрепленный!) вектор OM (приложенный к точке O) с линией действия, перпендикулярной плоскости OAB, длины $OM=r\cdot|v|$ (где r — *плечо* вектора v относительно O, то есть расстояние от O до прямой AB) и направленный так, чтобы направление вращения v вокруг O, наблюдаемое из точки M, было положительным (против часовой стрелки; рис. 6); если точка O лежит на линии действия вектора v, или $v=0$, то момент принимается равным нулю. Момент вектора играет важную роль в механике при изучении вращательного движения и имеет красивые приложения в геометрии.

Пусть теперь дана пара векторов $v=\overline{AB}$, $v'=\overline{A'B'}$ и точка O; пусть OM и OM' — моменты v и v' относительно O. Тогда легко проверить (сделайте это!), что длина и направление суммы моментов относительно точки O векторов v и v' не зависят от выбора этой точки, то есть эта сумма является свободным вектором. Его называют *(векторным) моментом пары (v, v')*. Легко проверяется, что длина векторного момента пары (v, v') равна $d\cdot|v|$, где d — расстояние между параллельными прямыми AB и $A'B'$. Пользуясь этим, а также утверждением задачи 3, нетрудно доказать, что *пара приводится к нулю тогда и только тогда, когда ее векторный момент равен нулю.*

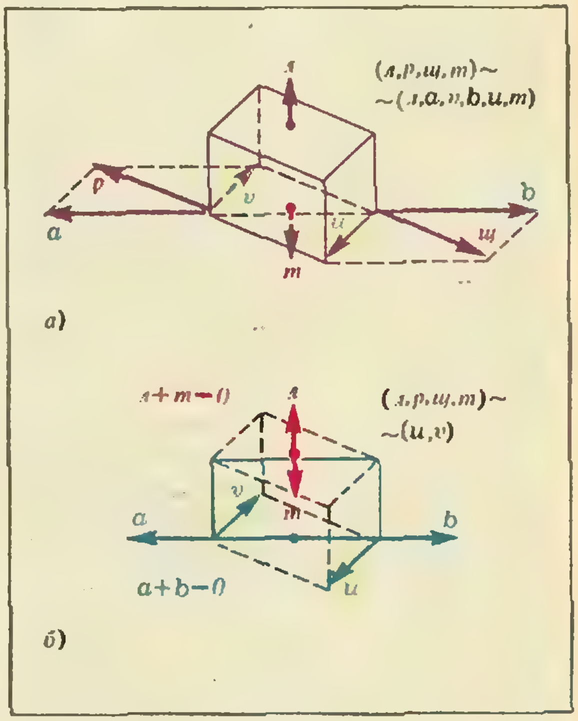


Рис. 5.

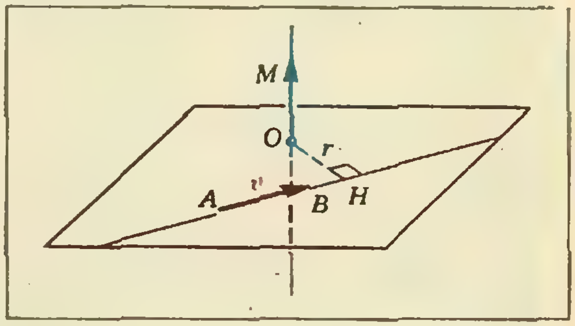


Рис. 6.

Приведение плоских систем к паре или вектору

Мы сейчас докажем следующую замечательную теорему.

Всякая (конечная) система (скользящих) векторов на плоскости приводится либо к одному вектору, либо к паре.

Доказательство. Если данная система состоит из одного вектора — теорема доказана. Если в системе есть векторы с пересекающимися линиями действия, то их можно попарно упрощать (см. рис. 3,*а*), пока не останутся лишь векторы с параллельными линиями действия. Если таких векторов три или более, то по крайней мере два из них сонаправлены, и мы можем упрощать систему дальше (см. рис. 3,*б*). Таким образом, переходы 3, *б* и 3, *а* позволяют нам свести доказательство теоремы к случаю двух противоположно направленных векторов с параллельными линиями действий. Если длины векторов различны, то переход 3, *в* с последующим переходом 3, *а* даст нам один вектор, а если длины равны, то мы получили пару; теперь теорема доказана полностью.

Заметим, во-первых, что доказательство не только устанавливает справедливость теоремы, но и дает эффективный способ для того, чтобы найти вектор (или пару), эквивалентный исходной системе. Во-вторых, если заранее выбрать некоторую фиксированную точку, то можно так проводить наши элементарные операции, чтобы привести данную систему к системе из одной пары и одного вектора, чья линия действия проходит через эту точку. Действительно, это верно, если система приводится к одной паре. Если же она приводится к одному вектору, то операция, показанная на рисунке 4, позволяет привести этот вектор к паре и вектору, чья линия действия проходит через заданную точку.

Исчисление систем векторов; базис

Мы научились приводить системы плоских векторов к простейшим системам. Однако оказывается, что системы можно не только приводить одну к другой, но и выражать одну через другие. При этом возникает исчисление систем векторов, очень похожее на обычное исчисление свободных векторов в пространстве.

Чтобы описать это исчисление, определим сумму двух систем $N=(u_1, u_2, ..., u_k)$ и $M=(v_1, v_2, ..., v_l)$ как их «свободное объединение», то есть систему

$$L=N+M=(u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_l)$$

(равенство систем векторов понимается здесь и ниже как их эквивалентность), и *произведение системы N на число λ* — как новую систему

$$\lambda N=(\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_k),$$

где λu обозначает вектор с той же линией действия, что u, длины $|\lambda| \cdot |u|$, направленный так же, как u, если $\lambda>0$, и в противоположную сторону, если $\lambda<0$.

Скажем, что система N *линейно выражается* через системы $M_1, ..., M_n$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, такие что

$$N=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+...+\lambda_n M_n.$$

Рассмотрим теперь случай систем на плоскости. Пусть O — произвольная точка плоскости, I и J — одновекторные системы, состоящие из ненулевых неколлинеарных векторов, приложенных к точке O, а K — любая (ненулевая) пара. Тогда системы I, J, K образуют *базис* в множестве систем плоских векторов, то есть любая система N однозначно линейно выражается через I, J, K:

$$N=\alpha I+\beta J+\gamma K$$

(числа α, β, γ однозначно определены системой N при фиксированных I, J, K).

Читатель, знакомый с понятием векторного пространства, конечно, понял, что это утверждение означает, что *множество классов эквивалентных систем (скользящих) векторов на плоскости относительно операций, определенных выше, образует векторное пространство размерности 3.*

* * *

Дойдя до этого места, авторы серьезно задумались, а потом заспорили: о каких именно приложениях теории скользящих векторов рассказать? Где только эта теория не используется! В статике (теория ферм и веревочных многоугольников), в строительной механике, в кинематике и динамике твердого тела, а ее обобщения используются в некоторых новейших разделах геометрии. Но нельзя объять необъятное. Здесь мы приведем только один пример — из кинематики твердого тела, а также, в конце статьи, ряд задач. Еще одно применение скользящих векторов — в строительной механике — рассматривается в заметке «Висячие мосты» на с. 22.

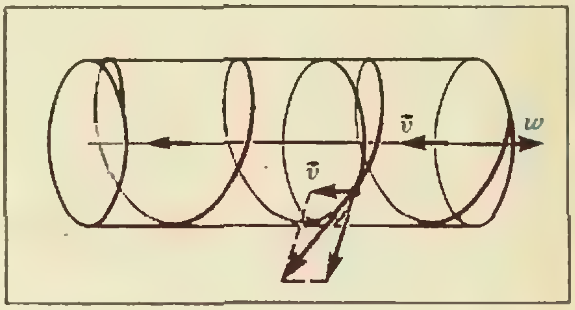


Рис. 7.

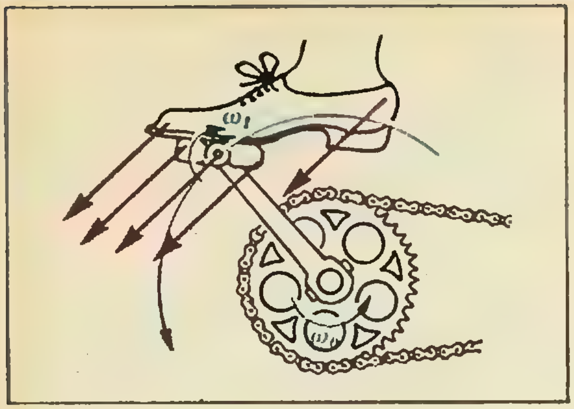


Рис. 8.

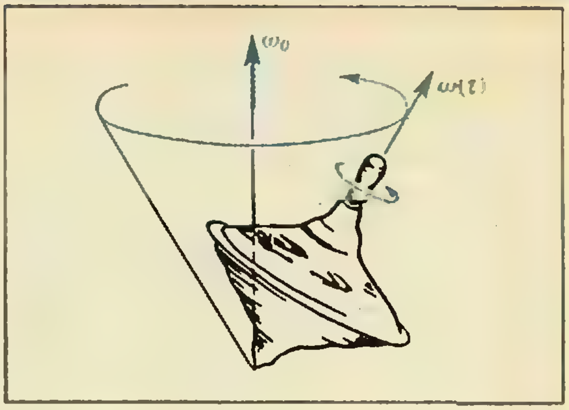


Рис. 9.

Вращение твердого тела

Здесь нас интересует такая *кинематическая задача:* как описать движение твердого тела, вращающегося около некоторой оси, если эта ось в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси? Мы будем считать задачу решенной, если дан способ нахождения вектора скорости любой наперед заданной точки тела (относительно неподвижной системы отсчета).

Ответ красиво формулируется в терминах скользящих векторов. Однако прежде чем его привести, мы немного расскажем о том, как вообще может двигаться твердое тело. Начнем с простейших примеров.

При *равномерном прямолинейном движении* твердое тело перемещается с постоянной скоростью в фиксированном направлении. При этом векторы скорости во всех точках одинаковы, их направление и величина неизменны во времени. Все точки движутся по прямым. Движение характеризуется одним свободным вектором скорости $\vec{v}$.

При *равномерном вращательном движении* тело движется с неизменной угловой скоростью (см. «Физику 8», § 17) около неподвижной оси. При этом вектор скорости любой точки на оси вращения — нулевой, а вектор скорости любой другой точки перпендикулярен плоскости, проходящей через эту точку и ось, и по величине пропорционален расстоянию от точки до оси. Точки оси остаются на месте, а остальные точки двигаются по окружностям с центрами на оси. Такое движение характеризуется одним (скользящим) вектором ω — угловой скоростью вращения, линия действия которого совпадает с осью вращения.

При *равномерном винтовом движении* тело равномерно вращается около оси (называемой винтовой осью) и одновременно равномерно перемещается вдоль нее. Вектор скорости каждой точки равен сумме вектора вращательного движения и вектора прямолинейного движения (рис. 7). Точки тела описывают винтовые линии, лишь точки винтовой оси двигаются прямолинейно вдоль нее самой. Движение характеризуется двумя векторами $(\vec{v}, \omega)$: (свободным) вектором перемещения $\vec{v}$ и (скользящим) вектором угловой скорости ω (рис. 7).

Возможные движения твердого тела в пространстве не исчерпываются, конечно, приведенными примерами, хотя бы потому, что в реальной ситуации векторы $\vec{v}$ и ω могут меняться во времени. Однако имеет место вот какой замечательный факт (см. задачу 10): сколь бы сложное движение ни совершало твердое тело, мгновенное распределение скоростей его точек будет таким же, как при одном из трех перечисленных выше типов движения. Отметим, кстати, что прямолинейное и вращательное движения можно считать частными случаями винтового. Два конкретных примера таких более сложных движений показаны на рисунках 8 и 9.

Вернемся теперь к нашей изначальной кинематической задаче: предположим, что подвижная ось M_1N_1 твердого тела вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 около неподвижной оси AB, а само тело к тому же вращается вокруг оси M_1N_1 с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. (Подчеркнем, что

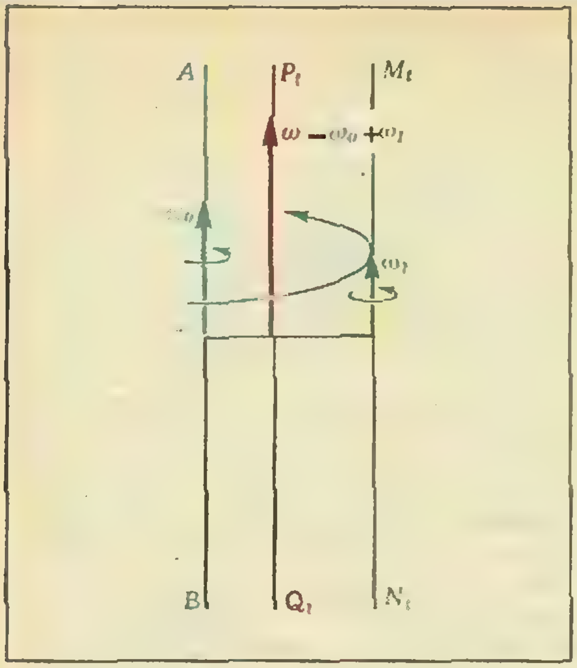


Рис. 10.

как скользящий вектор эта угловая скорость переменная, $\omega_1 = \omega_1(t)$,— меняется положение ее линии действия M_tN_t.) Как описать результирующее движение? Ответ зависит от взаимного расположения осей AB и M_tN_t.

1°. **Оси совпадают.** Тогда тело вращается около неподвижной оси $AB = M_tN_t$ с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$. (Пример: движение часовой или минутной стрелки часов, лежащих на Северном полюсе.)

2°. **Оси параллельны, причем** $\omega_0 \neq -\omega_1$. Тогда в любой момент t скорости всех точек тела такие же, как если бы оно равномерно вращалось с угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$ (здесь имеется в виду сумма скользящих векторов — см. рис. 3 и рис. 10) вокруг линии действия P_tQ_t вектора ω. Говорят, что тело имеет *мгновенную угловую скорость* ω и *мгновенную ось вращения* P_tQ_t. В данном случае мгновенная ось вращается вокруг неподвижной оси AB, оставаясь ей параллельной.

3°. **Оси параллельны, причем** $\omega_0 = -\omega_1$. Тогда тело совершает *поступательное* движение с вектором скорости $\vec{v}$, равным моменту пары (ω_0, ω_1), то есть в любой момент t скорости всех точек тела одинаковы и равны $\vec{v}$. (Пример: движение подвижной части педали; рис. 8.)

4°. **Оси пересекаются.** Этот случай аналогичен 2°: в любой момент t тело имеет мгновенную ось вращения и мгновенную угловую скорость $\omega = \omega_0 + \omega_1$. Разница в том, что здесь мгновенная ось описывает не цилиндр, а конус с вершиной в неподвижной точке тела — точке пересечения осей. (Пример: прецессионное движение волчка; рис. 9.)

5°. **Оси скрещиваются.** В этом случае тело имеет, так сказать, «мгновенную винтовую ось»; подробнее об этом см. в задачах 7, 8.

Мы видим, таким образом, что решение нашей кинематической задачи коротко и просто формулируется в терминах сложения скользящих векторов. Несложные доказательства утверждений 1°—4° мы оставляем читателю в качестве упражнений.

Разные задачи

1. Назовем *главным вектором* системы скользящих векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ сумму равных им свободных векторов $\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$, а *главным моментом* этой системы относительно точки O — сумму моментов векторов $v_1, \ldots, v_n$ относительно O. Докажите, что у любых двух эквивалентных систем главные векторы и главные моменты относительно одной и той же точки O совпадают.

2. Покажите, что любая система векторов, расположенных в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным вдоль сторон треугольника, произвольно выбранного в той же плоскости.

3. Докажите, что плоская система векторов, перпендикулярных к сторонам выпуклого n-угольника в их серединах, эквивалентна нулю, если длины векторов пропорциональны соответствующим сторонам и все векторы обращены внутрь многоугольника (или все наружу).

4. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для тетраэдра.

5*. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна шести векторам, направленным по ребрам произвольно выбранного тетраэдра.

6*. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна системе, состоящей из одного вектора (проходящего через произвольно выбранную точку) и из одной пары. Выведите отсюда, что системы скользящих векторов в пространстве, рассматриваемые с точностью до эквивалентности, образуют шестимерное векторное пространство.

Указание. Сначала приведите систему к трем скользящим векторам, проходящим через три произвольно выбранные точки (раскладывая каждый вектор системы по трем направлениям), затем к двум векторам, один из которых проходит через данную точку, и, наконец, примените построение из рисунка 4.

7. Твердое тело вращается с угловой скоростью ω около оси, которая в свою очередь движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}$. Докажите, что тело: а) совершает

винтовое движение, если $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$; б) имеет мгновенную ось вращения если $\vec{v} \perp \vec{\omega}$; в) имеет мгновенную винтовую ось, если $\vec{v}$ не параллельно и не перпендикулярно $\vec{\omega}$ (это значит, что все точки некоторой прямой — «винтовой оси» — имеют одинаковые скорости $\vec{v_1}$, направленные вдоль этой оси, а векторы скорости остальных точек равны сумме вектора $\vec{v_1}$ и вектора скорости мгновенного вращения данной точки около винтовой оси).

8*. Покажите, что в случае скрещивающихся осей AB и M_1N_1 в кинематической задаче, рассмотренной выше, тело имеет мгновенную винтовую ось, параллельную вектору $\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_1$ и пересекающую общий перпендикуляр осей AB и M_1N_1. Уточните положение мгновенной винтовой оси и вектор скорости вдоль оси.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.

9*. Опишите результирующее движение тела, совершающего мгновенное винтовое движение относительно оси, которая в свою очередь совершает винтовое движение относительно некоторой неподвижной оси.

10*. Докажите, что как бы ни двигалось твердое тело, в любой данный момент распределение скоростей его точек такое же, как если бы оно совершало равномерное (прямолинейное, вращательное или винтовое) движение.

11. Пользуясь тем, что момент вектора $\overline{AB}$ относительно точки O равен по величине удвоенной площади треугольника OAB, докажите, что множество точек внутри выпуклого многоугольника, для которых постоянна сумма расстояний до его сторон (точнее, прямых, содержащих стороны), есть либо отрезок, либо весь многоугольник, либо пустое множество.

Когда в товарищах согласья нет...

Вернемся теперь к басне. Предположим, что тяжелый воз, по форме напоминающий прямоугольный параллелепипед, стоит на дороге. На него действует сила тяжести т, которую можно считать приложенной к центру тяжести, но она компенсируется реакцией опоры: воз стоит на месте. Но вот явились преисполненные благих намерений товарищи: Лебедь, Рак и Щука и стали тянуть воз с силами л, р и щ (рис. 5). Что же произойдет?

Вооруженные теорией, мы теперь можем ответить на этот вопрос. Система сил (л, р, щ, т) — как и любая другая — приводится к паре и вектору (см. задачу 6). Как их найти? А мы это уже сделали, когда разбирали пример на с. 11 (см. рис. 5). У нас получилась пара (u, v) в горизонтальной плоскости. И теперь ясно, что будет: не сходя с места, воз начнет вращаться там, где стоял. Мы можем поэтому с уверенностью подтвердить слова И. А. Крылова:

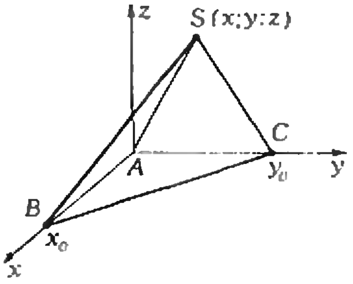
...Да только воз и ныне там!

Невозможный тетраэдр

В некоторых геометрических задачах требуется установить, существует ли фигура с теми или иными свойствами. Иногда ответ к таким задачам можно быстро получить с помощью координатного метода. Примером может служить следующая

Задача. *Возможна ли треугольная пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник, и все плоские углы при вершине — прямые?*

Решение. Будем вести рассуждения методом от противного. Пусть возможна пирамида $SABC$ (см. рисунок), о которой идет речь в условии задачи: $\widehat{A}=90°$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=90°$. На рисунке мы выбрали систему координат с началом в вершине A, ось OX направили по ребру AB и ось OY — по ребру AC. Пусть вершины имеют следующие координаты: $S(x;\ y;\ z)$, $B(x_0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ y_0;\ 0)$. Координаты вершины A — $(0;\ 0;\ 0)$. Запишем условие перпендикулярности



в виде равенства нулю соответствующих скалярных произведений

$$\left.\begin{aligned}\vec{SA}\cdot\vec{SC}&=0,\\ \vec{SA}\cdot\vec{SB}&=0,\\ \vec{SB}\cdot\vec{SC}&=0\end{aligned}\right\}$$

или, переходя к координатам:

$$\begin{aligned}&(-x;\ -y;\ -z)\cdot\\ &\qquad\cdot(-x;\ y_0-y;\ -z)=0,\\ &(-x;\ -y;\ -z)\cdot\\ &\qquad\cdot(x_0-x;\ -y;\ -z)=0,\\ &(x_0-x;\ -y;\ -z)\cdot\\ &\qquad\cdot(-x;\ y_0-y;\ -z)=0\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-y_0y=0,\\ &x^2+y^2+z^2-x_0x=0,\\ &x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y=0.\end{aligned}\right\}$$

Откуда получаем $x=y=z=0$, то есть $S\equiv A$. Таким образом, пирамида $SABC$ выродилась в треугольник ABC.

Этим и доказана невозможность искомой пирамиды. Мы советуем читателям придумать, для сравнения, «не координатное» решение этой задачи.

С. Р. Сефибеков

Приглашение в парную

(или Физика в бане)

Кандидат физико-математических наук
И. И. МАЗИН

«Дивное видел я в Славянской земле на пути своем. Видел бани деревянные, и разожгут их докрасна, и разденутся, и будут наги, и обольются квасом, и возьмут прутья молодые, и бьют себя сами, и того добьются, что вылезут еле живы, и обольются водой студеной, и так оживут.»

Так описывается баня в русских летописях XI века. И по сей день любители бани с азартом «мучают» сами себя. Зачем? Говорят, что польза банных процедур связана с кратковременным воздействием на кожу высоких температур — горячего воздуха. Однако во влажном воздухе высокую температуру трудно выдерживать даже недолго. Так что в хорошей бане должно быть не только жарко, но и сухо. Не так-то просто построить хорошую баню, да и «приготовить» пар, то есть, говоря научным языком, создать оптимальный микроклимат, тоже надо уметь. Наши предки умели это делать еще в XI веке, а вот объяснить, почему в бане нужно поступать так, а не иначе, они бы, пожалуй, не смогли. Но сегодняшний школьник знает достаточно, чтобы ответить на вопросы, которые задает любителям физики обычная парная. Это я и предлагаю сделать читателю. Начнем мы с того, что посмотрим как бы со стороны на банный «сеанс» и будем по ходу дела задавать себе вопросы. А потом мы попытаемся иа них ответить.

Итак, в баню! А чтобы лучше ориентироваться, будем пользоваться рисунком со страницы 19.

Вот мы уже в парной. Ну и жара... Что же, постоим немного внизу — здесь попрохладнее. Привыкли — можно и наверх. Горячо? Ничего, сегодня еще не очень жарко, бывает и так, что на горячий деревянный пол босой ногой не встанешь, да и на скамье не посидишь. А если скамья сколочена железными гвоздями, то на нее не стоит садиться и в не очень жаркой бане: прикоснешься голым телом к шляпке гвоздя — заработаешь ожог.

Вопрос 1. Почему в парной внизу холоднее, чем на полке?

Вопрос 2. Почему при той температуре, при которой еще можно сесть на нагретое дерево, садиться на железо уже нельзя — обожжешься?

Постепенно мы привыкаем к парной. Воздух уже не кажется таким горячим. Однако чувствуется, что он сырой — на скамейке, на полу мокрые пятна. Это можно исправить. Нужно, как говорят, «поддать пару»: взять кипятка и маленькими порциями, ковшиком, бросать его в печь на раскаленные камни. Сразу горячая волна пахнет из печи наверх, жарче станет на полке́, жарче и суше; исчезнут мокрые пятна, высохнут пол и скамьи.

Вопрос 3. Почему, когда подбрасывают воду на горячие камни печи, в парной становится суше?

Вопрос 4. Почему нужно подбрасывать воду понемногу, а не вылить в каменку сразу шайку воды?

Вопрос 5. Почему нужно бросать именно кипяток, а не холодную воду?

...Но вот прошло больше часа. В парной побывало много народу, воздух уже не такой свежий, сырость, на полу листья от веников. Пора «чистить» парную. Это делается так. Все выходят минут на десять. За это время нужно подмести пол, окатить его водой из шланга; затем открыть настежь дверь в парную, снаружи около двери плеснуть на пол несколько шаек холодной воды; а потом начать поддавать пар. Свежий пар вытеснит старый, застоявшийся воздух парной. Теперь все готово, можно заходить и начинать все сначала.

Вопрос 6. Зачем нужна лужа холодной воды у входа в парную?

Вопрос 7. Почему свежий пар вытесняет старый воздух парной?

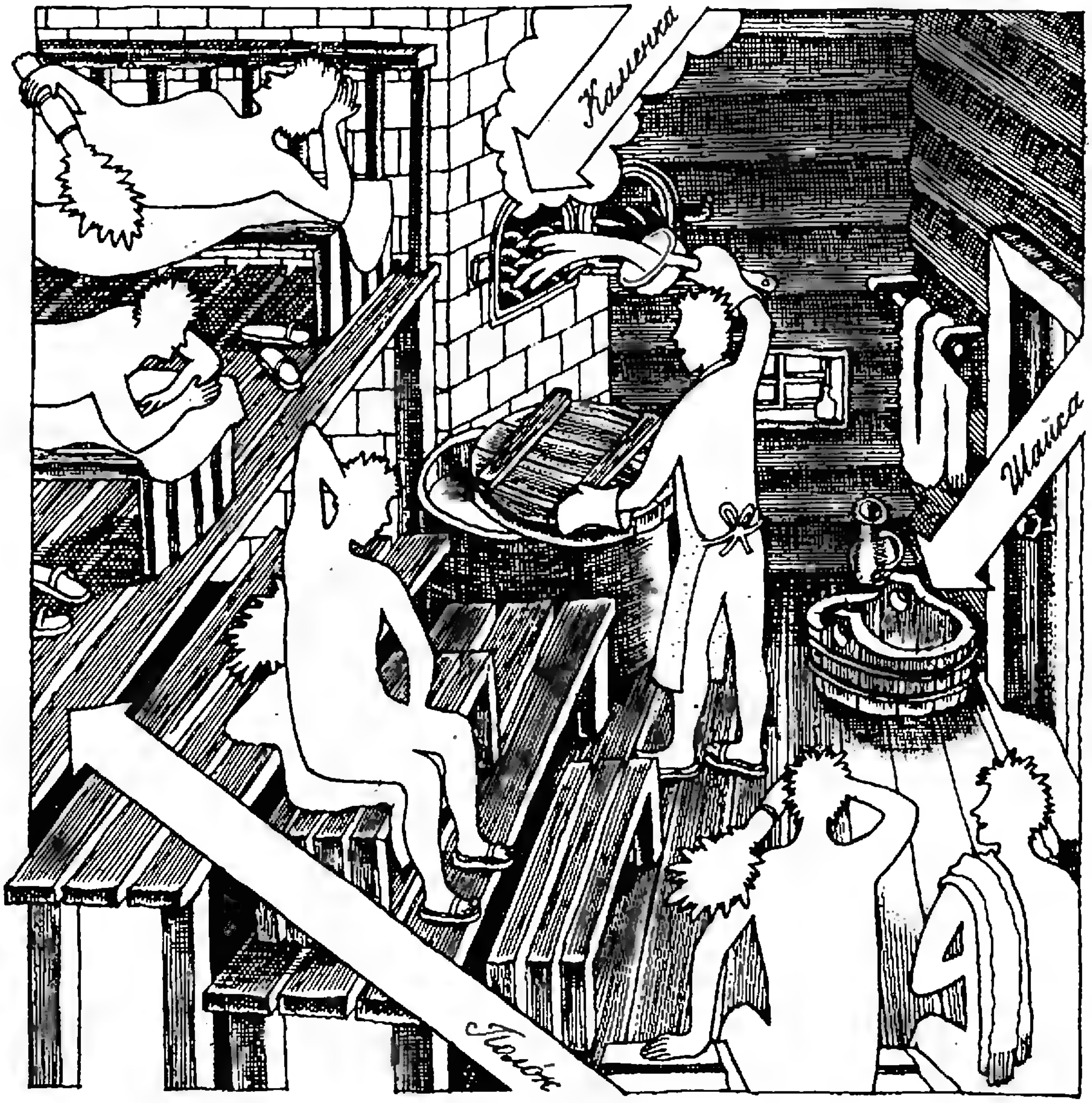
Итак, с правилами бани мы познакомились. Давайте отвечать на возникшие вопросы.

Первый вопрос был настолько прост, что на него, наверное, сразу ответил любой читатель. Так что начнем со второго вопроса.

Что происходит, когда человек наступает или садится на горячую скамью? Температура тела человека не больше 40 °С, в то время как температура воздуха, а следовательно, и скамеек в хорошей парной от 80 до 120 °С. При контакте начинается процесс передачи тепла от горячего тела (скамьи) к холодному (человеку). Как быстро идет процесс? Это определяется, в частности, теплопроводностью горячего тела. Чем больше теплопроводность материала, тем быстрее передается тепло от его более нагретых участков к менее нагретым. У железа, как и у других металлов, теплопроводность значительно больше, чем у дерева,— примерно в 300 раз. Когда мы соприкасаемся с горячей деревянной скамьей, остывает та ее часть, которая находится вблизи зоны контакта, и нам передается тепло, «отнятое» у малого объема скамьи. Иное дело, если в зоне контакта окажется гвоздь: тепло будет быстро «подтягиваться» к точкам соприкосновения со всей длины гвоздя. Кроме того, объемная теплоемкость (то есть теплоемкость, рассчитанная на единицу объема) у железа примерно в 40 раз больше, чем у дерева; так что при одинаковых условиях остывания мы от куска железа получим в десятки раз больше тепла, чем от куска дерева того же объема.

Теперь, я думаю, вы сможете сами четко сформулировать ответ на вопрос 2. (Заметьте: мы ничего не говорили о теплопроводности и теплоемкости человеческого тела. Подумайте сами, какую роль играют эти характеристики в рассмотренном нами процессе.)

Чтобы ответить на следующие вопросы, давайте вспомним некоторые



сведения из молекулярной физики, в частности — о водяном паре.

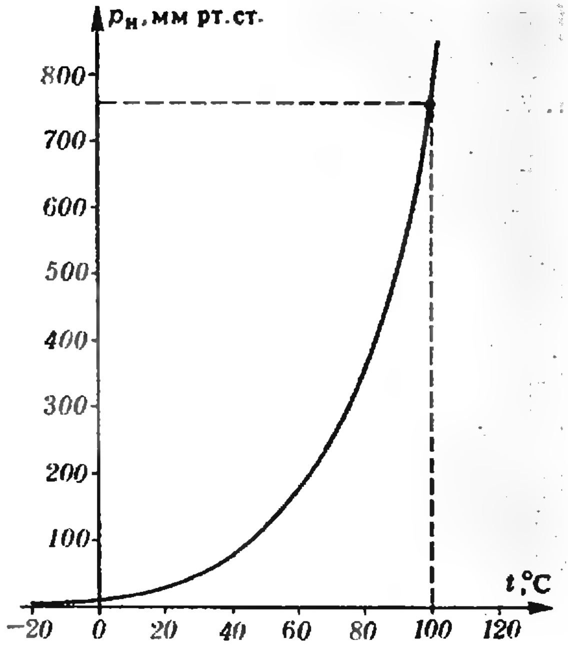
Вода, как известно, может находиться в трех агрегатных состояниях: твердом — лед, жидком — собственно то, что мы и называем водой, и газообразном — пар. Что касается льда, то он прямого отношения к бане не имеет, а вот про воду и пар поговорим.

Вода может превращаться в пар — это испарение, а пар может превращаться в воду — это конденсация. При испарении воды поглощается тепло, а при конденсации той же массы пара выделяется такое же количество тепла. В атмосфере всегда имеется некоторое количество водяного пара. Например, в жилой комнате в 1 м^3 воздуха обычно содержится около 10 г пара. Плотность водяного пара в воздухе называют абсолютной влажностью.

Поставим в комнате блюдце с водой. Вода будет испаряться и со временем вся превратится в пар. При этом абсолютная влажность в комнате повысится, но не намного — объем комнаты обычно несколько десятков кубических метров, и если в блюдце было 10 г воды, то влажность увеличилась не более чем на 1 г/м^3. А если такое же блюдце поместить в сосуд объемом 1 л (10^{-3} м^3) и закрыть его? Количество воды в блюдце будет уменьшаться до тех пор, пока пар в сосуде не станет насыщенным. А это произойдет тогда, когда число молекул, вылетающих из воды за единицу времени, и число молекул, переходящих за единицу времени из пара в воду, сравняются. И с этого времени абсолютная влажность воздуха в сосуде не будет изменяться. (Разумеется, мы имеем в виду, что температура сосуда все время остается постоянной.)

Таким образом, при каждой температуре существует максимальная абсолютная влажность воздуха, равная плотности насыщенного водяного пара при этой температуре. Чем выше температура, тем больше значение плотности насыщенного пара.

Понятно, что чем меньше абсолютная влажность воздуха по отношению к максимально возможной при данной температуре, тем интенсивнее идет испарение воды. Отношение абсолютной влажности к плотности насыщенного пара при данной температуре называют относительной влажностью, ее измеряют в процентах. Поскольку давление пара пропорционально его плотности, относительную влажность можно определить по-другому: это есть выраженное в процентах отношение парциального давления водяного пара к давлению насыщенного пара при данной температуре.



Давление насыщенного пара, так же как и его плотность, тем больше, чем выше температура. График на рисунке демонстрирует эту зависимость.

Повышение абсолютной влажности при постоянной температуре воздуха ведет к увеличению относительной влажности. И если при неизменной абсолютной влажности температура воздуха понижается, то относительная влажность будет расти. При некоторой температуре она достигнет 100 % — пар в воздухе станет насыщенным, начнется его конденсация (появится туман, выпадет роса). Температуру, при которой это происходит, называют точкой росы.

А если увеличивается абсолютная влажность и растет температура? Тогда относительная влажность будет зависеть от того, что растет быстрее: плотность пара в воздухе или давление насыщенных паров.

Ну, а теперь вернемся к нашим вопросам.

Мы выяснили, что скорость испарения определяется не абсолютной влажностью, а относительной. Если при подбрасывании кипятка в каменку в парной становится суше, значит, относительная влажность уменьшается (а абсолютная, конечно, увеличивается). Почему это происходит? Когда небольшое количество воды с силой бросают в печку, она разбрызгивается в маленькие капельки. Попадая на камни, разогретые до температуры в сотни градусов, капельки мгновенно испаряются, превращаясь в пар, температура которого сравнима с температурой самих камней. Раскаленный пар вырывается из печки, общая температура воздуха в парной повышается. Более высокой температуре соответствует более высокая плотность насыщенного пара, и, значит, даже с учетом увеличения абсолютной влажности, относительная влажность может уменьшаться. Это и происходит на самом деле.

Понятно, почему нужно бросать воду именно маленькими порциями. Большая порция упадет на камни сравнительно большой «каплей». Такая «капля» не сможет испариться так быстро, как маленькая, а просто начнет кипеть, образуя пар с температурой 100 °С или, может быть, немного выше. Но нас это не устроит. Весь секрет в быстротечности процесса! По этой же причине нельзя бросать холодную воду. Ведь у камня довольно низкая теплопроводность, поэтому даже маленькая капля, пока будет нагреваться до 100 °С, успеет несколько охладить ту часть камня, с которой соприкасается, а значит, и температура образующегося пара упадет.

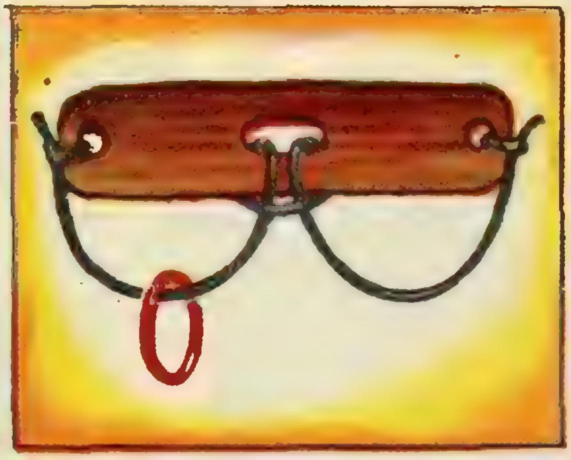
Итак, на вопросы 3, 4 и 5 мы ответили. Вопрос 6 для нас теперь несложен. Вблизи лужи температура ниже, чем точка росы. Поэтому выходящий из парилки «отработанный» пар начинает быстро конденсироваться, как говорят, «садиться» на луже. В хорошей парилке дверь и печь расположены в разных концах: горячий пар, образующийся у каменки, пройдя всю парилку, охлаждается и конденсируется на выходе.

И наконец, последний вопрос: почему свежий пар вытесняет старый воздух парной?

Вспомним, что при «чистке» парной в печь набросали несколько шаек кипятка, то есть не меньше десяти килограммов воды. Температура образовавшегося из этой воды пара — около 300 °С. При такой температуре и при давлении в 1 атмосферу 10 кг водяного пара занимали бы объем более 25 м^3. Можно сказать, что мы в течение небольшого времени ввели в помещение такое количество пара, которое само занимает примерно 1/3 объема этого помещения. Пар этот горячий, поэтому он поднимается вверх и вытесняет старый воздух вниз.

Ну, вот, а теперь, когда с физикой все стало ясно, можно приступать к практическим занятиям. Легкого пара, дорогой читатель!

Африканская головоломка



С давних времен в Африке очень популярны игры и головоломки с веревочками. Мы хотим предложить вам одну из таких головоломок — ее любят в Гамбии. Эта головоломка состоит из планки с тремя отверстиями, шнурка, продернутого через центральное отверстие так, как показано на рисунке, и закрепленного по краям, и кольца, висящего, скажем, на левой петле. Требуется передвинуть кольцо вдоль всего шнурка направо, не отвязывая шнурка от планки. (Шнурок примерно вчетверо длиннее планки, а кольцо больше, чем центральное отверстие в планке.) Попробуйте решить эту головоломку. Если у вас ничего не получается, загляните в конец номера.

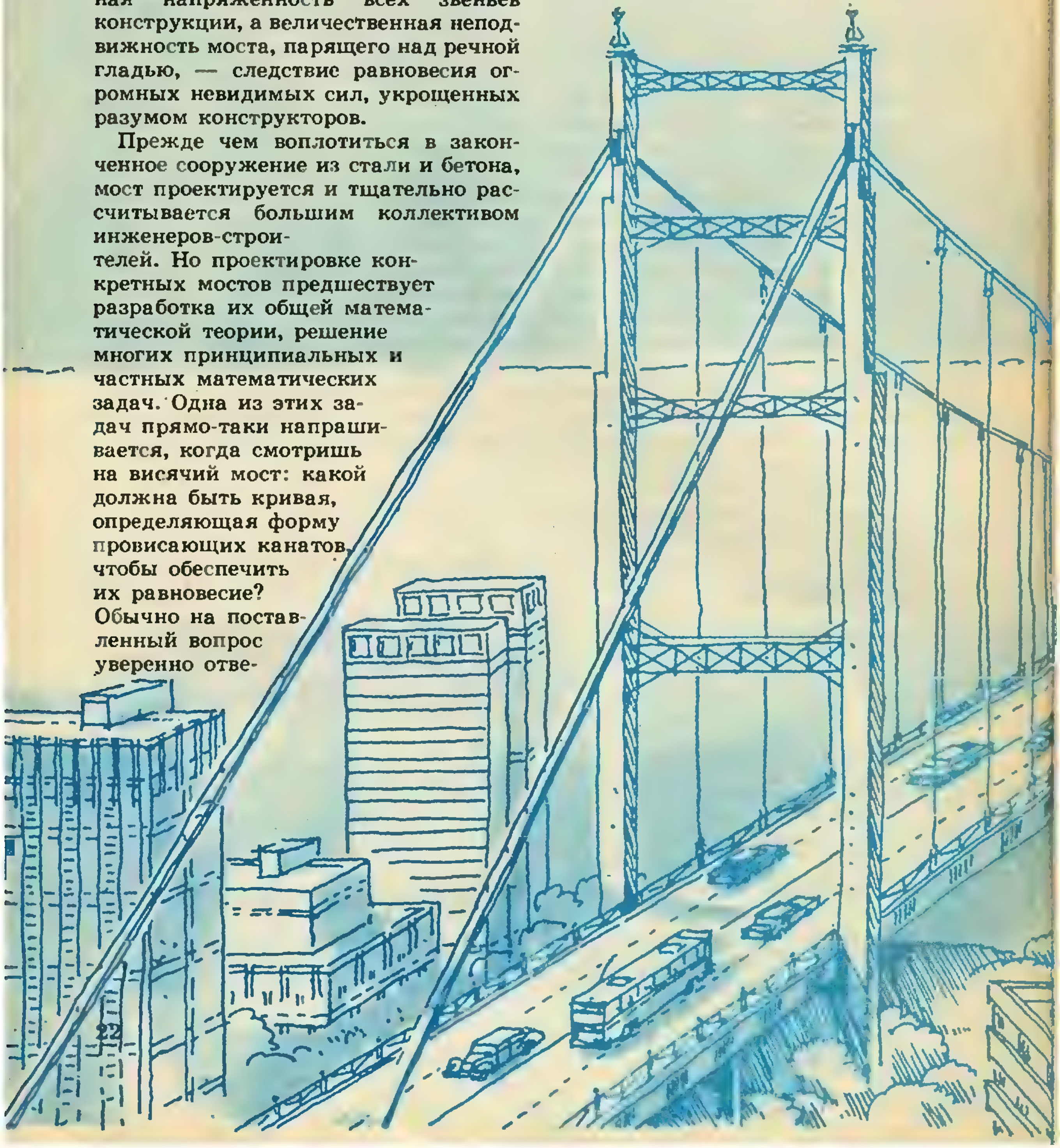
А. Т. Калинин

Висячие мосты

Ю. С. ПЕТРОВ

Висячие мосты... Они поражают смелостью замысла, чистотой и совершенством линий. Тонкие вертикальные тросы, спускаясь с изящно изогнутых провисающих канатов, легко удерживают в воздухе многотонную асфальтированную полосу, по которой торопливо снуют автомашины. Взгляните на рисунок — какое ощущение воздушности и легкости! Но за этой легкостью скрывается чудовищная напряженность всех звеньев конструкции, а величественная неподвижность моста, парящего над речной гладью, — следствие равновесия огромных невидимых сил, укрощенных разумом конструкторов.

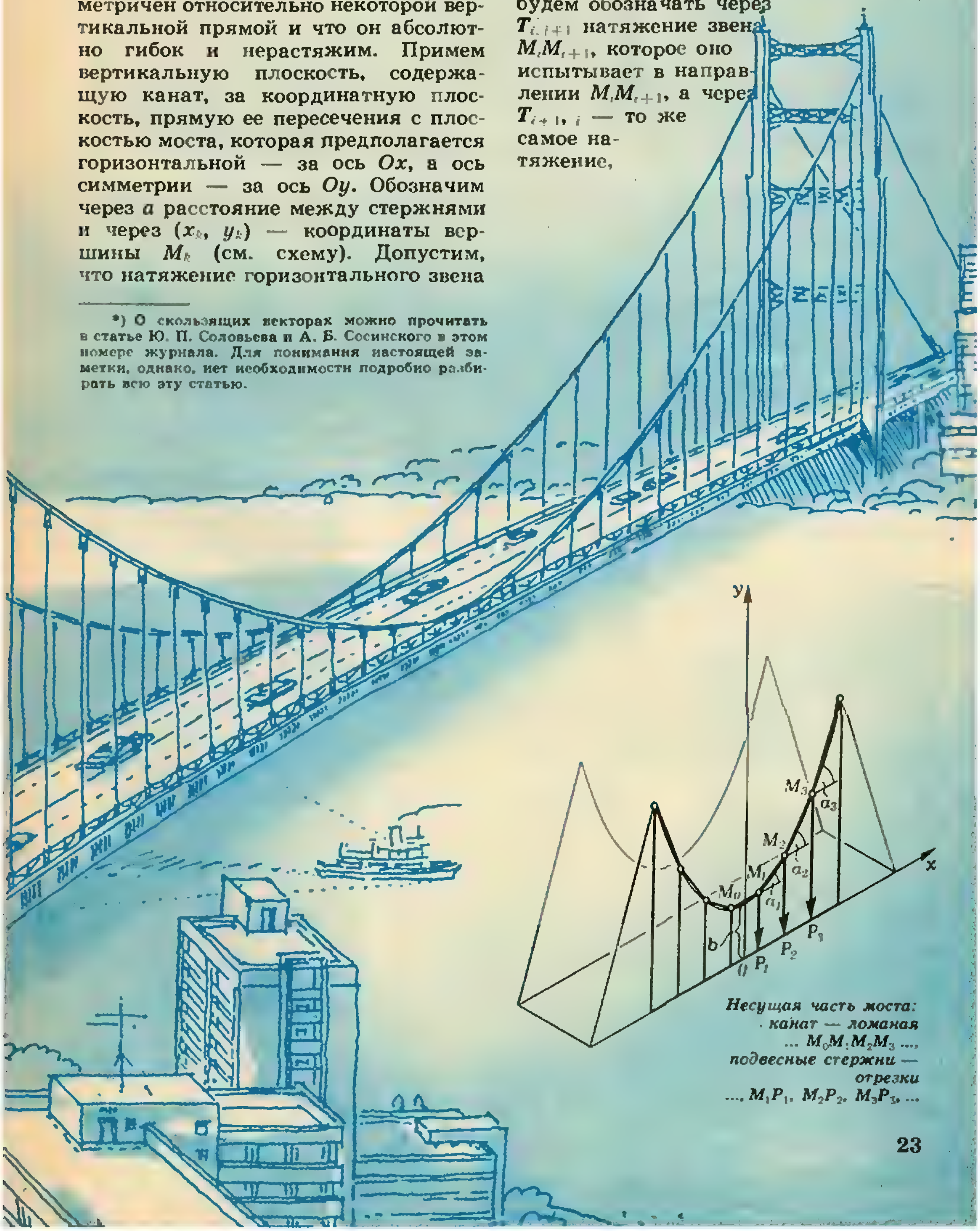
Прежде чем воплотиться в законченное сооружение из стали и бетона, мост проектируется и тщательно рассчитывается большим коллективом инженеров-строителей. Но проектировке конкретных мостов предшествует разработка их общей математической теории, решение многих принципиальных и частных математических задач. Одна из этих задач прямо-таки напрашивается, когда смотришь на висячий мост: какой должна быть кривая, определяющая форму провисающих канатов, чтобы обеспечить их равновесие? Обычно на поставленный вопрос уверенно отвечают: «Ну, как же — это цепная линия. Такую форму принимает гибкая однородная нерастяжимая нить, концы которой закреплены в двух точках. Примерно так выглядят цепь, телеграфный провод, свисающие под действием силы тяжести». Это, однако, неверно, в чем можно убедиться, заглянув в любые учебники или справочники по мостостроению, — в них дается (правильный и очень простой) ответ. Впрочем, в тех книгах, в которых я его нашел, ответ дается бездоказательно, как некая догма. Между тем решение указанной задачи можно получить совсем элементарными средствами, надо только немного уметь оперировать со скользящими



векторами *). Этому решению и посвящена настоящая заметка.

Несущая часть висячего моста состоит из канатов и подвесных стержней, которые мы будем предполагать вертикальными, находящимися на одинаковых расстояниях друг от друга и одинаково нагруженными (см. рисунок). Мы будем пренебрегать весом этих стержней и каната. Будем, наконец, предполагать, что канат симметричен относительно некоторой вертикальной прямой и что он абсолютно гибок и нерастяжим. Примем вертикальную плоскость, содержащую канат, за координатную плоскость, прямую ее пересечения с плоскостью моста, которая предполагается горизонтальной — за ось Ox, а ось симметрии — за ось Oy. Обозначим через a расстояние между стержнями и через (x_k, y_k) — координаты вершины M_k (см. схему). Допустим, что натяжение горизонтального звена равно T_0. Натяжение следующих звеньев M_1M_2, M_2M_3,... обозначим через T_{12}, T_{23}, ..., а их углы наклона к горизонту — через α_1, α_2, ... На точки M_1, M_2, ... действуют силы F_1, F_2, ..., равные p. Нам нужно найти значения ординат y_k, при которых суммы сил, действующих на точки M_k, равны нулю.

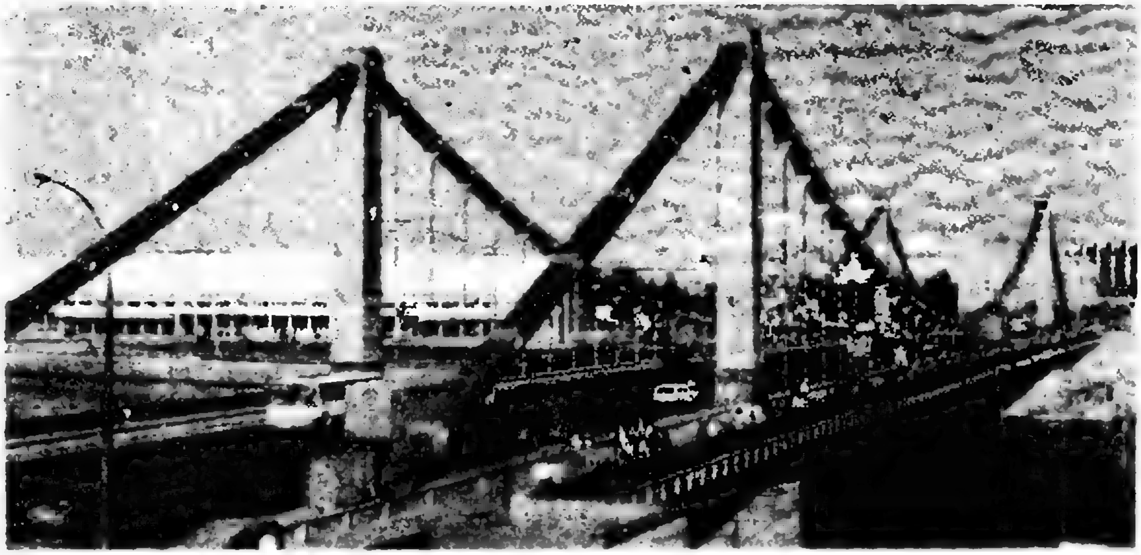
Чтобы исключить всякие недоразумения с направлениями натяжений, будем обозначать через $T_{i,\,i+1}$ натяжение звена M_iM_{i+1}, которое оно испытывает в направлении M_iM_{i+1}, а через $T_{i+1,\,i}$ — то же самое натяжение,



Несущая часть моста: канат — ломаная ... $M_0M_1M_2M_3$ ..., подвесные стержни — отрезки ..., M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ...

---

*) О скользящих векторах можно прочитать в статье Ю. П. Соловьева и А. Б. Сосинского в этом номере журнала. Для понимания настоящей заметки, однако, нет необходимости подробно разбирать всю эту статью.



Показанный на снимке Крымский мост через Москву-реку — один из красивейших отечественных висячих мостов. На фотографии хорошо видно, что обе линии подвеса, закрепленные на двух парах опор, имеют форму параболы.

но в противоположном направлении. По соображениям симметрии достаточно рассмотреть лишь одну половину каната (скажем, ту, которая имеет положительные абсциссы). Вершина M_1 находится в равновесии под действием трех сил: $\boldsymbol{T}_{10}$, $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{T}_{12}$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{|\boldsymbol{F}_1|}{|\boldsymbol{T}_0|} = \frac{p}{T_0}.$$

Вершина M_2 находится в равновесии под действием сил $\boldsymbol{T}_{21}$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{T}_{23}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha_2 = 2p/T_0$. Аналогично, $\operatorname{tg}\alpha_k = kp/T_0$.

Теперь мы в состоянии вычислить координаты (x_k, y_k) вершины M_k. Координаты вершины M_1 равны $(a/2, b)$, где b — расстояние от горизонтального звена до оси Ox. Координаты остальных вершин могут быть подсчитаны последовательно по формулам

$$x_k = x_{k-1} + a, \quad y_k = y_{k-1} + a \operatorname{tg}\alpha_{k-1}.$$

Следовательно,

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a,$$

$$y_k = b + \frac{ap}{T_0}[1+2+\ldots+(k-1)] =$$

$$= b + \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{ap}{T_0}.$$

Формула для y_k может быть получена и иначе. Для ее вывода достаточно заметить, что внешние силы, приложенные к части $M_1 M_2 \ldots M_k$ каната, образуют систему векторов, эквивалентных нулю, вследствие чего сумма их моментов относительно точки M_k равна нулю.

В выражениях для x_k и y_k имеется неизвестное натяжение T_0. Оно может быть найдено, если известна точка подвеса последней вершины M_n. Пусть h — высота этой точки; тогда

$$h = b + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{ap}{T_0},$$

откуда

$$T_0 = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{ap}{h-b}.$$

Если из равенств

$$x = \frac{a}{2} + (k-1)\,a,$$

$$y = b + \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{ap}{T_0}$$

исключить k, то получим, что *точки подвеса M_k лежат на параболе*

$$y = \frac{p}{2aT}\,x^2 + \left(b - \frac{ap}{8T_0}\right)$$

с вертикальной осью.

Открытие рентгеновских лучей

К 90-м годам прошлого столетия профессор Вюрцбургского университета (Германия) Вильгельм Конрад Рентген был уже хорошо известен в научных кругах всего мира как великолепный мастер физического эксперимента. Его исследования свойств жидкостей и газов и пьезоэлектрического эффекта, прямое опытное доказательство порождения магнитного поля движущимися электрическими зарядами считались достойными подражания образцами экспериментального искусства. Запутанные и служившие предметом многолетних споров вопросы находили в опытах Рентгена ответы, не оставлявшие места для сомнений, а сами опыты удивляли остроумием замысла и аскетической скромностью применявшихся экспериментальных средств. Ученый любил говорить, что все необходимое для опыта настоящий экспериментатор должен уметь сделать с помощью перочинного ножа.

Эта рентгенограмма получена от кристалла гипса, вращающегося («купающегося») в пучке монохроматического рентгеновского излучения.

Вечером в пятницу 8 ноября 1895 года, закончив с преподавательскими делами, Рентген экспериментировал в лаборатории — как всегда, в одиночестве. Вот уже несколько недель объектом его исследований были вызывавшие тогда жаркие споры катодные лучи. Теперь мы знаем, что это поток быстро несущихся электронов. Но в те времена так называли излучение непонятной природы, испускаемое катодом разрядной трубки (откачанный до высокого вакуума стеклянный баллон, обычно удлиненной формы, в который вблизи концов впаяны металлические электроды) при подаче на ее электроды высокого напряжения. Там, где катодные лучи попадают на стенки трубки, стекло люминесцирует зеленым светом.

Рентген работал в затемненном помещении, а разрядная трубка была помещена в черный светонепроницаемый футляр. Поблизости от нее на лабораторном столе лежал люминесцентный экран — листок бумаги, покрытый платиносинеродистым барием (такие экраны, испускающие видимый свет при падении на них невидимого излучения — ультрафиолетовых или катодных лучей,— широко применялись тогда в лабораторной практике). Неожиданно ученый заметил, что «при каждом разряде через трубку на экране... наблюдается яркая вспышка». Рентген незамедлительно удостоверился в том, что именно разрядная трубка — источник невидимого излучения, вызывающего свечение экрана. Не стоило большого труда показать, что это невидимое излучение не может быть ни ультрафиолетовыми, ни катодными лучами. В самом деле, вспышки на экране наблюдались и в том случае, когда между ним и трубкой экспериментатор помещал различные предметы, заведомо совершенно непрозрачные для ультрафиолетовых и катодных лучей — алюминиевую пластинку толщиной в 15 мм, толстенную книгу в 1000 страниц, наконец, собственную руку. И Рентгену стало ясно, что ему посчастливилось сделать замечательное открытие — обнаружить новый вид лучей, обладающих, к тому же, неслыханной проникающей способностью.

Было ли открытие Рентгена полностью случайным или к историческому эксперименту в темной комнате его подвели какие-то интуитивные соображения, неизвестно. На сей счет существует множество версий — от сомнительных до весьма убедительных. Но все они недостоверны: неразговорчивый ученый ничего не рассказал, а очевидцев не было. Зато хорошо известно, что следующие семь недель после 8 ноября Рентген провел в обстановке полного затворничества в лаборатории (он даже распорядился поставить туда раскладную кровать), днем и ночью, почти без отдыха, проводя все новые и новые эксперименты, перепроверяя и варьируя прежние опыты. Период напряженной работы оказался чрезвычайно продуктивным — Рентген выяснил, как зависит поглощение новых лучей от толщины и плотности различных материалов; установил, что лучи могут быть «мягкими» (сильно поглощаемыми) и «жесткими» (слабо поглощаемыми); изучил их фотографическое действие; показал, что они не отклоняются электрическим и магнитным полями, ионизируют воздух; сконструировал разрядную трубку,

(Окончание см. на с. 27)

Обобщенная задача о ферзях

С. Б. БЕЛЫЙ,
Е. А. РОВЕНСКИЙ

Задача о ферзях — *на шахматной доске расставить максимальное число ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу*, и найти число всех таких расстановок — давно уже стала классической. В XIX веке этой задачей занимался великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), а в нашем столетии выдающийся американский математик и кибернетик Клод Шеннон (р. 1916) указал на ее прямое отношение к вопросам помехоустойчивого кодирования.

Недавно появилось интересное обобщение этой задачи, касающееся расстановки максимального числа ферзей («Наука и жизнь», 1982, № 3, с. 73; «Квант», 1983, № 1, 3-я стр. обл.): *на шахматной доске расставить максимальное число ферзей p так, чтобы каждый из них атаковал ровно k ферзей* ($1 \leqslant k \leqslant 4$). Эта задача была поставлена американским математиком Скоттом Кимом и опубликована в J. Recreational Mathematics, 1979-80, vol. 12, № 1, p. 53 (американский журнал, в котором публикуются статьи и задачи занимательного характера по математике). При $k=0$ получаем классическую задачу, для которой $p_{\max}=8$. Подумайте, почему в формулировке задачи сделано ограничение $k \leqslant 4$. Задачу Кима удалось решить частично (J. Recreational Mathematics, 1980-81, vol. 13, № 1, p. 61—62). Именно:

$$p_{\max}=10 \text{ для } k=1, \qquad (1)$$

$$p_{\max}=14 \text{ для } k=2. \qquad (2)$$

Примеры соответствующих расстановок показаны на рисунках 1 и 2.

Для $k=3$ и $k=4$ были найдены расстановки $p=16$ (там же) и $p=21$ (Scientific American, 1981, vol. 245, № 6, p. 19) соответственно, но оставалось неизвестным, являются ли эти числа максимальными.

В данной заметке мы докажем, что

$$p_{\max}=18 \text{ для } k=3, \qquad (3)$$

$$p_{\max}=21 \text{ для } k=4. \qquad (4)$$

Рисунки 3 и 4 показывают, что расстановки с таким числом ферзей существуют. Заметим, что расстановка с $p=18$ для $k=3$ ранее не была известна. Попробуем теперь найти верхнюю оценку для p.

Пусть p — число ферзей, а q — число рядов (вертикалей, горизонталей и диагоналей), на которых стоит хотя бы один ферзь. Тогда, если бы ферзи не атаковали друг друга, то $q=4p$. Но так как общее число боев равно pk (каждый ферзь атакует ровно k ферзей), то

$$q = 4p - \frac{pk}{2} \text{ или } r = \frac{2k}{8-k} \qquad (5)$$

Докажем теперь (3). Общее число вертикалей, горизонталей и диагоналей на доске $n \times n$ равно $6n-2$, поэтому

$$q \leqslant 6n-2. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) для доски 8×8 получаем $p \leqslant 18$.

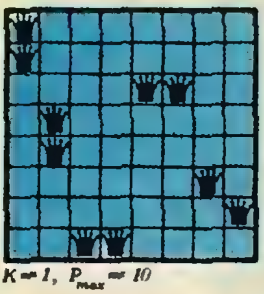


Рис. 1. $k=1$, $p_{\max}=10$.

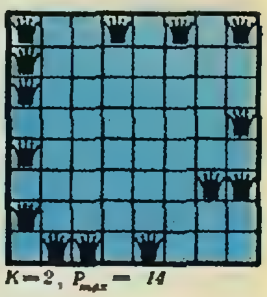


Рис. 2. $k=2$, $p_{\max}=14$.

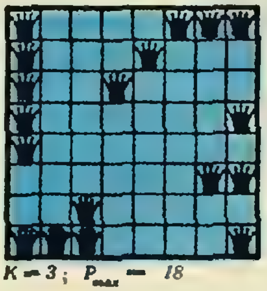


Рис. 3. $k=3$, $p_{\max}=18$.

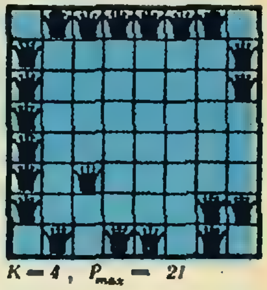


Рис. 4. $k=4$, $p_{\max}=21$.

Докажем (4). Так как угловые клетки доски не могут быть заняты ферзями (почему?), получаем

$$q \leq 6n - 6. \qquad (7)$$

Из (5) и (7) для доски 8×8 находим $p \leq 21$.

Итак, задача Кима полностью решена. Нам остается добавить, что максимальные расстановки ферзей, показанные на рисунках 3 и 4, были найдены с помощью ЭВМ (на это ушло около 30 минут счета на ЭВМ с числом операций 200 тысяч в секунду). Читатели, умеющие программировать, могут попробовать свои силы в составлении такой программы.

Задача для исследования. Естественным обобщением задачи С. Кима является следующая задача:

На шахматной доске $n \times n$ расставить максимальное число ферзей $p_{\max} = p(n, k)$ так, чтобы каждый из них атаковал ровно k ферзей ($0 \leq k \leq 4$), и найти число $N = N(n, k)$ таких расстановок (две расстановки, получающиеся друг из друга поворотом или симметрией, считаются одинаковыми).

Мы предлагаем читателям исследовать следующие вопросы.

1. Чему равно $p_{\max}$ при разных n, $n \leq 7$?
2. Чему равно N при разных n, $n \leq 7$?
3. Можете ли вы указать расстановки для случаев $n = 8$, $k = 1, 2, 3, 4$, отличные от приведенных здесь?
4. Можете ли вы указать расстановку для $n = 8$, $k = 0$?
5. Можно ли оценить $p_{\max}$ и N сверху и снизу при любых n?

Исследуйте задачу Кима о ферзях для случая

а) цилиндрической шахматной доски;
б) тороидальной шахматной доски;
в) трехмерной шахматной доски;
г) n-мерной шахматной доски.

Открытие рентгеновских лучей

(Начало см. на с. 25)

дающую более интенсивное излучение (по существу это была первая рентгеновская трубка).

Полученные результаты Рентген подытожил в вышедшей в первых числах января 1896 года брошюре «О новом роде лучей». Одновременно он разослал ведущим физикам мира первые рентгеновские снимки, в том числе снимок кисти руки своей жены. Пожалуй, ни одно физическое открытие не вызвало столь огромного и всеобщего интереса, как обнаружение Рентгеном лучей, проходящих сквозь стены и позволяющих видеть невидимое. Физики сразу же принялись повторять удивительные опыты, журналисты заполнили страницы газет сенсационными сообщениями. В 1901 году Рентген стал первым лауреатом Нобелевской премии по физике.

Современные области применения рентгеновских лучей трудно даже перечислить — медицина, генетика, дефектоскопия, рентгеноструктурный анализ, рентгеноспектральный анализ, исследования произведений старинной живописи, криминалистика...

Выдающееся положение занимает открытие рентгеновских лучей и в истории науки — именно с него началась эра атомной и ядерной физики. «В начале 1896 года, в тот самый день, когда в Париже стало известно об опытах Рентгена и о необычных свойствах лучей, испускаемых люминесцирующими стенками... трубок,— рассказывал А. Беккерель,— я задумал исследовать, не испускает ли такие же лучи и всякое другое люминесцирующее вещество». Предположение оказалось неверным, но в опытах Беккереля была открыта радиоактивность.

А Дж. Дж. Томсон вспоминал: «Я исследовал в течение некоторого времени проводимость газов под действием электрических сил, но сталкивался с трудностью найти какой-либо такой метод создания проводимости, который был бы эффективным и надежным. Новые лучи снимали это затруднение... Эксперименты, которые были невозможно трудными до открытия лучей, становились легкими». Результатом этих «легких экспериментов» стало открытие Томсоном (весной 1897 года) электрона.

Б. Е. Явелов

Традиционный праздник юных математиков

Праздник юных математиков в гостеприимной столице Советской Аджарии — г. Батуми — уже давно стал традиционным. Каждый год на осенние школьные каникулы сюда съезжаются юные математики из разных концов нашей страны. Организаторы праздника — Совпроф Аджарии, Министерство просвещения Аджарской АССР, Аджарское отделение Всесоюзного общества «Знание», обком профсоюза работников просвещения, городской отдел народного образования и горком комсомола, Батумский республиканский Дворец пионеров и школьников, средние школы № 7 и 22, школа-интернат № 2 — постарались сделать программу праздника более интересной и разнообразной, чем в предыдущие годы.

Центральное место праздника — конференция, на которой авторитетное жюри, состоящее из математиков и педагогов, и юные гости праздника заслушивают доклады и участвуют в их обсуждении. В этом году на долю жюри, возглавляемого профессором Тбилисского государственного университета Н. Кахниашвили, выпала большая нагрузка — в пяти секциях было заслушано рекордное число докладов (около 60). Интересные доклады представили учащиеся московских школ № 444, 57 и 91. К лучшим докладам жюри отнесло доклады десятиклассника ленинградской школы № 45 Р. Алексеева «О некоторых циклических неравенствах», учащегося ленинградского ПТУ № 253 М. Михеева «Измерение радиуса шара маленьким циркулем и линейкой», свердловского десятиклассника Ф. Толстова «Интерпретатор языка РАПИРА для ЕС ЭВМ», десятиклассника Ереванской ФМШ № 1 В. Степанова «Сходимость последовательностей», ученика 444-й школы А. Ермакова об алгоритме игры «Быки и коровы». Ряд интересных докладов был представлен батумскими школьниками.

И, как всегда, наибольший интерес вызвал традиционный математический КВН. Начался КВН приветствием, затем команды дали небольшие представления на тему «Математика в путешествии» — таким было «домашнее задание». После этого 12 командам — участникам КВН — были предложены самые разные конкурсы: на лучшее стихотворение с заданными рифмами, лучшую обложку для журнала «Квант», лучшую задачу в «Квант» для младших школьников», ну и, конечно, много математических задач.

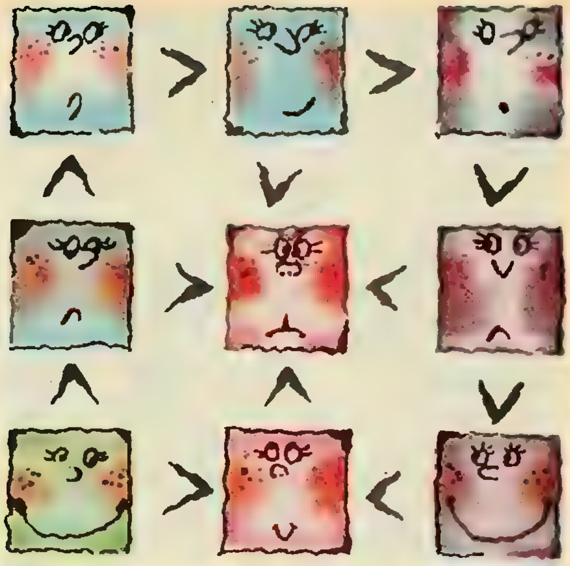
Среди них были и задачи-шутки: *Человек родился 1 июня 40 г. до н. э., а умер 1 июня 40 г. н. э. Сколько лет он прожил?* (ответ: 79 лет — не было нулевого года). Были и более серьезные задачи: *Расположить 6 точек на плоскости так, чтобы любые три из них образовывали равнобедренный треугольник* (ответ: эти шесть точек — вершины и центр правильного пятиугольника).

КВН закончился конкурсом капитанов, победителем которого стал капитан команды г. Риги Ю. Антимиров. Прекрасно выступил и капитан команды г. Батуми А. Смирнов: он был единственным, давшим верный ответ на одно из трех заданий конкурса капитанов: *на какое наибольшее число частей могут разделить пространство четыре плоскости, проходящие через одну точку* (ответ: 14), и этим вывел свою команду на первое место. В итоге первое место на КВН поделили команды Батуми и Баку, второе — команды школы № 57 Москвы и Свердловска, третье — команды Ленинградского ПТУ и Риги.

Программа праздника была очень насыщенной. Школьники побывали в Ахалшенском совхозе, совершили экскурсии в Ботанический сад, дельфинарий, Цихисдзири и Государственный музей Аджарии. В программу праздника входила и встреча с редакцией журнала «Квант», на которой хозяева и гости праздника поздравили наш журнал с юбилеем — пятнадцатилетием выхода в свет первого номера «Кванта». С интересной программой выступили на вечере занимательной математики бакинцы. Накануне торжественного закрытия состоялся традиционный «Огонек дружбы» — один из самых символических пунктов программы. Все присутствующие выразили горячую признательность инициатору и вдохновителю этого замечательного слета юных математиков — заслуженной учительнице республики Медее Илларионовне Жгенти.

Н. Б. Васильев,
В. Л. Гутенмахер,
Б. М. Ивлев

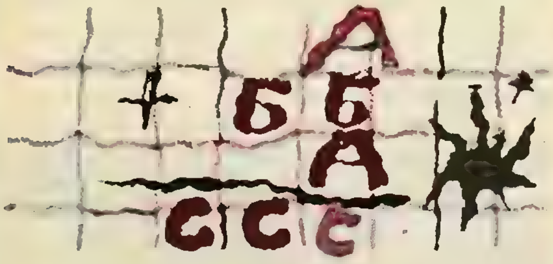
Квант для младших школьников



Задачи

1. Впишите в квадратики (см. рисунок) цифры от 1 до 9 так, чтобы выполнялись указанные неравенства.

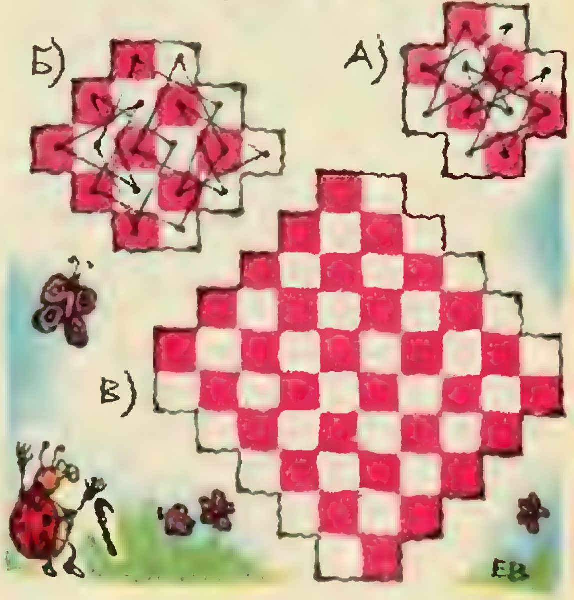
2. Расшифруйте числовой ребус:



3. Маша и Павлик купили по порции мороженого и принесли его домой. Павлик положил свое мороженое в блюдце на стол, а Маша поставила свое мороженое под струю вентилятора. Чье мороженое дольше не растает?

4. Коля и Витя, гуляя по парку, набрели на большую поляну, окруженную липами. Коля пошел вокруг поляны, считая деревья. Витя сделал то же, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Коли было двадцатым, у Вити было седьмым, а дерево, которое у Коли было седьмым, у Вити было девяносто четвертым. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

5. На рисунках А) и Б) указаны замкнутые обходы клеток на двух фигурах шахматным конем. Используя эти рисунки, постройте замкнутый обход шахматным конем всех клеток фигуры, изображенной на рисунке В).



Эти задачи нам предложили
Л. П. Мочалов, С. Н. Олехник, А. П. Савин, Г. А. Гальперин, Н. И. Авилов.

О всемирном тяготении, приливах и отливах

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА

В одной из книг, посвященных путешествиям, описано такое грандиозное явление: в часы приливов в лагуну одного из островов Альдабра (эти острова лежат в заливе Индийского океана у восточных берегов Африки) устремляются мощные потоки воды; в проливе, соединяющем лагуну с океаном, скорость течения достигает 25 км/ч, а масса втекающей воды составляет несколько миллиардов тонн. В часы отливов вода устремляется назад, в океан, дно лагуны обнажается почти на две трети, и на отмелях бродят тысячи птиц, выискивающих добычу.

Какие же колоссальные силы «выплескивают» воду из лагуны в часы отлива и поднимают ее во время прилива? Это силы всемирного тяготения.

Часто говорят, что Ньютон пришел к мысли о существовании сил притяжения между всеми телами природы, наблюдая падение яблока на Землю. Но открытие и изучение силы тяготения имеет сложную историю.

Еще ученые первых греческих школ (V—IV в. до н. э.) утверждали, что «подобное стремится соединиться с подобным». В течение всего средневековья эта идея поддерживалась аналогией с притяжением магнитов.

Много замечательных имен мы встретим, изучая историю становления учения о всемирном тяготении. Это и Тихо Браге, в течение двадцати лет наблюдавший планеты солнечной системы и оставивший многочисленные точные данные об их движении, и Иоганн Кеплер, установивший на основе этих данных законы движения планет и высказавший мысль о том, что причиной вращения Луны вокруг Земли является притяжение, и Галилео Галилей, открывший спутники Юпитера, и многие другие. Но мы обратимся к работам Ньютона, которому принадлежит открытие закона всемирного тяготения.

«Лабораторией» для Ньютона служил космос, телами, с которыми он проводил «опыты»,— Солнце и планеты солнечной системы. Изучая данные о движении планет, он пришел к выводу, что во всех случаях тело, находящееся в центре (Солнце по отношению к планетам и планеты по отношению к своим спутникам), действует на обращающееся вокруг него тело с некоторой силой, которая и удерживает тело на орбите. Очень важным, решающим для установления закона всемирного тяготения был сделанный им вывод: *сила,* удерживающая небесное тело на орбите, *обратно пропорциональна квадрату расстояния от центрального тела.*

А следующее положение, установленное Ньютоном, гласит: «Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из тел».

Итак, все тела притягиваются друг к другу. Но если тяготение — свойство всех тел, то почему в нашей обыденной жизни мы замечаем только одно его проявление — притяжение тел Землей (и замечаем ощутимо, когда несем тяжелый груз!)? Почему, сидя за партой рядом с товарищем, мы не ощущаем взаимного притяжения?

На это отвечает Ньютон: «Если кто возразит, что все тела, находящиеся у нас, по этому закону должны бы тяготеть друг к другу, тогда как такого рода тяготение совершенно не ощущается, то я на это отвечу, что тяготение к этим телам, будучи во столько же раз меньше тяготения к Земле, во сколько раз масса тела меньше массы всей Земли, окажется гораздо меньше такого, которое могло бы быть ощущаемо».

Оказывается, сила, с которой притягивают друг друга два человека, находящиеся на расстоянии в один метр (например, сидящие за одним столом), равна приблизительно 0,00000025 Н.

Значит, силы притяжения, в одном случае удерживающие планеты на орбитах, могут быть в другом случае неощутимо малыми.

Запишем закон всемирного тяготения в виде формулы, введя коэффициент пропорциональности (G), связывающий силу тяготения (F) двух тел с их массами (m_1 и m_2) и расстоянием между ними (r):

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}. \qquad (*)$$

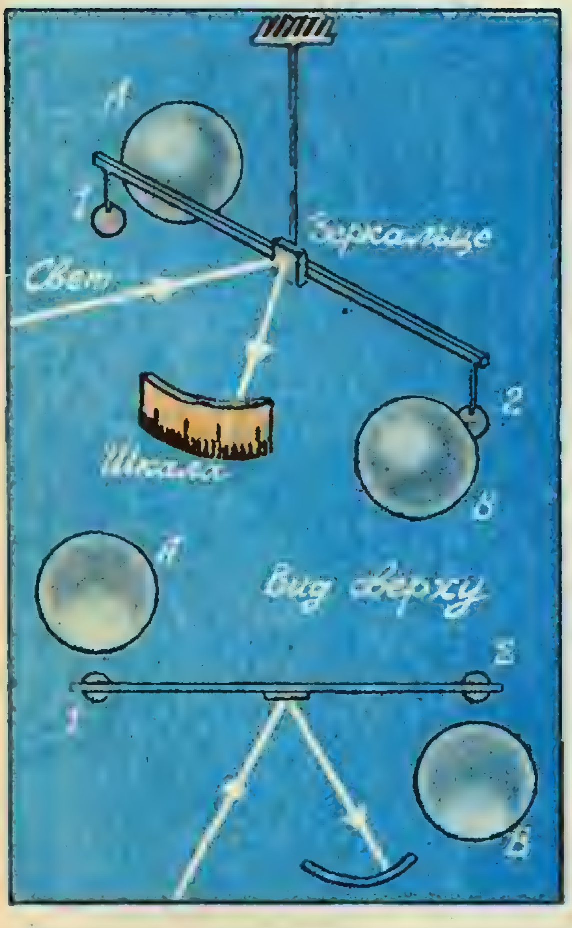


Рис. 1.

Чтобы вычислить силу взаимного притяжения двух тел, нужно знать, чему равен коэффициент G, то есть знать, с какой силой притягиваются друг к другу два тела, имеющие массы, равные единице, на расстоянии, равном единице.

Коэффициент этот можно определить только опытным путем. Он носит название гравитационной постоянной («гравитация» — латинское слово, в переводе на русский язык — тяжесть). Это первая в истории физики постоянная («константа» по-латыни), первая в семье констант, которые называют универсальными, то есть одинаковыми для всех тел природы. Ньютон ввел эту константу в науку, но не он определил ее значение.

Трудности определения постоянной тяготения обусловлены тем, что гравитационное притяжение тел, используемых в лабораторных опытах, «безнадежно» мало, и для его измерения нужны тончайшие приемы.

...Английский ученый Генри Кавендиш столь тщательно выполнял научные измерения, что его добросовестность даже отмечена в истории физики. Свои работы он публиковал только тогда, когда полностью был уверен в правильности и точности полученных результатов. Возможно, именно столь высокая требовательность к себе привела к тому, что о многих открытиях Кавендиша (и очень важных для науки открытиях!) узнали почти через сто лет после того, как они были сделаны им, при изучении его записей.

Именно Генри Кавендиш в 1798 году определил в условиях лаборатории *гравитационную постоянную. Схема* установки, которой он пользовался, изображена на рисунке 1.

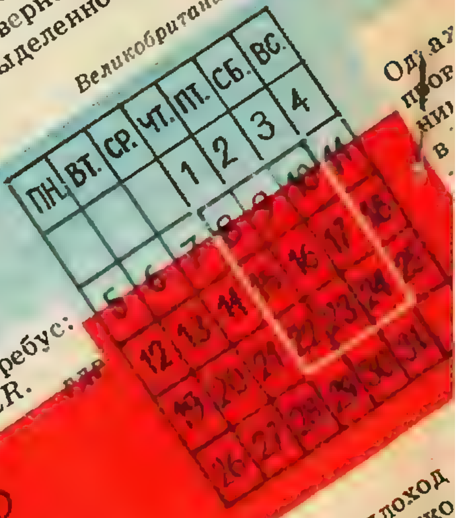
Два небольших свинцовых шара (*1* и *2*) были прикреплены к концам легкого стержня, подвешенного за середину на длинной тонкой нити. К этим шарам подносились большие шары (A и B). Шары притягивались, стержень поворачивался и закручивал нить. Закручивание прекращалось, когда действие силы упругости нити уравновешивалось действием силы тяготения между большим и малым шаром. А какова сила упругости нити при разных углах закручивания — это Кавендиш измерил заранее. Так

(Окончание см. на с. 34)

Фестиваль задач

На рисунке изображен календарь на месяц. В этом календаре выделен квадрат 3×3. Легко проверить, что этот квадрат — «магический»: в нем суммы чисел по каждой из диагоналей равны суммам чисел в среднем столбце и средней строке. Покажите, что то же самое верно для любого квадрата 3×3, выделенного в календаре.

Великобритания



Од ау
пров
ни
в .

Три грации, имевшие по одинаковому числу плодов, встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой музы и у каждой грации стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой грации до встречи с музами, если всего плодов у них было не больше 70?

Греция

Расшифруйте арифметический ребус: *LEONARD* — 12325551 = *EULER*.

− LEONHARD
12325551
EULER

Некто взял из сокровищницы 1/5 часть того, что там было. Из того, что осталось, другой взял 1/6 часть; оставил же он в сокровищнице 150 золотых монет. Сколько монет было в сокровищнице первоначально?

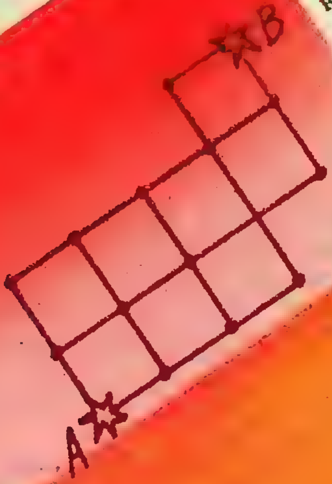
Египет

Парусник, пароход и теплоход
вались «Вашингтон», «Линко
«Джефферсон», но не обяза
таком порядке. Порты их
ния и прибытия в алфа
рядке: Бермуды, Бостон
Лондон, Ньюпорт и Нью
но, что:

а) теплоход проплы
идущего на Берму

б) «Линкольн» п
в тот же день,
вился из Лонд

в) «Вашингто во
Йорка на
стон, хотя
направил
Как наз
откуда



На рисунке изображен план поселка, в котором живут Янек и Марженка. Янек живет в доме, отмеченном буквой *A*, Марженка живет в доме, отмеченном буквой *B*. Из рисунка видно, что быстрее всего Янек доберется до Марженки, пройдя семь кварталов (все кварталы одинаковой длины). Подсчитайте, сколько имееется различных кратчайших путей от дома Янека до дома Марженки.

Чехословакия

Числа a, b, c — длины сторон треугольника. Известно, что эти числа удовлетворяют соотношениям $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2-1$. Покажите, что один из углов треугольника равен 120°.

Бельгия

Однажды первый вторник месяца я провел в Ленинграде, а первый вторник после первого понедельника — в Риге. В следующем месяце я первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца я был в каждом из городов?

СССР

Расшифруйте арифметический ребус: SNEG+KRUG=SPORT.

Югославия

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} SNEG \\ KRUG \end{array} \\ \hline SPORT \end{array}$$

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Сколько же всего, ты скажешь,
Обезьян там было в роще?

Индия

пароход назы-
Линкольн» и
обязательно в
ы их отправле-
алфавитном по-
Бостон, Галифакс,
и Нью-Йорк. Извест-

проплыл мимо корабля,
Бермуды;
ьн» прибыл в Галифакс
день, когда пароход отпра-
Лондона;
лингтон» отправился из Нью-
на всех парусах, но не в Бо-
хотя один из других кораблей
равился туда.
ак назывался каждый из кораблей,
откуда он отправился и куда плыл?

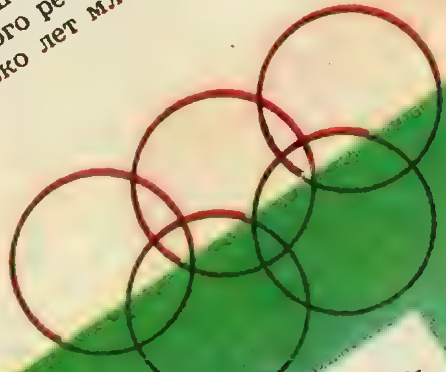
США

Найдите четырехзначное число, являющееся полным квадратом, у которого первые две цифры одинаковы и последние две цифры одинаковы.

Польша

В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причем возраст каждого ребенка — простое число. Сколько лет младшему?

Австралия



Из Варны в Софию со скоростью 75 км/ч отправилась легковая машина. Через 20 минут из Варны по тому же пути отправилась другая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от Варны вторая машина догонит первую?

Болгария

Пять олимпийских колец разбивают плоскость на 15 частей (не считая бесконечной части). Разместите в этих частях по одному числу из набора от 1 до 15 так, чтобы сумма чисел внутри каждого круга равнялась 39.

Австрия

(Начало см. на с. 30)

что теперь по углу закручивания нити можно было определить силу, с которой притягивались друг к другу большие и маленькие шары.

Зная силу притяжения между телами, их массы и расстояние между ними, можно вычислить гравитационную постоянную: так как $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$, то $G=\frac{Fr^2}{m_1m_2}$. В опытах Кавендиша масса малого шара была $m_1=0{,}73$ кг, масса большого шара — $m_2=158$ кг. Кавендиш нашел, что $G=6{,}71\times$ $\times10^{-11}$ Н · м²/кг². А по современным данным гравитационная постоянная равна $G=6{,}672\cdot10^{-11}$ Н · м²/кг².

Теперь по формуле (*) можно вычислить любую входящую в нее величину по другим, известным величинам. Следует, однако, учитывать, что наиболее точно закон выполняется в тех случаях, когда тела имеют форму шара (и тогда r в формуле (*) — это расстояние между центрами шаров) и когда линейные размеры тел много меньше расстояния между ними.

Например, вы хотите подсчитать силу, с которой ваше тело притягивается к Земле. В формулу (*) нужно подставить расстояние между центром Земли и вашим телом (о «центре тела» не будем говорить, так как размеры любого тела на Земле, даже самой высокой горы, несоизмеримо малы по сравнению с размерами Земли; поэтому за расстояние между телами принимают радиус Земли).

Проведем подсчет для тела массой 40 кг. Для подсчета нужно знать массу Земли — она равна $6\cdot10^{24}$ кг — и радиус Земли — 6400 км, или $6{,}4\cdot10^6$ м. Подставляя в формулу (*) числовые данные, получаем:

$$F=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}\times$$

$$\times\frac{6\cdot10^{24}\ \text{кг}\cdot40\ \text{кг}}{(6{,}4\cdot10^6\ \text{м})^2}\approx390\ \text{Н}.$$

Мы определили силу, с которой тело притягивается Землей, то есть силу тяжести, действующую на тело, находящееся на Земле. Но из учебника физики для 6 класса (с. 50) известно, что силу тяжести можно вычислить проще: она равна 9,8 Н/кг · 40 кг ≈ ≈ 390 Н. Случайно ли это совпадение? Конечно, нет.

Вспомним, что коэффициент 9,8 Н/кг в формуле, написанной в учебнике, означает, что на тело массой в 1 кг действует на поверхности Земли сила, равная 9,8 Н. А теперь внимательно посмотрите на запись закона всемирного тяготения. Вычисляя силу тяготения между любым телом на Земле (телом любой массы m) и Землей, мы каждый раз будем подставлять в формулу (*) одни и те же значения следующих величин: постоянной G, массы Земли $m_з$ и ее радиуса $r_з$. Значит, для всех тел одинаково и выражение $G\frac{m_з}{r_з^2}$. Подсчитайте его:

$$6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2\cdot\frac{6\cdot10^{24}\ \text{кг}}{(6{,}4\cdot10^6\ \text{м})^2}=$$

=...; особенно внимательно подумайте над его наименованием и объясните замеченное совпадение.

Чтобы проверить, хорошо ли вы поняли закон всемирного тяготения, решите такую задачу: почему сила тяжести на планете Меркурий почти в 4 раза больше, чем на Земле, хотя масса Меркурия составляет всего 0,055 от массы Земли? (Если вы найдете ответ, то убедиться в его правильности вы сможете, воспользовавшись справочником, например «Справочником по физике и технике», автор которого — А. С. Енохович. Второе издание этого справочника выпущено издательством «Просвещение» в 1983 году.)

Закон всемирного тяготения сыграл огромную роль в развитии науки и техники. С его помощью были открыты две планеты Солнечной системы — Нептун и Плутон, его используют при расчете скоростей, необходимых для запуска космических кораблей и спутников, расчете их траекторий, для осуществления точной посадки автоматических станций на другие планеты...

Но вернемся к лагуне на островах Альдабра, к приливам и отливам.

Причина возникновения приливов и отливов — всемирное тяготение, а «главный виновник» этого явления — наш спутник Луна.

Будем считать, что вода распределена по Земле тонким слоем. Так как сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между

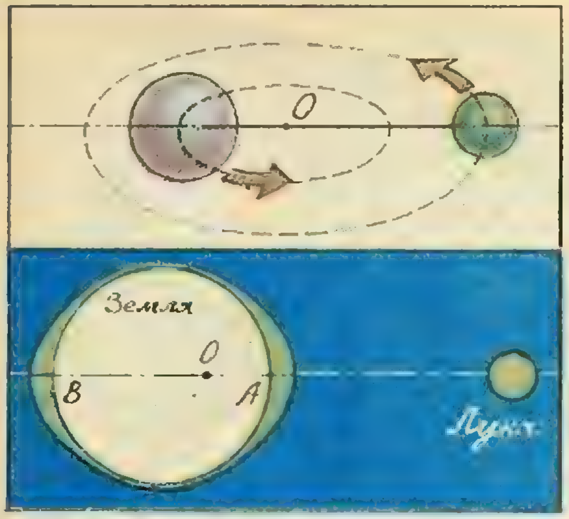


Рис. 2.

телами, вода, находящаяся вблизи точки A (рисунок 2), притягивается Луной сильнее, чем вода, находящаяся вблизи точки B. Казалось бы, в результате этого вода должна перетечь на «лунную» сторону Земли, где образуется водяной горб. Так как Земля вращается вокруг своей оси, в каждом месте вода будет раз в сутки подниматься (прилив) и опускаться (отлив). Однако в действительности *и приливы, и отливы происходят два* раза в сутки. Почему же это так?

Причина в том, что Земля и Луна не неподвижны друг относительно друга. Представьте себе два шарика — тяжелый и легкий,— соединенные нитью и лежащие на гладкой горизонтальной поверхности. Легкий шарик можно привести во вращение вокруг тяжелого. Однако тяжелый шарик при этом не останется на месте — его центр тоже будет двигаться по окружности, правда, небольшого радиуса (см. рисунок 2). Неподвижной остается только некоторая точка O на линии вдоль натянутой нити, расположенная вблизи тяжелого шарика (ее называют центром масс системы). Вокруг этой точки и происходит вращение как тяжелого, так и легкого шарика.

Точно так же Земля и Луна вращаются вокруг некоторой точки, которая, вследствие того, что Земля гораздо массивнее Луны, оказывается даже лежащей внутри Земли (но не в ее центре). Центр Земли вращается вокруг этой точки, а вода на поверхности Земли отбрасывается от центра вращения. Это приводит к тому, что и на противоположной Луне стороне Земли образуется водяной горб. Поверхность океана принимает удлиненную форму, вытянутую в направлении Луны и (немного меньше) в прямо противоположном направлении. Так как Земля вращается и вокруг собственной оси, «двугорбая» приливная волна «бежит» по поверхности Земли. В тех областях, которые оказываются посередине между горбами, наблюдаются отливы.

Изучение приливов связано со многими трудностями. Та упрощенная модель, которую мы рассматривали, далека от реальной картины. Земля, как известно, не шар, она сплюснута у полюсов; вода не распределена равномерно по ее поверхности. Луна при своем движении по орбите оказывается на разных расстояниях от Земли. Свой вклад в приливообразующую силу вносит и Солнце. А взаимное расположение Солнца, Земли и Луны периодически изменяется. Эти и многие другие факторы существенно сказываются на реальной картине образования и движения приливных волн и могут смещать положения водяных горбов, изменять их величину и т. п.

Но главное нам теперь ясно: *причина приливов и отливов — всемирное тяготение.*

Можно с уверенностью сказать, что еще в древности жрецы умели рассчитывать время приливов. Иначе как они могли бы творить «чудеса», которые описаны, например, в сказках Древнего Египта: «...Когда достигли суда канала «Двух рыб», увидели все, что отмели обнажились и дальше продвинуться невозможно. Тогда его величество фараон призвал Джеди и повелел... И Джеди начал произносить над водой магические заклинания. По слову его вода в канале поднялась и покрыла отмели слоем в четыре локтя. И суда фараона двинулись дальше...»

Поросенок и перец

С минуту Алиса стояла и смотрела в раздумье на дом. Вдруг из лесу выбежал ливрейный лакей и забарабанил в дверь. (Что это лакей, она решила по ливрее; если же судить по его внешности, это был простой лещ.) Ему открыл ливрейный лакей с круглой физиономией и выпученными глазами, очень похожий на лягушонка.

Лакей-Лещ вынул из-под мышки огромное письмо (величиной с него самого, не меньше) и передал его Лягушонку.

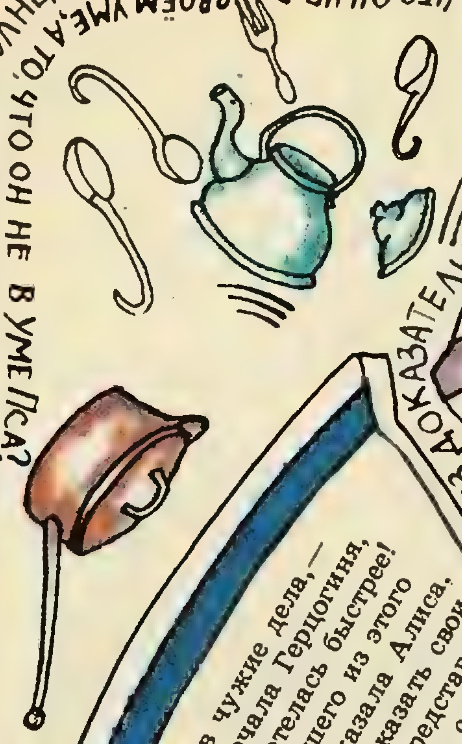
— Герцогине, — произнес он с необычайной важностью. — От Королевы. Приглашение на крокет.

Лягушонок принял письмо и важно повторил его слова, слегка изменив их порядок:

— От Королевы. Герцогине. Приглашение на крокет.

Затем они поклонились друг другу так низко, что кудри их смешались. Алису такой смех разобрал, что ей пришлось убежать подальше в лес, чтобы они не услышали. Потом она вернулась, подошла к двери и робко постучала.

— Ни к чему стучать, — сказал Лакей. — По двум при-



не совался в чужие дела, — хрипло проворчала Герцогиня, — земля бы вертелась быстрее!

— Ничего хорошего из этого бы не вышло, — сказала Алиса, радуясь случаю показать свои знания. — Только представьте себе, что бы сталось с днем и ночью. Ведь земля совершает оборот за двадцать четыре часа…

— Оборот? — повторила Герцогиня задумчиво. И, повернувшись к кухарке, прибавила: — Возьми-ка ее в оборот!

— Кажется, за двадцать четыре, — продолжала задумчиво Алиса, — а может, за двенадцать?

— Оставь меня в покое, — сказала Герцогиня. — С числами я никогда не ладила!

Тут она запела колыбельную и принялась качать младенца. Она подбрасывала

его к потолку, а тот так визжал, что Алиса едва разбирала слова.

— Держи! — крикнула вдруг Герцогиня и швырнула

ПОЧЕМУ, ЕСЛИ СМЕЯТЬСЯ ЗА ДЕРЕВЬЯМИ ИЛИ СТУЧАТЬ В ДВЕРЬ ПРИ

ТЕБЯ ВРЯД ЛИ УСЛЫШАТ?

КОГДА БОЛЬШЕ СОДОМ, КОГДА ДЫ

НЕ СКОРЕЕ ЛИ ПО ВНЕШНОСТИ ОН БЫЛ ЛАКЕЙ, А ПО ВНУТРЕННОСТИ — ЛЕЩ?

НЕ ПРАВДА ЛИ, ЧТО ИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КОТА СЛЕДУЕТ НЕ ТО, ЧТО ОН НЕ В СВОЁМ УМЕ, А ТО, ЧТО ОН НЕ В УМЕ ПСА?

НЕ ПОТОМУ ЛИ ВКОНЕЦ ОКОСЕЛ МАРТОВСКИЙ ЗАЯЦ, ЧТО ЛУЧИ ВЕСЕННЕГО МАРТОВСКОГО СОЛНЦА СЛИШКОМ КОСЫЕ?

- КОРОМЫСЛОМ ИЛИ КОГДА-СТОЛБОМ?

чинам ни к чему. Во-первых, я с той же стороны двери, что и ты. А во-вторых, они там так шумят, что никто тебя все равно не услышит. И правда, в доме стоял страшный шум: кто-то визжал, кто-то чихал, а временами слышался оглушительный звон, будто там били посуду.

— Скажите, пожалуйста,— спросила Алиса,— как мне попасть в дом? — Ты бы еще могла стучать,— продолжал Лягушонок, не отвечая на вопрос,— если б между нами была дверь. Например, если б ты была там, ты бы постучала, и я бы тогда тебя выпустил.

— Как мне попасть в дом? — громче повторила Алиса.

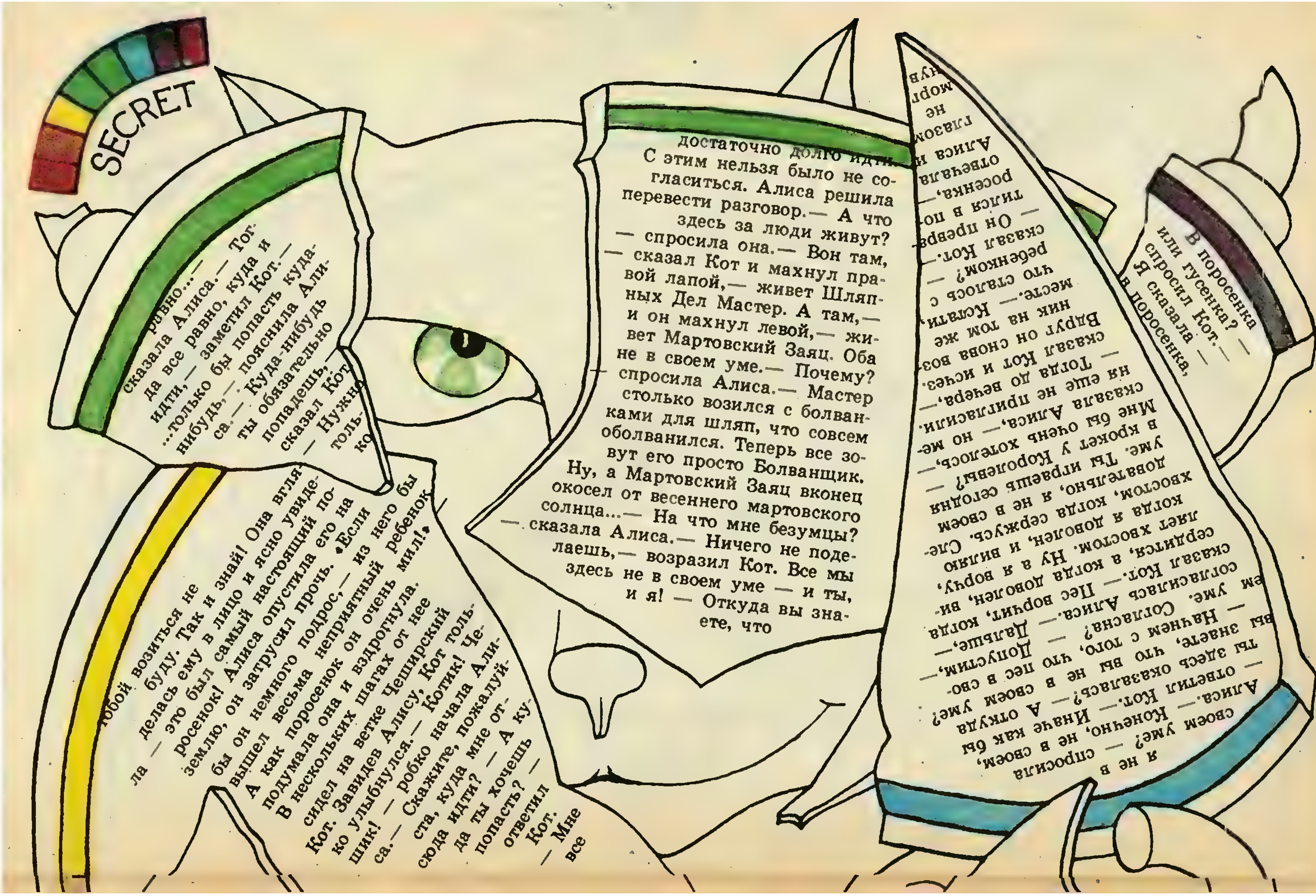
— А стоит ли туда попадать? — сказал Лягушонок.— Вот в чем вопрос. «Как они любят спорить, эти зверюшки! — подумала она.— С ума сведут своими разговорами!» А Лягушонок, видно, решил, что сейчас самое время повторить свое замечание с небольшими вариациями.— Так и буду здесь сидеть,— сказал он,— день за днем, месяц за месяцем...

— Что же мне делать? — спросила Алиса.— Что хочешь,— ответил Лягушонок и засвистал. «Нечего с ним разговаривать,— с досадой подумала Алиса.— Он такой глупый!» Она толкнула дверь и вошла. В просторной кухне стоял дым столбом; посредине на колченогом табурете сидела Герцогиня и качала младенца; кухарка у печи склонилась над огромным котлом, до краев наполненным супом. «В этом супе слишком много перцу!» — подумала Алиса. Она расчихалась и никак не могла остановиться. Во всяком случае в воздухе перцу было слишком много. Даже Герцогиня время от времени чихала, а младенец чихал и визжал без передышки. Только кухарка не чихала, да еще огромный кот, что сидел у печи и улыбался до ушей.— Скажите, пожалуйста, почему это ваш кот так улыбается? — спросила Алиса робко.— Потому,— сказала Герцогиня.— Это Чеширский Кот — вот почему!— Я и не знала, что Чеширские Коты всегда улыбаются,— сказала Алиса. Пока Алиса размышляла, о чем бы еще поговорить, кухарка сняла котел с печи и, не тратя попусту слов, принялась швырять все, что попадало ей под руку. Полетели совок, кочерга, щипцы для угля. За ними последовали чашки, тарелки и блюдца.— Осторожней, прошу вас,— закричала Алиса. В эту минуту прямо мимо младенца пролетело огромное блюдо.— Если бы кое-кто

КОГДА В ВОЗДУХЕ БОЛЬШЕ ПЕРЦУ, КОГДА СУП ГОРЯЧИЙ ИЛИ КОГДА ОН ХОЛОДНЫЙ? ПОЧЕМУ?

ПРАВДА ЛИ, ЧТО ДАЛЬШЕ БРОСИТЬ ТАРЕЛКУ ЛЕГЧЕ, ЧЕМ ЧАШКУ? ПОЧЕМУ?

КОГДА СИЛЬНЕЕ ЗАХВАТЫВАЛО ДУХ У МЛАДЕНЦА, ПРИ ПОЛЁТЕ ВВЕРХ ИЛИ ВНИЗ?



ла — тобой возиться не буду. Так и знай! Она вгляделась ему в лицо и ясно увидела — это был самый настоящий поросенок! Алиса опустила его на землю, он затрусил прочь. «Если бы он немного подрос,— из него бы вышел весьма неприятный ребенок. А как поросенок он очень мил!» подумала она и вздрогнула. В нескольких шагах от нее сидел на ветке Чеширский Кот. Завидев Алису, Кот только улыбнулся.— Котик! Чеширский Котик! — робко начала Алиса.— Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти? — А куда ты хочешь попасть? — ответил Кот. — Мне все равно...— сказала Алиса.— Тогда все равно, куда и идти,— заметил Кот.— ...только бы попасть куда-нибудь,— пояснила Алиса.— Куда-нибудь ты обязательно попадешь,— сказал Кот.— Нужно толь-ко

достаточно долго идти. С этим нельзя было не согласиться. Алиса решила перевести разговор.— А что здесь за люди живут? — спросила она.— Вон там, — сказал Кот и махнул правой лапой,— живет Шляпных Дел Мастер. А там,— и он махнул левой,— живет Мартовский Заяц. Оба не в своем уме.— Почему? — спросила Алиса.— Мастер столько возился с болванками для шляп, что совсем оболванился. Теперь все зовут его просто Болванщик. Ну, а Мартовский Заяц вконец окосел от весеннего мартовского солнца...— На что мне безумцы? — сказала Алиса.— Ничего не поделаешь,— возразил Кот. Все мы здесь не в своем уме — и ты, и я! — Откуда вы знаете, что

я не в своем уме? — спросила Алиса.— Конечно, не в своем, — ответил Кот.— Иначе как бы ты здесь оказалась?— А откуда вы знаете, что вы не в своем уме? — Начнем с того, что пес в своем уме. Согласна? — Допустим,— согласилась Алиса.— Дальше,— сказал Кот.— Пес ворчит, когда сердится, а когда доволен, виляет хвостом. Ну а я ворчу, когда я доволен, и виляю хвостом, когда сержусь. Следовательно, я не в своем уме. Ты играешь сегодня в крокет у Королевы? — Мне бы очень хотелось,— сказала Алиса,— но меня еще не пригласили. — Тогда до вечера,— сказал Кот и исчез. Вдруг он снова возник на том же месте.— Кстати, что сталось с ребенком? — сказал Кот.— Он превратился в поросенка,— отвечала Алиса и глазом не моргнув

В поросенка или гусенка? — спросил Кот.— Я сказала в поросенка, Алисе младенца.

— Можешь покачать его немного. А мне надо пойти и переодеться к крокету у Королевы. С этими словами она выбежала из кухни. Кухарка швырнула ей вдогонку кастрюлю, но промахнулась. «Если я не возьму малыша с собой,— подумала Алиса,— они через денек-другой его прикончат. Оставить его здесь — просто преступление!» Последние слова она произнесла вслух, и младенец тихонько хрюкнул в знак согласия (чихать он уже перестал). — Не хрюкай,— сказала Алиса.— Выражай свои мысли как-нибудь по-другому! «Может, он просто всхлипнул»,— подумала она и посмотрела

ему в глаза, нет ли там слез.— Вот что, мой милый,— сказала Алиса серьезно,— если ты собираешься превратиться в поросенка, я с

— ответила Алиса. — А можете вы исчезать и появляться не так внезапно? А то у меня голова идет кругом.— Хорошо,— сказал Кот и исчез, на этот раз очень медленно. Первым исчез его кончик хвоста, а последней — улыбка; она долго еще парила в воздухе, когда все остальное уже пропало. «Д-да! — подумала Алиса.— Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота! Такого я в жизни еще не встречала». Пройдя немного дальше, она увидела домик Мартовского Зайца. Ошибиться было невозможно — на крыше из заячьего меха торчали две трубы.

1. В стране чудес живут рыцари, всегда говорящие правду, нормальные особы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут, и лжецы, которые лгут всегда. Причем рыцари считаются особами более высокого ранга, чем нормальные люди и лжецы, а нормальные люди выше по рангу, чем лжецы. Лягушонок заявил Алисе, что Герцогиня выше его по рангу. Кем был Лягушонок: рыцарем, лжецом или нормальным?

2. Попробуйте выяснить, кем была Герцогиня.

3. Чеширский Кот однажды заявил, что он по рангу ниже кухарки, а та в ответ крикнула: «Неправда!» Какого ранга Чеширский Кот и кухарка?

4. Три обитателя страны чудес, принадлежащие к разным рангам, однажды заявили: А: я нормальный; В: это правда; С — я не нормальный. Кем были А, В и С?

5. Король страны чудес однажды спросил у представших перед ним трех подданых, кто они по рангу. Лещ ответил: «Лягушонок по рангу выше Кролика». Лягушонок сказал: «Кролик выше рангом, чем Лещ». Затем озадаченный король спросил Кролика: «Кто выше рангом: Лещ или Лягушонок?» Что скажет Кролик?

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М936, М937» или «Ф948». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачник по математике этого номера основан на задачах, предлагавшихся в апреле этого года на «Турнире городов».

Задачи

М936 — М940; Ф948 — Ф952

М936. Докажите, что за $3n+1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжелый из $2n+2$ камней, если: а) $n=3$; б) n — любое натуральное число.

С. В. Фомин

М937. Существует ли такая фигура F, что ею нельзя накрыть полукруг радиуса 1, а двумя ее экземплярами можно накрыть круг радиуса 1, если F: а) произвольная фигура; б) выпуклая фигура?

Н. Б. Васильев, А. Г. Самосват

М938. Радиус круга с центром O равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол $360°/n$ (где n — натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду — положение OM_1, еще через 2 секунды — положение OM_2, еще через 3 секунды после этого — положение OM_3 и т. д., еще через $n-1$ секунд — положение OM_{n-1}.

а) Докажите, что если n — степень 2, то радиусы $OM_1, \ldots, OM_{n-1}$ делят круг на n равных секторов.

б) Возможно ли это при других значениях n?

В. В. Произволов

М939. В клетки таблицы 10×10 записывают каким-либо образом цифры 0, 1, ..., 9 так, что каждая цифра встречается 10 раз.

а) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и каждом столбце встречалось не более 4 различных цифр?

б)* Докажите, что найдется строка или столбец, в котором встречается не менее 4 различных цифр.

Л. Д. Курляндчик

М940*. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовем цепочкой такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий (рис. 1). Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата нужно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» —

множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют ее целиком, не налагаясь друг на друга?

А. И. Гольберг, В. А. Гурвич

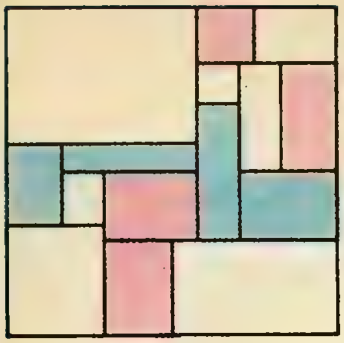


Рис. 1.

Ф948. Известно, что в небольшой «просвет» между машинами, стоящими у тротуара, рекомендуется заезжать задним ходом, а не передним. Почему?

Г. Я. Мякишев

Ф949. Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей жидкости, а другой — в ее глубине?

Т. С. Петрова

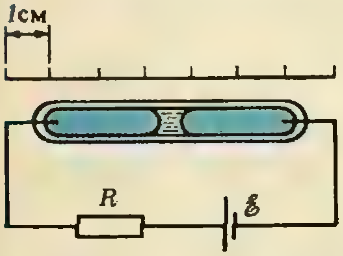


Рис. 2.

Ф950. В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита HgI_2. Внутренний диаметр трубки $d=0{,}3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R=390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В (рис. 2). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф951. Определить емкость системы конденсаторов, приведенной на рисунке 3. У каждого конденсатора указано значение его емкости, измеренной в микрофарадах.

А. И. Буздин, С. С. Кротов

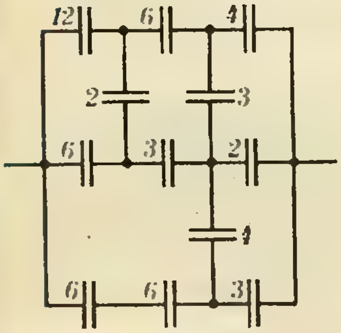


Рис. 3.

Ф952. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет и фотографию этого предмета, сделанную из той точки, в которой находится наблюдатель. Что ему кажется бóльшим — предмет или его фотографическое изображение? Во сколько раз? Фотография была сделана аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=3$ см; при печатании снимка было сделано увеличение $k=2{,}5$.

Б. С. Рыбин

Problems

M936 — M940; P948 — P952

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes

M936. Prove that $3n+1$ weightings on a plain balance without weights are sufficient to distinguish the lightest and the heaviest of $2n+2$ stones, if a) $n=3$; b) n is any natural number.

S. V. Fomin

M937. Does there exist a plane figure F which does not cover a half disk of radius 1, while two copies suffice to cover a disk of radius 1, if a) F is an arbitrary set; b) a convex one?

N. B. Vasiliev, A. G. Samosvat

M938. The radius of a circle rotates about its centre O, sweeping through an angle of $360°/n$ each second (where n is a natural number greater than 3). At the initial moment the ra-

without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15 th to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

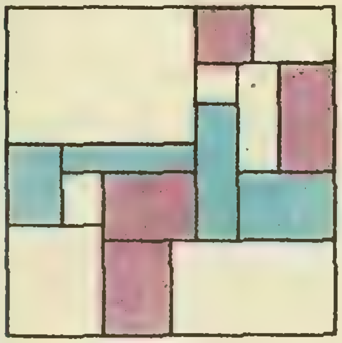


Fig. 1.

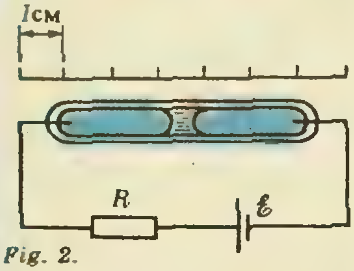


Fig. 2.

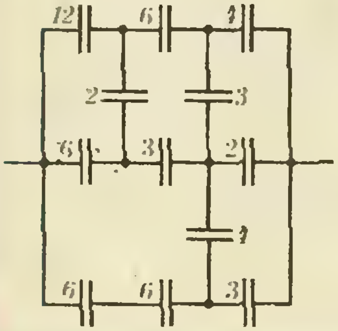


Fig. 3.

dius occupies position OM_0, in a second, position OM_1, in two more seconds, position OM_2, in three more seconds, position OM_3, ets., in $n-1$ seconds more, position OM_{n-1}.

a) Prove that if n is a power of 2, then the radii OM_0, ..., OM_{n-1} divide the disk into n equal parts.

b) Can this happen for other values of n?

V. V. Proizvolov

M939. The entries of a 10 by 10 table are the numbers 0, 1,...,9, each of which appears 10 times.

a) Can it be that no more than 4 different numbers appear in each row and in each column?

b)* Prove that there is always a row or a column with no less than 4 different numbers.

L. D. Kurliandchik

M940*. a) A square is partitioned into rectangles. By a "chain" we mean a collection of these rectangles such that their projections on one of the sides cover it without overlapping (Fig. 1). Prove that any two rectangles are part of at least one chan.

b) Prove a similar statement for the cube partitioned into cuboids (in the definition of chain the word "sides" is changed to "edges").

s) Is it true than any two cuboids in the partition of the cube belong to the same "layer" — a set of cuboids whose projections on one of the faces cover it without overlapping?

A. I. Golberg, V. A. Gurvich

P948. When parking his car in a small space by the curb between two other cars, any experienced driver will move into the space in reverse. Why?

G. Ya. Myakishev

P949. Will two thermometers, one of which is near the surface of a boiling liquid, the other deep inside, show the same temperature?

T. S. Petrova

P950. In a sealed capillary tube, two columns of mercury are separated by a droplet of an electrolyte (HgI_2) solution. The inner diameter of the tube is $d=0.3$ mm. The tube is connected in sequence with a resistor of $R=390$ kOhm to a battery of EMF $\mathcal{E}=10$ V (Fig. 2). How soon will the droplet move by one subdivision of the scale shown on the picture?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P951. Determine the capacity of the system of capacitors shown on Figure 3. Each number on the figure shows the capacity of the corresponding capacitor (in microfarads).

A. I. Buzdin, S. S. Krotov

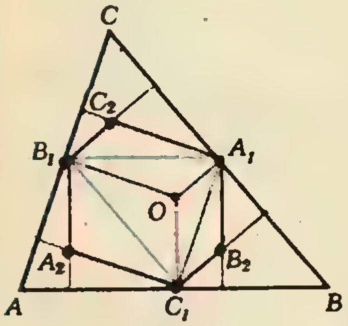
P952. An observer looks at a distant object and a photograph of this object, made from the point of observation. What will seem bigger to him — the object or its picture? By how much? The photograph was taken with a camera of focal distance $F=3$ cm; when it was beeing printed, the enlargement was $k=2.5$.

B. S. Rybin

Решения задач

М916 — М920; Ф927 — Ф932

М916. *Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.*



Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, середины его сторон — A_1, B_1, C_1, три другие вершины рассматриваемого в задаче шестиугольника — A_2, B_2, C_2 (см. рисунок). Заметим, что отрезки, соединяющие центр O описанной окружности треугольника ABC с серединами его сторон, разбивают наш шестиугольник на три параллелограмма $OA_1C_2B_1$, $OB_1A_2C_1$ и $OC_1B_2A_1$ (отрезки OA_1 и B_1C_2 параллельны, так как оба они перпендикулярны стороне BC; аналогично $OB_1 \parallel A_1C_2$ и т. д.). Отсюда следует, что треугольники $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$ и $C_1A_1B_2$ соответственно равны треугольникам A_1B_1O, B_1C_1O и C_1A_1O, а значит, площадь шестиугольника вдвое больше площади треугольника $A_1B_1C_1$, очевидно, равной четверти площади исходного треугольника.

Другое доказательство опирается на то, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке: A_2, B_2 и C_2 — это точки пересечения высот равных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B и B_1CA_1, отсюда $\triangle A_2B_1C_1=\triangle C_2CA_1$, $\triangle B_2A_1C_1=\triangle C_2CB_1$, следовательно, наш треугольник равновелик параллелограмму $C_1A_1CB_1$.

Отметим, что в случае тупоугольного треугольника аналогичное построение приводит к самопересекающейся шестизвенной ломаной, для которой утверждение останется в силе, если рассматривать так называемую «ориентированную площадь» (см. статью А. Л. Тоома «Сколько площадей у многоугольника?» в «Кванте» № 12 за 1984 г.).

А. А. Азамов

М917. *а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Считается, что номера билетов изменяются от 000000 до 999999 включительно; билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр.)*

а) Ответ: 1000. Любой номер билета находится между двумя счастливыми номерами, равными $1000N+N$ и $1000(N+1)+(N+1)$ (N и $N+1$ — трехзначные числа), у которых три первые цифры совпадают, с учетом порядка, с тремя последними (для номера, равного $1000A+B$, где A и B — трехзначные числа, надо взять $N=A$, если $A<B$, и $N=A-1$, если $A \geqslant B$). Поскольку разность этих счастливых номеров равна 1001, длина серии несчастливых билетов не может быть больше 1000. В то же время две серии длины 1000 — от 000001 до 001000 и от 998999 до 999998, очевидно, состоят из несчастливых номеров.

б) Ответ: две серии; они приведены в решении задачи а).

Покажем, что между любыми двумя счастливыми номерами $n=\overline{abcabc}$ *) и $n'=n+1001=$

---

*) Черта означает десятичную запись: $\overline{a_1a_2\ldots a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n$.

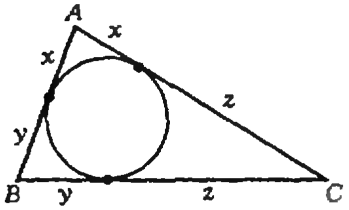
$=\overline{a'b'c'a'b'c'}$ ($\overline{a'b'c'}=\overline{abc}+1$) при $\overline{abc}\neq 000$ и $\overline{abc}\neq 998$ имеется еще хотя бы один счастливый номер. Отсюда, очевидно, следует, что других «несчастливых серий» длины 1000, кроме указанных выше, не существует.

Если $a\neq 9$, $c\neq 0$, то таким номером является $\overline{abc(a+1)b(c-1)}$; если $a=9$, то и $a'=9$, а нужный номер — $\overline{a'b'c'8b_1c_1}$, где число $\overline{b_1c_1}$ получено увеличением на 1 одной из цифр числа $\overline{b'c'}$ ($\overline{b'c'}\neq 99$); если $c=0$, то $c'=1$ и нужный номер — $\overline{a'b'c'a_2b_22}$, где $\overline{a_2b_2}$ получено из $\overline{a'b'}$ уменьшением одной из цифр на 1 ($\overline{a'b'}\neq 00$).

С. Ю. Оревков

◆

М918.* *Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа — 3, 4 и 5.*



Пусть в данном треугольнике ABC длины сторон AB, BC и CA равны c, a и b, тогда, как легко видеть, отрезки сторон от вершин A, B, C до точек касания вписанной окружности со сторонами равны

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{c+a-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2} \qquad (1)$$

(обозначения см. на рисунке). При этом полупериметр p треугольника равен $x+y+z$. Приравнивая выражения для площади S треугольника по формуле Герона —

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

и через полупериметр и радиус $r=1$ вписанной окружности —

$$S=pr,$$

получим, что $p=(p-a)(p-b)(p-c)$ или

$$x+y+z=xyz. \qquad (2)$$

Из равенств (1) следует, что числа x, y и z либо все одновременно целые, либо полуцелые (то есть вида $n+1/2$, где n — целое). Во втором случае числа $2x$, $2y$ и $2z$ должны были бы быть нечетными, что невозможно в силу равенства (2) ($2x\cdot 2y\cdot 2z=4(2x+2y+2z)=4(a+b+c)$ — нечетное число равно четному), и, таким образом, мы должны решить уравнение (2) в целых числах.

Пусть для определенности $x\leqslant y\leqslant z$, тогда $xyz\leqslant 3z$, то есть $xy\leqslant 3$. Перебирая пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих этому неравенству (и условию $x\leqslant y$), получим, что либо $x=y=1$, и тогда $2+z=z$, что невозможно; либо $x=1$, $y=2$, и тогда $3+z=2z$, то есть $z=3$; либо $x=1$, $y=3$ и $z=2<y$, что противоречит нашему предположению. Итак, $x=1$, $y=2$, $z=3$, то есть $a=y+z=5$, $b=z+x=4$, $c=x+y=3$.

В. В. Прасолов

◆

М919. *а) Докажите равенство*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,dx+\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Если f и g — взаимно обратные функции, то уравнения $y=f(x)$ и $x=g(y)$ задают на координатной плоскости Oxy одну и ту же линию — график функции f. На этом соображении основано решение как *б)* Докажите неравенство*

$$9<\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx+\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx<9{,}0001.$$

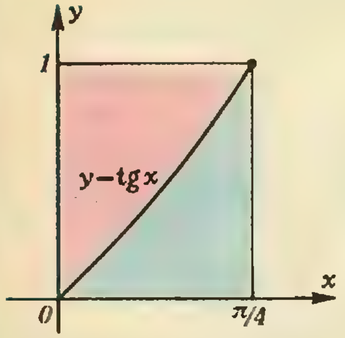


Рис. 1.

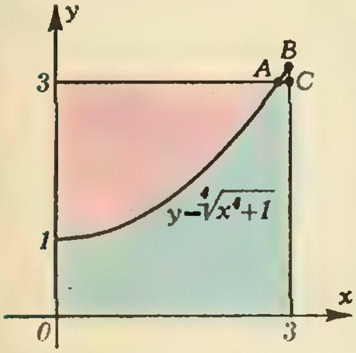


Рис. 2.

задачи а), так и задачи б).

а) На рисунке 1 изображен график функции $y=\operatorname{tg} x$, где $x\in[0;\pi/4]$. Ту же линию можно задать уравнением $x=\operatorname{arctg} y$, где $y\in[0;1]$. Поэтому первое слагаемое в левой части доказываемого равенства — это площадь голубой фигуры на рисунке 1, а второе слагаемое, которое можно записать в виде $\int_0^1 \operatorname{arctg} y\,dy$, — площадь розовой фигуры. Сумма этих площадей есть площадь прямоугольника, ограниченного осями координат и прямыми $x=\frac{\pi}{4}$, $y=1$, а эта площадь равна $\frac{\pi}{4}$.

б) Если $y=\sqrt[4]{x^4+1}$, где $x\geqslant 0$, то $y^4=x^4+1$, откуда $x=\sqrt[4]{y^4-1}$. На рисунке 2 изображен график функции $y=\sqrt[4]{x^4+1}$, где $x\in[0;3]$. Эта же линия задается уравнением $x=\sqrt[4]{y^4-1}$, где $y=[1;\sqrt[4]{82}]$.

Первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства — это площадь голубой фигуры на рисунке 2, а второе слагаемое, которое можно представить в виде $\int_1^3 \sqrt[4]{y^4-1}\,dy$, — площадь розовой фигуры. Сумма этих площадей есть площадь квадрата, ограниченного осями координат и прямыми $x=3$, $y=3$, сложенная с площадью S криволинейного треугольника ABC, ограниченного графиком $y=\sqrt[4]{x^4+1}$ и прямыми $y=3$, $x=3$. Следовательно,

$$\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx+\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx=9+S.$$

Остается доказать, что $S<0{,}0001$.

Криволинейный треугольник ABC содержится в прямоугольнике $ABCD$, ограниченном прямыми $x=3$, $y=3$, $x=\sqrt[4]{80}$, $y=\sqrt[4]{82}$. Стороны этого прямоугольника равны $\sqrt[4]{82}-3$ и $3-\sqrt[4]{80}$. Поэтому неравенство $S<S_{ABCD}<0{,}0001$ следует из неравенств $\sqrt[4]{82}<3{,}01$ и $\sqrt[4]{80}>2{,}99$, которые можно установить, например, так:

$$3{,}01^4=((3+0{,}01)^2)^2=(9+0{,}06+0{,}0001)^2>$$
$$>(9+0{,}06)^2=81+1{,}08+0{,}0036>82;$$

$$2{,}99^4=((3-0{,}01)^2)^2=(9-0{,}06+0{,}0001)^2<$$
$$<(9-0{,}059)^2<81-1{,}062+0{,}0036<80.$$

Ю. И. Ионин

М920. *а) Найдите хотя бы одно решение уравнения*

$$x^3+y^3+z^3=x^2y^2z^2$$

в натуральных числах.

б) Докажите, что уравнение*

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

◆

а) Ответ: $(x, y, z)=(1, 2, 3)$.

б) Выведем из данного уравнения неравенство, которое позволит найти все решения перебором небольшого числа возможных значений неизвестных.

Пусть для определенности $x\leqslant y\leqslant z$, тогда *имеет натуральное решение лишь при $n=1$ и $n=3$, и найдите все эти решения.*

$$z=nx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{z^2}\geqslant nx^2y^2-(x+y).$$

В то же время, очевидно, x^3+y^3 делится нацело на z^2, поэтому

$$x^3+y^3\geqslant z^2\geqslant(nx^2y^2-(x+y))^2,$$

следовательно,

$$n^2x^4y^4<2nx^2y^2(x+y)+x^3+y^3.$$

Деля обе части на nx^3y^3, мы получаем нужную оценку

$$nxy<2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{nx^3}+\frac{1}{ny^3}. \qquad (*)$$

Из нее сразу следует, что $x=1$, потому что при $x\geqslant 2$ (и $y\geqslant x$) левая часть неравенства (*) не меньше 4, а правая — меньше 3. Подставим значение $x=1$ в (*):

$$ny<2+\frac{2}{y}+\frac{1}{n}+\frac{1}{ny^3}.$$

Это неравенство может выполняться лишь при $y\leqslant 3$ (при $y\geqslant 4$ его правая часть меньше 4). Вспомним, что число $x^3+y^3=1+y^3$ должно делиться на z^2, причем $z\geqslant y$; отсюда вытекает, что $z=1$ при $y=1$ $(1+y^3=2)$, $z=3$ при $y=2$ $(1+y^3=9)$, а при $y=3$ $(1+y^3=28)$ подходящих значений z не существует. Остается подставить тройки чисел (1, 1, 1) и (1, 2, 3) в исходное уравнение и найти, что в первом случае $n=3$, а во втором $n=1$.

Итак, ответ: при $n=3$ $x=y=z=1$, при $n=1$ уравнению удовлетворяет тройка (1, 2, 3) и все, получающиеся из нее перестановками..

Решенное нами уравнение напоминает по структуре уравнение $x^2+y^2+z^2=nxyz$, которое подробно рассматривалось в статье М. Г. Крейна «Диофантово уравнение А. А. Маркова» в «Кванте» № 4 за этот год. Интересно, что это уравнение также разрешимо только при $n=1$ и $n=3$, однако число его решений в обоих случаях бесконечно. Еще одно похожее уравнение в целых числах $(x+y+z=xyz)$ встречается в решении задачи М918.

Р. А. Мазов, В. И. Дубровский

◆

Ф927. *Через сцинтилляционный счетчик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, пролетает заряженная частица, и молекулы сцинтиллятора, лежащие вдоль ее траектории, испускают свет. Свет в каждой точке испускается изотропно, то есть равномерно во все стороны. Какая доля световой энергии выйдет из сцинтиллятора в воздух, если коэффициент преломления вещества сцинтиллятора $n=1{,}6$? Поглощением света в сцинтилляторе пренебречь.*

Примечание: телесный угол при вершине конуса равен $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$, где θ — угол между осью конуса и его образующей.

Рассмотрим луч света, испущенный из произвольной точки внутри сцинтиллятора.

Пусть α — угол, который образует этот луч с нормалью $\vec{N}$ к одной из граней параллелепипеда, для определенности назовем ее гранью A, а $\alpha_0=\arcsin(1/n)\approx 39°$ — предельный угол полного отражения света на границе сцинтиллятор — воздух.

Докажем, что для любых значений показателя преломления $n>\sqrt{2}$ справедливы следующие утверждения:

1. Луч, испущенный под углом $\alpha<\alpha_0$, обязательно выйдет из сцинтиллятора и притом только через грань A.

2. Никакой луч, испущенный под углом $\alpha>\alpha_0$, через грань A выйти не может.

Прежде всего заметим, что при отражении

света от граней, параллельных $\vec{N}$, угол α не меняется (это следует непосредственно из закона отражения света). Далее, поскольку для $n>\sqrt{2}$ $\alpha_0<45^\circ$, минимальный возможный угол падения луча (удовлетворяющий условию $\alpha<\alpha_0$!) на грани, параллельные $\vec{N}$, оказывается больше α_0 и, следовательно, через эти грани свет из сцинтиллятора выйти не может. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Рассмотрим все возможные значения углов α от 0 до 180°. В области $\alpha_0<\alpha<90^\circ$, в силу сделанного замечания, ясно, что ни при каком из этих углов свет через грань A выйти не может. При начальных углах $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$ на грань A могут попасть (но вовсе не обязательно попадут) лишь те лучи, которые испытали полное отражение на грани — назовем ее B,— параллельной A. Но такие лучи не могут выйти через грань A, поскольку их угол падения на нее точно такой же, как и на грань B, от которой они отразились. Следовательно, утверждение 2 тоже доказано.

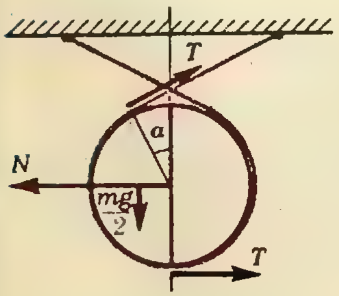
Итак, все лучи, которые выйдут из счетчика, сосредоточены в шести конусах — ось каждого конуса перпендикулярна одной из граней параллелепипеда. Телесный угол, вырезаемый всеми конусами, от максимально возможного телесного угла, равного 4π, составляет долю

$$\eta=\frac{6\cdot2\pi(1-\cos\alpha_0)}{4\pi}=3\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Это означает, что из сцинтиллятора с $n=1{,}6$ выйдет приблизительно 2/3 образовавшейся световой энергии.

С. А. Хорозов

Ф928. *Два одинаковых гладких полуцилиндра, общая масса которых m, подвешены на нерастяжимой невесомой нити так, как показано на рисунке. Чему равны сила натяжения нити и сила давления одного полуцилиндра на другой?*



◆

На каждый полуцилиндр действуют сила тяжести, сила натяжения нити и сила давления со стороны второго полуцилиндра. Запишем условие равновесия полуцилиндра:

в проекциях на горизонтальную ось —

$$T+T\cos\alpha=N, \tag{1}$$

в проекциях на вертикальную ось —

$$T\sin\alpha=\frac{mg}{2}. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим силу T натяжения нити и силу N давления одного полуцилиндра на другой:

$$T=\frac{mg}{2\sin\alpha},$$

$$N=\frac{mg(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha}.$$

Л. Г. Маркович

Ф929. *Известно, что, охлаждая сосуд с водой и одновременно откачивая газ из сосуда, можно довести воду до кипения. Возможно ли закипание жидкости при охлаждении замкнутого сосуда с жидкостью и газом?*

Условие закипания жидкости при данной температуре — равенство давления над ней давлению насыщенных паров при этой температуре.

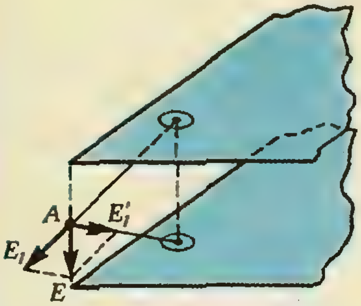
Если замкнутый сосуд с жидкостью и газом охлаждать равномерно, то при любой температуре давление над жидкостью будет больше давления ее насыщенных паров на величину парциального давления газа, находящегося в сосуде. В этом случае жидкость при охлаждении не закипит.

Если же сосуд охлаждать неравномерно, так, чтобы верхняя часть сосуда охлаждалась быстрее, жидкость может закипеть. Это произойдет, когда суммарное давление газа и насыщенных паров над жидкостью, где температура более низкая, станет равным давлению насыщенных паров при той более высокой температуре, какую имеет в данный момент жидкость.

Л. А. Ашкинази

◆

Ф930. *Плотности поверхностного заряда на прямоугольных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$. Расстояние между пластинами много меньше размера пластин. Определите напряженность электрического поля в точке A (см. рисунок).*



Из соображений симметрии легко показать, что вектор напряженности $\vec{E}_A$ электростатического поля в точке A направлен перпендикулярно пластинам конденсатора.

Действительно, разобьем мысленно каждую пластину на одинаковые малые участки. Выберем на двух пластинах пару симметричных (лежащих друг против друга) участков. Напряженность $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_1'$ поля, создаваемого зарядами этих участков в точке A, направлена вертикально (см. рисунок). Так что суммарная напряженность $\vec{E}_A$ поля в точке A также вертикальна (то есть перпендикулярна пластинам конденсатора).

Дополним мысленно каждую пластину нашего конденсатора еще тремя такими же пластинами (с той же плотностью зарядов) так, чтобы точка A оказалась внутренней точкой конденсатора с «учетверенными» пластинами. Напряженность $\vec{E}_0$ поля такого конденсатора в точке A станет равной $\vec{E}_0=4\vec{E}_A$, где $E_0=\sigma/\varepsilon_0$. Следовательно,

$$E_A=\frac{E_0}{4}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

О. Я. Савченко

◆

Ф931. *Точечный источник расположен на расстоянии 2F от линзы с фокусным расстоянием F. На расстоянии 3F от линзы расположен экран (см. рисунок). За линзой установлена круглая пластинка радиуса R, пропускаю-*

Изображение источника создается на расстоянии $f=Fd/(F+d)=2F$ от линзы (см. рисунок) и, следовательно, на расстоянии F от экрана. Радиус $R_п$ освещенного пятна на экране определяется соотношением $R_л/2F=R_п/F$ ($R_л$ — радиус линзы), откуда $R_п=R_л/2$.

щая свет неравномерно (радиус пластинки не меньше радиуса линзы). При этом пятно, получающееся на экране, имеет равномерную максимально возможную освещенность. Как распределена «пропускная способность» пластинки вдоль ее радиуса?

В точку экрана, лежащую на расстоянии r от оптической оси ($r \leqslant R_п$), попадают лучи, выходящие из линзы на расстоянии $2r$ от оси. Освещенность в этой точке экрана (без использования пластинки) равна

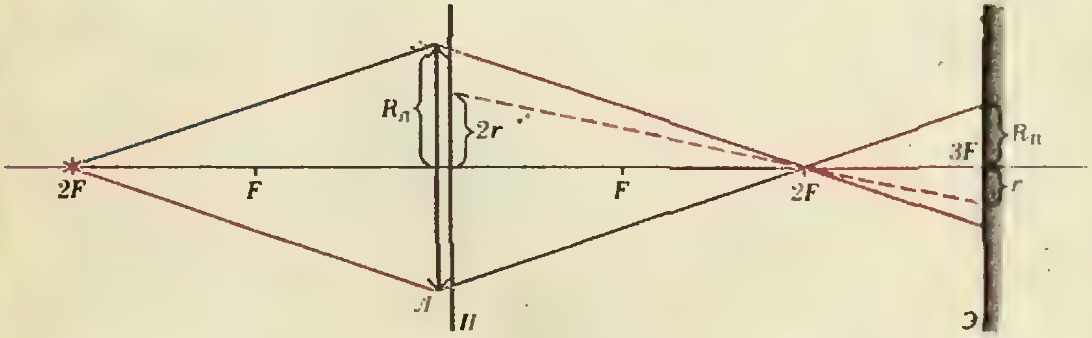
$$E_0(r) = \frac{IF}{(F^2+r^2)\sqrt{F^2+r^2}} = \frac{IF}{(F^2+r^2)^{3/2}}$$

(I — сила света источника; потерями света в линзе мы пренебрегаем). При использовании пластинки освещенность в этой точке будет

$$E(r) = E_0(r) \cdot T(2r) = \frac{IF}{(F^2+r^2)^{3/2}} T(2r),$$

где $T(2r)$ — «пропускная способность» пластинки в ее точках, находящихся на расстоянии $2r$ от оптической оси. Понятно, что освещенность в любых точках пятна (независимо от r) будет одной и той же, если $T(2r) = k(F^2+r^2)^{3/2}$, то есть

$$T(r) = k\left(F^2 + \frac{r^2}{4}\right)^{3/2},$$



где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Поскольку $T(r) \leqslant 1$, максимальная возможная освещенность во всех точках пятна при использовании пластинки не может быть больше минимальной освещенности пятна, получающегося без пластинки. Минимальная освещенность без пластинки — в точках, лежащих на границе пятна, то есть на расстоянии $R_п$ от оптической оси. В эти точки попадают лучи, выходящие из пластины на расстоянии $R_л$ от оси. Следовательно, максимальное значение k определяется условием $T(R_л) = 1$, то есть

$$k = \frac{1}{(F^2 + R_л^2/4)^{3/2}}.$$

Итак, пятно на экране имеет равномерную максимально возможную освещенность, если «пропускная способность» пластинки меняется вдоль ее радиуса по закону

$$T(r) = \frac{1}{(F^2+R_л^2/4)^{3/2}} (F^2+r^2/4)^{3/2} = \left(\frac{4F^2+r^2}{4F^2+R_л^2}\right)^{3/2}.$$

А. А. Лапидес

Ф932. *Настройка гитары состоит в следующем: нажимая в определенном месте вторую струну, добиваются, чтобы она звучала в унисон с первой, далее так же настраивают другие струны. Может ли человек, у которого абсолютно отсутствует музыкальный слух (то есть умение различать звуки по высоте), настроить гитару?*

Давление воздуха в том месте пространства, через которое проходит звуковая волна, отличается от среднего атмосферного давления на величину Δp, которая меняется со временем по закону

$$\Delta p = p_0 \cos \omega t,$$

где p_0 — амплитуда избыточного давления, характеризующая громкость звука (определяется начальными условиями возбуждения звука), ω — частота колебаний, характеризующая тон (высоту) звука (определяется частотой колебаний источника звука).

Представим себе, что мы дернули одновременно с одинаковой силой две гитарные струны, зажав их так, что в случае точной настройки они должны были бы издавать звуки одной и той же высоты. Суммарное дополнительное давление воздуха будет меняться со временем по закону

$$\Delta p_c = p_0 \cos \omega t + p_0 \cos((\omega + \delta\omega)t + \varphi) =$$
$$= 2p_0 \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + \frac{\varphi}{2}\right),$$

где $\delta\omega$ — разность частот, которая и определяет степень «расстроенности» инструмента, φ — возможный сдвиг фаз в колебаниях струн. Поскольку в нашей задаче $\delta\omega$ мало, колебания на слух будут восприниматься как звук частоты $\omega + \delta\omega/2 \approx \omega$, но громкость звука будет меняться со временем с частотой $\delta\omega/2$, то есть с периодом $T = 4\pi/\delta\omega$. Понятно, что чем меньше $\delta\omega$, тем больше период T. Увеличения этого периода и надо добиваться, подкручивая колки на гитаре.

И. И. Мазин

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

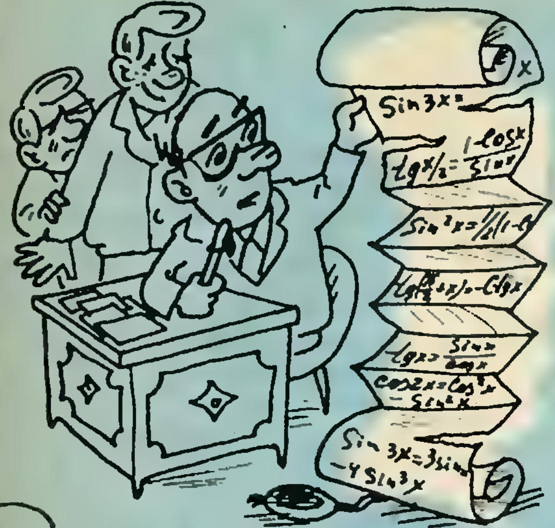
Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

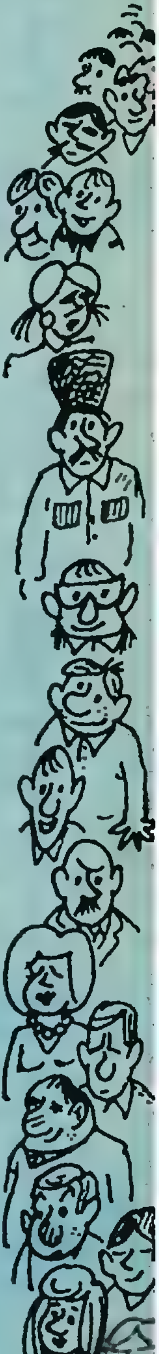
Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 24 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



2×2
3×3
6×6
7×7
ГОНЧАРОВ
ОБРЫВ



Околонаучная информация

Учеными Академгородка были расшифрованы сигналы, посланные неизвестной цивилизацией. Начало 6 сигнала соответствует 12 часам московского времени.

* * *

Институт метрологии утвердил новую единицу времени в СИ: сиюминуту.

* * *

Для любителей кубика Рубика: доказана теорема о том, что КР можно привести к исходному состоянию из любого положения не более чем за 6 ходов. При доказательстве использованы кубик Рубика, широкая кисть и набор из шести красок.

* * *

На экзамене по математике преподаватель А. Е. Иванов отобрал шпаргалку у студента Б. Петрова и, рассматривая пожелтевшие листки, узнал свой почерк пятнадцатилетней давности.

* * *

Вышел из печати сборник «Избранные произведения». В сборник помещены 64 произведения типа $2\times2=4$, $5\times5=25$, $6\times6=36$, $7\times7=49$ и т. п.

* * *

Электриков заинтересует новое издание книги И. А. Гончарова «Обрыв».

* * *

Для абитуриентов, сдающих литературу письменно, выпущено полное собрание сочинений. Интересующиеся могут обратиться в контору БРД.

* * *

Весь натуральный ряд чисел выучил студент Вася Семечкин. Демонстрация феномена продолжается в аудитории 215.

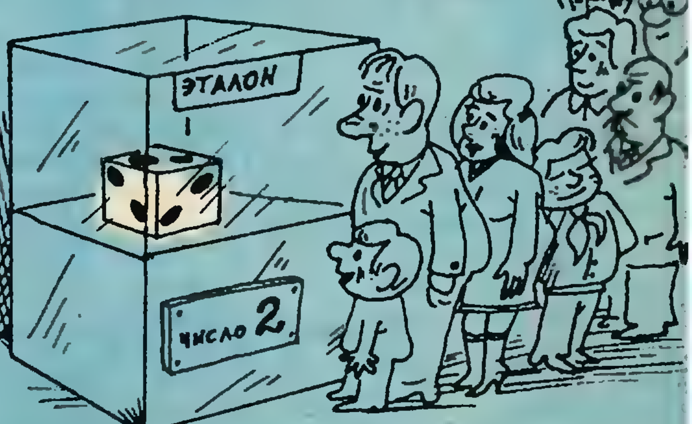
Это любопытно!

Аксиома 1. Что написано пером, то не вырубишь топором.
Аксиома 2. Лес можно вырубить топором.
Следствие. Лес пером не описать.

* * *

Аксиома 3. Обещанного три года ждут.
Аксиома 4. Семеро одного не ждут.
Следствие. Если семеро ждут обещанного три года, им обещано не одно.

По материалам клуба БРД математического факультета НГУ и газеты МФТИ «За науку»



Парадоксы плоского конденсатора

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

«Какие могут быть здесь парадоксы, — скажет читатель, — ведь это такая простая электрическая система». И действительно, что может быть проще плоского конденсатора? Из школьного учебника физики мы знаем, что так называют систему, состоящую из двух параллельно расположенных на небольшом расстоянии проводящих пластин, между которыми находится слой диэлектрика.

Если пластины (обкладки) конденсатора подсоединить к полюсам батареи, то на одной из них появится некоторый заряд $+q$, а на другой — заряд $-q$. Электрическое поле плоского конденсатора сосредоточено, в основном, в пространстве между пластинами. Это поле однородно, то есть вектор напряженности $\vec{E}$ одинаков во всех точках. Емкость плоского конденсатора выражается формулой

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками конденсатора, S — площадь каждой пластины, d — расстояние между ними. ε — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная.

Казалось бы, все ясно. А между тем многие абитуриенты, «встретившись» на экзамене с плоским конденсатором, испытывают определенные затруднения. В ряде случаев они, опираясь, вроде бы, на хорошо известные факты, приходят к противоречивым результатам, и возникает парадоксальная ситуация. Разумеется, все эти парадоксы можно легко разрешить, если глубоко и неформально разобраться в законах электростатики. Приведем несколько конкретных примеров.

Парадокс 1. Рассмотрим заряженный плоский воздушный конденсатор. Разность потенциалов между его обкладками

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Обратим внимание на то, что $\Delta\varphi$ пропорционально расстоянию d между пластинами конденсатора. Это значит, что, раздвигая пластины заряженного конденсатора, мы можем увеличивать разность потенциалов между ними. Зарядив, например, конденсатор до разности потенциалов 10 В и увеличив затем зазор d в 10^3, 10^4, ... раз, мы получим $\Delta\varphi$ равным, соответственно, 10^4 В, 10^5 В и т. д. Какой простой и хороший способ создания ускорителя заряженных частиц! Не правда ли?

Мы явно вступаем здесь в противоречие со здравым смыслом, который подсказывает нам, что еще один шаг, и мы придем к нарушению одного из основных принципов физики — закона сохранения энергии.

И все же, правильны или нет наши рассуждения? Обычно абитуриенты сразу отвечают, что такого быть не может, но далеко не все указывают физическую причину этого. А на самом деле все очень просто. Приведенная формула для емкости плоского конденсатора справедлива только при малых значениях d, то есть когда d существенно меньше линейных размеров пластин. При больших зазорах между обкладками поле перестает быть однородным и разность потенциалов $\Delta\varphi$ перестает линейно зависеть от d.

Мы затронули здесь очень важный вопрос о пределах применимости физических результатов. Любая физическая модель всегда имеет ограниченную применимость. Нельзя, например, применять модель идеального газа к реальным газам при высоких давлениях и низких температурах. Формула для емкости плоского конденсатора перестает «работать», когда расстояние между обкладками становится достаточно большим и электрическое поле между ними оказывается неоднородным. Нельзя непосредственно применять закон Кулона для определения силы электрического взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. К сожалению, абитуриенты нередко в этом случае пишут формулу $F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$, в то время как правильное выражение для силы имеет вид $F=q\frac{E}{2}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$ (при этом сила не зависит от расстояния d).

Теперь сформулируем задачу для самостоятельного решения.

Задача 1. Попробуйте оценить, во сколько раз можно увеличить разность потенциалов между обкладками заряженного плоского конденсатора, если удалить их на очень большое расстояние друг от друга. Линейный размер пластин $a=\sqrt{S}$ и начальное расстояние d между ними считать известными.

Заметим, что такого рода задачи на оценки, где точный расчет затруднителен, играют в физике большую роль. Они требуют выбора упрощенной физической модели и позволяют оценить масштабы явления по порядку величины.

Парадокс 2. Возьмем заряженный и изолированный плоский конденсатор и просверлим в его пластинах два маленьких отверстия — одно напротив другого. При этом поле внутри конденсатора практически не изменится и останется однородным. Пусть через одно из отверстий в конденсатор влетает с небольшой начальной скоростью заряженная частица так, чтобы электрическое поле конденсатора ускоряло ее (рис. 1). (Для этого, очевидно, частица должна влетать в конденсатор через отверстие в одноименно заряженной пластине.)

Пролетев через конденсатор, частица вылетает из другого отверстия, приобретя дополнительную энергию $\Delta W=q\Delta\varphi$. Теперь предлагается с помощью магнитного поля изменить направление движения частицы таким образом, чтобы она снова влетела через первое отверстие в конденсатор. Напомним, что сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу, не совершает работы, так как она перпендикулярна вектору скорости частицы.

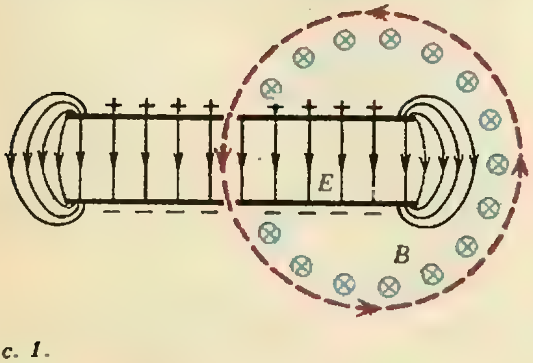


Рис. 1.

При повторном пролете через конденсатор частица вновь приобретет дополнительную энергию ΔW, в следующем цикле — еще ΔW и т. д. Мы с вами «изобрели» циклический ускоритель, который не нуждается в источнике энергии. Еще немного фантазии — и мы сконструируем так называемый вечный двигатель, работающий без потребления энергии!

К этому ошибочному результату мы пришли потому, что не приняли во внимание одно из фундаментальных свойств электростатического поля — его потенциальный характер. Потенциальность электростатического поля означает, что если из одной точки пространства в другую мы переносим заряженное тело, то работа электрических сил не зависит от формы пути, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Отсюда следует, что если заряженное тело переносить по замкнутой траектории, то при возвращении в исходную точку полная работа электрических сил обращается в нуль. (Напомним, что таким же свойством обладает и гравитационное поле.) Именно это свойство позволяет ввести понятия потенциальной энергии и потенциала.

В нашем случае при движении заряженной частицы внутри конденсатора электрическое поле ускоряет, а вне конденсатора — тормозит ее, и когда частица подлетает к отверстию в первой пластине, ее энергия принимает прежнее значение. Это означает, что в рассматриваемом примере мы принципиально не можем пренебрегать полем вне плоского конденсатора. Разумеется, оно значительно слабее поля между обкладками, но в нем частица пролетает гораздо больший путь; в результате в тормозящем поле вне конденсатора она теряет как раз ту энергию, которую сообщило ей ускоряющее поле внутри конденсатора.

Парадокс 3. Вот еще один пример, показывающий, что пренебрежение внешним полем плоского конденсатора (или, как его называют, полем рассеяния) может привести к принципиально неверным выводам.

В школьном учебнике сказано, что тела, в том числе и проводящие, расположенные вне конденсатора, практически не влияют на его емкость. Чаще всего так и бывает. Пусть, например, вблизи обкладки плоского конденсатора расположена еще одна проводящая незаряженная пластина «а» (рис. 2). Эта пластина не изменит поля внутри конденсатора, и его емкость останется прежней. Поднесем теперь к конденсатору еще одну пластину — «б» и расположим ее вблизи второй обкладки конденсатора. И эта пластина не окажет влияния на емкость конденсатора.

Теперь соединим внешние незаряженные пластины проводником. Наш конденсатор оказался как бы вставленным внутрь проводящей коробки. Что при этом произойдет?

Многие абитуриенты утверждают, что и в этом случае поле между обкладками конденсатора не изменится (так как внешние пластины были не заряжены) и, следовательно, емкость конденсатора тоже не изменится. А между тем схема, изображенная на рисунке 2, при замкнутых крайних пластинах эквивалентна цепи из трех конденсаторов (рис. 3). Если все промежутки между пластинами одинаковы, то емкость такого сложного конденсатора равна $C={}^3/_2C_0$, где C_0 — первоначальная емкость. Таким образом, емкость изменилась, а именно — увеличилась в 1,5 раза. Как это можно объяснить?

Оказывается, причиной всему — поле рассеяния конденсатора. Под его действием происходит перераспределение зарядов на внешних пластинах, в результате чего верхняя пластина «а» оказывается заряженной отрицательно, а нижняя «б» — положительно. (Кстати сказать, из рисунка 3 следует, что если одну из внешних пластин соединить проводником с одной из пластин данного конденсатора, то емкость станет равной $2C_0$.)

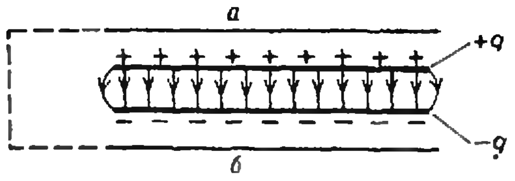


Рис. 2.

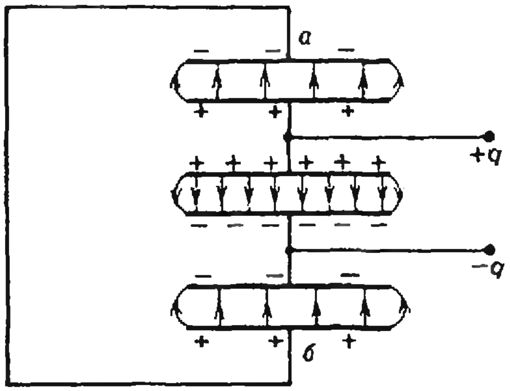


Рис. 3.

Парадокс 4. Пусть мы имеем два одинаковых конденсатора (даже не обязательно плоских) емкостью C каждый. Один из них заряжен зарядом q_0, а другой не заряжен. Электрическая энергия, запасенная в конденсаторах, равна

$$W_1=\frac{q_0^2}{2C}+0.$$

Соединим теперь конденсаторы параллельно друг другу. Тогда общий заряд конденсаторов останется прежним и равным q_0, а суммарная емкость будет равна $2C$. Теперь электрическая энергия системы равна

$$W_2=\frac{q_0^2}{2(2C)}=\frac{1}{2}W_1.$$

Куда же девалась половина прежнего запаса энергии? (Заметим, что при соединении конденсаторов никакой внешней работы не совершается.)

Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим случай, когда конденсаторы подсоединяются друг к другу через резистор с сопротивлением R (рис. 4). При перезарядке конденсаторов по резистору протекает ток, и, следовательно, на нем выделяется джоулево тепло. Здесь как будто все ясно. Но получим ли мы количественное согласие? Проведем расчет. Для этого нам потребуется умение дифференцировать и интегрировать.

Чтобы рассчитать джоулево тепло, необходимо найти зависимость тока от времени.

Обозначим заряд правого конденсатора на рисунке 4 в некоторый момент времени t после замыкания ключа через q. Тогда заряд левого конденсатора в тот же момент равен q_0-q, а ток, протекающий по сопротивлению R, —

$$i=\frac{1}{R}\left(\frac{q_0-q}{C}-\frac{q}{C}\right)=\frac{1}{RC}(q_0-2q).$$

Если принять во внимание, что по определению ток равен изменению заряда в единицу времени (производной от заряда по времени): $i=\frac{dq}{dt}$, то мы получим уравнение

$$\frac{dq}{dt}+\frac{2}{RC}q=\frac{1}{RC}q_0.$$

Удобнее записать уравнение не для заряда, а для тока, поэтому написанное выше соотношение почленно продифференцируем по времени:

$$\frac{di}{dt}+\frac{2}{RC}i=0, \text{ или } \frac{di}{i}=-\frac{2}{RC}dt.$$

Последнее уравнение легко проинтегрировать. При этом левую часть нужно проинтегрировать в пределах от первоначального значения тока i_0 до значения тока $i(t)$ в рассматриваемый момент времени, а правую — от 0 до t:

$$\ln i(t)-\ln i_0=-\frac{2}{RC}t,$$

или

$$i(t)=i_0e^{-2t/(RC)}.$$

Значение тока i_0 в первый момент после замыкания ключа можно определить из следующих физических соображений: в первый момент левый конденсатор заряжен до разности потенциалов q_0v/C, а правый — не заряжен. Поэтому падение напряжения на резисторе как раз равно q_0/C. Отсюда следует, что $i_0=q_0/(CR)$.

График функции $i(t)$ изображен на рисунке 5. Такие функции называются экспонентами. Они очень часто встречаются при решении физических задач. Время τ, в течение которого сила тока уменьшается в e раз, называется постоянной времени системы. В нашем случае $\tau=CR/2$. Чем меньше сопротивление R, тем быстрее происходит затухание тока.

Теперь нам осталось вычислить джоулево тепло:

$$Q=\int_0^\infty i^2(t)Rdt=\frac{q_0^2}{C^2R}\int_0^\infty e^{-4t/(RC)}dt=$$

$$=\frac{q_0^2}{4C}=\frac{1}{2}W_1.$$

Итак, парадокс разрешен. Независимо от величины R ровно половина первоначальной энергии конденсатора переходит в тепло, а вторая половина сохраняется в виде электрической энергии конденсаторов после их перезарядки. Пусть вас не смущает некоторая сложность приведенного расчета. Такие расчеты, наверное, на приемных экзаменах от вас не потребуются. Нам важно было показать, что строгий расчет полностью разрешает противоречие.

Остается сказать несколько слов о предельном случае $R\to0$. Что, если мы соединим конденсаторы идеальными проводниками (сверхпроводниками)? Формально наш результат остается в силе, так как он вообще не зависит от величины R. Но где же выделяется «потерянная» энергия и в каком виде?

Разумеется, в этом предельном случае джоулева тепла нет, но существенную роль начинает играть излучение электромагнитной энергии. При быстрых изменениях тока в цепи в окружающем пространстве возникает переменное электромагнитное поле, и половина первоначальной энергии уносится электромагнитной волной.

Следует отметить, что в этом случае необходимо учитывать небольшую индуктивность соединительных проводов. Тогда цепь становится похожей на колебательный контур с малым (но не бесконечно малым!) затуханием. Процесс перезарядки конденсаторов приобретает колебательный характер, и излучением электромагнитной энергии в окружающее пространство пренебречь никак нельзя.

Еще один парадокс, очень похожий на предыдущий, попробуйте разрешить сами.

Задача 2. Имеется незаряженный конденсатор емкостью C и батарея с ЭДС $\mathscr{E}$. Подсоединим обкладки конденсатора к полюсам батареи. Тогда на пластинах появится заряд $q=C\mathscr{E}$, и конденсатор приобретет электрическую энергию $W=C\mathscr{E}^2/2$. При этом батарея совершит работу $A=q\mathscr{E}=C\mathscr{E}^2$. Мы видим, что $W={}^1/_2A$. Куда же девалась вторая половина работы, совершенной батареей?

Парадокс 5. Плоский воздушный конденсатор емкостью C заполнили диэлектрической жидкостью с проницаемостью ε и зарядили до напряжения U. При этом конденсатор приобрел электрическую энергию $W_1=\varepsilon CU^2/2$. Затем конденсатор отсоединили от источника, жидкость слили и после этого разрядили. Легко сообразить, что при разрядке выделится энергия $W_2=\varepsilon^2CU/2=\varepsilon W_1$ (заряд конденсатора $q=\varepsilon CU$ при сливании жидкости не изменился, а емкость стала равной C). Получается, что при разрядке конденсатора выделится больше

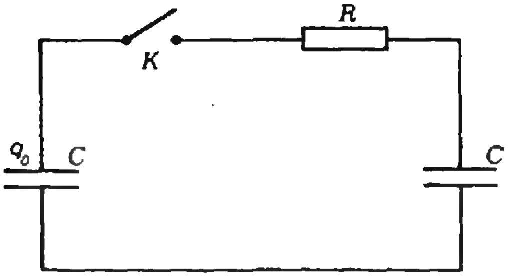


Рис. 4.

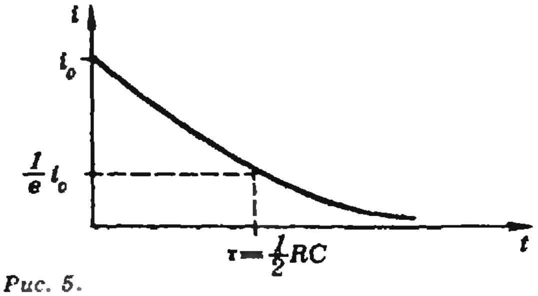


Рис. 5.

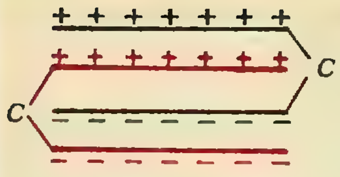


Рис. 6.

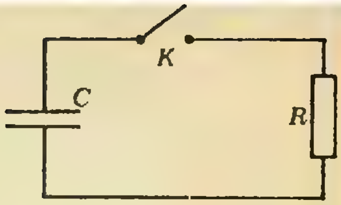


Рис. 7.

энергии, чем он получил при зарядке. Например, при $\varepsilon=2$ $W_2=2W_1$. Возникла явно парадоксальная ситуация.

Хотя задача о разрядке конденсатора, из которого удален диэлектрик, в разных вариантах хорошо известна, многие абитуриенты испытывают серьезные затруднения, пытаясь разрешить этот парадокс. А объяснение здесь очень простое.

При удалении диэлектрика из заряженного конденсатора нужно совершить некоторую внешнюю положительную работу, так как диэлектрик всегда втягивается в область более сильного электрического поля (между обкладками). За счет этой положительной работы внешней силы и будет увеличиваться электрическая энергия конденсатора:

$$W_2-W_1=A_{\text{внеш}}.$$

В нашем случае жидкий диэлектрик вытекает из конденсатора под действием силы тяжести, поэтому энергия конденсатора возрастет на величину работы силы тяжести. Если бы конденсатор все время оставался подключенным к источнику, то необходимо было бы учитывать еще и работу батареи:

$$W_2-W_1=A_{\text{внеш}}+A_{\text{бат}}.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для изолированного конденсатора (и вообще для любой изолированной электростатической системы) при наличии внешних сил, совершающих работу.

Задача 3. Попробуйте самостоятельно найти внешнюю работу и работу, которую совершает батарея с ЭДС $\mathcal{E}$, при сливе жидкого диэлектрика с проницаемостью ε из конденсатора, подсоединенного к ее полюсам. Емкость воздушного конденсатора равна C.

Если в системе есть активное сопротивление, то необходимо учитывать и джоулево тепло. В этом общем случае закон сохранения энергии удобно записывать в виде

$$A_{\text{бат}}-Q=\Delta W-A_{\text{внеш}}$$

— работа, совершаемая источником, за вычетом джоулева тепла идет на увеличение электростатической энергии системы и на работу против внешних сил.

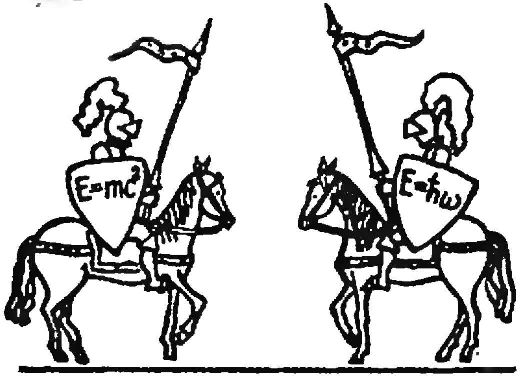
В заключение предлагаем еще несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

4. В плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d вставлена незаряженная металлическая пластина толщиной l, параллельная его обкладкам. Конденсатор подсоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Какую работу надо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора? Рассмотреть два случая: а) перед удалением пластины конденсатор отключают от батареи; б) конденсатор все время остается подключенным к батарее.

5. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C заряжены зарядом q каждый и отсоединены от источника. Затем конденсаторы вставляют друг в друга двумя способами, как показано на рисунке 6. Какую работу нужно совершить в каждом из этих случаев? Пластины конденсаторов считать тонкими, а расстояния между пластинами — одинаковыми.

6. Определите максимальную силу взаимодействия между обкладками плоского конденсатора емкостью C и количество теплоты, выделившееся на резисторе с сопротивлением R, после замыкания ключа, если максимальный ток в цепи равен i_0 (рис. 7). Расстояние между обкладками конденсатора d.



VII Московский турнир юных физиков

Часами измеряется время,
А временем жизнь человеческая;
Но чем, скажи, измеришь ты
Глубину Восточного океана.

Козьма Прутков

VII Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова с октября 1984 г. по февраль 1985 г. В этом соревновании старшеклассников приняло участие 40 школ Москвы и Московской области.

Первое место и переходящий приз турнира присуждены команде школы № 47 (капитан — О. Виноградова), второе место — командам школ № 7 (Р. Баско) и ФМШ № 18 при МГУ (А. Михеев), третье место — командам школ № 57 (В. Садов), № 82 пос. Черноголовка (В. Барзыкин), № 542 при МИФИ (О. Заборонский) и № 679 (А. Никитин). Победителем конкурса капитанов стал А. Михеев (ФМШ № 18). За лучший доклад на турнире почетной грамотой была награждена А. Буйволова (с. ш. № 7). За активное участие в турнире и проявленные глубокие знания по физике жюри вручило грамоты и подарки 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты, физическими приборами.

Ниже мы публикуем задачи финала ТЮФ-VII. Вы можете использовать их при проведении в школе физических олимпиад и викторин, вечеров науки, физбоев, в работе физических кружков.

Домашние задания финалистам турнира

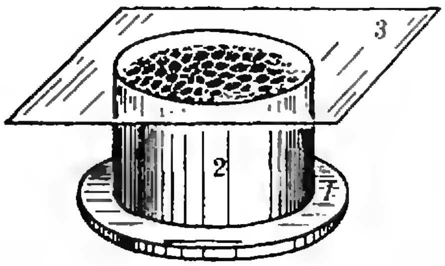
На выпонение этих заданий школьникам отводился один месяц.

1. «Оптический зажигательный прибор». «В этих моих рассуждениях мне представляется возможным достигнуть цели только одним способом: собиранием фокусов нескольких линз или зеркал в одно место, где соединенными силами они и произведут жар больший, чем известный до сих пор.» (М. В. Ломоносов)

Как зависит максимальная температура разогрева и скорость разогрева объекта от числа пучков в приборе, предложенном М. В. Ломоносовым? К чему приведет замена солнечных пучков лазерными?

2. «Катушка». На бумажном каркасе намотана в несколько слоев катушка из медной проволоки. Определить число витков катушки, не разматывая ее. Оценить омическое сопротивление, индуктивность и емкость катушки. Для экспериментов была выдана катушка с такими параметрами: диаметр провода 0,8 мм, диаметр катушки 30 мм, длина намотки 20 мм, число витков 125.

3. «Ячейки Бенара». Создать установку для демонстрации ячеек Бенара. Как зависит в вашей установке размер ячеек от разности температур между нижним и верхним слоями жидкости и от толщины слоя жидкости?



Примерные параметры установки:

1 — латунная пластина толщиной 1—3 мм;

2 — кусок трубы из теплоизоляционного материала (эбонит, оргстекло); внутренний диаметр 100 мм, высота 30 мм. Трубу следует приклеить к пластине эпоксидной смолой;

3 — прозрачная крышка (стекло).

Исследуемая жидкость — подсолнечное масло, в которое надо насыпать щепотку серебрянки (мелкого алюминиевого порошка). Налейте тонкий слой жидкости в получившуюся ванночку, закройте крышкой и начинайте равномерный нагрев нижней пластины — скоро вы обнаружите ячейки Бенара. (См. также «Квант», 1977, № 4, с. 24.)

4. «Снежный покров».

«Мороз снежком укутывал:
«Смотри, не замерзай!»

(Из детской песенки)

«Подсчитано, что если бы снегом укрылась вся Земля, то средняя температура ее поверхности понизилась бы от существующей сейчас +15 °С до −88 °С.»

(Из ученой книги)

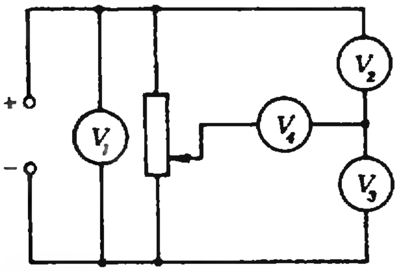
В этих двух цитатах заключен физический парадокс — от снега тепло и... холодно. Разрешите этот парадокс.

5. «Представление». Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 мин. Жанр произвольный.

Конкурс капитанов и болельщиков

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Болельщики работали индивидуально или группами и присылали ответы в пользу одной из команд-финалистов. Время на выполнение каждого задания — 5 минут.

Большинство задач этого конкурса были предложены командами школ, участвовавших во втором туре турнира.

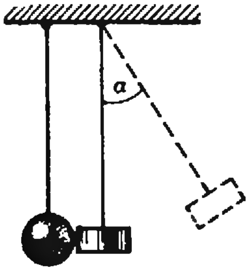


1. **«Вольтметры».** В электрической схеме, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые.

Показания двух известны: $U_1=10$ В, $U_2=6$ В. Каковы показания двух других?

2. **«Автобус»** (задача предложена школой № 179). Почему задние стекла автобуса обычно гораздо грязнее, чем боковые?

3. **«Парадоксальное столкновение».** После лобового соударения латунного цилиндра массой m с неподвижным биллиардным шаром массой $2m$ цилиндр останавливается, а шар отклоняется на угол $\beta<\frac{\alpha}{2}$



Предложить модель внутреннего устройства цилиндра.

4. **«Волна зажигания»** (предложена школой № 679 и признана лучшей задачей).

Весь во мраке лежит город сонный,
Светлый месяц с небес не глядит.
На бульваре той ночкою темной
Притаился опасный бандит.

Он не знал, что его ожидает...
Полицейских отчаянный взвод
Все теснее его окружает,
А в засаде стоит пулемет.

Чтобы тени его не укрыли,
Чтоб его освещали огни,
Фонари вдоль аллеи включили,
Но не вмиг загорелись они!

Друг за другом они зажигались,
Первый сразу, позднее — второй.
Пятна света в ночи разливались,
Вдоль бульвара бежали волной.

Ловко пользуясь этой заминкой,
Под покровом ночной темноты
Вор ушел неприметной тропинкой,
Его скрыли густые кусты...

В чем причина такой неудачи?
Почему так зажглись фонари?
Нерешенная эта задача
Мне уснуть не дает до зари.

Длинная улица освещается электрическими лампами накаливания, параллельно подключенными к источнику питания. Почему лампочки, находящиеся дальше от источника, зажигаются позднее?

5. **«Смерч»** (школа № 43). Почему при сливе воды в ванне образуется водоворот? В какую сторону вращается вода?

6. **«Лазер»** (школа № 542). Лазерный луч направляют горизонтально на плоскую прозрачную кювету (аквариум) с водой перпендикулярно стенкам кюветы. Если луч проходит выше или ниже поверхности воды в кювете, то на экране за кюветой можно наблюдать пятно от лазерного пучка. Если же лазерный луч проходит вдоль поверхности воды, то на экране наблюдается вертикальная полоска. Объяснить происхождение полоски и рассчитать ее параметры.

7. **«Телевизор»** (школа № 57). В некоторых художественных фильмах, герои которых смотрят телевизор, можно заметить, что по экрану этого телевизора иногда бежит широкая темная горизонтальная полоса. Почему и для каких телевизоров она наблюдается, в какую сторону (вверх или вниз) она бежит и с какой частотой? Каковы ее ширина относительно ширины экрана и степень затемнения?

8. **«Баночка».** Для опыта годится любая пластмассовая баночка с достаточно большой и плотно закрывающейся крышкой (но без резьбы). На турнире демонстрировалась баночка объемом 0,4 л, диаметр крышки 8 см. При резком сжатии баночки с боков крышка с характерным хлопком соскакивает и летит достаточно далеко. Оценить величину максимальной силы, действующей на крышку в этом опыте.

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

VIII турнир юных физиков

Этот турнир начинается в сентябре 1985 г. Он будет проводиться в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. **С этого года заочный конкурс становится всесоюзным.** Решения задач ТЮФ-VIII, опубликованных ниже, можно отправлять не позднее 30 ноября 1985 года по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, оргкомитет ТЮФ-VIII. В графе «Кому» напишите: «Заочный конкурс ТЮФ-VIII» и номера задач, решения которых вы посылаете. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом школы (в этом конверте будут отправлены результаты проверки решений), а также заявление об участии в турнире с указанием фамилий членов команды, учителя физики, номера школы, класса. Решения задач могут быть индивидуальными и коллективными. Каждое решение пишите на отдельном листе (листах) и вначале обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К решениям экспериментальных задач должны быть приложены подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированных проблем будут отмечены грамотами турнира и представлены к печати в «Кванте».

II тур — отборочные физбои. В нем могут принять участие команды школ г. Москвы и Московской области, набравшие в заочном коллективном конкурсе более 40 баллов (из 50-ти возможных). Отборочные физбои 1/4 и 1/2 финала будут проводиться с 10 декабря 1985 г. по 10 января 1986 г. на физическом факультете МГУ по задачам заочного конкурса. (Другим городам могут быть высланы материалы для организации II и III туров на местах).

III тур — финал турнира — состоится 16 февраля 1986 г. на физическом факультете МГУ. В его программу входят: физбой финалистов турнира, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей и активных участников турнира.

В составлении заданий для финальных конкурсов турнира могут принять участие все желающие. Условия задач высылайте не позднее 20 января 1986 года. Получить дополнительные сведения о правилах проведения ТЮФ-VIII, а также высказать свои предложения и замечания можно по вышеуказанному адресу.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-VIII

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. **«Придумай сам».** Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. **«Якорь».** Как объяснить, что якорь массой 5 тонн надежно удерживает корабль массой 10 тысяч тонн?

3. **«Коэффициент Пуассона».** Известно, что всякая продольная деформация твердого тела вызывает и его поперечную деформацию. Объясните это явление. Предложите теоретический расчет коэффициента Пуассона для металлов. Проведите экспериментальные и теоретические исследования резинового стержня.

4. **«Двойные рамы».** В жилых помещениях средней полосы СССР принято ставить в окна двойные рамы. Не следует ли, по вашему мнению, перейти на применение тройных рам?

5. **«Пленка масла».** «В 1757 году я находился на борту одного из 96-ти кораблей флотилии, следовавшей из Луисбурга. Я заметил, что поверхность воды вокруг двух кораблей была на удивление спокойна, в то время как вокруг других наблюдалось сильное волнение, вызываемое резкими порывами ветра. Озадаченный столь странным различием, я в конце концов обратился к капитану и спросил, что бы это могло значить. «Коки,— сказал он,— как я понимаю, вылили только что через шпигат жирную воду, и она немного засалила борта этих кораблей». В интонации капитана чувствовался легкий оттенок презрения, высказываемого человеку, который не знает каких-то общеизвестных истин.» (Бенджамин Франклин)

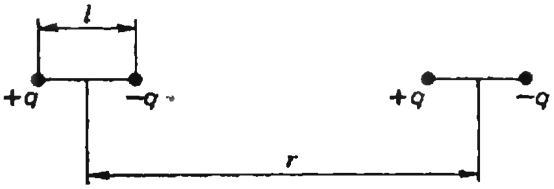
Объясните явление, замеченное ученым. Проведите опыты по выливанию масла на неспокойную поверхность воды.

6. **«Автоколебания».** Многим известна детская игрушка: длинношеий утенок наклоняется к корытцу с водой и, покачиваясь, «пьет» воду, затем откидывается от корытца, но через некоторое время опять наклоняется и «пьет» и т. д. С точки зрения физика это — пример автоколебаний, происходящих при наличии внешнего источника энергии.

Сконструируйте и изготовьте наглядный прибор или игрушку, демонстрирующую автоколебания.

7. **«Поверхностный заряд».** Известно, что если зарядить металлический шар, то заряд распределится по его поверхности. Оцените толщину этого поверхностного слоя.

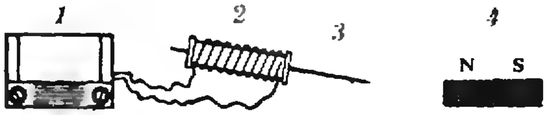
8. **«Дипольное взаимодействие».** Известно, что два диполя, находящиеся на расстоянии r друг от друга, как показано на рисунке, притягиваются с силой $F \sim p_0^2/r^4$, где $p_0=ql$ — дипольный момент.



Как будут взаимодействовать диполи, если их моменты будут переменными во времени: $p_1(t)=p_2(t)=p_0\sin\omega t$?

9. **«Сила магнита».** Экспериментально исследуйте зависимость от расстояния силы притяжения стального шарика к полюсу полосового магнита. Объясните результаты. Специально исследуйте поведение намагниченного и ненамагниченного шариков.

10. **«Скачки Баркгаузена».** Интересные явления, связанные с намагничиванием ферромагнетиков, вы можете наблюдать, создав следующую установку:



1 — радиоприемник;
2 — катушка из медного провода;
3 — исследуемый образец;
4 — магнит или электромагнит.

Примерные параметры катушки: число витков — несколько тысяч, диаметр провода — 0,1—0,2 мм, длина намотки — 30—50 мм, внутренний диаметр отверстия в катушке — 5—10 мм. В качестве исследуемых образцов могут быть использованы вязальные спицы, отожженный гвоздь, надфиль и другие ферромагнитные объекты. Катушку следует подключить к входу усилителя радиоприемника (от проигрывателя). Исследуемый образец вставить в катушку. При приближении или удалении магнита от образца, смене полюсов и других манипуляциях вы услышите шуршание и потрескивание.

Исследуйте явление. Попробуйте усовершенствовать установку для подтверждения ваших гипотез.

11. **«Показатель преломления».** Измерьте показатель преломления вара (битума).

12. **«Глубина резкости».** Экспериментально определите зависимость глубины резкости фотоаппарата от диаметра диафрагмы. Дайте теоретическое объяснение полученной зависимости. Как изменится характер исследуемой зависимости при замене объектива на одиночную линзу?

13. **«Черная дыра».** Оцените катастрофические для Земли последствия появления черной дыры, которая движется по земной орбите навстречу Земле. Рассмотрите случаи отношения масс черной дыры и Земли 10^{-9}; 10^{-6}; 10^{-3}; 1.

14. **«Прерывистое тяготение».** «Сила тяготения являет нам повседневный пример силы, действующей, по-видимому, беспрерывно. Правда, мы не знаем, не разделено ли ее действие неощутимо малыми промежутками времени, но поскольку при этой гипотезе явления были бы почти теми же, как и в случае непрерывного действия, геометры предпочли последнюю гипотезу как более удобную и простую.»

(Пьер Симон Лаплас)

Оцените возможную скважность действия силы тяготения.

15. **«Искристый снег».**

Под голубыми небесами
Великолепными коврами,
Блестя на солнце,
Снег лежит.

А. С. Пушкин

Свежевыпавший пушистый снег искрится на солнце или в свете фонарей уличного освещения. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».

16. **«Тихий снег».**

Тишайший снегопад —
Дверям обидно хлопать.
Посередине дня
В столице как в селе.
Тишайший снегопад,
Закутавшийся в хлопья,
В обувке пуховой
Проходит по земле.

Александр Межиров

Оцените громкость звука, возникающего при падении снежинок во время снегопада.

17. **«Скрипящий снег».**

Скрипит, скрипит, как снег капуста,
И снег скрипит, как кочаны.

Олег Чухонцев

Когда, как и почему скрипит снег и при чем тут капуста!? (По традиции задача 17 имеет шуточный оттенок.)

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете им. Ленинского комсомола работает заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки (или факультативы), которые работают в школе под руководством учителя. Руководители каждого кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные методические материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию руководителей часть работ членов кружков может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов приглашается в Летнюю школу при НГУ (которая работает с 1 по 22 августа). Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление с просьбой выслать первое задание. Заявление должно быть написано на почтовой карточке и оформлено по следующему образцу:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
2. Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 класс
3. Отделение ЗШ, на котором вы хотите учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
4. Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская область, с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на *математическое* или на *физическое* отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 25 октября.*

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. Сколько килограммов меди нужно переплавить с 2 кг сплава меди и серебра, содержащего 5 % серебра, чтобы получился сплав, содержащий 2 % серебра?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$2y-1\leqslant|x-1|-2x.$$

3. В трапеции через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям проведен отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах. Найдите длину этого отрезка, если длины оснований — a и b.

4. Сколько раз нужно взять слагаемым число 8, чтобы в сумме получилось 8^{100}?

5. Точка движется по гипотенузе прямоугольного треугольника. При каком положении точки расстояние между ее проекциями на катеты будет наименьшим?

6. Как с помощью циркуля и линейки построить параллелограмм по углу и диагоналям?

9 класс

1. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 22,4 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через 0,5 час. А если поедут в одну сторону (по направлению от A к B), то один из них догонит другого через 3,5 час. Найдите скорости велосипедистов.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$|y^2+1|-2y>|x-1|-x.$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$$

4. Треугольник ABC — равносторонний. Докажите, что вектор $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{BC}$.

5. Найдите последнюю цифру числа 7^{1985}

6. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по двум стронам и медиане, лежащей между ними?

10 класс

1. Найдите объем прямого кругового конуса, если известно, что его боковая поверхность, будучи развернута на плоскости, дает сектор круга радиуса 10 и с центральным углом 72°.

2. По итогам соревнования трех бригад оказалось, что первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе изготовили в три раза больше второй. Какая бригада заняла первое место?

3. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{7}$, если на плоскости задан отрезок длины 1?

4. Укажите многочлен с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корнем.

5. Равнобочная трапеция описана около окружности, длины ее оснований — a и b. Найдите длину диагонали этой трапеции.

6. Докажите, что для любого α из промежутка $[0;\ \pi/2]$ выполняется неравенство $\cos(\sin\alpha)>\sin(\cos\alpha)$.

Первое задание по физике

Задачи 1—6 предназначены для восьмиклассников, 6—11 — для девятиклассников и 10—15 — для десятиклассников.

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным решить одну — две задачи. Однако после разбора задач своего класса рекомендуем вам ознакомиться и с другими задачами, а понравившиеся задачи советуем попробовать решить.

1. Баржа представляет собой коробку размером 10×4×2 м. Ее масса с грузом $M=50$ т. Можно ли погрузить на баржу еще пару контейнеров массой $m_0=20$ т каждый? Условия устойчивости выполняются.

2. В схеме, изображенной на рисунке 1, сопротивления всех резисторов даны в омах. В каком из них выделится больше тепла при включении схемы в цепь точками A и B?

3. Груз взвешивают на неравноплечих весах. На одной чашке весов его уравновесили гирями массой $m_1=2{,}5$ кг, а на другой — $m_2=3{,}6$ кг. Найдите массу груза. (Массой чашек и коромысел весов пренебречь.)

4. Резиновая трубка полностью заполнена ртутью. Во сколько раз изменится сопротив-

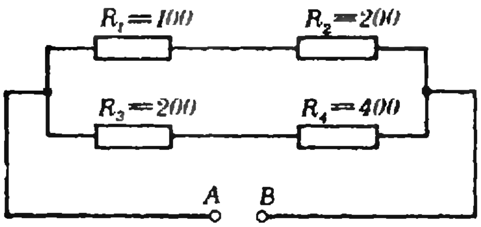


Рис. 1.

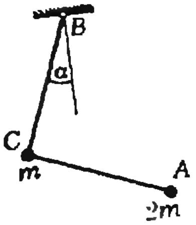


Рис. 2.

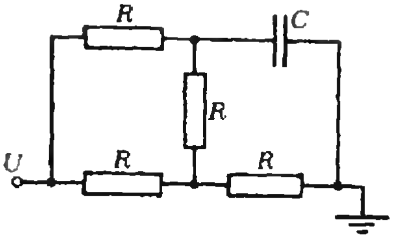


Рис. 3.

ление ртути, если, растягивая трубку, увеличить ее длину в 1,5 раза?

5. Найдите, приближенно, выталкивающую (архимедову) силу, действующую на вас со стороны окружающего воздуха. Считайте известным, что плотность воздуха примерно в 800 раз меньше плотности воды.

6. Объясните, почему при разбавлении заварки кипятком в прозрачном стакане видно, что чай светлеет, а если следить за цветом чая в непрозрачном цилиндрическом стакане (естественно, наблюдая не сбоку, как в первом случае, а сверху), то кажется, что он не меняется.

7. Найдите отношение расстояний, проходимых за 1 секунду свободно падающими телами без начальной скорости вблизи Земли и на высоте, равной радиусу Земли.

8. Вдоль пенала массой m и длиной l может двигаться кубик той же массы m. Пенал толкнули со скоростью v. Опишите видимое движение пенала. (Попробуйте нарисовать график зависимости скорости пенала от времени.) Первоначально кубик лежал в середине пенала. Считайте, что кубик не переворачивается, трения ни внутри, ни вне пенала нет, соударения кубика с пеналом абсолютно упругие.

9. Однородный практически невесомый стержень AB согнут посередине в точке C под углом 90° ($AC \perp BC$). К концу A прикреплен грузик массой $2m$, а к точке C — грузик массой m (рис. 2). Конец B шарнирно прикреплен к потолку. Какой угол α с вертикалью образует сторона BC в поле тяжести?

10. Найдите перегрузку пассажира при взлете самолета, который равномерно набирает взлетную скорость $v=60$ м/с на пути $l=1$ км. (Если сила, прижимающая пассажира массой m к сиденью, есть F, то перегрузкой называется величина $n=F/(mg)$. Очевидно, что при этом в n раз возрастает и давление внутренних органов пассажира друг на друга.)

Дополнительный (необязательный) вопрос. Пользуясь предыдущим решением, оцените длину пути разгона космической ракеты при выводе космонавта на околоземную орбиту, считая, что допустимая перегрузка космонавта $n=3$. (Сначала ракета проходит плотные слои атмосферы, двигаясь почти вертикально, но этим путем можно пренебречь. Затем она ускоряется почти горизонтально.)

11. Вагон имеет колеса радиусом R, жестко закрепленные на осях радиусом r. Оси вращаются в подшипниках скольжения. Коэффициент трения в подшипниках μ. Вагон толкнули со скоростью v. Оцените расстояние, которое он пройдет до остановки. Считайте, что проскальзывания колес относительно рельсов нет. Трением качения можно пренебречь.

12. Конденсатор емкостью C включен в цепь, как показано на рисунке 3. Сопротивления всех резисторов равны R. Один конец цепи имеет потенциал U, другой заземлен. Найдите установившийся заряд конденсатора.

13. Как направлено ускорение артиллерийского снаряда после вылета из ствола орудия: а) если сопротивление воздуха отсутствует (например, в безвоздушном пространстве вблизи Земли); б) при наличии сопротивления воздуха?

14. В двух соседних вершинах квадрата со стороной a находятся точечные заряды q, а в двух других вершинах — заряды $-q$. Найдите потенциал и напряженность электрического поля в центре квадрата.

15. Перевернутую вверх дном кастрюлю объемом V и массой m опускают в воду и начинают медленно топить. Определите, с какой глубины погружения кастрюля будет тонуть сама. Атмосферное давление p. Кастрюля не переворачивается.

Ответы, указания, решения

Парадоксы плоского конденсатора

1. Для оценки примем, что при раздвигании пластин конденсатора на расстояние порядка их линейных размеров $a=\sqrt{S}$ электрическое поле приближенно остается однородным, поэтому разность потенциалов возрастет в a/d раз. При дальнейшем их раздвигании поле уже нельзя считать однородным; при этом на очень больших расстояниях поле каждой пластины практически совпадает с кулоновским полем точечного заряда, а потенциал каждой из них перестает зависеть от наличия второй пластины. Для оценки можно считать, что на расстояниях, бо́льших a, поле близко к кулоновскому; поэтому при дальнейшем раздвигании пластин разность потенциалов возрастает на величину $2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{1}{2\pi}\frac{a}{d}\Delta\varphi$, где q — заряд конденсатора, а $\Delta\varphi=\frac{dq}{\varepsilon_0 S}$ — первоначальная разность потенциалов. Отсюда следует, что разность потенциалов растет в основном на первом этапе, когда пластины конденсатора удаляются друг от друга на расстояние порядка их линейных размеров. Подчеркнем, что наш результат — возрастание разности потенциалов в a/d раз, полученный с помощью упрощенной модели,— является лишь оценкой масштабов явления по порядку величины.

2. Половина работы батареи перешла в тепло.

3. При сливе жидкого диэлектрика из конденсатора, подключенного к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$, его заряд изменяется на величину $\Delta q=C(1-\varepsilon)\mathscr{E}<0$; значит, батарея совершает работу $A_{бат}=\mathscr{E}\Delta q=-C(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2<0$. Энергия конденсатора при этом изменяется на величину $\Delta W=-(\varepsilon-1)C\mathscr{E}^2/2<0$. Отсюда следует, что

$$A_{внеш}=\Delta W-A_{бат}=\frac{(\varepsilon-1)C\mathscr{E}^2}{2}>0.$$

4. а) В этом случае заряд на конденсаторе не изменяется. Поэтому

$$W_1=\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2}, \quad W_2=\frac{q^2}{2C_2}=\frac{C_1^2\mathscr{E}^2}{2C_2}=$$

$$=\frac{C_1}{C_2}W_1, \; W_2>W_1,$$

где

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{(d-l)},\quad C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Таким образом,

$$A_{внеш}=W_2-W_1=W_1\left(\frac{C_1}{C_2}-1\right)=$$

$$=\frac{\mathscr{E}^2}{2}\,\frac{\varepsilon_0 Sd}{(d-l)^2}.$$

б) В этом случае сохраняется постоянной разность потенциалов. Тогда

$$W_1=\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2},\quad W_2=\frac{C_2\mathscr{E}^2}{2},\quad W_2<W_1,$$

$$A_{бат}=\Delta q\mathscr{E}=\mathscr{E}^2\Delta C=\mathscr{E}^2(C_2-C_1)<0,$$

$$A_{внеш}=(W_2-W_1)-A_{бат}=\frac{\mathscr{E}^2}{2}(C_2-C_1)-$$

$$-\mathscr{E}^2(C_2-C_1)=\frac{\mathscr{E}^2}{2}(C_1-C_2)=\frac{\mathscr{E}^2}{2}\,\frac{\varepsilon_0 Sl}{(d-l)d}.$$

Заметим, что работа внешних сил в первом случае больше, чем во втором.

5. Пусть расстояние между любой парой пластин (см. рис. 6 в статье) равно $d/2$. Обозначим через w энергию электростатического поля единицы объема заряженных конденсаторов. Тогда энергия обоих заряженных конденсаторов до их сближения равна

$$W_1=2Sdw.$$

В случае а) напряженность поля между внутренними пластинами увеличивается в 2 раза; следовательно, энергия единицы объема увеличится в 4 раза ($w=\varepsilon_0 E^2/2$):

$$W_2=2S\frac{d}{2}w+S\frac{d}{2}4w=3Sdw.$$

Отсюда следует, что

$$A_{внеш}=W_2-W_1=Sdw=\frac{q^2}{2C}>0.$$

Аналогичным образом для случая б) получим:

$$W_2=Sdw,\ \text{и}\ A_{внеш}=W_2-W_1=-Sdw=$$

$$=-\frac{q^2}{2C}<0.$$

6. $I_m=U/R$, где U — первоначальное напряжение на конденсаторе, поэтому

$$F_m=\frac{1}{2}\,\frac{CU^2}{d}=\frac{1}{2}\,\frac{C(I_mR)^2}{d}$$

и

$$Q=\frac{CU^2}{2}=\frac{C(I_mR)^2}{2}.$$

Африканская головоломка

(см. с. 21)

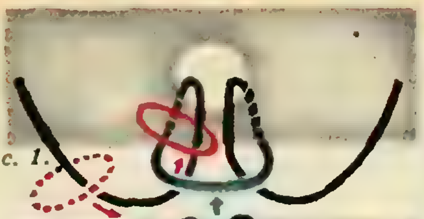


Рис. 1.

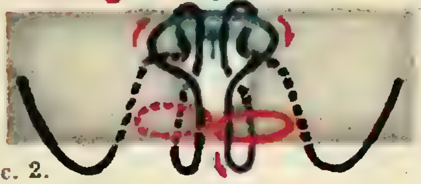


Рис. 2.

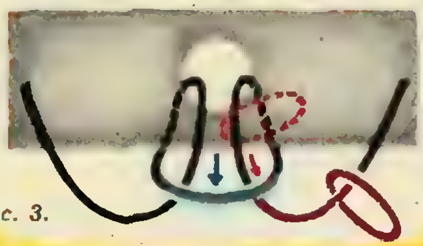


Рис. 3.

Переведите кольцо к центральному отверстию в направлении, указанном красной стрелкой (рис. 1), а затем вытяните на себя через отверстие часть шнурка, закрашенную на рисунке синим цветом (в направлении синей стрелки), и вытащите наружу узел, в который переплелись шнурки. После этого продвигайте кольцо вдоль шнурка через весь узел слева направо (см. красные стрелки на рисунке 2). Затем втяните узел обратно внутрь отверстия и снова продвиньте кольцо направо (рис. 3). Головоломка решена.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Пусть первая цифра — x, а вторая — y. Тогда, с одной стороны, сумма цифр номера равна $3x+4y$, а с другой — $10x+y$. Следовательно, $3x+4y=10x+y$, то есть $7x=3y$, откуда $x=3$, $y=7$. Мой номер телефона 333-77-77.

2. Нетрудно понять, что $C=3$, а $M=0$, цифры E и Ь не превосходят 3, следовательно, одна из них равна 1, а другая 2, причем $E=2$, а Ь$=1$, так как число $3102^2=9622404$ имеет лишь 7 знаков. Итак, ответ: $3201^2=10246401$.

3. Нет. Действительно, если игра не кончилась после того, как все пятеро игроков сделали по одному ходу, то в этот момент у каждого из игроков имеется по две шашки одинакового цвета: в двоих по две черные, а у троих по две белые, и передается черная шашка. Если она попадает к игроку, имеющему две черные шашки, то игра заканчивается, а если к игроку, имеющему две белые шашки, он передает ее дальше; если и второй игрок имеет две белые шашки, то и он передает ее дальше, и так далее, пока она не попадает к игроку, имеющему две черные шашки. Но второй игрок, имеющий две черные шашки, не может сделать хода.

4. При попытке наклониться, стоя спиной к стене, проекция центра тяжести тела выходит за пределы ступни, и наклоняющемуся человеку приходится сделать шаг вперед, чтобы не упасть.

5. Глядя на рисунок 4, а) нетрудно заметить, что общая площадь красных и синих кусков равна половине площади всего восьмиугольника; точно так же общая площадь красных и зеленых кусков равна половине всей площади, и общая площадь синих и желтых кусков равна половине всей площади. Отсюда следует,

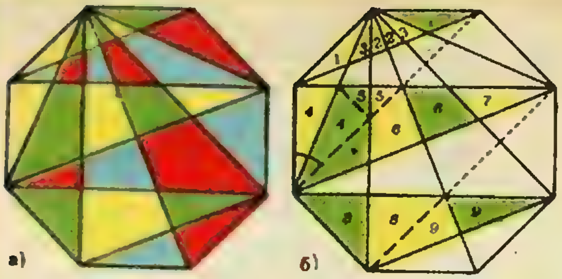


Рис. 4.

что площадь синих кусков равна площади зеленых, а площадь желтых кусков равна площади красных. С другой стороны, проведя дополнительные линии, как показано на рисунке 4, б), мы разобьем желтые куски на девять многоугольников и зеленые куски на девять точно таких же многоугольников. Значит, площадь желтых кусков равна площади зеленых. Поэтому площадь кусков, закрашенных каждым цветом, равна $^1/_4$ площади всего восьмиугольника.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 5)

Задание 9. Этот эпизод взят из партии «Дачесс» — «Каисса» (2-й чемпионат мира среди ЭВМ, Торонто, 1977 г.). Король черных стоял на g8, они ответили 34...Ле8, и после 35. Ф:е8+ все было кончено. Но почему черные отдали ладью, разве они не могли сыграть 34...Крg7? Эта позиция как раз и изображена на диаграмме. Оказывается, в этом случае машина приготовила не 35. g5 К:е3 36. gf+Ф:f6 37. fe Фg5+ и 38...Ф:b5 с решающим перевесом у черных, а блестящее 35. Фf8+!! Кр:f8 36. Сh6+ и 37. Лс8+ с выигрышем.

Задание 10 (Шорт—Майлс). В ответ на 22.Кb6 Шорт опасался 22...Ке2. Если теперь 23. С:е2, то 23...Ф:d1+ 24. С:d1 Лс1×, а на 23. К:d7 следует 23...Лс1+ 24. Л:с1 Л:с1×. Однако белые выигрывали замечательным образом: 23. Фf8+!! Кр:f8 24. К:d7+ и 25. С:е2 или 23...Л:f8 24. К:d7.

Как видите, две эти комбинации — одна — машин, другая — людей — объединяет эффектная и необычная жертва ферзя на поле f8.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
В. В. Губин, М. Б. Дубах, Е. В. Винодарова, Д. А. Крымов, А. К. Малкин, Г. В. Мурышкин, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Э. А. Смирнов, Н. А. Ящук

Фото представили:
Е. Г. Любинский, А. М. Орехов, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.06.85. Подписано к печати 26.07.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,80
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,27. Т-16635
Тираж 172 978 экз. Цена 40 коп. Заказ 1618

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

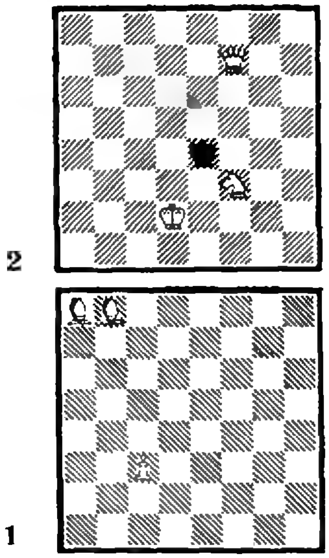
ШАХМАТЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДОСКАХ

Шахматы, как известно, развивают логическое мышление, комбинаторные способности, интуицию, геометрическое воображение. Мы не раз убеждались в этом, рассматривая различные геометрические сюжеты на шахматной доске, необычные шахматные игры и задачи. Вот еще один пример — шахматы на параллельных досках. Эта идея «параллельных миров», часто используемая фантастами, не ускользнула и от шахматных композиторов.

Игра ведется на двух досках, расположенных одна над другой. На каждой из них ходы обычные, но фигуры могут перемещаться и в пространстве — с одной доски на другую. Ферзь в пространство выходит так же, как король, а пешке разрешается менять плоскость только при взятии. Исходная позиция ставится на нижнюю доску как в обычных шахматах, диаграммы рисуются на двух досках, а в записи позиций номер доски (1 или 2) указывается в скобках. При разыгрывании партии фигуры, отправляющиеся в пространство, можно ставить на перевернутые стаканы, стоящие на нижней доске, однако мы надеемся, что в рассматриваемых задачах геометрическое воображение позволит вам обойтись без специальных приспособлений.

Белые: Кра7(1), Фb7(2), Лb3(2); черные: Кра3(1). Мат в 2 хода.

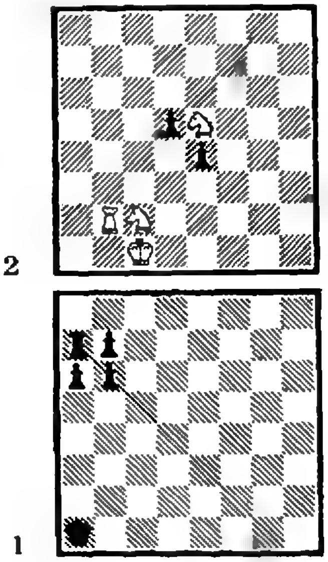
1.Лb1(2)! Ладья осталась на верхней доске, но освободила дорогу ферзю. 1...Крb4 (b3, b2)(1) 2. Фb4 (b3, b2)(2)×, на вертикали a(1, 2) король получает мат ферзем с тех же полей.



Мат в 2 хода.

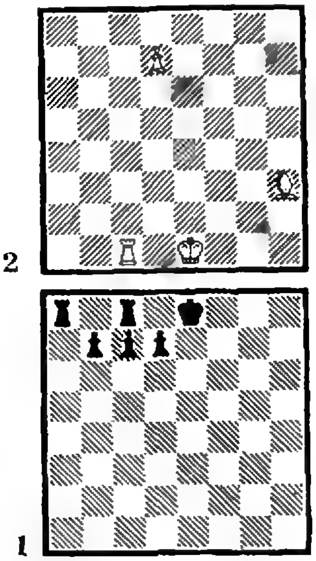
1.Фf7(1)! Ферзь возвращается на первую плоскость, а черный король не может последовать его примеру (все поля под угрозой). 1...Кр:f3(2) 2. Фf3(1)×, 1...Крf4(2) 2. Фf4 (1)×. 1...Крf5(2). 2.Фf5(1)×, 1...Крd5(2) 2.Фd5(1)×.

Чтобы разобраться в следующей задаче, вам придется очень внимательно «осмотреть пространство».



Мат в 4 хода.

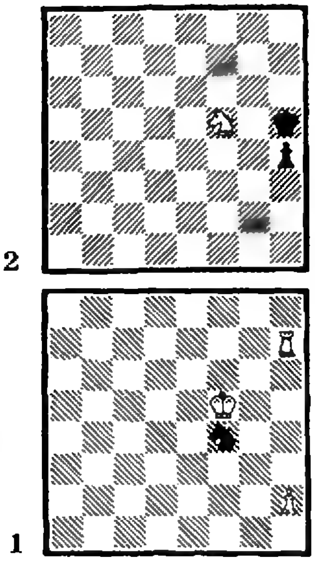
Приведем основной вариант: **1.Ке5(2) — с5(1)!** с угрозой 2.Кb3(1)×. 1...bc(1) **2.Крс2(1)** Ла7(2) **3.Лb2(1)** Ла2(2) 4.Лb1(1)×, или 3...Кра2(2) 4. Ла2(1)×. Проанализируем для примера заключительное положение во втором варианте. Черный король стоит на а2(2), и с нижней плоскости его матует ладья а2(1). Ее защищает конь с2(2), поля a1 и а3 на нижней доске бьет ладья а2(1), а на верхней — конь с2(2), поля b1, b2, b3 (1,2) под контролем белого короля.



Кооперативный мат в 2 хода.

В задаче на кооперативный мат начинают черные, которые помогают белым поставить мат их королю. **1.Лс8(2)!** Только в параллельных шахматах окруженная со всех сторон ладья с8 может исчезнуть, не мешая рокировке короля. **1...d8(2)К! 2.0—0—0(1)! Л:с8(2)×.**

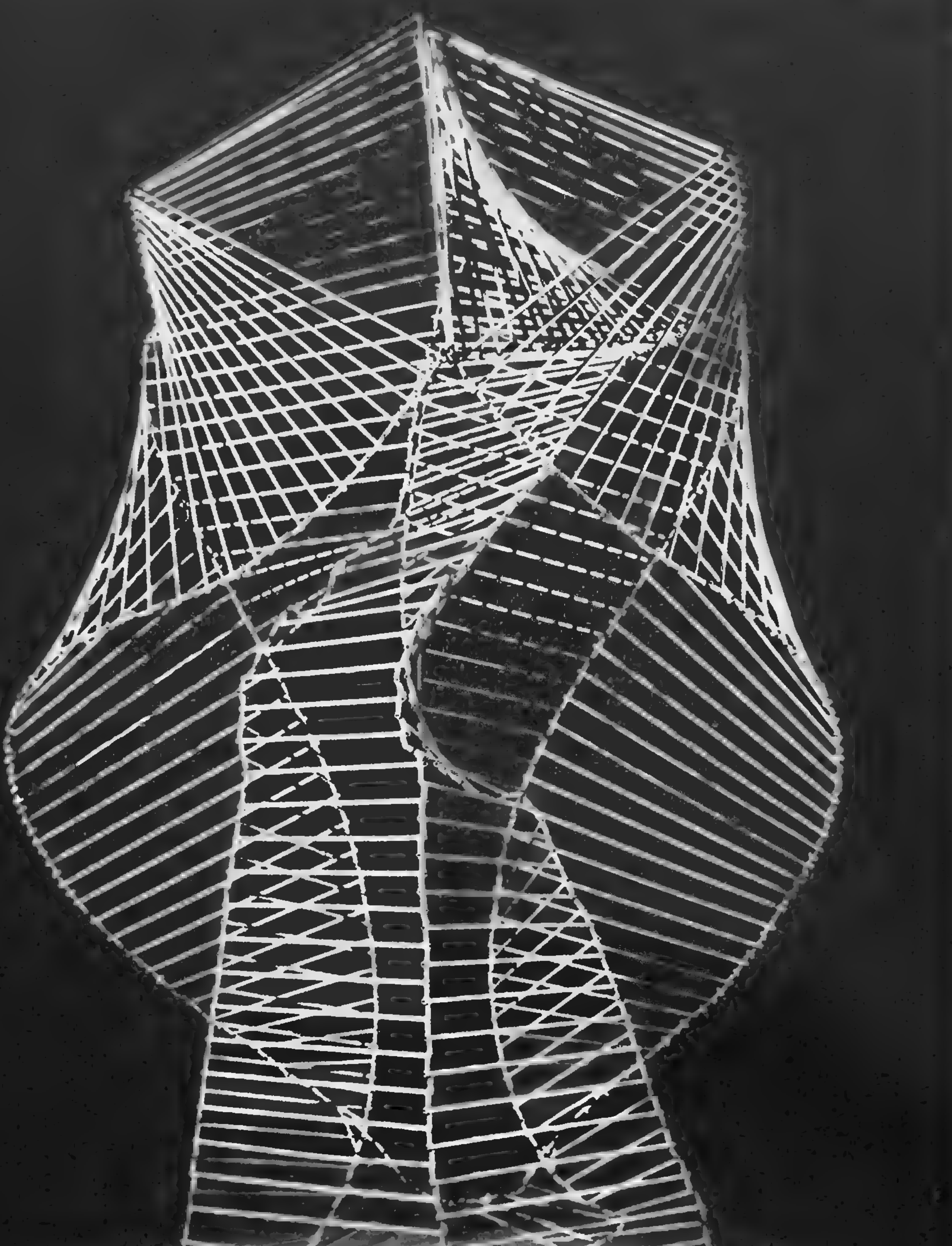
Конкурсные задания



15. Мат в 2 хода (параллельные доски).

16. Белые: Кре1, Лf1, Лh1; черные: Крg2. Мат в 3 хода (обычная доска).

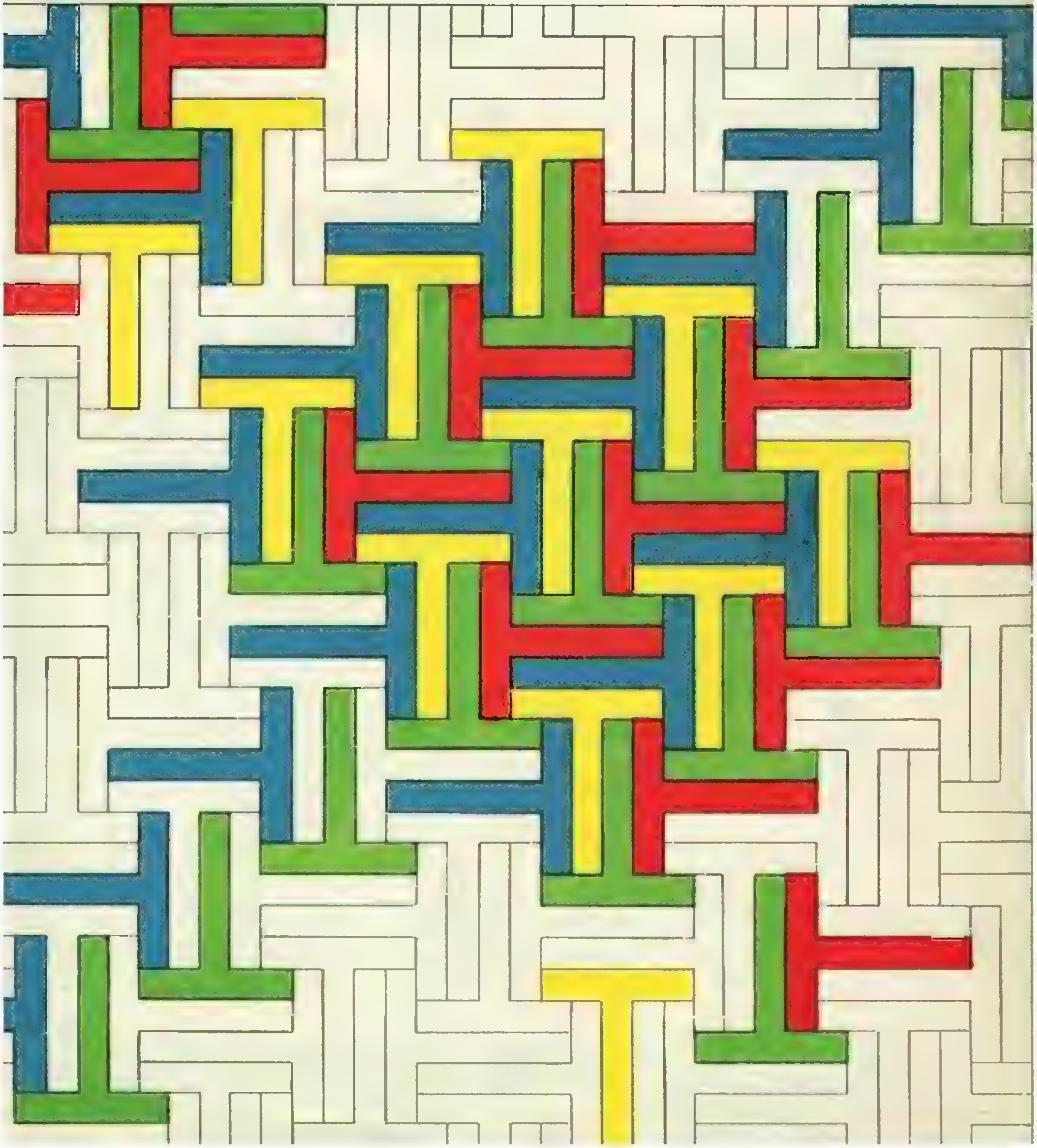
Срок отправки решений — 25 октября 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).



Эту конструкцию, которая экспонировалась в 1983 году в Москве на выставке, посвященной природным формам и архитектурной бионике, создал архитектор Ю. С. Лебедев. С математической точки зрения она интересна тем, что моделирует довольно замысловатую поверхность с самопересечениями, образованную прямолинейными отрезками. В модели эти отрезки — небольшие стержни, закрепленные системой проводов. Они опускаются пятью изящными скрученными переплетающимися шлейфами, как бы повиснув на сторонах и на диагонали квадрата, находящегося сверху.

Индекс 70465

Хорошо известно, что плоскость можно покрыть (без перекрытий и пробелов) квадратами, правильными треугольниками и шестиугольниками. Предложенная вашему вниманию красочная мозаика показывает, что плоскость можно покрыть также и «буквами Т», составленными из 10 квадратиков. Тем самым решена одна из задач, сформулированная в статье Б. Грюнбаума и Дж. Шепарда «Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками» из замечательной книги «Математический цветник» под редакцией М. Гарднера (М.: Мир, 1983). Решение этой задачи (и некоторых других задач из статьи Б. Грюнбаума и Дж. Шепарда нам прислал А. Азамов.



НОМЕР
9

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **9** 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	С новым учебным годом!	Happy new school yea[illegible]
3	*Н. Х. Розов, Бл. Х. Сендов.* Предыстория рождения компьютера	*N. Kh. Rozov, Bl. Kh. Sendov.* The prehistory of computers
8	*Е. Е. Городецкий, В. С. Есипов.* Конвекция и самоорганизующиеся структуры	*E. E. Gorodetski, V. S. Esipov.* Convection and self-organizing structures
14	*А. Н. Земляков.* Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»	*A. N. Zemlyakov.* Introduction to space geometry, or «Axiomatic games»
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
19	*Е. Э. Коломейцев.* Опыты со светящимися веществами	*E. E. Kolomeytsev.* Experiments with luminiscent objects
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
23	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*Г. А. Гуревич.* Криптограмма Жюля Верна	*G. A. Gurevich.* Jules Verne's cryptogramm
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
36	Задачи М941—М945; Ф953—Ф957	Problems M941—M945; P953—P957
39	Решения задач М921—М925; Ф933—Ф937	Solutions M921—M925; P933—P937
47	Кляксы на плоскости	Inkblots on the plane
49	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
50	*А. П. Ершов.* Компьютер — алгоритм — алгоритмический язык	*A. P. Ershov.* Computers — algorithms — the computer language
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
56	I. Первое знакомство	I. First glance inside
	Олимпиады	**Olympiads**
58	Задачи юбилейной Московской городской математической олимпиады	Problems of the Moscow mathematics olympiad
58	Новосибирская областная олимпиада по физике	Novosibirsk regional olympiad in physics
	Информация	**Information**
61	Физико-математическая конференция школьников	High school students plysico-mathematical conference
62	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(55)*	**Kvant smiles** *(55)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Рейтинги *(3-я с. обложки)*	Ratings *(3rd cover page)*

© *Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985*

... вооружать учащихся знаниями
и навыками использования современной
вычислительной техники,
обеспечить широкое
применение компьютеров
в учебном процессе,
создавать для этого
специальные школьные
и межшкольные кабинеты...

Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы

С новым учебным годом!

Редколлегия и редакция журнала «Квант» поздравляют наших юных читателей с новым учебным годом! А год этот во многом должен быть действительно новым, необычным.

Продолжается осуществление школьной реформы, набирает силу процесс интенсификации народного хозяйства. В соответствии с постановлением партии и правительства во всех средних учебных заведениях страны вводится курс «Основы информатики и вычислительной техники». Начат широкий эксперимент по использованию вычислительной техники в преподавании школьных предметов. Всестороннее и глубокое овладение молодежью вычислительной техникой должно стать важным фактором ускорения научно-технического прогрёсса в стране.

Хотелось бы, чтобы за новой строкой в школьном расписании вы увидели, какое большое значение придается сегодня этой мере, поднимающей работу школы на качественно иной уровень, соответствующий условиям и потребностям общества развитого социализма.

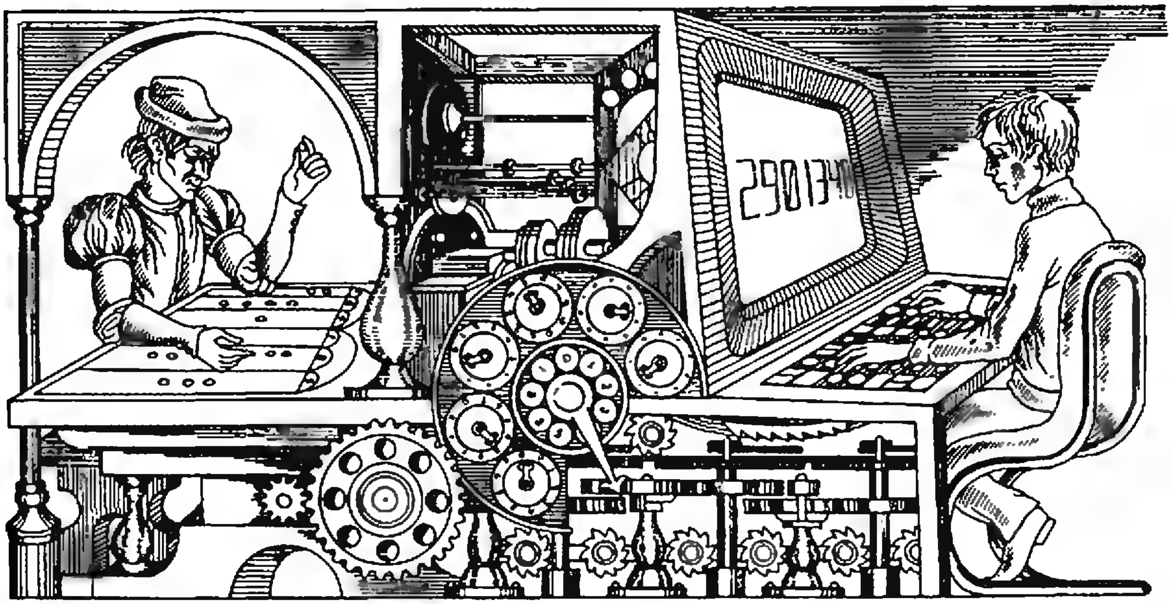
Пройдет немного времени, и вы вольетесь в ряды многомиллионной армии рабочих и инженеров, ученых и техников, преподавателей и конструкторов, механизаторов и служащих. Вы попадете на заводы, где работают станки с числовым программным управлением, в лаборатории, где действуют сотни электронных устройств и приборов, в аудитории, преподавание в которых ведется с применением современных электронно-вычислительных машин. Без преувеличения можно сказать, что мир, в котором вам предстоит жить и работать, будет миром компьютеризированным, насыщенным новейшей техникой. Это не фантастика, вернее, вчерашняя фантастика, обретающая невиданными темпами реальные черты на наших глазах.

Чтобы эта, порой лишь угадываемая сегодня, техника была вам подвластна, готовиться к встрече с ней необходимо загодя, уже за школьной партой. Вот почему такое важное значение приобретает задача вооружить учащихся знаниями и навыками использования современной вычислительной техники.

Помочь решению этой задачи призван и наш журнал. Как всегда, он будет стремиться пробудить интерес к физике и математике — наукам, лежащим в основе современной техники, знакомить вас с достижениями физико-математических наук и применением их в народном хозяйстве. И наряду с этим «Квант» станет всячески содействовать успешному введению нового учебного курса, рассказывать о развитии, сегодняшнем состоянии и перспективах вычислительной техники, о том, как она используется в различных областях, о связанных с ней проблемах математики и физики. Статьи и заметки на эти темы будут регулярно появляться на страницах нашего журнала.

Мы надеемся, что некоторая, как говорят программисты, «доза алгоритмичности» окажется полезной для наших читателей. От вас же редакция ждет отклики на эти публикации и предложения новых тем.

Желаем успехов в новом учебном году!



Предыстория рождения компьютера

Доктор физико-математических наук
Н. Х. РОЗОВ,
академик Болгарской академии наук
Бл. Х. СЕНДОВ

Сейчас, в конце XX века, уже никого нельзя удивить сообщениями о высоких темпах прогресса в различных научных направлениях и отраслях техники, о быстро растущем числе научно-технических новинок в разных сферах нашей жизни. Констатация этого стала общим местом, а подтверждений тому, одно разительнее другого, известно великое множество.

И все же можно думать, что по стремительности своего развития, по интенсивности и широте проникновения буквально во все области деятельности и быта человека вычислительная техника являет собой один из самых уникальных феноменов. Люди даже среднего поколения отчетливо помнят то время, когда об электронных вычислительных машинах говорили как о чем-то абстрактном и далеком, а сама аббревиатура ЭВМ оставалась многим неизвестной.

Сегодня без компьютеров с их огромными разносторонними возможностями многие реалии жизни — высокоэффективные производственные процессы, глобальное экономическое планирование, тончайшие фундаментальные исследования, удовлетворение многообразных потребностей миллионов людей и т. п.— просто не могли бы существовать.

Современная вычислительная техника резко изменила и сильно возвысила возможности математической науки. Мало того, что сейчас оказались «доступными» многие задачи, которые, будучи в прошлом разрешимы лишь «в принципе», теоретически, на практике оставались непреодолимыми из-за фантастически большого объема нужных вычислений. Самое главное в том, что на базе использования компьютеров все более и более возрастает роль и значение математического моделирования. С каждым днем все новые и новые эксперименты удается заменять «обсчетом на машине», а это дает колоссальный выигрыш в средствах и во времени. Недаром получила распространение такая точка зрения: с рождением современных компьютеров математика стала экспериментальной наукой.

Однако речь ниже пойдет не о современном состоянии вычислительной техники и не о перспективах ее будущего развития и использования. Настоящая статья посвящена некоторым аспектам уже прошедшей истории компьютера, событиям минувших дней.

Эта история представляется нам интересным, содержательным и поучительным конкретным примером диалектического процесса формирования человеческого знания. Каждая из основополагающих идей, в своей совокупности приведших к созданию компьютера, с одной стороны, была порождением острого, оригинального ума, а с другой — являлась естественным и неизбежным продуктом исторической эволюции условий жизни человека, его потребностей, развития науки и техники.

Простейший счетный прибор.

«Машина», которая всегда с тобой

Потребность считать была, вероятно, одной из первых потребностей интеллектуального уровня, которые испытывал homo sapiens уже в начале своего исторического пути. Она предопределялась и стимулировалась насущными проблемами самого существования первобытного человека и прежде всего — постоянной необходимостью знать и учитывать меняющееся количество пищи, скота, зерна и других жизненно важных предметов. Однако счетом человечество овладевало очень медленно, ибо формирование абстрактных понятий «один», «два» и т. д. потребовало аккумулирования тысячелетнего практического, житейского опыта.

В длительном и трудном процессе осознания самой *идеи счета* человеку особенно сильно помогли... его пальцы. Так уж устроена природа, что человек рождается с естественной «счетной машиной» — десятью пальцами на руках — и постоянно, всю жизнь носит ее с собой.

Эта простая, удобная и надежная «счетная машина» обладает в миниатюре всеми способностями компьютера: в нее можно вводить числовую информацию, она помогает производить арифметические операции, сообщает получающийся результат и позволяет при необходимости какое-то время его сохранить. Конечно, продолжительность хранения информации и объем памяти такой «машины», ее вычислительные возможности весьма скромны, хотя и не так малы, как кажется.

В некоторых книгах по занимательной математике описаны весьма искусные приемы, позволяющие «на пальцах» проводить счет до довольно больших чисел и выполнять не только сложение и вычитание, но и умножение. Сейчас это просто забава, фокусы, но даже в XIII веке один из творцов средневековой математики в Европе Леонардо Пизанский, больше известный под именем Фибоначчи, рекомендовал использовать пальцы как вспомогательное средство при счете.

Пальцевый счет сыграл особую роль в развитии математики. Представляется достоверным, что именно десять пальцев рук сперва на практике породили, а затем психологически закрепили привычку людей считать десятками, что привело к возникновению *десятичной* (десятиричной) *системы счисления*. Она постепенно вытеснила другие системы счисления (скажем, двенадцатиричную или шестидесятиричную), применявшиеся некоторыми народами, и стала давно уже общепринятой во всем мире.

Поскольку долго оставлять на пальцах числовую информацию, естественно, невозможно, перед человеком со всей практической актуальностью встала задача изобрести способы обозначать и хранить числа. На заре человечества для этого использовались зарубки и насечки на различных предметах, специальные счетные палочки, камешки, бирки и т. п. Но самый надежный и удобный способ обозначения и хранения чисел появился с возникновением письменности. Кстати, некоторые историки утверждают, что люди научились записывать *цифры* даже раньше, чем буквы.

Выдающимся историческим событием, определившим все последующее развитие математики, явилось открытие *позиционной нумерации*. По-видимому, она родилась около 4000 лет тому назад в древнем Вавилоне. Как жаль, что время не донесло до нас имя того гения, который первым высказал идею при записи чисел специальным образом учитывать место каждой цифры! Несравнимые удобства позиционной нумерации обеспечили ей победу над всеми другими способами записи чисел (например, над хорошо всем знакомой римской системой нумерации); именно она в дальнейшем открыла возможность механизации счета и в конечном итоге — создания компьютера.

Созданием привычной нам *десятичной позиционной нумерации* (системы счисления) мы обязаны древним индусам — это произошло приблизительно полторы тысячи лет назад. Из Индии через арабов в период раннего средневековья эта система нумерации вместе с обозначениями цифр (которые до сих пор называются «арабскими») пришла в Европу, а затем распространилась во все страны.

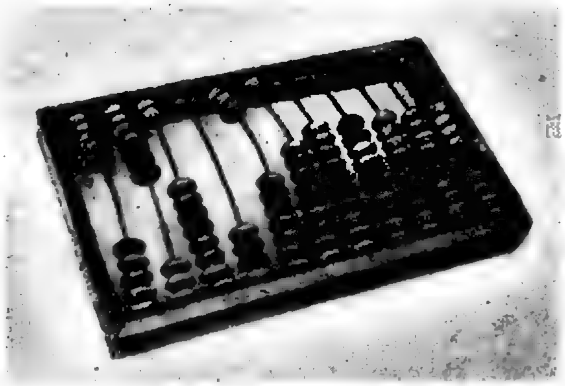
Как считать быстрее и надежнее?

По мере роста разнообразных практических нужд человека, в первую очередь — с расширением внутренней и межгосударственной торговли, увеличивалось и значение различных вычислений в жизни общества, без которых невозможно эти нужды обеспечивать.

Сегодня такие вычисления кажутся совсем простыми — ведь они используют лишь четыре арифметических действия и доступны младшеклассникам! Но не будем забывать, что речь идет об иных временах, когда удобных правил письменного счета «столбиком» еще не существовало, когда люди не знали не только шариковых авторучек, но даже и бумаги.

Великой революцией в математике явилось изобретение *абака*, или, иначе, *счётов*. К сожалению, неизвестно, кто и когда создал этот шедевр, как невозможно и назвать точное число его исторических и национальных разновидностей.

Абак был удобным и простым приспособлением, позволяющим человеку производить арифметические операции над числами путем перемещения по специальным правилам каких-то предметов (счетных марок). Широко известно, что математики древности в геометрии особое значение придавали решению задачи «с помощью циркуля и линейки». Но немногие знают, что аналогичное положение долгое время сохранялось и в арифметике: задача считалась решенной только в том случае, если указано, как соответствующие необходимые вычисления провести на абаке.



Русские счеты.

В различных странах модификации абака, несмотря на поразительную простоту их устройства (а может быть, именно благодаря такой простоте?), получили широкое признание и использовались в течение столетий. Особенно значительный вклад в распространение абака и методов счета на нем внес известный французский ученый Герберт (950—1003), ставший в конце своей жизни папой римским под именем Сильвестр II.

Лишь в позднее средневековье, после появления в Европе бумаги и по мере распространения и принятия десятичной позиционной системы счисления (в которой легко выполнять письменно арифметические операции), абак утрачивает свое универсальное значение для арифметики. Постепенно он превращается во вспомогательное приспособление, еще какое-то время, так сказать, «технически» обеспечивавшее коммерческие расчеты и т. п. Например, русские счеты до сих пор с успехом помогают в работе кассирам магазинов (в самые последние годы счеты начали уступать свое место, вытесняемые автоматическими кассовыми аппаратами и микрокалькуляторами).

Абак (счеты), конечно, еще нельзя назвать вычислительной машиной. Это всего лишь *счетный прибор*, позволяющий организовать в рациональной форме (альтернативной письменному вычислению «столбиком») выполнение арифметических операций, которые фактически проводит сам человек, в своей голове. Да и перемещение счетных марок, к которым сводится вычисление, человек осуществляет также сам, своей рукой.

Однако с появлением абака была реализована и закреплена основополагающая идея специального устройства, выполняющего неограниченное число операций определенных типов без каких-либо промежуточных записей.

К счетным приборам, помимо абака и счетов, относятся и многие другие приспособления, достаточно оригинальные и интересные. Не будем их здесь все перечислять, а упомянем лишь еще одно, на первый взгляд весьма неожиданное в ряду счетных приборов. Это ... таблицы логарифмов. Не нужно, однако, удивляться! Если подумать, как проводится, скажем, умножение с помощью таблиц логарифмов, то нетрудно убедиться, что их роль в принципе не отличается от роли счетов.

Таблицы логарифмов были опубликованы в 1614 году шотландским математиком Джоном Непером (1550—1617), хотя создал их он много раньше — примерно в начале 90-х годов XVI века. Появившееся вначале как основа своеобразного «счетного прибора», понятие логарифма сыграло особую роль в истории развития всей математической науки.

Первые попытки поручить счет машине

Правила письменного счета в десятичной позиционной системе счисления, несомненно, очень удобны, но от этого вычисления не перестают быть трудоемкими и утомительными, особенно если это длинные вычисления с большими числами. Поэтому с победой десятичной позиционной системы счисления мысль о создании приспособлений, помогающих счету, не потеряла своей притягательности. Более того, дальнейший интенсивный рост потребностей торговли и финансового дела, бурное развитие техники в период становления капиталистического способа производства, астрономические, землемерные, навигационные и прочие расчеты, необходимость конкретного («до числа») решения прикладных математических задач — все это делало задачу освобождения человека от тяжелого бремени счета весьма важной.

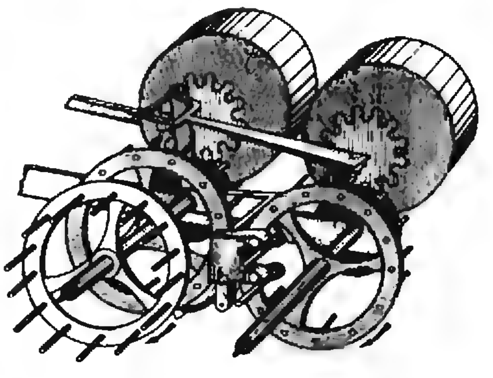
К XVII веку относится следующее чрезвычайно важное событие в истории вычислительной техники — появление считающего устройства.

Долго считалось, что первое такое устройство построил в 1642 году французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623—1662). Однако не так давно было установлено, что впервые, приблизительно в 1623 году, счетный автомат сконструировал немецкий ученый Вильгельм Шиккард (1592—1636), профессор математики и ... восточных языков университета в Тюбингене.

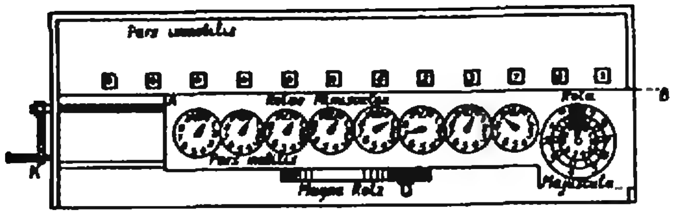
Радикальное отличие *считающего устройства* от счетного прибора состоит в том, что оно само, без участия головы человека, автоматически проводит арифметическую операцию над установленными исходными числами и сообщает получающийся результат. Однако та часть работы, которая связана с составлением плана последовательного проведения различных операций, поэтапного ввода данных перед каждой операцией и списывания промежуточных результатов, остается за человеком.

Важно подчеркнуть и то существенное обстоятельство, что реализация вычислительных операций в считающем устройстве осуществлялась на основе механического движения различных его деталей (например, вращения зацепленных колес) с автоматическим превращением десятка в некотором разряде в единицу следующего разряда (это достигалось за счет различных технических ухищрений).

Изобретение Шиккарда осталось практически никому не известным, а



Деталь машины Паскаля



«Панель управления» машины Лейбница.

автомат Паскаля получил широкую популярность и послужил родоначальником огромного семейства считающих устройств, созданных в течение последующих трех столетий. Интересно отметить, что, хотя само по себе создание таких устройств — проблема скорее инженерная, техническая, в длинном списке имен их создателей значатся многие выдающиеся математики, причем, как правило, именно им принадлежали оригинальные конструктивные решения. Вот лишь несколько примеров.

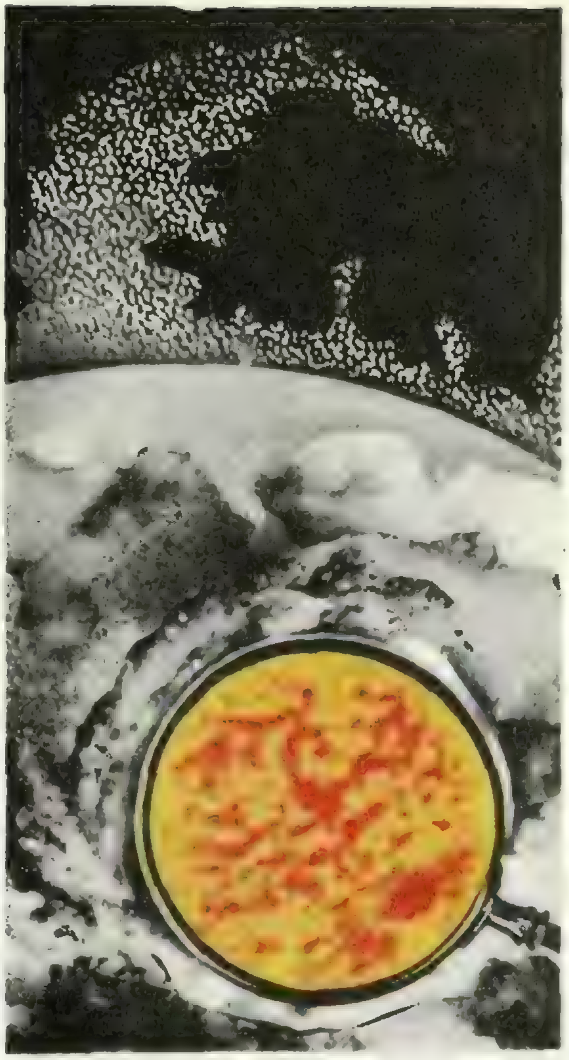
Один из основоположников дифференциального и интегрального исчисления немецкий математик, естествоиспытатель и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) активно занимался созданием и усовершенствованием автоматов для счета на протяжении почти 40 лет своей жизни. Построенное им считающее устройство «умело» выполнять не только сложение и вычитание, как автомат Паскаля, но и умножение и деление. Другими словами, Лейбниц был автором первого в истории *арифмометра* — устройства, позволяющего быстро и удобно совершать все четыре арифметических действия.

Первая *логарифмическая линейка* была придумана в 20-х годах XVII века известным английским математиком Вильямом Оутредом (1574—1660), который, кстати, предложил использовать «крест» × в качестве знака умножения. Получившая широкую популярность, многократно усовершенствовавшаяся, пережившая века, логарифмическая линейка оказалась верным, удобным и незаменимым помощником в самых разнообразных практических расчетах. Еще сравнительно недавно именно она являлась как бы символом инженерного труда: инженер всегда изображался на снимках и рисунках с неизменной логарифмической линейкой в нагрудном кармане.

Имя русского математика и механика, основоположника петербургской математической школы Пафнутия Львовича Чебышёва (1821—1894) хорошо известно во всем мире: его работы оказали решающее влияние на развитие многих ветвей математики. Заметный след оставил П. Л. Чебышёв и в истории вычислительной техники. Им впервые была высказана (и реализована в его арифмометре) идея *непрерывного* (а не дискретного) преобразования десятка в единицу старшего разряда. Принцип непрерывной передачи десятков приобрел особо важное значение уже в наше время, после возникновения ЭВМ.

XX век ознаменовался дальнейшим резким возрастанием роли вычислений в самых разных областях человеческой деятельности. Считать требовалось многим и считать приходилось много. В первой половине нашего столетия наиболее распространенным в мире считающим устройством был арифмометр. Различные его модификации, выпускавшиеся в разных странах, принципиально не отличались от арифмометра, сконструированного в 1890 году петербургским изобретателем Вильгодтом Теофиловичем Однером (1845—1905). Легкий и небольшой по размерам, простой и удобный в обращении, надежный в работе, арифмометр Однера явился вершиной конструкторского искусства среди многочисленных считающих устройств.

Кому из людей старшего поколения, хоть как-то связанных с вычислениями или обработкой числовых данных, не приходилось иметь дело с классическим арифмометром «Феликс»? Еще так недавно он был основным массовым вычислительным средством, его можно было встретить повсюду. А сегодня «Феликс» — лишь экспонат музея истории науки. Подгоняемая потребностями бытия, вычислительная техника пошла дальше, и нам пришлось проститься с этим верным и привычным помощником. Такие расставания всегда немного грустны, но без них невозможен прогресс науки, они неизбежны...



Конвекция и самоорганизующиеся структуры

Кандидат физико-математических наук
Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ,
В. С. ЕСИПОВ

Ветры и океанские течения, движение материков и потоки солнечной материи... Каждое из этих явлений очень сложно и многообразно. И всё же все они (а также многие другие) имеют характерную общую черту: существенную роль в них играет конвекция — одно из самых красивых явлений в физике макромира.

В последние годы интерес к этому «старому» и, казалось бы, хорошо знакомому явлению резко повысился. Оказывается, конвекция — один из тех процессов, в результате которых системы, первоначально неупорядоченные, приходят в упорядоченное состояние. Рождение порядка из хаоса (или, иначе, самоорганизация) — это фундаментальный механизм эволюции. И понимание конвекции помогает нам продвинуться в понимании этой захватывающей и, в большой степени, все еще таинственной проблемы.

Условия существования конвекции

В узком смысле слова конвекция — это возникновение упорядоченного движения в неравномерно нагретых жидкостях или газах.

При каких условиях возникает такое движение? Обратимся к простому примеру: представим себе, что мы подогреваем снизу плоский горизонтальный слой жидкости. Каким образом может происходить процесс передачи тепла от нижней границы жидкости к верхней?

При малой разности температур ΔT нижнего и верхнего слоев жидкости процесс передачи тепла происходит за счет теплопроводного механизма: более «горячие» молекулы, сталкиваясь с более «холодными», передают им избыток своей энергии, но макроскопическое движение жидкости при этом отсутствует. Однако, когда разность температур достигает определенного критического значения $\Delta T_{кр}$, теплопроводный механизм переноса тепла становится неустойчивым. На смену ему приходит более выгодный для системы конвективный механизм передачи тепловой энергии, связанный с возникновением в жидкости макроскопического движения.

Что значит «неустойчивый»? В каком смысле «более выгодный»?

Давайте разберемся в этих вопросах.

Устойчивость и неустойчивость

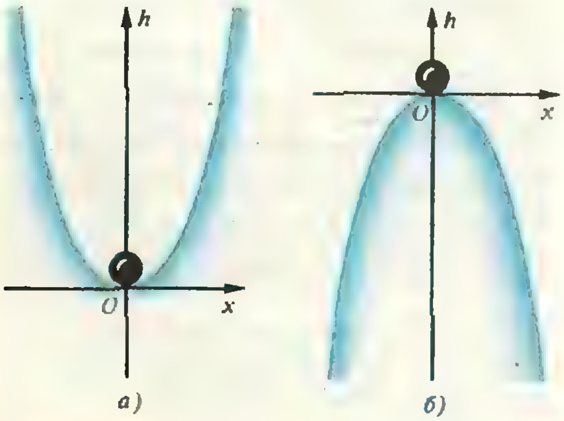
Из курса механики мы знаем, как определяется устойчивость равновесия системы: если при отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть ее обратно,— равновесие устойчивое (рисунок 1, *а*); если же могут возникнуть силы, стремящиеся увеличить отклонение,— равновесие неустойчивое (рисунок 1, *б*).

Это же утверждение можно сформулировать на другом, энергетическом языке. Для этого заметим, что на рисунках 1,*а* и 1,*б* приведена, в сущности, зависимость потенциальной энергии W ($W=mgh$) от горизонтальной координаты x (от x зависит высота h, на которой находится тело, а следовательно, и его потенциальная энергия). Так вот, положение равновесия механической системы устойчиво, если энергия ее в этом положении минимальна (рисунок 1,*а*), и неустойчиво, если энергия максимальна (рисунок 1,*б*).

Спрашивается: а можно ли непрерывно перейти от ситуации 1,*а* к ситуации 1,*б*? То есть может ли система, первоначально находившаяся в устойчивом состоянии, стать неустойчивой? Ясно, что может. Для этого достаточно, чтобы дно ямы на рисунке 1,*а* «вспучилось». На математическом языке такую ситуацию можно описать, предположив, что зависимость величины W от x имеет вид

$$W(x)=ax^2+bx^4 \qquad (b>0).$$

(Пусть вас не смущает произвольность этого выбора; оказывается, при очень общих предположениях потенциальная энергия вблизи положения равновесия выглядит именно таким образом.) Если $a>0$, функция $W(x)$ имеет минимум в точке $x=0$ (рисунок 2, кривая *I*). Это — точка устойчивого равновесия. Если $a<0$ (кривая *II* на рисунке 2), минимум в точке $x=0$ трансформируется в максимум, и эта точка становится точкой неустойчивого равновесия — система «скатывается» на дно одной из двух образовавшихся ям.



а) б)

Рис. 1.

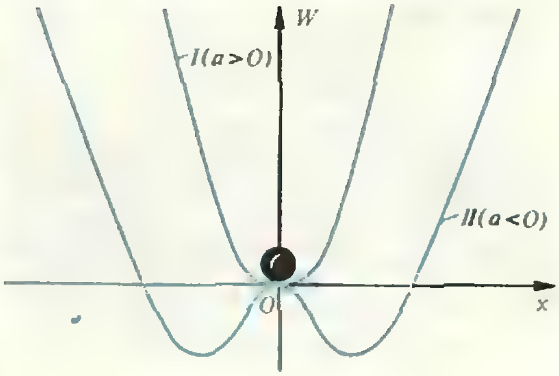


Рис. 2.

При непрерывном изменении коэффициента a мы в точке $x=0$ переходим от ситуации 1,*а* к ситуации 1,*б*.

Приведенный здесь механизм потери устойчивости (изменение знака при x^2 в выражении для W) является совершенно универсальным и с теми или иными изменениями применим к поистине бесконечному числу конкретных ситуаций.

Разумеется, в общем случае потенциальная энергия не сводится к энергии в поле тяготения, а определяется взаимодействием тел, составляющих систему. А для немеханических систем в положении устойчивого равновесия минимум должна иметь не энергия, а некоторая другая величина, в определенном смысле аналогичная энергии.

В каждом конкретном случае найти величину, минимум которой определяет равновесное состояние системы,— задача трудная. Да и правильно выбрать аргумент функции W, относительно которого эта функция минимизируется, совсем не просто. Однако знание общего механизма дает нам путеводную нить. Нам известно теперь, что́ надо искать.

Возникновение конвекции

Вернемся к конвекции. Рассмотрим горизонтальный слой жидкости толщиной L. Пусть на нижней границе поддерживается температура T_1, а на верхней T_2 ($\Delta T=T_1-T_2>0$). Температура внутри слоя линейно зависит от высоты h:

$$T(h)=T_1-\Delta T\,\frac{h}{L}.$$

Так как плотность жидкости при нагревании уменьшается, в нижних, более нагретых, слоях плотность меньше, чем в верхних, — жидкость неоднородна по плотности. Зависимость плотности от высоты имеет вид

$$\rho(h)=\rho_1\left(1+\beta\cdot\Delta T\,\frac{h}{L}\right)$$

(здесь ρ_1 — плотность на нижней границе, β — коэффициент объемного расширения, равный изменению единицы объема тела при изменении температуры на 1 градус). Чем больше ΔT, тем быстрее растет плотность жидкости в слое с ростом h. Иными словами, при увеличении ΔT неоднородность плотности в слое возрастает. И это, в конечном счете, приводит к неустойчивости: более легкая жидкость, находящаяся внизу, стремится всплыть, возбуждая при этом движение во всем слое, — возникает конвекция.

На первый взгляд может показаться странным, что такое движение не начинается сразу, при сколь угодно малом перегреве нижних слоев. Ведь если мы погружаем какое-нибудь тело в жидкость, оно всплывает даже тогда, когда плотность его хотя бы чуть-чуть меньше плотности жидкости.

Чтобы понять, что́ здесь происходит, представим себе, что небольшой элемент жидкости (например, шарик радиуса R) начал двигаться вверх со скоростью v. Обычно можно считать, что объем, а следовательно, и плотность тела по мере подъема не меняются. В рассматриваемом случае выделенный элемент жидкости, поднимаясь и попадая в более холодные слои, уменьшается в объеме, становится более плотным и может потерять плавучесть. В этом все дело!

Прежде чем получить условие потери устойчивости теплопроводного режима в явном виде, сделаем одно очень важное замечание. Имея в виду чисто качественный характер наших оценок, мы совершенно не будем интересоваться в формулах численными коэффициентами, да и вообще какими-либо деталями. Так, мы рассматриваем элемент жидкости в форме шарика, хотя на самом деле он мог бы иметь более сложную форму. Мы будем принимать объем этого шарика равным R^3, а площадь его поверхности — R^2 (вместо $^4/_3\pi R^3$ для объема и $4\pi R^2$ для площади поверхности) и т. д. Этот метод, называемый методом размерных оценок, является важным этапом физического исследования, этапом, на котором проясняется самая суть интересующего нас явления: от каких параметров оно зависит, каковы его пространственные и временны́е масштабы и т. д.*)

Итак, приступим. Введем время τ, в течение которого температура шарика (и, соответственно, его плотность) остается приблизительно постоянной. За это время шарик, двигаясь с приблизительно постоянной скоростью v, успевает подняться с уровня h на уровень $h+\Delta h$, где $\Delta h=v\tau$. Его место на уровне h займет более плотный элемент жидкости, опустившийся с уровня $h+\Delta h$ (рисунок 3). Плотность поднимающегося с уровня h шарика равна $\rho(h)=\rho_1(1+\beta\cdot\Delta T\cdot h/L)$, а плотность опустившегося на уровень h шарика равна $\rho(h+\Delta h)=$ $=\rho_1(1+\beta\cdot\Delta T\cdot(h+\Delta h)/L)$. Изменение потенциальной энергии при таком встречном движении равно

$$(\rho(h)-\rho(h+\Delta h))R^3g\cdot\Delta h=$$

$$=-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{\Delta h}{L}\,R^3g\cdot\Delta h=-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{v^2\tau^2}{L}R^3g.$$

Знак «минус» означает, что энергия уменьшается, — значит, такое движение в жидкости выгодно. Надо, однако, учесть еще выделяющееся за счет трения тепло, которое равно работе сил сопротивления $A=F_c\cdot\Delta h$. Сила сопротивления связана с наличием внутреннего трения (вязкости) в жидкости и в случае шарика, движущегося со скоростью v, пропорциональна радиусу шарика и его скорости, а также коэффициенту вязкости жидкости η:

$$F=\eta Rv$$

(здесь мы вновь отбросили несущественный в наших качественных оценках численный коэффициент пропорциональности).

Таким образом, изменение энергии при возникновении в жидкости движения равно

$$\Delta W=\left(-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{v\tau}{L}\,R^3g+\eta Rv\right)v\tau.$$

Оценим время остывания шарика τ. Избыточное количество тепла у шарика (связанное с его перегревом) равно $\Delta Q=\rho R^3c\cdot\Delta T$ (ρR^3 — масса шарика, c — удельная теплоемкость). Количество тепла Δq, перетекающего от горячего тела к холодному за единицу времени через единицу поверхности раздела этих тел (эту величину называют потоком тепла),

---

*) О методе размерных оценок можно прочитать в главе «Вычисления без вычислений» книги А. В. Мигдала «В поисках истины» (серия «Эврика» издательства «Молодая гвардия», 1983 год).

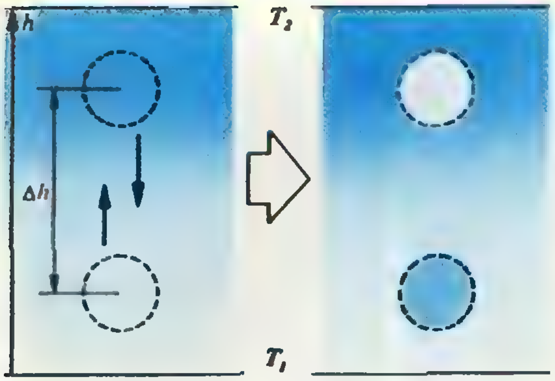


Рис. 3.

пропорционально разности температур ΔT горячего и холодного тела и обратно пропорционально толщине переходного слоя; коэффициент пропорциональности (характеризующий теплопроводные свойства тела) называют коэффициентом теплопроводности и обозначают $\varkappa$. В случае нашего шарика толщина переходного слоя — это радиус шарика, и $\Delta q=\varkappa\cdot\Delta T/R$. Время остывания шарика — это время, за которое все избыточное тепло ΔQ успеет перейти от шарика через его поверхность к окружающей жидкости. Следовательно, время τ определяется условием $\Delta Q=\Delta q\cdot R^2\tau$, откуда

$$\tau=\frac{\Delta Q}{\Delta q\cdot R^2}=R^2\frac{\rho c}{\varkappa}.$$

Комбинацию $\varkappa/(\rho c)$ называют коэффициентом температуропроводности и обозначают χ. Так что $\tau=R^2/\chi$.

Подставив найденное значение τ в выражение для ΔW, получим:

$$\Delta W=R^3\frac{\eta}{\chi}\left(1-\frac{\rho_1\beta g R^4\cdot\Delta T}{L\eta\chi}\right)v^2.$$

В соответствии с общим принципом при, $\Delta W>0$ случайно возникшее движение затухает (аналогия с рисунком 1, *а*), а при $\Delta W<0$ движение продолжается (аналог — рисунок 1, *б*) — состояние покоящейся жидкости (теплопроводный режим) становится неустойчивым. Условие $\Delta W<0$ выполняется, когда

$$\frac{\rho_1\beta g R^4\cdot\Delta T}{L\eta\chi}>1.$$

Обратите внимание на то, как в это неравенство входит размер шарика R: чем больше R, тем охотнее шарик устремляется вверх. Значит, в первую очередь начинает двигаться шарик максимально возможного в данной ситуации размера. Но этот максимально возможный размер, очевидно, по порядку величины равен толщине слоя. Поэтому в последнем неравенстве можно считать $R\approx L$.

Итак, мы получили условие, определяющее начало конвективного движения:

$$\boxed{\frac{\rho_1\beta g L^3\cdot\Delta T}{\eta\chi}>1.}$$

Вы видите, что критическая разность температур, при которой происходит срыв теплопроводного режима, определяется параметрами жидкости (вязкостью η, температуропроводностью χ и т. д.), а также толщиной слоя L. Чем больше толщина слоя, тем при меньшей разности температур на нижней и верхней его границах теплопроводный режим сменяется конвективным.

Подставляя в выражение для ΔW значение $R\approx L$, найдем

$$\Delta W=L^3\frac{\eta}{\chi}\left(1-\frac{\rho_1\beta g L^3\cdot\Delta T}{\eta\chi}\right)v^2.$$

Наша задача выполнена: мы нашли функцию, минимум которой определяет положение равновесия системы — это $\Delta W(v)$. Когда разность ΔT мала, график $\Delta W(v)$ имеет вид, аналогичный приведенному на рисунке 1, *а*, — минимум реализуется при $v=0$. При ΔT настолько больших, что $\Delta W<0$, мы переходим к ситуации, изображенной на рисунке 1, *б*, что и означает спонтанный (самопроизвольный) переход жидкости из состояния с нулевой скоростью в состояние со скоростью, отличной от нуля.

Наконец-то структура!

Итак, мы нашли условие потери устойчивости. Но что же произойдет с жидкостью дальше, за порогом неустойчивости?

Прежде всего очевидно, что вся жидкость не может начать одновременно двигаться вверх. Восходящее движение обязательно должно привести к нисходящему. И эти восходящие и нисходящие потоки должны быть как-то распределены в нашем слое.

Оказывается, что система, в которой имеются потоки энергии или вещества (такие системы называются неравновесными), устраивается таким образом, чтобы сделать потери энергии минимальными.*) В рассматриваемом нами случае восходящие и нисходящие потоки жидкости строго упорядочиваются, образуя очень красивую и, что особенно поразительно,

---

*) Это, по-видимому, весьма общий принцип. Однако в настоящее время строгого доказательства его справедливости не существует.

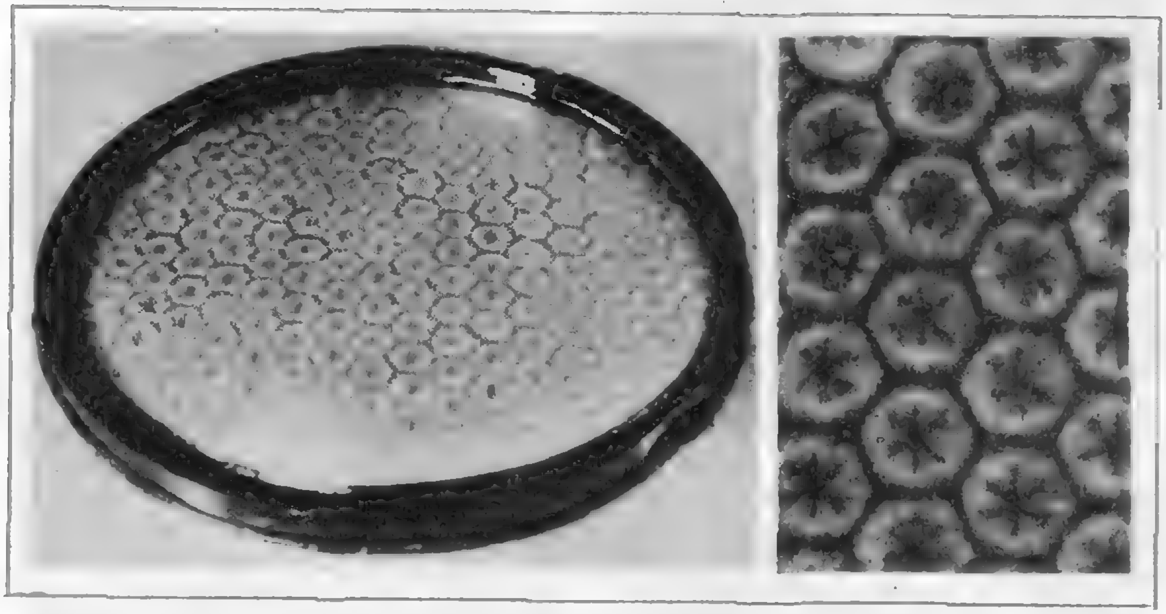


Рис. 4.

очень правильную картину: слой жидкости «разбивается» на призмы (так называемые ячейки Бенара — по имени французского исследователя, впервые наблюдавшего и описавшего это явление), по граням которых жидкость поднимается вверх, а в центре стекает вниз, либо наоборот. Диаметр поперечного сечения призм приблизительно равен L. На рисунке 4 приведена фотография такой структуры (вид сверху; справа — увеличенное изображение тех же ячеек).

Самопроизвольное возникновение структуры, неизменно поражающее всякого, впервые сталкивающегося с этим явлением, — факт, значение которого выходит далеко за рамки проблемы конвекции.

Другие типы неустойчивости

Причиной неустойчивости в рассмотренном нами случае является наличие потока тепла через границы жидкости и неоднородность плотности по высоте. Совершенно аналогичный результат мы получим и в том случае, когда неоднородность плотности вызвана не разностью температур, а различием состава нижних и верхних слоев жидкости. Например, когда вверху находится вода более соленая (а следовательно, более тяжелая), чем внизу. Здесь мы переходим к очень интересному и разнообразному кругу вопросов, связанных с конвекцией в двухкомпонентных жидкостях. Примером такой системы является океан. Реально в океане наряду с неоднородностью по составу существует также и неоднородность по температуре. Комбинация этих факторов приводит ко многим характерным особенностям океана и, в частности, к формированию в нем устойчивых слоев с различной соленостью и температурой (к так называемой стратификации океана).

Чтобы понять, как образуется такая структура, рассмотрим воду, в нижних слоях которой температура и соленость выше, чем в верхних. При этом, даже если плотность воды внизу больше, чем вверху (то есть, казалось бы, равновесие устойчивое, и перенос энергии должен идти обычным теплопроводным способом), тем не менее, возможен срыв устойчивости и переход от теплопроводного режима к конвективному.

Действительно, представим себе, что небольшой элемент жидкости случайно начал двигаться вверх. Предположим, что его температура и соленость не меняются. Так как плотность элемента больше, чем плотность окружающей среды, он вскоре остановится и начнет тонуть, двигаясь обратно к своему положению равновесия. Возникает колебательное движение рассматриваемого элемента, аналогичное колебанию тела, подвешенного на пружине. Такое колебание естественно затухает из-за трения, обусловленного вязкостью жидкости. А теперь учтем, что в процессе подъема выделенный элемент, оказываясь в более холодных слоях, остывает. Это приводит к его «утяжелению», так что, возвращаясь к своему положению равновесия, он имеет скорость бóльшую, чем та, с которой он начал двигаться (происходит как бы подталкивание грузика, колеблющегося на пружине). Такое подталкивание может скомпенсировать затухание колебаний, и амплитуда колебаний начнет нарастать. Это и есть неустойчивость. (Такую неустойчивость называют колебательной конвекцией.) Размах колебаний растет до некоторого предельного значения, которое и определяет толщину слоя. В результате таких колебаний жидкость внутри слоя активно перемешивается. Температура и соленость воды при этом оказываются в пределах одного слоя почти постоянными. После того как такой слой сформировался, над ним начинает расти другой слой, затем третий и т. д.

Вновь возникает структура. Но на этот раз слоистая.

И еще об одном типе конвективной неустойчивости нам хочется рассказать. Кто из вас не видел, как закручивается вода, выливающаяся из сливного отверстия в раковине. Или другой пример: каждый замечал, что чаинки при перемешивании сахара в стакане с чаем всегда собираются к оси стакана. И то и другое является частным проявлением неустойчивости, которая называется неустойчивостью Тейлора (по имени английского ученого Дж. И. Тейлора (1886—1975), занимавшегося исследованиями по аэро- и гидродинамике).

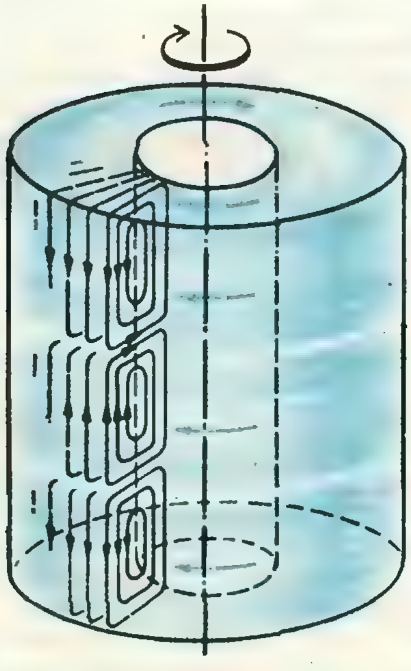


Рис. 5.

В наиболее чистом виде неустойчивость Тейлора проявляется в жидкости, находящейся между двумя соосными вращающимися цилиндрами. Цилиндры увлекают жидкость за собой, в результате чего она тоже начинает вращаться. Однако при определенной разности угловых скоростей внутреннего и внешнего цилиндров такое чисто вращательное движение жидкости становится неустойчивым, и наряду с вращением появляется движение жидкости в радиальном направлении. Ситуация очень напоминает ту, которую мы рассматривали выше. Разница лишь в том, что в горизонтальном слое «верх» и «низ» были выделены направлением ускорения свободного падения g, здесь же «верх» и «низ» задаются направлением центростремительного ускорения. В первом случае мысленно выделенный элемент жидкости всплывал за счет того, что его плотность не успевала сравняться с плотностью окружающей среды (шарик не успевал остывать). Здесь же скорость вращения элемента жидкости, случайно начавшего двигаться вдоль радиуса, не успевает сравняться со скоростью вращения тех слоев жидкости, в которые он попадает.

В результате развития такой неустойчивости жидкость, вращающаяся между цилиндрами, разбивается на систему «баранок» (рисунок 5; черными стрелками показаны направления течения жидкости внутри вращающихся «баранок»). Вновь возникает упорядоченная структура!

В общем случае можно сказать, что вращение жидкости в одной плоскости, как правило, приводит к ее движению в перпендикулярной плоскости.

(Окончание см. на с. 22)

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

Кандидат педагогических наук
А. Н. ЗЕМЛЯКОВ

Эта статья адресована, главным образом, девятиклассникам, начавшим изучать стереометрию по учебнику академика А. В. Погорелова. Ее можно использовать и учителю при закреплении материала § 14 этого учебника. Суть же рассматриваемых в статье вопросов — о смысле формулировок аксиом, о роли разных аксиом, о логических трудностях, возникающих при доказательстве теорем, — наверное, будет понятна и интересна всем любителям геометрии и логики. Вы как бы совершите прогулку по § 14 книги А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (Г., с. 175—177) и увидите, сколько «разностей» и «интересностей», «хитростей» и «всякостей» заключено всего на трех страницах учебника. Итак, в путь...

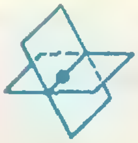
1. От планиметрии — к стереометрии

...Думай о смысле, а слова придут сами!
Льюис Кэрролл

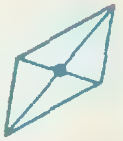
Вы уже изучили — прошли — три пространственные аксиомы C_1, C_2 и C_3 (Г., с. 175), а еще, наверное, и три теоремы — 14.1, 14.2 и 14.3 (Г., с. 176—177). Сейчас и мы пройдемся по ним вместе с вами, проверим, хорошо ли и все ли вы поняли на трех первых стереометрических страницах. В доказательстве первой же теоремы —

14.1: Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну

— использовались не только пространственные аксиомы —

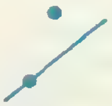


C_2: Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой

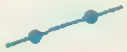


C_3: Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну

— но и две аксиомы, названные в учебнике «планиметрическими», а точнее, «аксиомами планиметрии» (Г., с. 175) — I_1 и I_2:

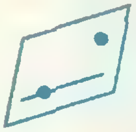


I_1: Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей

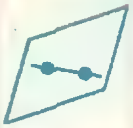


I_2: Через любые две точки можно провести прямую, и только одну

Сразу возникает вопрос: а какой смысл придается этим «аксиомам планиметрии» в стереометрии? Ведь в планиметрии аксиомы I_1 и I_2 описывали основные свойства «принадлежности точек и прямых на плоскости» (Г., с. 4). Полные их формулировки в планиметрии подлиннее, чем приведенные выше:



(I_1): Какова бы ни была прямая (в плоскости), существуют точки (плоскости), принадлежащие этой прямой, и точки (плоскости), не принадлежащие ей



(I_2): Через любые две точки (плоскости) можно провести прямую (в этой плоскости), и только одну (заметьте, что рисуночки к аксиомам мы изменили — «приспособили» к плоскости). Планиметрический ли смысл — справедливость утверждений (I_1) и (I_2) *в каждой плоскости* — имеют аксиомы группы I в стереометрии? Или, может быть, речь в них идет о точках и прямых в пространстве, то есть в только что приведенных формулировках во всех скобках вместо слова «плоскость» нужно поставить слово «пространство» (например, I_1: Какова бы ни была прямая *в пространстве*, существуют точки *пространства*... и т. д.)?

Не торопитесь читать дальше. Попробуйте сами ответить на заданные вопросы, откройте учебник и посмотрите, как применяются аксиомы I_1 и I_2 в доказательстве первой теоремы — 14.1.

Посмотрели? Проследим за ходом доказательства теоремы 14.1 вместе. Вот текст учебника.

> Пусть a — данная прямая и B — не лежащая на ней точка.

Здесь пока всего лишь введены обозначения к условию теоремы.

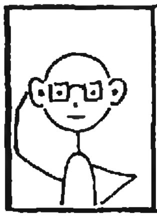
> Отметим на прямой a какую-нибудь точку A. Такая точка существует по аксиоме I_1.

Стоп! Если трактовка аксиомы I_1 планиметрическая, то для ее применения нужно, чтобы прямая a лежала в какой-нибудь плоскости. А такой аксиомы — типа «Для каждой прямой существует проходящая через нее плоскость» — в учебнике, увы, нет. Значит, аксиому планиметрии I_1 в стереометрии следует трактовать как «пространственную». Продолжим «расследование». Следующая фраза из доказательства:

> Проведем через точки A и B прямую b (аксиома I_2).

Снова стоп! Планиметрическое толкование требует для применимости аксиомы I_2, чтобы точки A и B лежали в одной плоскости. Но аксиом, гарантирующих это, у нас нет. Значит, и аксиома I_2 — пространственная, лишь по своей краткой словесной формулировке совпадающая с планиметрической аксиомой I_2 из § 1.

Подведем итог. Аксиомы планиметрии I_1 и I_2 в стереометрии имеют *пространственный смысл* («Думай о смысле!»), а в полную их формулировку нужно включить соответствующие слова («а слова придут сами!»). Вот эти полные формулировки:



I_1: Какова бы ни была прямая в *пространстве*, существуют точки *пространства*, принадлежащие *этой прямой, и точки* пространства, не принадлежащие ей

I_2: Через любые две точки *пространства* можно провести прямую (*в пространстве*), и только одну

Планиметрические же аксиомы (I_1) и (I_2) в стереометрии уже становятся теоремами:

I'_1. *Какова бы ни была прямая в плоскости, существуют точки этой плоскости, принадлежащие прямой, и точки этой плоскости, не принадлежащие ей (прямой);*

I'_2. *Через любые две точки плоскости можно провести прямую, лежащую в этой плоскости, и притом только одну.*

Теорема I'_2, конечно, сразу следует из теоремы 14.2 и пространственной аксиомы I_2. Еще более очевидна справедливость первого утверждения теоремы I'_1 (обдумайте!). А вот со вторым утверждением еще нужно повозиться. Сформулируем его как задачу.

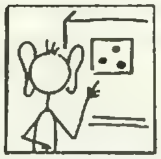
Задача 1. Даны плоскость α и лежащая в ней прямая a. Докажите, что существуют точки, принадлежащие плоскости α, но не принадлежащие прямой a.

2. От аксиом — к теоремам

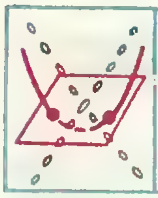
Ты спросишь, кто велит?
— Всесильный бог деталей...
Борис Пастернак

Разобравшись со страницей 175, обратимся к следующим страницам учебника — к доказательствам трех первых теорем стереометрии. Сначала мы предлагаем вам выполнить задание: поставить на схеме (рисунок 1, на котором кружками обозначены аксиомы, квадратиками — теоремы) стрелки, показывающие, какие утверждения используются при доказательстве теорем 14.1, 14.2 и 14.3. Две стрелки, соответствующие использованию в разобранном кусочке доказательства теоремы 14.1 аксиом I_1 и I_2, мы уже обозначили.

Чтобы правильно расставить остальные стрелки, нужно еще раз внимательно просмотреть все детали данных в учебнике доказательств теорем.



А пока вы это делаете, мы разберем доказательство второй теоремы:



14.2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости

(на рисуночке слева изображено невозможное — прямая не может «проткнуть» плоскость в двух точках!). Итак, даны прямая a и плоскость α, имеющие две общие точки. Рассматривается точка $A \notin a$ (аксиома I_1), а затем плоскость α', проходящая через прямую a и точку A (а это... что?).

Существование такой плоскости гарантируется уже доказанной теоремой 14.1 — и, кстати сказать, именно поэтому на первом шаге доказательства берется точка A вне прямой a (по «аксиоме» I_1), а не вне плоскости α (по «аксиоме» C_1). Заметим также, что явной ссылки на теорему 14.1 в учебнике нет — она подразумевается. В соответствии с нашими правилами мы поставим на схеме стрелку от квадратика 14.1 к квадратику 14.2.

В оставшейся части доказательства используются аксиома C_2 (опять неявно — без ссылки) и аксиома I_1, так что всего к квадратику 14.2 на схеме будет проведено четыре стрелки.

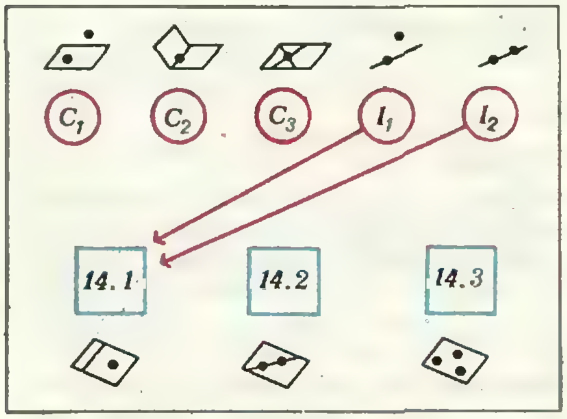
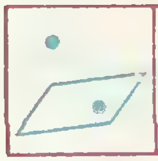


Рис. 1.

А вы уже расставили стрелки? Сверьте свою схему с нашей, данной на с. 18 (см. рис. 4). Выясняется любопытнейшее обстоятельство — от аксиомы C_1:



C_1: Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей

не идет никаких стрелок! Может быть, она совсем и не нужна, раз она не использовалась? Стоп! Подумайте!

Если вы решали все задачи к § 14, то в двух из них вам пришлось использовать эту «странную» аксиому — в каких именно? В действительности аксиома C_1 — самая существенная *именно пространственная* аксиома. Как раз из нее вытекает, что в пространстве есть пересекающиеся плоскости (иначе о чем речь в аксиоме C_2!), существуют не лежащие в одной плоскости точки (см. задачи 1, 5, 10 к § 14), можно рассматривать не лежащие в одной плоскости прямые (см. задачи 2 и 9 к § 14). Сформулируем эти утверждения как задачи:

2. Докажите, что в пространстве существуют две различные пересекающиеся плоскости.

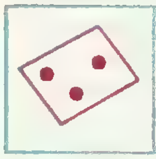
3. Докажите, что в пространстве существуют две прямые, не лежащие в одной плоскости.

4. Докажите, что в пространстве существуют четыре точки, которые не лежат в одной плоскости.

3. Бег по кругу

> *Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавою.*
>
> Козьма Прутков

Еще раз рассмотрим теоремы 14.1—14.3. Обратим внимание: первая из них по формулировке (см. п. 1) похожа на третью —



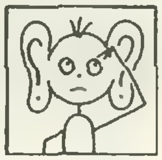
14.3: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну

В той и другой — по два утверждения: о *существовании* плоскости («можно провести плоскость») и о ее *единствен-*

ности («притом только одну»). Существование плоскости в обоих случаях выводится из аксиомы C_3, причем сначала используются аксиомы группы I (I_1 и I_2 в теореме 14.1, только I_2 — в теореме 14.3). А вот доказательства единственности — совсем несхожи. В теореме 14.1 проводится рассуждение от противного, с использованием аксиомы C_2, а в теореме 14.3 единственность обосновывается прямой ссылкой на аксиому C_3 (единственную из аксиом, говорящую о единственности плоскости).

В связи с этим возникает несколько вопросов. Первый вопрос: нельзя ли в теореме 14.1 тоже сослаться на аксиому C_3? Иначе говоря, для данной прямой a и точки $B \notin a$ мы берем точку $A \in a$, рассматриваем прямую $b = AB$ и плоскость $\alpha = (a, b)$, проходящую через две пересекающиеся прямые a и b. По аксиоме C_3 такая плоскость только одна. Доказана ли тем самым единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку B? Ответ: ... — Нет, сначала еще вопрос.

Второй вопрос: нельзя ли доказательство единственности в теореме 14.3 тоже провести рассуждением от противного?



Что же, попробуем. Для не лежащих на одной прямой точек A, B и C мы построили плоскость, их содержащую — это плоскость $\alpha = (AB, AC)$, проходящая через прямые AB и AC (при этом используются аксиомы I_2 и C_3). Допустим, что кроме плоскости α через точки A, B, C можно провести еще одну (отличную от α) плоскость α'. Тогда по аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по некоторой прямой a. Значит, точки A, B, C лежат на одной прямой — на a, а это противоречит условию теоремы (сравните с задачей 3 к § 14). Тем самым единственность плоскости ABC, проходящей через точки A, B, C, доказана.

Таким образом, ответ на второй вопрос — положительный. На первый же вопрос ответ отрицательный. Тут нетрудно запутаться и без нашей помощи, поэтому рассмотрим доказательство теоремы 14.1 поподробнее. Указанная ссылка на аксиому C_3 при доказательстве единственности в действительности нужного доказательства не дает — хотя бы потому, что при построении одной плоскости α, содержащей прямую a и точку B, точка A на прямой a была выбрана произвольно. Другой выбор точки — скажем, A' вместо A, — в принципе мог бы дать другую плоскость α', которая «ни с какой стати» не обязана содержать прямую $b = AB$ (это плоскость $\alpha' = (a, b')$, где $b' = A'B$).

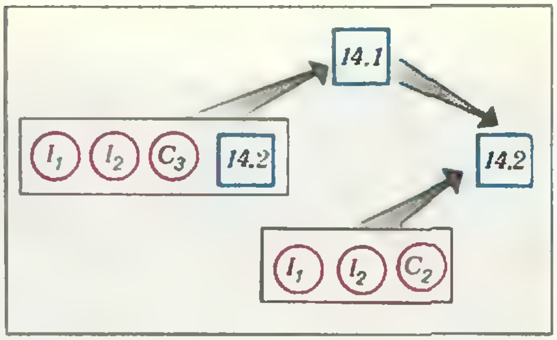


Рис. 2.

Может возникнуть «надежда» повторить при доказательстве теоремы 14.1 в точности то же рассуждение — ссылку на теорему 14.2, — какое применено в доказательстве теоремы 14.3. Именно, если плоскость проходит через прямую a и точку B, то по теореме 14.2 она проходит и через прямую $b = AB$, где A — первоначально взятая на прямой a точка. А по аксиоме C_3 такая плоскость только одна. Доказательство!?

Опять нет. Дело в том, что использованная в приведенном рассуждении теорема 14.2 доказывается с помощью ... как раз теоремы 14.1 (мы это обсуждали в п. 2). Получается, что при доказательстве теоремы 14.1 используется теорема 14.2, а при доказательстве теоремы 14.2 используется теорема 14.1. Если учесть еще и используемые аксиомы, то получится такая «цепочка» следований (рис. 2; см. схему на рисунке 4). Эту цепочку можно замкнуть в «кольцо» (рис. 3). Подобный способ рассуждений, при котором для доказательства какого-то факта «А» используется сам этот факт (возможно, с привлечением какой-то длинной цепочки рассуждений по схеме типа: «А» $\Rightarrow$ «Б» $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ «А», как и выше, замыкаемой в кольцо) — типичная логическая ошибка. В таких случаях говорят, что в доказательстве — «порочный круг».

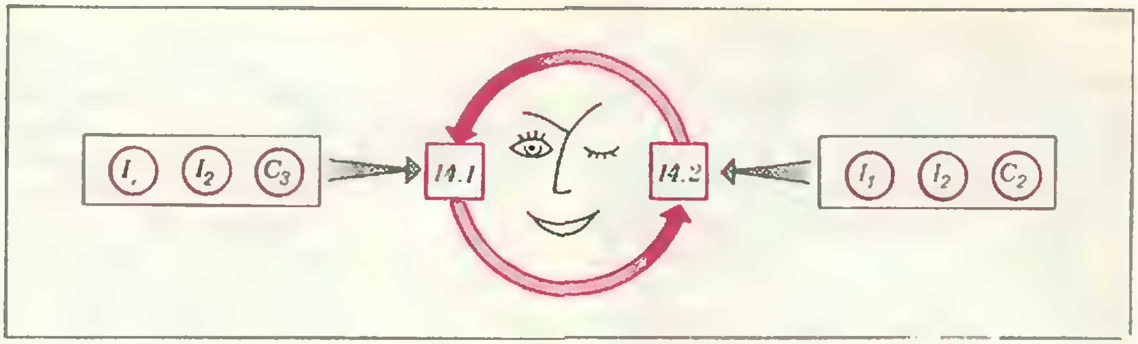


Рис. 3.

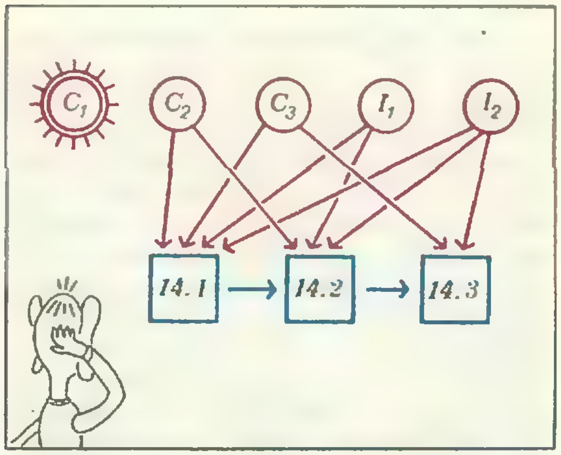


Рис. 4.

Нужно сказать, что ошибка эта — распространенная и коварная; так, в течение многих веков появлялись принадлежащие даже профессиональным математикам «доказательства» аксиомы параллельных (аксиомы V из § 1 учебника А. В. Погорелова, эквивалентной пятому постулату Евклида). Только после тщательного «расследования» в них удавалось обнаружить порочный круг. Но это уже другая тема.

Возможно, у некоторых читателей осталось чувство неудовлетворенности — ощущение, что *«Что-то здесь все-таки есть!»* В самом деле, наш порочный круг можно «разорвать», если разбить теорему 14.1 на две части:

14.1.А. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость,* и

14.1.Б. *притом только одну.*

В доказательстве теоремы 14.2 используется только утверждение **14.1.А**, так что вполне строгие рассуждения можно провести по схеме, изображенной на рисунке 5.

Как видите, без аксиомы C_2 доказать теорему 14.1 в полном объеме все же не удается.

4. Заключение: вопросы и задачи «напоследок»

В завершение нашей экскурсии по § 14 зададим еще три вопроса к тексту учебника.

I. В приведенном в учебнике решении задачи 5 (с. 176) опущен один логически возможный случай — какой? Как быть в этом случае?

II. В условии разобранной в учебнике задачи 7 (с. 177) говорится о прямых, пересекающих две данные прямые *a* и *b*, но не проходящих через их точку пересечения *A*. Существенно ли это последнее требование? Использовано ли оно в решении?

III. В учебниках А. В. Погорелова (1982—1985 гг. издания) в доказательство теоремы 14.1 попало совершенно лишнее математическое слово — какое? Найдите его.

И «напоследок» — еще четыре задачи близкой тематики.

5. Докажите, что через любую прямую в пространстве можно провести: а) хотя бы одну плоскость; б) хотя бы две различные плоскости; в) бесконечно много плоскостей.

(Окончание см. на с. 28)

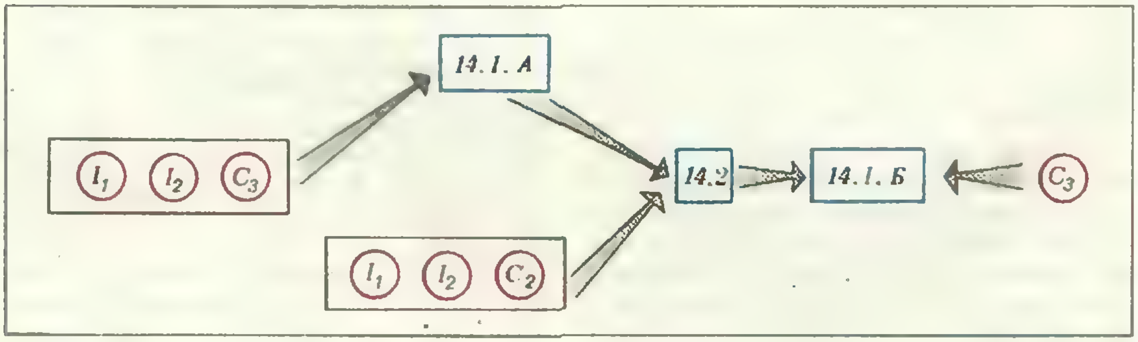


Рис. 5.

Опыты со светящимися веществами

Е. Э. КОЛОМЕЙЦЕВ

Существуют вещества, которые под воздействием света начинают светиться сами, причем, как правило, светом другого цвета (например, при облучении синим светом они испускают желтый или зеленый свет). Явление это называют *фотолюминесценцией* — свечением под действием света (от греческого «фотос» — свет и латинского «люминесценция» — слабое свечение). Основные особенности фотолюминесценции были выявлены благодаря работам известного советского физика С. И. Вавилова и его сотрудников.

Механизм этого явления был выяснен лишь после создания квантовой теории света. Попытаемся очень кратко проиллюстрировать его на примере одной молекулы какого-либо органического люминесцирующего вещества. Такую молекулу можно считать практически самостоятельным «приемником» и «излучателем» света. Сначала она поглощает квант падающего на нее видимого света и переходит в возбужденное состояние. Затем молекула возвращается в исходное состояние, но при этом излучает квант видимого света уже меньшей энергии. Оставшаяся часть поглощенной энергии переходит в энергию теплового движения.

Процесс переизлучения может происходить очень быстро, практически мгновенно. В таких случаях говорят о *флуоресценции*. Стоит прекратить облучение флуоресцирующего вещества светом, и сразу же пропадает его свечение. Так бывает обычно с газообразными и жидкими люминофорами (веществами, способными к люминесценции).

В других случаях вещество может продолжать светиться и после того, как погас возбуждающий источник света (иногда свечение длится до нескольких часов и даже дней). Тогда говорят о *фосфоресценции*. Наибольшее распространение получили кристаллические фосфоресцирующие вещества, называемые кристаллофосфо́рами.

Впрочем, разделение по длительности послесвечения достаточно условное, поскольку четкой временно́й границы не существует.

Надо сказать, что люминесценцию можно вызвать не только светом. Энергию, необходимую для излучения света, молекулы вещества могут позаимствовать, например, у электрического поля (электролюминесценция), при химических превращениях (хемилюминесценция), под воздействием проникающей радиации (например, катодолюминесценция, рентгенолюминесценция и тому подобное).

Автор этой статьи — Евгений Коломейцев — сейчас учится в 9 классе специальной (с преподаванием ряда предметов на немецком языке) школе № 57 г. Москвы. Женя принимает активное участие в работе Школы естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. (*Примеч. ред.*)

Однако мы ограничимся лишь фотолюминесценцией.

Начнем с опытов, в которых исследуются свойства флуоресцирующих жидкостей.

Опыт 1. Нам потребуется источник света и прозрачная кювета. В домашних условиях в качестве источника можно использовать диапроектор, в который вместо диапозитива надо вставить кусочек картона или фольги с вырезанной в центре дырочкой (диаметром 2—3 мм). Это позволит получить слаборасходящийся пучок света. Кюветой может служить флакон из-под одеколона и тому подобное. Если сосуд наполнить чистой водой и посмотреть на него сбоку (как показано на рисунке 1), то луч света в воде практически виден не будет (его видно только на границах вода — стекло). Если же воду заменить керосином, то внутри кюветы мы увидим синевато-белесую полосу. Причина этому — флуоресценция керосина.

Флуоресценцию можно наблюдать и на других растворах: желто-зеленое свечение — для риваноля (продается в аптеке), голубое — для отработанного фотопроявителя. Красивые эффекты переизлучения получаются, если использовать некоторые шампуни (мы испробовали «Яблочный» и «Сосна»), которые содержат флуоресцирующие добавки. Правда, оказалось, что для получения яркой флуоресценции необходимо сильно разбавить шампунь водой. Почему — можно понять, проделав следующий опыт.

Опыт 2. Наполним сосуд раствором шампуня в воде, таким, чтобы яркость флуоресценции была достаточно большой. Затем начнем добавлять понемногу раствор йодистого калия. Яркость свечения будет убывать, пока, наконец, раствор не перестанет флуоресцировать совсем. Явление это носит название тушения люминесценции. Качественно объяснить его можно так. Молекула жидкости, облучаемой светом, находится в возбужденном состоянии в течение ничтожного, по обычным меркам, промежутка времени — порядка 10^{-8}—10^{-9} с. Но и за это малое время она может столкнуться с молекулой тушащего вещества (в нашем случае — йодистого калия) и передать ей часть или всю энергию возбуждения, которая в конечном итоге перейдет в тепло. Таким образом, процесс переизлучения не осуществится.

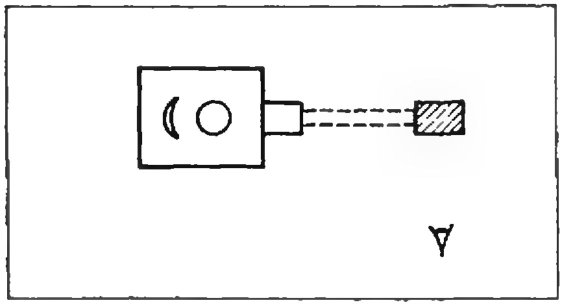


Рис. 1.

Аналогичные события происходят и при большой концентрации флуоресцирующего вещества. Его молекулы интенсивно сталкиваются, и при этом их избыточная энергия (энергия возбуждения) легко переходит в тепло. Именно поэтому растворы с большой концентрацией шампуня слабее излучают свет.

Понятно, что вероятность столкновения между молекулами тем выше, чем выше температура раствора. Значит, повышение температуры тоже оказывает тушащее действие. Это вы можете проверить самостоятельно.

Опыт 3. В предыдущем эксперименте мы тушили флуоресценцию. Теперь попробуем усилить яркость свечения.

Как показывает опыт, в водных растворах довольно сильное тушащее действие оказывают водородные ионы. Попытаемся уменьшить их концентрацию, добавив в раствор шампуня несколько капель раствора щелочи (KOH или NaOH) — яркость флуоресценции заметно увеличится.

Опыт 4. Поставим на пути луча от диапроектора синий светофильтр (рис. 2). Раствор риваноля в кювете продолжает светиться характерным для него цветом. То же происходит и при зеленом светофильтре, а вот красный приводит к исчезновению флуоресценции. Почему?

В 1852 году английский физик и математик Дж. Г. Стокс установил, что при фотолюминесценции длина волны излучаемого света больше длины волны возбуждающего света (правило Стокса). Эту закономерность легко понять, если вспомнить объяснение механизма фотолюминесценции, приведенное в начале статьи.

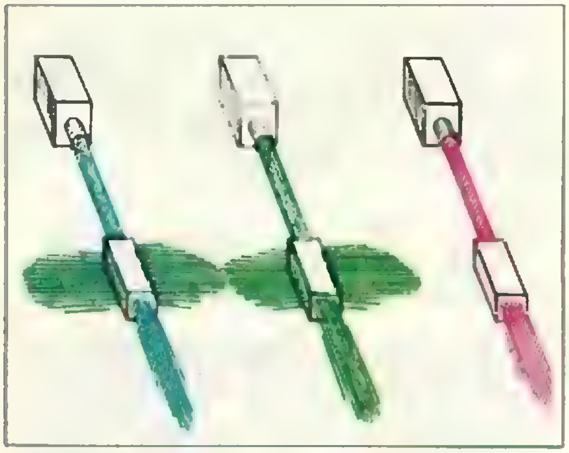


Рис. 2.

Иногда, правда, правило Стокса нарушается, и энергия переизлученного кванта оказывается больше энергии поглощенного кванта. Это означает, что молекула, находясь в возбужденном состоянии, получила дополнительную порцию тепловой энергии, перешла в еще более высокое энергетическое состояние, а затем всю свою избыточную энергию отдала световому кванту.

Вернемся к опыту. Если учесть, что

λ синего света $>$ λ зеленого света $>$ $>$ λ желтого света $>$ λ красного света,

то становится ясным, что в нашем случае закон Стокса выполняется.

* * *

Во всех рассмотренных до сих пор опытах мы наблюдали флуоресценцию жидкостей. Теперь переходим к опытному изучению фосфоресценции кристаллов.

Внешние различия этих разновидностей люминесценции — по длительности послесвечения — обусловлены различиями в протекании самого процесса переизлучения. В первом случае «ячейкой» фотолюминесценции является отдельная молекула. Внутри нее происходят процессы возбуждения и возвращения в невозбужденное состояние, которое и сопровождается излучением света. Во втором же случае в люминесценции участвует не отдельная молекула, а их большое число — практически вся кристаллическая решетка. Объяснение механизма фосфоресценции для этого случая можно найти в литературе, указанной в конце статьи.

К кристаллофосфо́рам относятся некоторые сульфиды (химические соединения металлов с серой), прежде всего — сульфиды металлов II группы периодической системы элементов: CaS, ZnS, SrS, BaS. Наиболее известный из них — сернистый цинк (ZnS), с которым мы и будем экспериментировать.

Для приготовления сульфида цинка необходимо взять 1 весовую часть порошка серы (серного цвета) и 2 весовые части порошка цинка. Смешав эти вещества, их нагревают. (Из-за резкого запаха выделяющихся газов опыт лучше проводить либо на открытом воздухе, либо в вытяжном шкафу школьного химического кабинета.) Получившийся сернистый цинк перемешивают с клеем и наносят на лист картона — фосфоресцирующий экран готов.*)

Сразу же можно приготовить и другой фосфоресцирующий экран, добавив к первоначальной смеси порошков серы и цинка немного медных опилок.

Затем приступим к опытам.

Опыт 5. Осветим лучом от диапроектора экран с сернистым цинком (сами постараемся на свет не смотреть) и выключим источник. В наступившей темноте в течение нескольких десятков секунд экран будет светиться слабым зеленым светом. Проделаем тот же опыт с экраном, активированным медью. Свечение его будет другим по оттенку, ярче и продолжительнее по времени.

Опыт 6. Оказывается, если фосфо́р нагреть, скорость его высвечивания возрастет. Нагреем монету и (после выключения света) приложим ее к обратной стороне экрана. В месте соприкосновения с монетой экран ярко вспыхнет, но зато и быстро погаснет — место монеты в дальнейшем будет отмечено темным пятном на затухающем свете экрана.

Опыт 7. До сих пор мы облучали люминофоры только видимым светом. Интересно, как они поведут себя, если на них подействовать лучами невидимой части спектра, например ультрафиолетовой?

Воспользуемся ультрафиолетовой лампой, продающейся в магазине. В темноте направим пучок ультрафиолетовых лучей на экран из сернистого цинка. Мы увидим, как сернистый цинк ярко вспыхнет.

Способностью люминесцировать в ультрафиолетовых лучах обладают многие вещества, даже те, которые не люминесцируют при обычном освещении.

---

*) Сульфид цинка можно «раздобыть», соскоблив его с елочных игрушек, светящихся в темноте.

Люминесценция нашла свое практическое применение, прежде всего, в лампах дневного света (люминесцентных лампах). В таких лампах, содержащих пары ртути, возбуждается газовый разряд, который сопровождается свечением, содержащим, в основном, ультрафиолетовые лучи. Стенки ламп, покрытые люминофорами специального состава, поглощают ультрафиолетовый свет и превращают его в видимый.

Такие лампы значительно более экономичны, чем лампы накаливания. Кроме того, спектральный состав их света ближе к дневному и поэтому более приятен для глаз.

* * *

Вы познакомились лишь с небольшой частью опытов, которые можно провести с люминесцирующими веществами. Одни из них мы попытались объяснить, другие оставили без объяснения, поскольку оно существенно выходило бы за рамки школьной программы по физике.

В заключение приводим список литературы, которая использовалась при подготовке этой статьи.

1. Н. С. Ахметов. Общая и неорганическая химия.— М.: Высшая школа, 1981.
2. Г. С. Ландсберг. Оптика.— М.: Наука, 1976.
3. С. Э. Фриш и А. В. Тиморева. Курс общей физики, т. III.— М.: Физматгиз, 1961.
4. Элементарный учебник физики/Под редакцией Г. С. Ландсберга, т. III.— М.: Физматгиз, 1958.
5. Журнал «Химия и жизнь»: 1983, № 11 и 1984, № 11.

Конвекция и самоорганизующиеся структуры

(Начало см. на с. 8)

В стакане с чаем, так же как и в рассмотренной нами системе двух цилиндров, вращение в горизонтальной плоскости приводит к вертикальным потокам (рисунок 6). Для выливающейся из раковины воды изменение направления скорости в вертикальной плоскости, возникающее при втекании жидкости в отверстие, приводит к появлению вращения в горизонтальной плоскости (рисунок 7).

Во всех описанных нами примерах мы имели дело с гидродинамической *жидкостной неустойчивостью*. Но упорядоченные структуры возникают и во многих других случаях, когда в системе имеет место достаточно интенсивный поток энергии или вещества.

Условиями возникновения и свойствами таких структур занимается очень молодая и бурно развивающаяся наука — синергетика. Но это — тема для отдельного разговора.

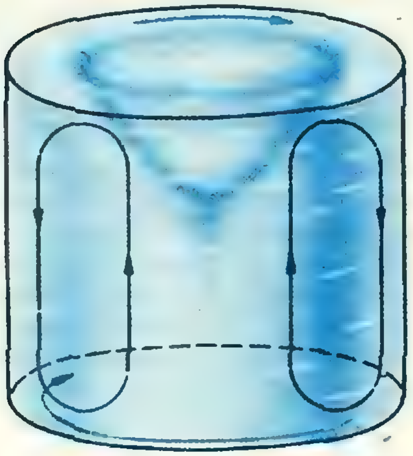


Рис. 6.

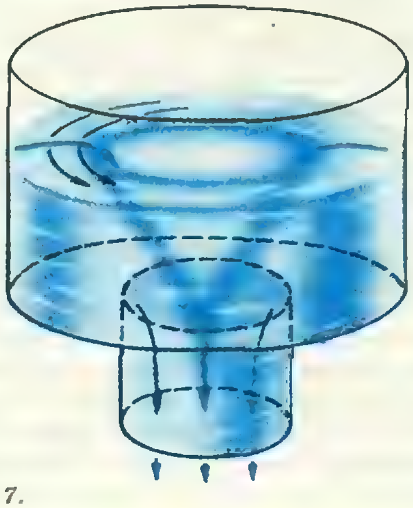


Рис. 7.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Стробоскопический эффект и измерение ускорения» предназначена восьмиклассникам, «Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» — девятиклассникам, «О музыкальных звуках и их источниках» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Стробоскопический эффект и измерение ускорения

Одной из физических величин, с помощью которой описывается механическое движение тел, является ускорение. Оно показывает, как быстро меняется скорость тела при его неравномерном движении.

Существует много способов опытного определения ускорения. Один из них — так называемый стробоскопический *) метод — связан со стробоскопическим эффектом. Идея этого метода описана в школьном учебнике физики («Физика 8», § 12). Расскажем о нем подробнее. Но сначала — немного о самом эффекте.

Различают два типа стробоскопических эффектов. Первый состоит в том, что при наблюдении быстро сменяющих друг друга отдельных фаз движения (каждая из которых фиксируется в состоянии покоя) возникает иллюзия непрерывного движения. Это связано с инерцией зрения, то есть со способностью клеток сетчатки глаза сохранять зрительный образ объекта в течение некоторого промежутка времени (примерно 0,1 секунды) после исчезновения самого зримого объекта. И если время между появлениями отдельных изображений меньше этого промежутка, образы сливаются и движение воспринимается как непрерывное. На этом, в частности, основано восприятие движения в кинематографе и телевидении.

Стробоскопический эффект второго типа заключается в том, что при определенных условиях возникает, наоборот, иллюзия покоя предмета, который на самом деле движется. Представьте себе, например, какое-то вращающееся тело, скажем колесо со спицами, которое освещается импульсной лампой, дающей короткие, повторяющиеся через равные промежутки времени вспышки. Ясно, что наблюдатель будет видеть колесо только в те моменты, когда оно окажется освещенным. Если частота вращения колеса в точности совпадает с частотой повторения вспышек, колесо будет освещено каждый раз в одном и том же положении. При достаточно большой частоте вращения (и вспышек) глаз будет сохранять это зрительное ощущение в течение промежутков времени между вспышками, и колесо будет казаться неподвижным. Приборы, в которых используется этот эффект, называют стробоскопами *). В современных стробоскопах прерывистое освещение осуществляется с помощью импульсных ламп с регулируемой частотой вспышек.

Вернемся к вопросу об измерении ускорений. Если какое-то движущееся тело сфотографировать при стробоскопическом освещении (затвор фотоаппарата должен оставаться открытым во все время движения тела), то на фотоснимке будут видны последовательные положения движущегося тела через равные (и известные) промежутки времени. На этом и основан стробоскопический метод измерения ускорения тел.

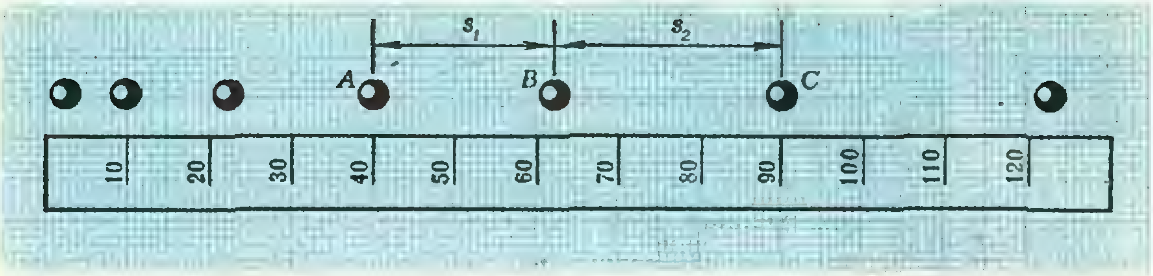
Приведенный на с. 24 рисунок сделан с фотографии тела в процессе его прямолинейного равноускоренного движения. Фотоснимок получен при освещении тела импульсной лампой с определенными промежутками времени между вспышками. Как по такому снимку определить ускорение тела?

Пусть в какой-то момент тело находилось в точке A, а через время t,

---

*) От греческих слов «стробос» — кружение и «скопео» — смотрю.

*) О том, как сделать простейший стробоскоп, можно прочитать в статье С. Л. Гаврилова «Что такое стробоскоп» («Квант», 1983, № 1). (*Примеч. ред.*)



равное промежутку между вспышками, оно переместилось в точку B. Тогда, как известно, перемещение s_1 (по модулю) тела из A в B можно найти по формуле

$$s_1 = v_A\tau + \frac{a\tau^2}{2},$$

где v_A — модуль скорости в точке A, a — модуль искомого ускорения. В течение следующего промежутка времени τ тело перемещается из B в C. Его перемещение s_2 определяется аналогичной формулой, в которой начальная скорость $v_B = v_A + a\tau$:

$$s_2 = v_B\tau + \frac{a\tau^2}{2} = (v_A + a\tau)\tau + \frac{a\tau^2}{2} =$$

$$= v_A\tau + \frac{3a\tau^2}{2}.$$

Найдем теперь разность перемещений $s_2 - s_1$ за два последовательных равных промежутка:

$$s_2 - s_1 = \left(v_A\tau + \frac{3a\tau^2}{2}\right) - \left(v_A\tau + \frac{a\tau^2}{2}\right) = a\tau^2.$$

Отсюда для ускорения a получаем

$$a = \frac{s_2 - s_1}{\tau^2}.$$

Таким образом, имея стробоскопическую картину движения тела, можно найти его ускорение, измерив длины любых двух соседних отрезков, соответствующих перемещениям тела за одинаковые промежутки времени между вспышками. Нужно, разумеется, знать эти промежутки, а также масштаб снимка.

Для нашего случая время между вспышками равно 0,1 с, а каждой единице длины на рисунке соответствует расстояние в 0,01 м. По этим данным вы, конечно же, сможете определить искомое ускорение тела.

Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины

Как известно, тепловые машины отличаются тем, что их коэффициент полезного действия (КПД) огорчительно мал по сравнению с другими машинами. Так, например, КПД паровозов, теперь уже практически не использующихся, не превышал 10 %, а сменившие их тепловозы работают с КПД всего около 25 %. КПД лучших современных тепловых двигателей не превышают 50 %.

Значит, и теперь, через 200 лет после появления первых тепловых машин, половина энергии топлива, сжигаемого в них, расходуется бесполезно? В чем тут дело? Может быть, в том, что ученые и инженеры не сумели придумать и сконструировать «хорошие» тепловые машины, в которых энергия топлива использовалась бы более эффективно?

Оказывается, создатели машин в этом не виноваты. Истинного «виновника» низких значений КПД мы найдем, если более внимательно рассмотрим сущность того, что происходит в тепловых машинах.

Беспорядочное и упорядоченное движения. Тепловые машины строят для того, чтобы в них совершалась механическая работа. Делается это обычно так: какой-нибудь газ получает от нагревателя некоторое количество теплоты и расширяется; при этом расширении сила давления газа и совершает работу, например по перемещению поршня или вращению турбины. Другими словами, в тепловой машине происходит преобразование тепловой энергии, то есть энергии *беспорядочного* молекулярного движения, в механическую — энергию *упорядоченного* движения. Это, пожалуй, самое важное, что можно сказать о всякой тепловой машине: на «входе» у нее энергия беспорядочного движения, а на «выходе» — энергия упорядоченного движения.

Возможно ли, чтобы преобразование тепловой энергии в механическую происходило без потерь, то есть с коэффициентом полезного действия, равным единице? Казалось бы, что возможно. Например, если тепло от нагревателя подводится так, что температура газа, а значит и его внутренняя энергия, остается постоянной. Тогда, как это видно непосредственно из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

при условии, что изменение внутренней энергии ΔU равно нулю, работа газа A в точности равна подведенному количеству теплоты Q.

Однако скажем сразу, что так может быть лишь при однократном расширении газа. А любая тепловая машина всегда работает циклически. Но об этом немного позже.

Газ и... упругая пружина. Поведение газа при его расширении очень напоминает поведение сжатой пружины. В самом деле, сжатая пружина всегда готова распрямиться и увеличить свою длину. Точно так же газ всегда готов расшириться и увеличить свой объем. Сила упругости сжатой пружины при ее распрямлении совершает работу. Работу совершает и сила давления расширяющегося газа.

Но есть и существенное различие между газом и пружиной. Пружина может быть не только сжатой, но и растянутой. Растянутая пружина, как и сжатая, всегда стремится вернуться в состояние равновесия. При этом сила упругости тоже совершает работу. Более того, первоначально сжатая пружина, распрямляясь, обычно не сразу возвращается в недеформированное состояние, а сначала превращается в пружину растянутую, которая, в свою очередь, затем становится сжатой, и т. д. (в течение некоторого времени пружина совершает колебания).

А вот газ вести себя подобно растянутой пружине не может. Как бы газ ни расширился, при соответствующих условиях он всегда сможет расшириться еще больше. Газ как бы всегда сжат. Если, например, некоторый газ находится в цилиндре (рис. 1) под давлением p_1, бóльшим, чем наружное давление p_2, то он будет расширяться, толкая поршень, и это расширение будет продолжаться до тех пор, пока давления слева и справа от поршня не станут равными. Но расширившийся газ не может сам собой сжаться и снова занять тот объем, который он имел до расширения.

Причина такого поведения газа — хаотичный характер движения молекул. Ведь для того чтобы газ самопроизвольно сжался, его молекулы должны «дружно» двинуться в одну сторону, в нашем случае — влево. А этого, как раз, хаотически движущиеся молекулы сделать не могут. Такое «неравноправие» самопроизвольного расширения и сжатия газа — одно из проявлений необратимости молекулярных процессов («Физика 9», § 20).

Почему же низок КПД? Как уже было отмечено, все тепловые машины действуют *циклически*. Это значит, что газ после расширения, при котором сила давления газа совершает работу (в этом и состоит назначение машины), должен быть возвращен в исходное состояние, чтобы снова мог начаться процесс расширения. Если, например, газ, расширяясь, сместил поршень из положения *1* в положение *2*, то теперь его снова нужно вернуть в положение *1*. Для этого расширившийся газ должен быть сжат.

Но, как мы только что видели, сам газ сжаться не может. Значит, это должна сделать внешняя сила, которая совершит определенную работу (сила давления газа совершит такую же работу, но отрицательную). Допустим, что при расширении газа его давление и объем изменяются соответственно кривой *1—2* на рисунке 2. Совершенная силой давления газа работа по расширению выражается площадью под этой кривой («Физика 9», § 16). Ясно, что если сжатие

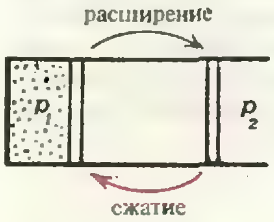


Рис. 1.

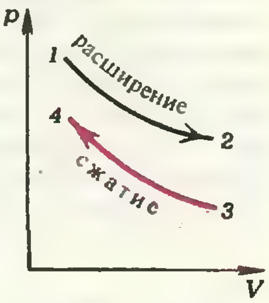


Рис. 2.

газа для возвращения поршня к исходному положению будет проводиться по той же кривой, но в обратном порядке, то и работа будет такой же. Следовательно, работа, совершенная при расширении газа, будет «потрачена» на его сжатие. Такая «машина», конечно, бесполезна.

Для того чтобы тепловая машина все-таки производила полезную работу, нужно, чтобы работа, затрачиваемая на сжатие газа, была меньше работы, полученной при расширении. А для этого сжатие газа надо вести так, чтобы кривая зависимости давления от объема лежала ниже кривой расширения. Например, по линии *3—4* на рисунке 2. Тогда площадь под кривой, а значит и соответствующая ей работа, будет меньше. Разность значений площадей под кривыми *1—2* и *3—4* выразит ту полезную работу, которую можно получить от машины за каждый цикл.

Но если кривая сжатия лежит ниже кривой расширения, то это значит, что газ перед сжатием пришлось охладить. Другими словами, часть количества теплоты, полученного газом от нагревателя, пришлось передать некоторому телу с более низкой, чем у газа, температурой — так называемому холодильнику.

В этом и состоит причина низкого КПД тепловых машин: *все* количество теплоты, полученное газом от нагревателя, нельзя преобразовать в механическую энергию; часть его непременно нужно передать холодильнику. Холодильник для тепловой машины так же необходим, как и нагреватель. Утверждение о том, что невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет тепла, взятого от нагревателя, есть одна из формулировок фундаментального закона природы — второго начала термодинамики.

Итак, вы видите, что истинной причиной низкой эффективности тепловых машин является хаотичный характер молекулярных движений. А эта причина не может быть устранена никакими ухищрениями ученых и инженеров, конструирующих тепловые машины.

О музыкальных звуках и их источниках

Музыкальные звуки, или музыкальные тоны,— это звуки, которые мы слышим тогда, когда их источники совершают гармонические колебания. Амплитуда этих колебаний определяет громкость звука, а частота — его высоту (или высоту тона). Бóльшая амплитуда колебаний соответствует бóльшей громкости, а бóльшая частота — более высокому тону.

Звуки одной и той же высоты можно возбудить множеством разных способов — например, с помощью различных музыкальных инструментов или человеческих голосов. Но интересно, что все эти звуки (даже одинаковые по тону) легко различимы на слух.

В чем здесь дело? Почему звуки, соответствующие колебаниям одной и той же частоты, кажутся нам неодинаковыми? Как нам удается узнать голос знакомого человека среди множества других голосов незнакомых нам людей? Каким образом мы отличаем звучание струны рояля или скрипичной струны, звук аккордеона или флейты? Чтобы это понять, нужно выяснить чтó и как колеблется в источниках музыкальных звуков.

В большинстве музыкальных инструментов колеблющимися элементами являются струны или воздушные столбы. Начнем со струн.

Колебания струны. Что представляют собой колебания струны как целого? Представим себе, что мы возбудили струну так, что по ней побежала поперечная упругая волна. Дойдя до закрепленного конца струны, волна отразится и побежит обратно. Тогда в любой точке струны встречаются две волны, бегущие в противоположных направлениях. Поскольку эти волны когерентны, при их сложении образуется устойчивая интерференционная картина («Физика 10», § 36). В тех точках струны, где колебания, вызываемые обеими волнами, одинаковы по фазе, смещения от положения равновесия будут изменяться с удвоенной амплитудой. Такие точки принято называть пучностями смешения. Точки струны, куда приходят волны, вызывающие колебания с противоположными фазами, остаются в покое. Такие точки называют узлами смещений. Расстояние между ближайшими узлами (или пучностями) равно половине длины волны.

Характерно, что ни узлы, ни пучности вдоль струны не перемещаются во время колебаний. Вот почему установившиеся колебания струны в целом называют *стоячей волной*. Понятно, что стоячая волна может образоваться в струне, закрепленной с двух сторон, только в том случае, если ее длина кратна целому числу полуволн.

Струны в музыкальных инструментах — это проволоки различной длины и толщины, которые могут быть изготовлены из разных материалов. Концы их всегда так или иначе закреплены. Если заставить струну колебаться, то ее колебания будут передаваться окружающему воздуху, в результате чего возникнет звуковая волна. Частота колебаний в звуковой волне такая же, как и частота колебаний струны. От чего и как она зависит?

Опыт показывает (это можно проверить и расчетом), что частота колебаний струны обратно пропорциональна ее длине и диаметру, прямо пропорциональна квадратному корню из силы натяжения струны и обратно пропорциональна корню квадратному из плотности материала струны. Это означает, что длинные, толстые и тяжелые струны колеблются с меньшей частотой, чем короткие, тонкие и легкие.

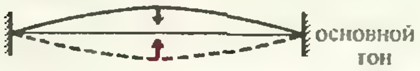


Рис. 1.

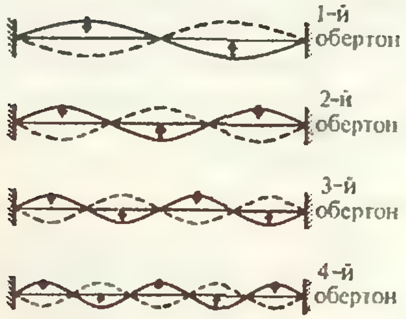


Рис. 2.

Во время игры музыканты не могут, конечно, изменять массу или толщину струн. но в некоторых случаях они могут изменять длину струн, зажимая их в тех или иных местах пальцами. В таких инструментах число струн обычно невелико (у скрипки, например, их всего четыре). В других инструментах длина струн не изменяется, но зато в них достаточно велико число струн различной длины (пианино, арфа).

Тоны и обертоны. Струна, оттянутая строго посередине, будет совершать колебания, показанные на рисунке 1. Через каждые полпериода вся струна оказывается по разные стороны от положения равновесия. При этом на концах струны образуются узлы, а посередине — пучность смещений, так что на длине струны укладывается ровно половина длины волны (не звуковой, а поперечной волны в струне!). Частота таких колебаний и определяет высоту звука, создаваемого струной. Это так называемый *основной тон* струны.

Но это не единственная возможность. Можно возбудить и такие стоячие волны, при которых струна как бы разделяется на две, три и более части (рис. 2), каждая из которых колеблется с частотой, вдвое, втрое и т. д. большей, чем частота, соответствующая основному тону. Такие колебания тоже передаются окружающему воздуху и доходят до слушателя вместе с основным тоном. Называются они *обертонами*. Интенсивность звуков обертонов много меньше интенсивности основного звука, но обертоны как бы окрашивают звук основного тона, придают ему особое качество, называемое тембром. Он-то и позволяет отличить звук одного музыкального инструмента от другого. Зависит тембр от числа возбуждаемых обертонов и от их относительной интенсивности.

Колебания воздушного столба. В духовых музыкальных инструментах (различных трубах) источником звука является колеблющийся столб воздуха, в котором, как и в струне, возникают стоячие волны. Его колебания возбуждаются вдуванием воздуха через узкое отверстие на одном конце трубы. При таком вдувании возникает сжатие воздуха, что и дает начало колебаниям, а затем и волнам (аналогично оттягиванию струны). Прав-

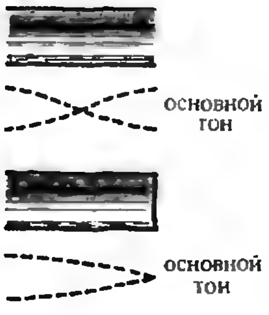


Рис. 3.

да, в отличие от струны, в воздушном столбе возникают не поперечные, а продольные упругие волны.

Труба может быть короткой или длинной, прямой или изогнутой. Другой ее конец может быть открытым или закрытым. Иногда вдуваемый воздух заставляет вибрировать тонкий упругий язычок, который передает колебания воздуху в трубе (кларнет), иногда вибрируют губы исполнителя, вызывая вибрации воздуха в трубе (корнет).

Высота звука здесь, как и в случае струны, зависит от линейных размеров. В открытой трубе основной тон возникает, когда на длине трубы укладывается 1/2 длины волны, а в закрытой — 1/4 длины волны (рис. 3). Высота тона зависит также от того, насколько сильно вдувается воздух, подобно тому как в струне она зависит от силы натяжения струны.

Наряду с основным тоном, в трубе возникают и обертоны с частотами, кратными основной частоте. При этом в открытой трубе возможны только такие обертоны, частоты которых представляют собой четные кратные частоте основного тона, а в закрытых трубах — нечетные кратные. Эти особенности связаны с тем, что на открытых концах трубы (а один из них всегда открытый) возможны только пучности смещений стоячей волны.

Музыкант может изменять действующую длину трубы, закрывая и открывая отверстия, сделанные вдоль трубы, с помощью клапанов или просто зажимая их пальцами (флейта, кларнет, дудка). В тромбоне, например, длина трубы, а вместе с тем и высота звука, изменяется с помощью скользящей U-образной приставки. В орга́не же длины труб неизменны, но зато число труб с самыми разными длинами чрезвычайно велико — до нескольких тысяч.

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

(Начало см. на с. 14)

6. Докажите, что для любой прямой в пространстве можно построить пересекающую ее (в одной точке) плоскость.

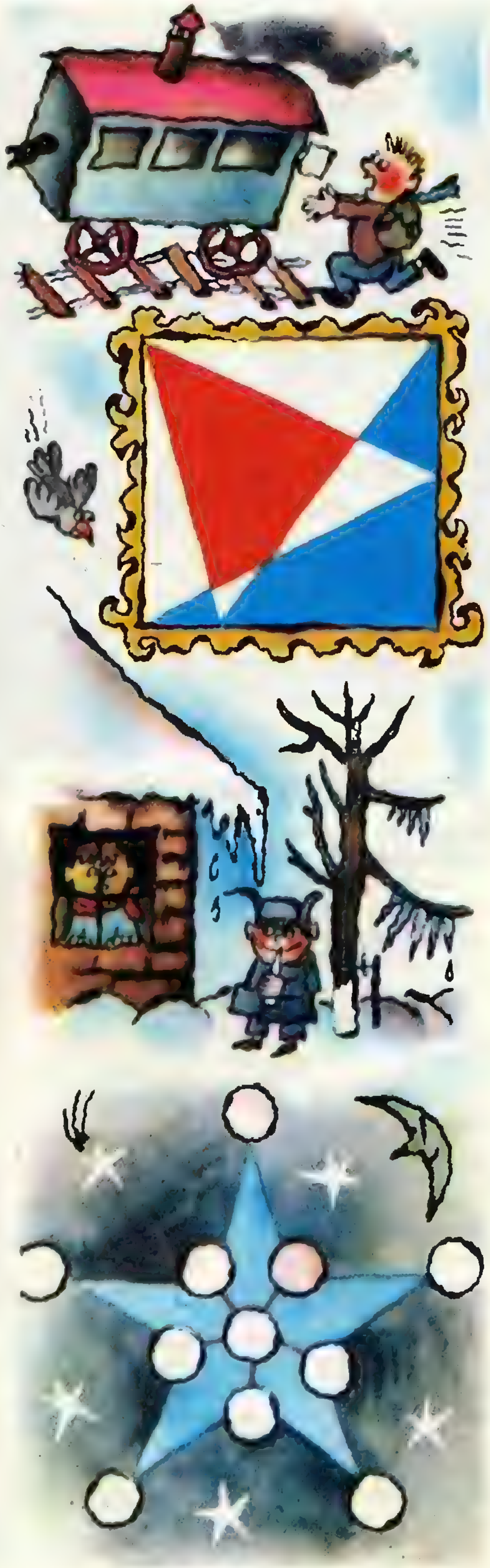
7. Докажите, что для любой плоскости в пространстве можно построить пересекающую ее (в одной точке) прямую.

8. Докажите, что для любой прямой в пространстве можно построить не лежащую с ней в одной плоскости прямую.

Сформулированные в статье задачи 1—8 составляют своеобразный «практикум по применению аксиом». Их решение, как решение многих задач из начальных, «вводных», разделов самых разнообразных аксиоматических теорий, можно рассматривать как определенную «игру по правилам». Цель «игры» — все доказать, «правила» состоят в том, что можно использовать только принятые аксиомы (и, конечно, уже выведенные из них факты). Надо сказать, что наши задачи, отчасти сознательно, «перепутаны» так, что относительно трудная задача может предшествовать более легкой и как раз помогающей решать предшествующие. Так что вам есть с чем «повозиться».

Последнее замечание. Не исключено, что в разумной степени педантичный склад ума заставит вас задуматься над весьма примечательным вопросом: а почему вообще существуют прямые (а вслед за ними — и плоскости)??? В аксиомах об этом говорится, но ... все встанет на свои места только после добавления еще одной аксиомы — назовем ее «нулевой»:

✳ ✳	0: *На плоскости* (в планиметрии) *или в пространстве* (в стереометрии) *существуют хотя бы две различные точки.*



Задачи

1. Петя гостил у бабушки. В субботу он сел в поезд и приехал домой в понедельник. Петя заметил, что в этот понедельник число совпало с номером вагона, в котором он ехал, что номер его места в вагоне был меньше номера вагона и что в ту субботу, когда он садился в поезд, число дня было больше номера вагона. В каком вагоне и на каком месте он ехал?

2. Какая часть площади квадрата больше (см. рисунок): закрашенная красным цветом или закрашенная синим цветом?

3. Сосульки на крышах домов, как правило, висят вертикально, а на ветках деревьев часто образуют такие «веера», как на рисунке. Почему?

4. Расположите в кружках звезды первые 11 натуральных чисел так, чтобы сумма четырех чисел в вершинах каждого из пяти секторов равнялась 25.

5. Докажите, что из 18 последовательных трехзначных чисел хотя бы одно делится на сумму своих цифр.

Эти задачи нам предложили
С. В. Дворянинов, В. В. Произволов,
Д. А. Ракчеев, Н. И. Авилов, С. Л. Елисеев.

Криптограмма Жюля Верна

Г. А. ГУРЕВИЧ

> *Это понимали все. Если документ не удастся расшифровать, положение осужденного безнадежно.*
> Жюль Верн. Жангада*)

Тайна. Зашифрованный документ. Разгадка шифра, открывающая дорогу к богатству или спасающая человеческую жизнь. Это ли не благодатный сюжет приключенческой повести или романа! Классические образцы этого жанра — рассказы «Золотой жук» Эдгара По и «Пляшущие человечки» Артура Конан Дойла.

Таинственные документы, содержание которых выясняется лишь в конце произведения, — излюбленный прием и Жюля Верна. Достаточно вспомнить его роман «Дети капитана Гранта», «Путешествие к центру Земли». Пожалуй, менее известен роман Жюля Верна «Жангада» (Восемьсот лье по Амазонке)*. В «Жангаде» множество любопытных географических, исторических и этнографических фактов, прекрасны описания животного и растительного мира Амазонки. Однако наиболее увлекательны те главы, которые посвящены расшифровке документа, содержащего исповедь одного из участников преступления, совершенного на алмазных рудниках за двадцать три года до описываемых в романе событий.

Роковое стечение обстоятельств приводит на скамью подсудимых Жоама Дакосту. Большой срок прошел с момента совершения преступления, и Жоам не в силах отвести выдвинутое против него обвинение. Только расшифровка документа может спасти ему жизнь. Такова фабула. А вот текст, который должен быть расшифрован:

С Г У Ч П В Э Л Л З И Р Т Е П Н Л И Ф Г И Н Б О Р Г
И У Г Л Ч Д К О Т Х Ж Г У У М З Д Х Р Ъ С Г С Ю Д Т
П Ъ А Р В И Г Г И Щ В Ч Э Е Ц С Т У Ж В С Е В Х А Х
Я Ф Б Ь Б Е Т Ф З С Э Ф Т Х Ж З Б З Ъ Г Ф Б Щ И Х Х
Р И П Ж Т З В Т Ж Ю Т Г О И Б И Т Ф Ф Е О И Х Т Т Е
Г И И О К З П Т Ф Л Е У Г С Ф И П Т Ь М О Ф О К С Х
М Г Б Т Ж Ф Ы Г У Ч О Ю Н Ф Н Ш З Г Э Л Я Ш Р У Д
Е И К О Я Г Г Н С Б К С С Е У П П Ф Ц Е Е Е Г Г С Ж Н
О Е Ы И О Н Р С И Т К Ц Ь Е Д Б У Б Т Е Т Л О Т Б Ф Ц
С Б Ю Й П М П З Т Ж И Т У Ф К Д Г.

---

*) Библиотека приключений.— М.: Детская литература, 1967, т. 9.

За разгадку рьяно берется судья Жаррикес. «Будем действовать по системе, — объявляет он, — без системы нет логики, а без логики нет успеха». А в успехе судья не сомневался. Он решил воспользоваться методом, блестяще описанным Эдгаром По и основанном на сопоставлении частоты использования различных знаков шифра и букв в обычном тексте:

«... расставив по порядку буквы нашего языка от наиболее к наименее употребительным, я составил азбуку и подставил новые буквы в документ, по принципу нашего бессмертного аналитика Эдгара По, а затем попробовал его прочесть... И представьте, у меня ничего не вышло».

Скрупулезный анализ текста приводит судью к уверенности, что ключом к шифру является число. Он подробно объясняет сыну обвиняемого Маноэлю, как был зашифрован документ:

«Давайте возьмем фразу, все равно какую, ну хотя бы вот эту: «У судьи Жаррикеса проницательный ум». А теперь я возьму наудачу какое-нибудь число, чтобы сделать из этой фразы криптограмму. Предположим, что число состоит из трех цифр, например, 4, 2 и 3. Я подписываю число 423 под строчкой так, чтобы под каждой буквой стояла цифра, и повторяю число, пока не дойду до конца фразы. Вот что получится:

У СУДЬИ ЖАРРИКЕСА ПРОНИЦАТЕЛЬНЫЙ УМ
4 23423 423423423 42342342342342 34

Будем заменять каждую букву нашей фразы той буквой, которая стоит после нее в алфавитном порядке на месте, указанном цифрой. Например, если под буквой *А* стоит цифра 3, вы отсчитываете три буквы и заменяете ее буквой *Г*.

Если буква находится в конце алфавита и к ней нельзя прибавить нужного числа букв, тогда отсчитывают недостающие буквы с начала азбуки.

Доведем до конца начатую криптограмму, построенную на числе 423 — взятом произвольно, не забудьте! — и фраза, которую вы знаете, заменится следующей:

ЧУЦИЮЛКВУФКНЯУЧУТСЕКЩЦФИ ПЮРЯЛЦР».

После того как судья приходит к выводу, что криптограмма основана на числе, его уверенность в возможности расшифровки документа сменяется полным пессимизмом. Подсчет, проведенный Жаррикесом, показывает, что поиск ключа перебором всевозможных комбинаций, состоящих не более чем из 10 цифр, потребует более трех веков! Одна попытка сменяется другой, и, наконец, судья из аналитика превращается в игрока, пытающегося наудачу отгадать заветное число.

Наступает день казни. Жоама Дакосту ведут на виселицу...

Все оканчивается благополучно. Выручает счастливый случай. Другу Жоама удается узнать, что автора криптограммы звали Ортега. Поставив буквы *О, Р, Т, Е, Г, А* над последними шестью буквами документа и подсчитав, на сколько эти буквы по алфавиту сдвинуты относительно букв криптограммы, судья, наконец, находит ключ к документу:

О Р Т Е Г А
4 3 2 5 1 3
Т У Ф К Д Г

Жюль Верн — великий писатель, и ни у кого из читателей нет сомнения, что без счастливой случайности отгадать число 432513 — невозможно!*)

Ну, а теперь сообщим читателю, что Жаррикес мог расшифровать криптограмму, и не дожидаясь счастливой случайности. Самое удивительное то, что судья прошел практически весь путь до отгадки. Как говорится, ключ лежал у него в кармане.

Вернемся к тексту романа. Вот рассуждения Жаррикеса, ведущие к решению задачи: «Я уверен, что в документе упоминается Жоам Дакоста. Если бы строчки были разделены на слова, то мы могли бы выделить слова, состоящие из семи букв,

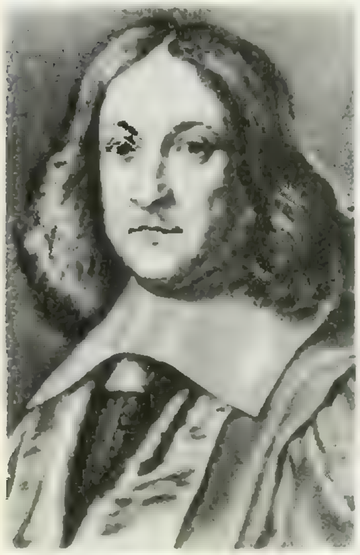
(Окончание см. на с. 34)

---

*) В послесловии к роману приводится следующий интересный факт: «Писатель ...получил письмо от своего приятеля, профессора Мориса д'Оканя, узнавшего, что одному студенту Политехнической школы удалось прочесть криптограмму, на которой держится весь замысел «Жангады». Роман еще печатался в журнале, и потому было не поздно исправить досадную оплошность. Жюль Верн спешно подготовил для отдельного издания более сложную перестановку букв, гарантирующую от преждевременности прочтения документа... Пожалуй, ни в каком другом произведении Жюля Верна шифрованный документ не составлен столь замысловато».

«Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что древние не все знали, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня».

П. Ферма



Великий французский математик Пьер Ферма (1601—1655) был юристом, а математике он уделял свое свободное время, занимаясь теорией чисел, геометрией, алгеброй и теорией вероятностей.

Свои открытия Ферма не публиковал. О них мы знаем по его письмам другим математикам того времени: Б. Паскалю, Р. Декарту, Б. Кавальери, а также по записям на полях книг.

Более подробно о П. Ферма и его работах можно прочитать в «Кванте»: 1976, № 8, с. 2; 1978, № 8, с. 18; 1979, № 12, с. 31; 1984, № 3, с. 18.

Натуральный ряд

Легенда повествует, что натуральный ряд — последовательность целых положительных чисел: 1, 2, 3, ... — был подарен людям Прометеем. Но на самом деле изобретение натурального ряда было одним из первых и величайших достижений человеческой мысли, родившихся из практики. История возникновения натурального ряда началась задолго до изобретения письменности. Потребовалось множество веков, чтобы понять, что в этом ряду нет наибольшего числа. Долгое время думали, что счет возможен только в определенных пределах, за которыми начинается «тьма». Вавилоняне верили, например, что существует некое фантастическое число «левиафан», за которым простирается то, что не может быть сосчитано. Только в III веке до нашей эры древнегреческий математик Архимед в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок») показал, что сколь угодно большое количество песчинок все равно может быть сосчитано, так как натуральный ряд может быть неограниченно продолжен, и каждое следующее число может быть определенным образом записано и названо. Таким образом пришли к пониманию того, что натуральных чисел бесконечно много. Именно этот факт и подразумевают математики, когда говорят, что множество натуральных чисел бесконечно.

Ну, а что можно сказать относительно простых чисел — конечно или бесконечно их множество? В «Началах» Евклида (III век до н. э.) показано, что не существует наиболь-

Полезные формулы

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2$$

От Олимпа до Парнаса

От Олимпа до Парнаса,
К добрым музам от богов,
Оседлав коня Пегаса,
Я домчал за пять часов.

Сбавив скорость верст на десять,
С грустью я за семь часов
На Олимп вернулся, месяц
Осветил мне Зевса кров.

«Кванта» друг и почитатель,
Дав фантазии простор,
Может быть, ты посчитал бы,
Сколько верст меж этих гор?

Р. К. Аракелов

шего простого числа, откуда следует бесконечность множества простых чисел и, разумеется, множества натуральных чисел. Вот остроумное доказательство этого факта. Пусть p — простое число. Перемножим все простые числа до p, включая само p, и к этому произведению прибавим единицу. Получим число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Это число, большее p, будет или простым, или составным. Если оно простое, то тем самым доказано, что существует простое число, большее p. Если же оно составное, то оно должно делиться на некоторое простое число; но ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p оно не делится — при делении на эти числа в остатке получается 1. Значит, оно должно делиться на простое число, большее, чем p. Итак, и в этом случае мы должны признать, что существует простое число, большее p. Но это и означает, что не существует наибольшего простого числа.

Сам термин «натуральное число» впервые был употреблен римским философом Боэцием (ок. 480—524), но стал общеупотребительным после того, как был включен французским математиком Д'Аламбером (1717—1783) в «Энциклопедию».

В XIX веке математики потратили много усилий для уточнения и формализации основных понятий. В 1880 году немецкий математик Дедекинд предложил аксиоматическое определение натурального ряда. Позднее систему аксиом предложил итальянский математик Пеано, в честь которого этот набор аксиом натурального ряда сейчас называется «аксиоматикой Пеано».

В. В. Мадер

Полезные формулы

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

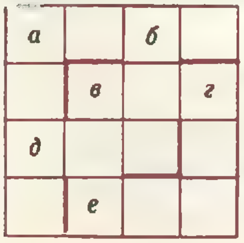
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Числовые головоломки

Кроссамбер

По горизонтали: *а*) Число, цифры которого являются последовательными и расположены в порядке возрастания; *в*) число, кратное 9; *д*) полный квадрат; *е*) число, кратное 36.

По вертикали: *а*) Число, цифры которого являются последовательными и расположены в порядке убывания; *б*) квадрат простого числа; *в*) полный куб; *г*) степень числа 2.



а		*б*	
	в		*г*
д			
	е		

Н. К. Антонович

Одинаковые цифры при умножении

Может ли при перемножении двух двузначных чисел получиться четырехзначное число, все цифры которого одинаковы?

Ф. К. Кадыров

Одинаковые цифры при сложении

Можно ли подобрать такое натуральное число A, а затем так переставить в нем цифры, чтобы *при сложении полученного числа с числом A* суммой оказалось число, записываемое 1985 девятками: 99...999?

М. Байрамов,
десятиклассник из Баку

Арифметические ребусы

$$\begin{array}{r} \text{ЛЮБА} \\ +\,\text{ЛЮБИТ} \\ \hline \text{АРБУЗЫ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{СПОРТ} \\ +\ \text{ПОРТ} \\ \text{ОРТ} \\ \hline \text{РРРРР} \end{array}$$

Н. К. Антонович

(Начало см. на с. 30)

как и фамилия Дакоста, и, пробуя их одно за другим, может быть и отыскали бы число, являющееся ключом криптограммы».

Не ясно, почему отсутствие разделения текста на отдельные слова кажется судье непреодолимым препятствием. На самом деле оно только увеличивает объем необходимого перебора. Маноэль возражает судье: «Ну, что ж! Если имя Дакосты упоминается, тогда, принимая одну за другой каждую букву этих строк за первую из тех семи, что составляют его имя, мы в конце концов найдем его».

Вот он — прямой путь к решению задачи! Перебор не так уж велик. Текст состоит из 252 букв. Следовательно, необходимо перебрать максимум 246 вариантов. В один прекрасный момент, записав над фрагментом *ЙБНТФФЕ* слово *ДАКОСТА*, мы определили бы последовательность цифр 5134325. Естественно предположить, что последняя цифра 5 — начало следующего периода:

							Д	*А*	*К*	*О*	*С*	*Т*	*А*				
...	5	1	3	4	3	2	5	1	3	4	3	2	5	1	3	4	...
			...	*Т*	*Г*	*О*	*Й*	*Б*	*Н*	*Т*	*Ф*	*Ф*	*Е*	*О*	*И*	*Х*	...

Вместо ключа 432513 мы нашли его циклическую перестановку 513432, что ни в коей мере не мешает расшифровке текста.

И, наконец, обсудим следующий вопрос. Мы имели представление о содержании документа и поэтому смогли угадать слово, в него входящее. По этому слову и была проведена расшифровка. А как быть, когда содержание документа неизвестно?

Есть несколько путей. Можно, как и раньше, пытаться отгадать какое-нибудь слово (либо часть слова), входящее в документ. (В текстах часто встречаются слова «который», «тогда», «если», «что» и т. д.; приставки «при», «пре», «под».) Такой поиск может значительно увеличить объем перебора, однако шансов на успех достаточно много. По-видимому, более рациональным путем является проведение анализа частоты использования различных букв в криптограмме. Но как же так?! Ведь Жаррикес прямо говорит, что если ключом к шифру служит число, такой путь неприемлем: «Что же из этого следует? Что значение каждой буквы определяется случайно поставленной под ней цифрой, и буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста.»

Рассмотрим следующее устройство для кодирования (рис. 1). Предположим для простоты, что ключом шифра служит трехзначное число. На четырех концентрических кругах, меньший из которых неподвижен, а остальные могут вращаться относительно своего центра, выпишем буквы алфавита. Пусть в качестве ключа выбрано число 259. Повернем первый круг против часовой стрелки на две буквы, второй — на пять букв, а третий — на девять букв (рис. 2). Кодирование производится следующим образом. Первую букву текста находим на неподвижном круге и вместо нее записываем соответствующую ей букву первого круга, вместо второй буквы текста — соответствующую ей букву второго круга и т. д., вместо $3k+i$

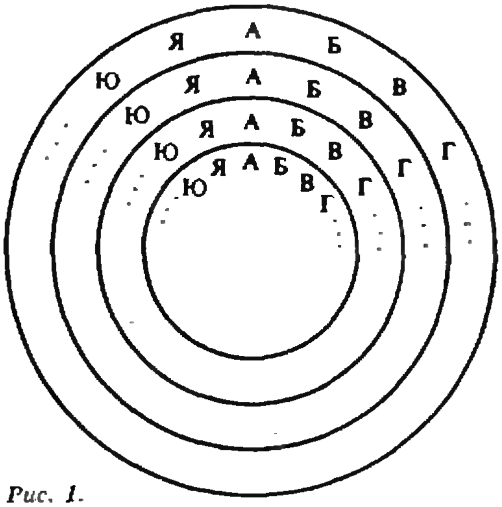


Рис. 1.

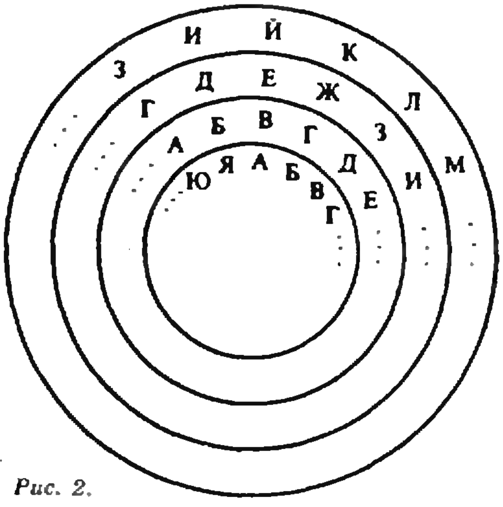


Рис. 2.

Таблица 1

№ набора	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*	*Х*	*Ц*	*Ч*	*Ш*	*Щ*	*Ъ*	*Ы*	*Ь*	*Э*	*Ю*	*Я*
1	1	0	0	2	3	0	1	0	3	0	0	0	2	1	1	0	1	4	8	0	4	2	2	1	0	0	1	2	0	2	0	1
2	0	1	0	9	1	3	0	1	2	0	0	4	0	0	1	1	1	4	2	1	5	3	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
3	0	3	4	0	1	3	2	2	1	1	3	2	1	2	4	2	2	0	2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	2	0	0	0	3	0	3	1	2	3	0	0	4	1	0	0	2	6	5	0	1	1	3	2	0	1	0	1	0	1	0
5	1	6	0	4	1	1	4	1	0	2	0	1	1	0	4	5	2	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	0	0
6	0	0	2	5	0	5	1	2	3	1	1	2	1	3	1	2	1	2	1	1	3	3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

($i=1, 2, 3;\ k=0, 1, 2, \ldots$) буквы текста — соответствующую ей букву i-го круга.

Из самого процесса кодирования следует, что если разница между номерами мест, на которых стоят любые две буквы текста, кратна 3, то при их кодировании используется одна и та же цифра. Поэтому утверждение Жаррикеса о том, что буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста — ошибочно.

Теперь перейдем к расшифровке. Предположим, мы знаем, что ключ — трехзначное число. Становится ясно, что для нахождения первой цифры этого числа надо провести анализ набора, состоящего из первой, четвертой, ..., $3k+1$-й, ... букв текста; для определения второй цифры — набора, состоящего из второй, пятой, ..., $3k+2$-й, ... букв; для определения третьей цифры — набора, состоящего из третьей, шестой, ..., $3(k+1)$-й, ... букв.

Остается выяснить вопрос: как быть, когда неизвестно, из какого количества цифр состоит ключ? Здесь уже не обойтись без перебора. Сначала предполагаем, что ключ — двузначное число, затем — трехзначное и т. д., — до тех пор, пока текст не будет расшифрован.

Пропуская промежуточные варианты, сразу рассмотрим последовательность расшифровки нашей криптограммы для случая, когда ключ — шестизначное число.

Весь текст криптограммы разбиваем на шесть наборов букв по правилу, описанному выше*). и подсчитываем, сколько раз буквы алфавита входят в каждый из наборов. Результаты подсчетов приведены в таблице 1.

В каждом наборе — всего по 42 буквы: этого, конечно, маловато для того, чтобы сделать достоверные выводы о частоте использования каждой из букв криптограммы. Наша задача упрощается тем обстоятельством, что для каждого набора достаточно отгадать цифру, на которую осуществлялся сдвиг букв алфавита при кодировании.

Возьмем четыре наиболее употребительные буквы: *А*, *Е*, *И*, *О* — и подсчитаем общее число их вхождений в первоначальный текст при различных величинах сдвига от 0 до 9. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ набора	Величина сдвига									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	1	1	9	13	1	6	4	7	6
2	6	2	2	19	3	4	9	5	4	5
3	8	8	11	3	5	12	11	5	5	5
4	5	4	6	3	8	15	1	4	6	8
5	6	17	3	7	6	1	9	7	2	8
6	9	4	6	12	3	10	7	8	7	4

Поскольку мы выбрали наиболее часто встречающиеся буквы, естественно предположить, что первая цифра ключа — 4, вторая — 3, четвертая — 5, пятая — 1, шестая — 3. Что касается третьей цифры, то ее следует выбирать из цифр 2, 5, 6. Окончательная расшифровка криптограммы теперь уже не представляет никакой трудности.

---

*) В первый набор входят 1-я, 7-я, ..., $6k+1$-я,... буквы; во второй набор — 2-я, 8-я, ..., $6k+2$-я,... буквы; ...; в шестой набор — 6-я, 12-я, ..., $6(k+1)$-я,... буквы, где $k=0, 1, \ldots, 41$.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1986 год. Индекс журнала в каталоге Союзпечати 70465. Подписная цена на год 4 рубля 80 копеек. Подписка принимается без ограничений всеми почтовыми отделениями в течение всего года.

задачник кванта

Вскоре Задачник «Кванта» по физике, а затем и по математике закончит публикацию первой тысячи задач. Мы хотели бы опубликовать под номерами Ф1000 и М1000 особенно оригинальные, красивые задачи и объявляем конкурс на лучшую новую задачу; срок конкурса по физике — до 1 января 1986 года, по математике — до 1 марта 1986 года. Кроме обычного адреса, после слов «новая задача» укажите: «на конкурс Ф1000 (или М1000)».

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М941, М942» или «Ф953». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи этого номера предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников.

Задачи

М941—М945; Ф953—Ф957

М941. Дан правильный $(4k+2)$-угольник $A_0A_1 \ldots A_{4k+1}$ с центром O. Докажите, что сумма отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1} (см. рисунок 1 для $k=2$), равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$-угольника, если а) $k=2$, б) k — любое натуральное число.

И. Ф. Шарыгин

М942. Числа 1, 2, ..., $2n-1$, $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — числа первой группы в порядке возрастания, $b_1>b_2>\ldots>b_n$ — числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2.$$

В. В. Произволов

М943. Последовательность a_1, a_2, ... задается правилами: $a_{2n}=a_n$ при $n\geqslant 1$ и $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ при $n\geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

Ю. В. Нестеренко

М944*. Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как на рисунке 2. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.

А. А. Берзиньш

М945*. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел a_1, a_2, ... Докажите, что для всех достаточно больших k справедливо неравенство

а) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

б) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

Л. Д. Курляндчик

Ф953. Для точной подстройки частоты вращения диска электропроигрывателя ($33\frac{1}{3}$ оборота в минуту) на его боковую поверхность наносят метки, которые освещают неоновой лампочкой с частотой 100 вспышек в секунду.

Каким должно быть число меток, чтобы при номинальной скорости они казались неподвижными? После отключения двигателя силы сухого трения начинают тормозить диск, и метки «побегут». За первые 4 с мимо точки наблюдения «пробегают» 10 меток. Через какое время диск остановится? Через какой промежуток времени метки «побегут» в другую сторону?

А. Р. Зильберман

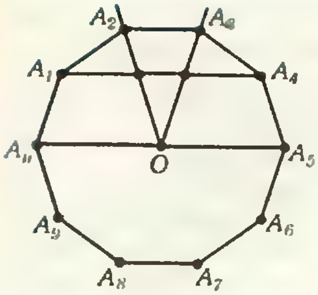


Рис. 1.

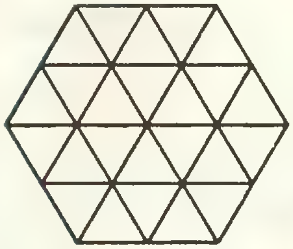


Рис. 2.

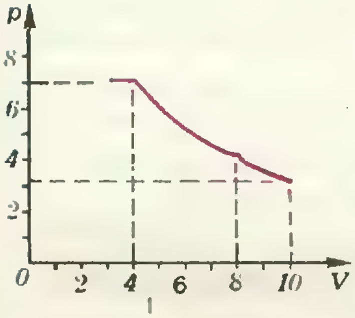


Рис. 3.

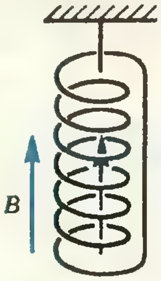


Рис. 4.

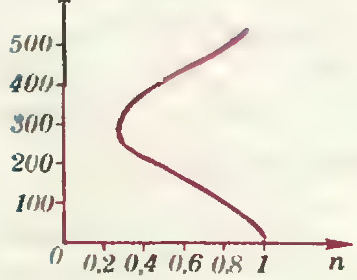


Рис. 5.

Ф954. Декоративная квадратная штора размером 1,5×1,5 м висит на карнизе вдоль вертикальной стены. Нижний край шторы поднимают вровень с верхним, так что штора оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Найдите зависимость силы, действующей на карниз, от времени. Штора тонкая, гладкая и имеет массу 3 кг.

С. С. Кротов

Ф955. Смесь газов, состоящую из $m_1=100$ г азота и неизвестного количества кислорода, подвергают изотермическому сжатию при температуре $T=74{,}4$ К. График зависимости давления смеси газов от ее объема приведен на рисунке 3 (в условных единицах). *Определите массу кислорода.* Рассчитайте давление насыщенных паров кислорода при этой температуре.

Примечание. $T=74{,}4$ К — это температура кипения жидкого азота при нормальном давлении; кислород кипит при более высокой температуре.

А. И. Буздин

Ф956. В одном из вариантов классического опыта, поставленного академиком И. К. Кикоиным, однослойная короткозамкнутая катушка индуктивности $L=3\cdot10^{-5}$ Гн из тонкой сверхпроводящей проволоки подвешивалась на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вверх вдоль оси катушки (рисунок 4). Нить подвеса в исходном состоянии не закручена, сила тока в катушке равна нулю. Индукция B магнитного поля медленно увеличивалась от нулевого значения до значения $B_0=0{,}1$ Тл, при котором сверхпроводимость скачком исчезала и проволока переходила в нормальное состояние. Катушка при этом закручивалась. Определите максимальный угол закручивания катушки, считая, что упругий момент нити пропорционален углу закручивания (коэффициент пропорциональности $G=10^{-7}$ Н · м/рад). Число витков катушки $n=100$, радиус витков $R=1$ см, масса катушки $M=10$ г. Отношение заряда электрона к его массе равно $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

С. М. Козел

Ф957. Распространение коротких радиоволн в верхних слоях атмосферы Земли (ионосфере) можно описывать законами геометрической оптики, если принять, что показатель преломления n для радиоволн меньше единицы и изменяется с высотой H от поверхности Земли так, как показано на рисунке 5 (для некоторой частоты ν).

На спутнике, летящем на высоте $h=200$ км, установлен радиопередатчик, излучающий радиоволны частоты ν равномерно по всем направлениям. Пренебрегая поглощением радиоволн в ионосфере, оцените долю излучаемой передатчиком мощности, которая уносится радиоволнами за пределы земной атмосферы. При оценках поверхность Земли считать плоской, а отражение радиоволн от нее зеркальным и без потерь. Примечание. Телесный угол конуса с углом при вершине β равен $\Omega=2\pi\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right)$.

В. И. Чивилёв

Problems

M941 — M945; P953 — P957

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems from this issue were proposed at the final round of the All-Union School Olympiad.

M941. The regular $(4k+2)$ vertex polygon $A_0A_1...A_{4k+2}$ of centre O in given. Prove that the sum of the segments of the lines A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1} inside the angle A_kOA_{k+1} (see Рис. 1 on p. 37 for $k=2$) equals the radius of the circumcircle of the polygon, if a) $k=2$, b) k is any natural number.

I. F. Sharygin

M942. The numbers 1, 2,...$2n-1$, $2n$ are split into two groups of n numbers each. Suppose $a_1<a_2<...<a_n$ are the numbers of the first group in increasing order, and $b_1>b_2>...>b_n$ the numbers of the second one in decreasing order. Prove that

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|=n^2$$

V. V. Proizvolov

M943. The sequence a_1, a_2, ... is given by the rules: $a_{2n}=a_n$ if $n\geqslant 1$ and $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ if $n\geqslant 0$. Prove that this sequence is not periodic.

Yu. V. Nesterenko

M944*. A regular hexagon is split into 24 equal triangles as shown on Рис. 2, p. 37. Different numbers are written at each of the 19 vertices of the figure thus obtained. Prove that among the 24 triangles at least 7 have vertices with counterclockwise increasing numbers.

A. A. Berzinsh

M945*. An unbounded strictly increasing sequence of positive numbers a_1, a_2,... is given. Prove that for all sufficiently large k

a) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

b) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

L. D. Kurlyandchik

P953. In order to regulate the turntable of a 33 1/3 RPM record player with great precision, little evenly spaced marks are made on the disk's outside surface; they are lighted by a neon lamp of frequency 100 flashes per second. How many marks are needed to make them appear motionless at nominal velocity? After the turntable motor is turned off, dry friction forces begin slowing the disk down — the marks begin to „run". In the first 4 seconds 10 marks „run past" the observation point. How soon will the disk stop? How soon will the marks start „running the other way"?

A. R. Zilberman

P954. A designer's drapery 1.5 by 1.5 *m* hangs from a horizontal crossbar along a vertical wall. The lower end of the drapery is lifted level with the upper one (so that the drapery is folded in half) and then released. Find the force acting on the crossbar as a function of time. The drapery is thin, smooth and weights $3 kg$.

S. S. Krotov

P955. A mixture of gases, sonsisting of $m_1=100 g$ of nitrogen and an unspecified amount of oxygen, undergoes isothermic compression at temperature $T=74.4 K$. The dependence of the mixture's pressure on volume is plotted on Рис. 3, p. 37 (in conditional units). Determine the mass of the oxygen. Calculate the pressure of saturated vapors of oxygen at the given temperature of saturated vapors of oxygen at the given temperature. Remark. $T=74.4 K$ is the boiling temperature of liquid nitrogen at normal pressure; oxygen boils at higher temperature.

A. I. Buzdin

P956. In one of the versions of the classical experiment, due to the late academician I. K. Kikoin, a singlelayer shortcircuited coil of inductivity $L=3\cdot10^{-5} H$, made of thin superconducting wire is hung by an elastic thread in a magnetic field directed vertically upward along the axis of the coil (Рис. 4, p. 37). In the initial state the thread is untwisted and there is no current in the coil. The induction B of the magnetic field is slowly increased from zero to the value $B=0.1\ T$, at which the superconductivity instantaneously disappears and the wire aquires its normal state. The coil then starts spinning, twisting the string. Find the maximal angle of twisting, assuming the elastic moment of the thread proportional to the twist angle (the proportionality coefficient being $G=10^{-7}$ N·m/rad). The number of loops in the coil is $n=100$, their radius is $R=1 cm$, the mass of the coil is $M=10 g$. The ratio of an electron's charge to its mass is $e/m=1{\cdot}76{\cdot}10^{11}$ C/kg.

S. M. Kozel

P957. The dessimination of short radiowaves in the upper atmospheric layers (the ionosphere) may be described by means of the laws of geometric optics if it is assumed that the refraction index n for radiowaves is less than 1 and varies as a function of altitude above sealevel as shown on Рис. 5, p. 37. A sputnik, flying at altitude $200 km$, is supplied with a radiotransmitter, emitting radiowaves uniformly in all directions (isotropically). Disregarding radiowave absorbsion by the ionosphere, estimate the part of the transmitters power carried away by the radiowaves beyond the Earth's atmosphere. In your estimates you may assume the Earth to be flat, and the reflection on it mirrorlike and without losses. Remark. The solid angle of a cone with vertex angle β is $\Omega=2\pi(1-\cos(\beta/2))$.

V. I. Chivilev

Решения задач

M921—M925*); Ф933—Ф937

M921. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны величины двух углов $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, а его удвоенная площадь равна $AB\cdot CD+BC\cdot AD$. Найдите отношение длин всех его сторон, если:*

а) $\alpha=\frac{5\pi}{12}$, $\beta=\frac{7\pi}{12}$, *б)* $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$; *в) выясните, для каких α и β существует такой четырехугольник и выразите через α и β отношение его сторон.*

Ответ: отношение $AB{:}BC{:}CD{:}DA$ в задаче а) равно: $\sqrt{2}:1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$, в задаче б) — $\sqrt{3}:\sqrt{3}:1:1$, в задаче в) — $\sin\frac{\varphi_1}{2}:\sin\frac{\varphi_2}{2}:\sin\frac{\varphi_3}{2}:\sin\frac{\varphi_4}{2}$, где

$$\varphi_1=\frac{3\pi}{2}-\alpha-\beta,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta,\ \varphi_3=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_4=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta; \qquad (1)$$

условия существования четырехугольника:

$$|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}. \qquad (2)$$

---

*) Решению задачи M925 посвящена заметка А. Л. Тоома «Кляксы на плоскости» на с. 47.

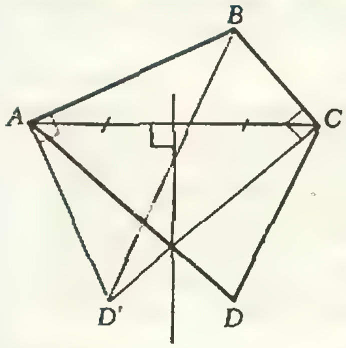


Рис. 1.

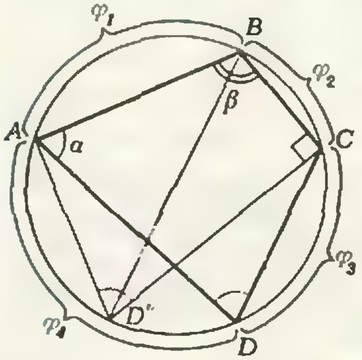


Рис. 2.

Решать задачу будем сразу в общем случае в). Рассмотрим вспомогательный четырехугольник $ABCD'$, где D' — точка, симметричная D относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC (рис. 1), и докажем, что *его углы при вершинах A и C — прямые.*

Представляя четырехугольник $ABCD'$ как объединение треугольников ABD' и CBD', получим, что его удвоенная площадь равна

$$AB\cdot AD'\sin\angle BAD'+BC\cdot CD'\sin\angle BCD'.$$

Удвоенная площадь $ABCD$ по условию равна

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

Но эти четырехугольники, очевидно, равновелики, а $AD'=CD$, $CD'=AD$, поэтому $\sin\angle BAD'=\sin\angle BCD'=1$, то есть $\angle BAD'=\angle BCD'=\pi/2$.

Из доказанного следует, что около *четырехугольника $ABCD'$ можно описать окружность* (с диаметром BD'). На ней лежит и точка D ($\angle ADC=\angle AD'C$). Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 угловые величины дуг AB, BC, CD, DA (рис. 2), тогда $AB=BD'\sin\frac{\varphi_1}{2}$, $BC=BD'\sin\frac{\varphi_2}{2}$ и т. д. Остается выразить эти величины через α и β. По теореме о величине вписанного в окружность угла

$$2\alpha=\varphi_2+\varphi_3,\quad 2\beta=\varphi_3+\varphi_4,$$
$$2\angle BCD'=\pi=\varphi_1+\varphi_3=2\pi-\varphi_2-\varphi_4$$

(так как дуги CD' и AD равны). Отсюда получаются формулы (1). Для существования четырехугольника необходимо и достаточно, чтобы все числа φ_i ($i=1, \ldots, 4$) были положительны, что эквивалентно неравенствам (2). Ответы к задачам а) и б) находятся после подстановки вместо α и β заданных значений.

Легко показать, что *условию задачи удовлетворяют любые четырехугольники $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, около которых можно описать окружность, и только они.* Это можно вывести также из одной из версий так называемой теоремы Птолемея: *для любых четырех точек A, B, C, D плоскости верно неравенство*

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC,$$

которое обращается в равенство лишь для точек, лежащих на одной окружности или на одной прямой (см., например, «Квант» № 3 за 1973 г. (с. 27)). В то же время последнее утверждение этой теоремы легко доказывается с помощью перехода к четырехугольнику $ABCD'$.

В. Л. Гутенмахер

◆

M922. *Докажите, что уравнение*

$$\sin^p x+\cos^q x=1,$$

где p и q — положительные числа, имеет решение на ин-

Положим $t=\sin^2 x$ ($\cos^2 x=1-t$), $a=p/2$, $b=q/2$, тогда данное уравнение перепишется в виде

$$f(t)=t^a+(1-t)^b=1. \qquad (*)$$

терване $0 < x < \pi/2$ *тогда и только тогда, когда* $(p-2)(q-2)<0$ *или* $p=q=2$.

Мы должны доказать, что уравнение (*) имеет решения в интервале $]0;\ 1[$ (области значений функции $y=\sin^2 x$ на интервале $0<x<\pi/2$) тогда и только тогда, когда $(a-1)(b-1)<0$ или $a=b=1$. В дальнейшем будем считать, что $a\geqslant b$ (в противном случае с помощью замены $s=1-t$ мы перейдем к уравнению $s^b+(1-s)^a=1$ на интервале $0<s<1$).

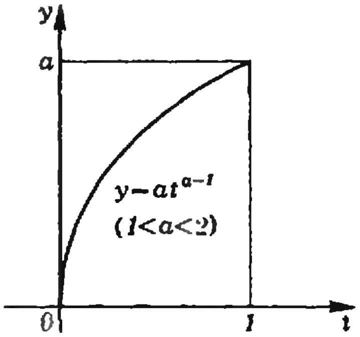


Рис. 1.

Покажем сначала, что если $(a-1)(b-1)>0$ или только одно из чисел a и b равно 1, уравнение (*) решений не имеет. Возможны два случая: $a>b\geqslant 1$ или $1\geqslant a>b$. В первом случае $t^a<t$, $(1-t)^b\leqslant 1-t$ и $t^a+(1-t)^b<t+(1-t)=1$. Второй рассматривается аналогично.

При $a=b=1$ функция $f(t)$ тождественно равна 1.

Пусть, наконец, $a>1>b$. Покажем, что на интервале $]0;\ 1[$ найдутся две точки, t_1 и t_2, такие, что $f(t_1)>1$, $f(t_2)<1$. Отсюда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции будет следовать, что в некоторой точке t на интервале $]t_1;\ t_2[$ $f(t)=1$. Рассмотрим производную функции $f(t)$:

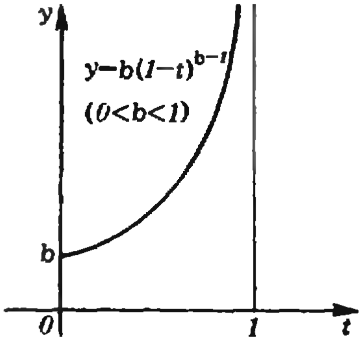


Рис. 2.

$$f'(t)=at^{a-1}-b(1-t)^{b-1}.$$

При $t\to 0$ функция at^{a-1} стремится к нулю, а $b(1-t)^{b-1}$ стремится к $b>0$ (графики этих двух функций — рис. 1 и рис. 2). Поэтому при достаточно малом t_1 на интервале $0<t<t_1$ производная $f'(t)<0$, следовательно, функция $f(t)$ убывает на отрезке $[0;\ t_1]$ и $f(t_1)<f(0)=1$. Аналогично, при $t\to 1$ функция at^{a-1} стремится к a, а $b(1-t)^{b-1}$ неограниченно растет ($b-1<0$). Поэтому $f'(t)<0$ при $t_2<t<1$, где t_2 достаточно близко к 1, следовательно, функция $f(t)$ убывает на отрезке $[t_2;\ 1]$ и $f(t_2)>f(1)=1$. Тем самым наше утверждение доказано полностью.

А. М. Седлецкий

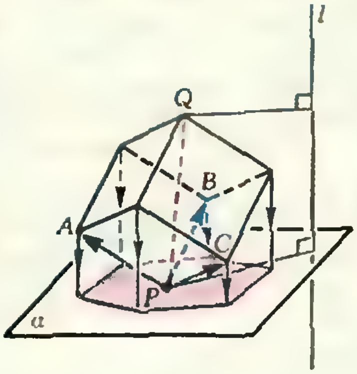
◆

М923. *Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.*

Обозначим через α и l плоскость и перпендикулярную ей прямую, на которые проектируется куб.

Поскольку любая прямая, проходящая через внутреннюю точку куба, пересекает его поверхность в двух точках, площадь проекции куба на α вдвое меньше суммы площадей проекций на α всех его граней, то есть равна сумме площадей проекций трех попарно перпендикулярных граней.

С другой стороны, проекция куба на прямую l совпадает с проекцией $P'Q'$ какой-то его диагонали PQ. Проведем через точку P плоскость, перпендикулярную l, тогда весь куб и, в частности, точка Q и концы A, B, C трех ребер куба, выходящих из вершины P, лежат по одну сторону от этой плоскости. Поэтому проекции $\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{P'A'}$, $\overrightarrow{P'B'}$ и $\overrightarrow{P'C'}$ векторов $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ на прямую l



будут сонаправлены. Но $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, следовательно, длина проекции куба на l равна

$$|\overrightarrow{P'Q'}|=|\overrightarrow{P'A'}+\overrightarrow{P'B'}+\overrightarrow{P'C'}|=$$

$$=|\overrightarrow{P'A'}|+|\overrightarrow{P'B'}|+|\overrightarrow{P'C'}|,$$

то есть равна сумме длин проекций трех его попарно перпендикулярных ребер (PA, PB и PC).

Остается заметить, что угол между плоскостью любой грани куба и плоскостью α равен углу между перпендикулярным этой грани ребром и прямой l, а значит, площадь проекции этой грани на α равна длине проекции ребра на l (при ортогональной проекции площадь грани и длина ребра умножаются на косинусы соответствующих углов).

Обобщения этой задачи на случай многомерного пространства рассматриваются в статье английского математика Дж. Мак-Муллена, опубликованной в журнале „Bull. Lond. Math. Soc.“ № 3 за 1984 год.

С. Л. Табачников

◆

М924. *Каждые две из n точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставляются стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB, BA.*

а) Объясните, как расставить стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б) Каково наибольшее возможное число ориентированных треугольников (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для n=4, 5 и 6.)*

Обозначим данные n точек через $A_1, \ldots, A_n$.

а) Ответ: надо расставить стрелки по возрастанию номеров точек: от A_i к A_j при $i<j$ (см. рис. 1 для $n=5$). Тогда в любом треугольнике из вершины с наименьшим номером выходят две стрелки, поэтому он не ориентирован.

б) Ответ: наибольшее число ориентированных треугольников равно $n(n^2-1)/24$ при нечетном n и $n(n^2-4)/24$ при четном n (см. рис. 2—4 для $n=4$, 5, 6).

Нам будет удобнее найти наименьшее число неориентированных треугольников, а потом вычесть его из общего числа треугольников, равного $n(n-1)(n-2)/6$ (выбирая последовательно вершины треугольника из данных точек, мы будем иметь для первой вершины n возможностей выбора, для второй — $n-1$, для третьей — $n-2$; при этом каждая тройка вершин в разном порядке будет выбрана 6 раз).

Будем называть пару стрелок (направленных отрезков) *согласованной*, если они имеют общее начало или общий конец. Очевидно, из трех пар сторон любого неориентированного треугольника из стрелок ровно две — согласованные (на рисунке 5 — AB и AC, AC и BC), а любая согласованная пара стрелок принадлежит ровно одному неориентированному треугольнику. Поэтому число неориентированных треугольников равно половине числа согласованных пар. Оценим это число.

Если из некоторой точки A выходит k стрелок, то число образуемых ими пар равно $k(k-1)/2$. При этом в точку A входит $n-1-k$ стрелок, образующих еще $(n-1-k)(n-2-k)/2$ согласо-

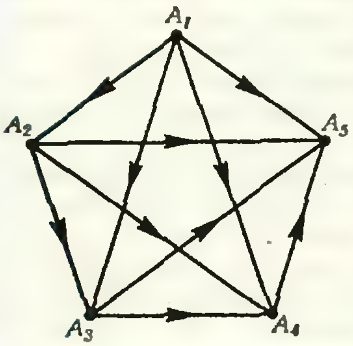


Рис. 1.

ванных пар. Итак, число согласованных пар с общей вершиной в точке A равно

$$\frac{1}{2}\left(k^2-k+(n-1-k)^2-n+1+k\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left((n-1)^2-(n-1)\right)-k(n-1-k).$$

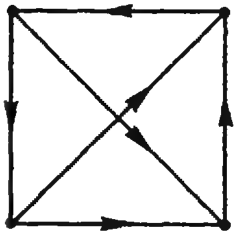


Рис. 2.

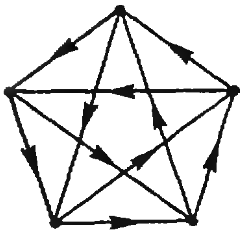


Рис. 3.

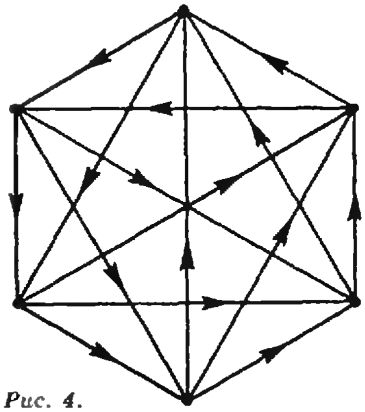


Рис. 4.

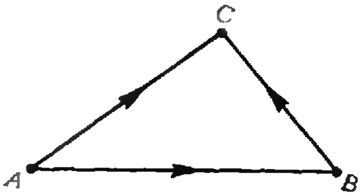


Рис. 5.

Легко видеть, что наименьшее значение этого выражения достигается при $k=(n-1)/2$, если n нечетно, и при $k=n/2$ или $k=n/2-1$, если n четно, и равно, соответственно, $(n-1)(n-3)/4$ и $(n-2)^2/4$.

Заметим, что стрелки всегда можно расставить так, чтобы из каждой точки выходило указанное «оптимальное» число стрелок. Действительно, представим, что точки A_1, ..., A_n образуют правильный n-угольник и расставим стрелки на его сторонах и диагоналях (не проходящих через его центр) так, чтобы они задавали одно и то же направление обхода центра; на диагоналях, проходящих через центр (они имеются только при четных n) стрелки можно поставить произвольно. Тогда число стрелок, входящих в каждую вершину, отличается от числа стрелок, выходящих из нее, не более чем на 1.

Таким образом, наибольшее число ориентированных треугольников при нечетном n равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-1)(n-3)}{4}=\frac{n(n^2-1)}{24},$$

а при четном n

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-2)^2}{4}=\frac{n(n^2-4)}{24}.$$

Приведем набросок другого решения. Пусть k_i — число стрелок, выходящих из точки A_i, тогда число неориентированных треугольников равно сумме

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2}+\ldots+\frac{k_n(k_n-1)}{2}=\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{2}-\frac{n(n-1)}{4} \qquad (*)$$

(число всех стрелок равно $k_1+\ldots+k_n=n(n-1)/2$). Если для некоторого расположения стрелок $k_i \geqslant k_j+2$, для каких-то двух точек, то можно изменить направления (не более чем двух) стрелок так, что k_i уменьшится, а k_j увеличится на 1; при этом сумма квадратов $k_1^2+\ldots+k_n^2$ уменьшится. Следовательно, для «наилучшего» расположения стрелок $|k_i-k_j|\leqslant 1$ при всех i, j, а значит, $k_i=(n-1)/2$ или $k_i=((n-1)\pm 1)/2$ (в зависимости от четности n) при всех i, откуда с помощью $(*)$ легко получить ответ.

И. И. Цаленчук, В. Н. Дубровский

◆

Ф933. *Два куска сахара можно поместить в стакан с чаем различными способами. Можно просто положить сахар на дно (рисунок 1), а можно установить куски «враспор», если стакан имеет коническую форму (рису-*

В первом случае (рисунок 1) по мере растворения сахара на дне стакана образуется слой чая с высокой концентрацией сахара. Выравнивание концентрации по всему объему будет происходить за счет диффузии сахара из нижнего слоя в верхние. С ростом концентрации в нижнем слое скорость растворения уменьшается.

нок 2). В каком случае сахар растворится скорее, если чай не перемешивать?

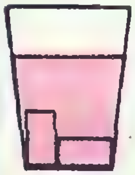


Рис. 1.

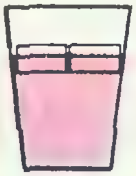


Рис. 2.

Ф934. *Теплоизолированный сосуд разделен на две части легким поршнем. В левой части сосуда находится $m_1=3$ г водорода при температуре $T_1=300$ К, в правой части — $m_2=16$ г кислорода при температуре $T_2=400$ К. Поршень слабо проводит тепло, и температура в сосуде постепенно выравнивается. Какое количество тепла отдаст кислород к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться?*

Во втором случае (рисунок 2) слой с повышенной концентрацией сахара образуется вверху. Плотность сахарного раствора больше плотности чистого (без сахара) чая и растет по мере увеличения концентрации. Поэтому сахарный «сироп» опускается в нижние слои. Перемешивание происходит за счет диффузии и за счет конвекции. Поскольку сахар из верхних слоев убывает, скорость растворения уменьшается медленнее, чем в первом случае.

Следовательно, во втором случае сахар растворится в чае быстрее.

Л. А. Ашкинази

◆

По условию задачи тепло передается медленно; значит, давления на поршень с двух сторон практически равны, то есть в любой момент времени

$$\frac{m_1 T_1^*}{\mu_1 V_1} = \frac{m_2 T_2^*}{\mu_2 (V-V_1)}, \text{ или } \nu_1 \frac{T_1^*}{V_1} = \nu_2 \frac{T_2^*}{V-V_1}, \qquad (1)$$

где T_1^*, T_2^* — температуры, соответственно, водорода и кислорода, V_1 и $(V-V_1)$ — объемы, занимаемые газами (V — объем сосуда) в этот момент.

Внутренняя энергия двухатомного газа равна $\frac{5}{2}\nu RT$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{5}{2}\nu_1 R(T_1^* - T_1) = \frac{5}{2}\nu_2 R(T_2 - T_2^*). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{T_1^*}{V_1} = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 V} = \text{const},$$

иными словами, давление p_1 в левой части сосуда, где находится водород (а значит, и давление p_2 в правой части, где находится кислород), в процессе не меняется, то есть процесс передачи тепла происходит изобарически.

Поршень перестанет двигаться, когда температуры водорода и кислорода станут одинаковыми. К тому моменту, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{5}{2}\nu_1 R(T - T_1) = \frac{5}{2}\nu_2 R(T_2 - T)$$

(T — установившаяся в сосуде температура), откуда

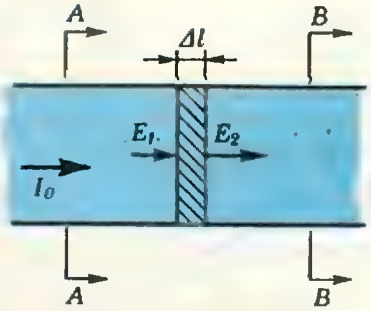
$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 325 \text{ К}.$$

Количество теплоты, отданное кислородом, равно сумме изменения его внутренней энергии $\frac{5}{2}\nu_2 R(T_2 - T)$ и совершенной над ним работы $\nu_2 R(T_2 - T)$:

$$Q = \frac{7}{2}\nu_2 R(T_2 - T) \approx 1090 \text{ Дж}.$$

А. Р. Зильберман

Ф935. *По длинному прямому проводнику постоянного сечения течет ток I_0. На участке AB проводника (см. рисунок) его удельное сопротивление уменьшается от ρ_1 в сечении $A—A$ до ρ_2 в сечении $B—B$. Какой по величине и знаку объемный заряд образуется на участке AB?*



Выделим на участке AB нашего проводника в произвольном месте бесконечно малый элемент длиной Δl (см. рисунок) и запишем для этого элемента закон Ома:

$$\Delta U = I_0 \rho \Delta l / S.$$

Здесь ρ — удельное сопротивление проводника в выделенном объеме, а S — сечение проводника. Учитывая, что предел отношения $\Delta U/\Delta l$ при $\Delta l \to 0$ определяет величину напряженности электрического поля ($\lim\limits_{\Delta l \to 0} (\Delta U/\Delta l) = E$), мы можем записать первое равенство в виде

$$E = \rho I_0 / S.$$

Полученное соотношение показывает для любого сечения проводника связь напряженности электрического поля E с удельным сопротивлением проводника в том же сечении.

Пусть в выбранном элементарном объеме образуется объемный заряд ΔQ. Найдем напряженность электрического поля слева (E_1) и справа (E_2) от выбранного элемента. Используя принцип суперпозиции электростатических полей, можно записать

$$E_1 = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_l| - \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 S},$$

$$E_2 = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_l| + \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Здесь $|\vec{E}_l|$ — напряженность электрического поля в объеме нашего элемента, создаваемая всеми зарядами, кроме заряда ΔQ, а вторые члены учитывают поле заряда ΔQ, которое будет эквивалентно полю вблизи равномерно заряженной поверхности с поверхностной плотностью зарядов $\Delta Q/S$. Изменение поля на границах элемента

$$\Delta E = |\vec{E}_2| - |\vec{E}_1| = \Delta Q / \varepsilon_0 S.$$

С другой стороны,

$$\Delta E = \Delta\rho \cdot I_0 / S,$$

где $\Delta\rho$ — разность удельных сопротивлений проводника справа и слева от выбранного элемента у его границ. Из двух последних равенств мы получаем связь объемного заряда ΔQ с разностью удельных сопротивлений на его границах:

$$\Delta Q = \varepsilon_0 I_0 \cdot \Delta\rho.$$

Объемный заряд на всем участке AB равен сумме подобных элементарных зарядов, то есть

$$Q_{AB} = \Sigma \Delta Q = \varepsilon_0 I_0 \Sigma \Delta\rho = \varepsilon_0 I_0 (\rho_2 - \rho_1).$$

Поскольку разность $\rho_2 - \rho_1$ отрицательна (по условию $\rho_2<\rho_1$), то и объемный заряд на участке проводника AB будет отрицательным.

В. В. Можаев

◆

Ф936. *По длинному сверхпроводящему соленоиду с индуктивностью $L_0=1$ Гн, содержащему $N=200$ витков, течет ток $I_0=0{,}1$ А.*) Издали к соленоиду подносят замкнутый проводящий виток того же радиуса, что и витки соленоида; индуктивность витка $L_1=1\cdot10^{-3}$ Гн. Виток вставляют между витками соленоида соосно с ними. Как изменится ток, текущий по соленоиду? Как изменится энергия системы?*

До внесения витка магнитный поток через соленоид был равен

$$\Phi_0=L_0I_0.$$

Этот поток создается всеми витками; считая, что вклады отдельных витков в общий поток одинаковы (так можно считать, если витков много и соленоид длинный), найдем вклад одного витка (поток, создаваемый одним витком через весь соленоид при токе I_0):

$$\Delta\Phi_0=\frac{L_0}{N}I_0.$$

С другой стороны, общее магнитное поле соленоида создает через каждый из витков поток $\Delta\Phi_0^*$; сумма таких потоков равна Φ_0; поэтому

$$\Delta\Phi_0^*=\frac{\Phi_0}{N}=\Delta\Phi_0.$$

Значит, магнитный поток через один виток, создаваемый соленоидом при токе I_0, такой же, как поток через весь соленоид, создаваемый одним витком при том же токе. (Это — известный факт.)

Внесем виток в соленоид. Пусть I — новый ток в соленоиде, а I_1 — индукционный ток, возникший в витке. Поскольку виток сверхпроводящий, магнитный поток через него должен остаться неизменным и равным нулю. Этот поток складывается из потока Φ, создаваемого через виток всем соленоидом при токе I, и собственного потока Φ_1, создаваемого витком с током I_1:

$$0=\Phi+\Phi_1=\frac{L_0}{N}I+L_1I_1. \qquad (1)$$

Магнитный поток через весь соленоид (сверхпроводящий) также должен остаться неизменным и равным L_0I_0:

$$L_0I_0=L_0I+\frac{L_0}{N}I_1. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим токи I и I_1:

$$I=I_0\left(1-\frac{L_0}{L_1N^2}\right)^{-1}\approx0{,}103\text{ А},$$

$$I_1=-I\frac{L_0}{L_1N}\approx-0{,}510\text{ А}.$$

Таким образом, ток, текущий по соленоиду, увеличился на $\Delta I=3\cdot10^{-3}$ А. Энергия системы увеличилась на

$$\Delta W=L_0\frac{I^2}{2}+L_1\frac{I_1^2}{2}-L_0\frac{I_0^2}{2}\approx1{,}25\cdot10^{-4}\text{ Дж}.$$

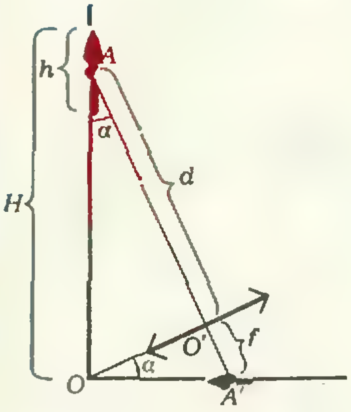
Энергия возросла за счет механической работы, которая была совершена при внесении витка в соленоид (противоположно направленные токи отталкиваются).

А. Р. Зильберман

---

*) Приведенное в 5-м номере «Кванта» в условии этой задачи значение $L_0=0{,}1$ Гн — опечатка.

Ф937. *На вертикальной стене нарисован человечек «ростом» $h=20$ см, голова человечка находится на высоте $H=2$ м над полом. При помощи линзы с фокусным расстоянием $F=0.1$ м получают изображение человечка на полу. Найти размер наиболее четкого изображения.*



Изображение на полу можно получить при различных положениях линзы, и увеличение будет зависеть от положения линзы. Наиболее четким изображение будет в том случае, когда «центр» источника (точка A на рисунке) и соответствующая точка изображения (точка A') лежат на главной оптической оси линзы. Нетрудно показать, что плоскость, в которой лежит линза, проходит через вершину O прямого угла AOA' (см. рисунок).

Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{|AO'|}+\frac{1}{|O_1A'|}.$$

Считая, что $|OA|=H-h/2=H_1$, получаем $|AO'|=H_1\cos\alpha$, $|O'A'|=|OA'|\sin\alpha=H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha$, и

$$\frac{1}{H_1\cos\alpha}+\frac{1}{H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{F}{H_1}=\frac{F}{H-h/2}.$$

Из этого уравнения можно найти угол α. Приближенно можно считать (угол α мал), что $\cos\alpha\approx1$; тогда

$$\sin\alpha\approx\sqrt{\frac{F}{H-h/2}}\approx0{,}233 \text{ и } \alpha\approx0{,}231.$$

Рассчитаем теперь размер изображения. Если бы источник и изображение лежали в плоскостях, перпендикулярных главной оптической оси линзы, то увеличение было бы равно

$$\Gamma=\frac{|O'A'|}{|AO'|}=\frac{H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}{H_1\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

В нашем случае увеличение равно отношению длин проекций изображения и источника на эти плоскости; значит, размер изображения равен

$$h'=h\Gamma\operatorname{tg}\alpha=h\operatorname{tg}^3\alpha\approx0{,}25 \text{ см}.$$

А. Р. Зильберман

Кляксы на плоскости

Представьте себе географическую карту, на которой показана территория распространения какого-либо вида растений или эпидемии. Часть карты, соответствующая этой территории, закрашена определенным цветом, остальная оставлена белой. Чтобы изучить динамику распространения вида или эпидемии, составляют последовательность таких карт, соответствующих различным моментам времени, и пытаются понять закономерности изменения закрашенной части. Если речь идет об эпидемии, мы, естественно, хотим, чтобы она угасла. Если же речь идет о каком-то ценном виде, мы хотим, чтобы он сохранился. В обоих случаях нам важно, исчезнет закрашенная часть или нет. Подобные соображения приводят к задачам, аналогичным той, которая была опубликована в 5-м номере нашего журнала за этот год в «Задачнике «Кванта» (М925). Мы приведем ее решение и еще несколько связанных с ней задач.

М925. *На белой плоскости расположена синяя фигура K_0. Из нее получается новая синяя фигура K_1 по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам M плоскости: если не менее половины площади круга радиуса 1 с центром в точке M занято синим цветом, то точка M становится синей, а если менее половины — то белой. На следующем шаге из полученной синей фигуры K_1 по тому же правилу получается фигура K_2, затем из нее K_3 и т. д. Докажите, что: а) для произвольной ограниченной фигуры K_0, начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если K_0 — круг радиуса 100, то это случится не позже чем через миллион шагов.*

Обозначим буквой F то правило, по которому из каждой фигуры получается следующая. Оно монотонно в следующем смысле: из меньшей фигуры по правилу F получается меньшая; более формально это можно записать так:

$$K\subset K'\Rightarrow F(K)\subset F(K').$$

Благодаря этой монотонности, нам достаточно рассматривать в качестве начальных фигур только круги. Действительно, всякая ограниченная фигура лежит в некотором круге, и если уж даже этот круг под действием нашего правила превратится в пустое множество, то содержащаяся в нем фигура — тем более. Круги удобны тем, что под действием F они переходят в круги. Точнее:

а) если K — круг радиуса, большего или равного $1/\sqrt{2}$ (то есть площади большей или равной $\pi/2$), то $F(K)$ — тоже круг (меньшего радиуса);

б) если K — круг радиуса, меньшего $1/\sqrt{2}$, то $F(K)$ — пустое множество.

Рассмотрим функцию $f(R)$, определенную при R, больших $1/\sqrt{2}$, следующим образом: *если R — радиус круга K, то $f(R)$ — радиус круга $F(K)$*. График функции f показан на рисунке 1. Когда R возрастает от $1/\sqrt{2}$ до бесконечности, функция $f(R)$ монотонно растет от $1-1/\sqrt{2}$ до бесконечности, причем ее график остается все время ниже биссектрисы координатного угла ($R-f(R)>0$). Нетрудно доказать, что разность $R-f(R)$ есть монотонно убывающая функция от R (стремящаяся к нулю при $R \to \infty$). Ломаная линия на рисунке 1 показывает, как ведут себя радиусы R_0, $R_1=f(R_0)$, $R_2=f(R_1)$, ... (на рисунке 1 уже $R_3<1/\sqrt{2}$, поэтому на следующем, четвертом шаге получится пустое множество). В общем случае из монотонности $R-f(R)$ следует:

$$R_0-R_1<R_1-R_2<R_2-R_3<\ldots$$

Отсюда, обозначая $R_0-R_1=d>0$, получим, что $R_n<R_0-nd$. Значит, при некотором значении n (не большем чем $R_0/d+1$) фигура K_n будет пуста. Тем самым доказано утверждение а). (В этом доказательстве некоторые детали только намечены, но по ходу приводимого далее решения задачи б) мы получим и еще одно решение а).)

Чтобы справиться с пунктом б), надо численно оценить величину, на которую уменьшается радиус R круга K под действием правила F. Если внутри круга K находится меньшая часть нашего «стандартного» круга D радиуса 1 с центром в точке M, то эта точка не входит в $F(K)$, и, следовательно, $f(R)<OM$, где O — центр круга K. Как видно из рисунка 2, так будет, например, когда окружность круга K пересекает диаметр AA_1 круга D в серединах B и B_1 радиусов MA и MA_1: в этом случае площадь сегмента BB_1G меньше суммы площадей криволинейных треугольников ABL и $A_1B_1L_1$, поэтому площадь пересечения кругов D и K меньше половины площади круга D. При этом $OM^2=OB^2-MB^2=R^2-1/4$, таким образом,

$$f(R)^2<OM^2=R^2-1/4$$

(при любом $R>1/\sqrt{2}$), то есть $R_n^2<R_{n-1}^2-\frac{1}{4}$.

Отсюда по индукции заключаем, что при $R_{n-1}>1/\sqrt{2}$

$$R_n^2<R_0^2-n/4.$$

Следовательно, круг произвольного радиуса R_0 исчезнет за конечное число шагов (что доказывает утверждение а)), причем это число не больше $4R_0^2+1$. При $R_0=100$ оно заведомо меньше миллиона, что и требуется доказать в задаче б).

З а д а ч и

1. Пусть $N(R)$ — число применений правила F, превращающих круг радиуса R в пустое множество. Мы доказали, что $N\leqslant 4R^2+1$. Докажите, с другой стороны, что $N\geqslant cR^2$, где c — некоторая положительная константа.

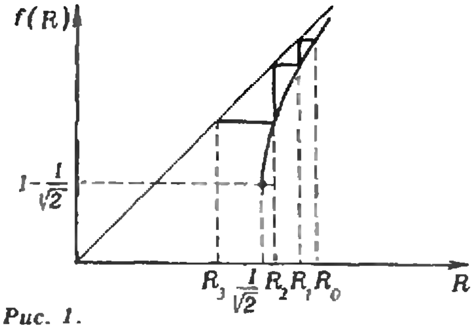


Рис. 1.

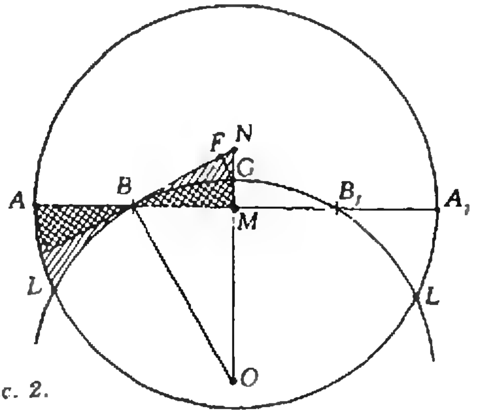


Рис. 2.

2. Рассмотрим другое правило H преобразования фигур на плоскости. Введем систему координат Oxy. Если дана фигура K, то новая фигура $H(K)$ состоит из всех точек $T(x;\ y)$, для которых пересечение K и треугольника с вершинами $(x;\ y)$, $(x+1;\ y)$, $(x;\ y+1)$ имеет площадь, не меньшую половины площади этого треугольника. Докажите, что всякая ограниченная фигура под многократным действием H превращается в пустое множество за конечное число шагов N, причем для круга радиуса R

$$c_1 \cdot R\leqslant N\leqslant c_2 \cdot (R+1),$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные константы.

3. На белой сфере диаметра $d>1$ задана синяя фигура K_0. Сопоставим каждой точке M сферы ее «окрестность» D_M — часть сферы, заключенную в шаре диаметра 1 с центром M, и образуем новую синюю фигуру K_1 из тех и только тех точек M, для которых площадь пересечения D_M и K_0 не меньше половины площади окрестности D_M. Аналогично из K_1 получается K_2 и т. д.

а) Докажите, что если исходная фигура K_0 содержится в шаре диаметра, меньшего d, то через конечное число шагов вся сфера станет белой.

б) Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое d и такую синюю фигуру K_0 площади не больше $\varepsilon\pi d^2$ на белой сфере диаметра d, что после конечного числа описанных превращений вся сфера станет синей.

в) Существуют ли отличные от полусферы фигуры K_0, для которых K_1 совпадает с K_0?

А. Л. ТООМ

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М896—М910, Ф908—Ф922, справились с задачами М897, М901, М906, М907, Ф910, Ф911, Ф913, Ф914, Ф918—Ф920. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз. ССР) 03, 10; *М. Александров* (Москва) 96, 03; *Р. Алексеев* (Магнитогорск) 08; *А. Алиев* (с. Каракая Аз.ССР) 10; *Д. Алтаев* (Чимкент) 08; *М. Альт* (Одесса) 02, 10; *Г. Андреева* (Пермь) 96; *Ю. Антимиров* (Рига) 02, 08; *Г. Арвеладзе* (Тбилиси) 03; *А. Арутюнян* (Ереван) 02—05; *А. Архипов* (Москва) 08; *А. Асташкевич* (Томск) 96, 02—05, 09, 10; *Р. Бабаев* (Баку) 96; *В. Балахонцев* (Алма-Ата) 03; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) 96, 02; *И. Биндер* (Ленинград) 02—04, 08; *А. Бирюков* (Саратов) 96; *М. Бойко* (Киев) 03; *В. Бондаренко* (Медвежьегорск) 03; *С. Бондарович* (Жодино) 03; *А. Борисенко* (Харьков) 02—04, 09, 10; *В. Борманис* (Балвы) 02—04; *А. Бурштейн* (Киев) 04; *Я. Варшавский* (Харьков) 02—05, 10; *С. Велесько* (Минск) 96, 99, 00, 02—04, 10; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 96, 02—05; *С. Володин* (Гайворон) 10; *К. Вохалаз—Ыхозов* (Сумгаит) 10; *Т. Газарян* (Ереван) 96, 98, 00, 02—05; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 08, 10; *Т. Гамбарян* (Баку) 03, 04; *Г. Гевондян* (с. Меликгюх Арм. ССР) 02—05; *О. Гендельман* (Харьков) 02, 03, 05, 09; *Р. Гендлер* (Ташкент) 96, 99, 00, 02—05, 08—10; *А. Глюцюк* (Харьков) 02, 03; *М. Годин* (Ленинград) 08; *В. Годлевский* (Киев) 03—05, 10; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 96, 04, 08, 10; *А. Гороховский* (Киев) 02—05; *Н. Григорьева* (Андропов) 02, 03, 05, 08—10; *А. Григорян* (Ереван) 98, 00, 02—05; *В. Гринберг* (Москва) 96, 00, 02, 03; *М. Гринберг* (Харьков) 02—05, 10; *А. Давтян* (Ереван) 96, 00, 02—05; *Ю. Дейкало* (Киев) 03—05, 08, 10; *А. Джафаров* (с. Тьюркоба Аз.ССР) 03, 10; *М. Добрицын* (Москва) 02, 03, 05, 08, 10; *А. Донченко* (Киев) 08, 10; *А. Дынников* (Жуковский) 96, 02, 03, 08—10; *И. Дынников* (Жуковский) 96, 00, 02—05, 08—10; *А. Жаксыбеков* (Алма-Ата) 03; *В. Жданов* (Москва) 96, 10; *В. Журавлев* (Гайворои) 96, 98, 03, 05, 10; *П. Задорожный* (Киев) 02, 03, 09; *Д. Зайцев* (Киев) 96, 03, 04; *Л. Запольский* (Москва) 96, 02, 08; *А. Захаров* (Гатчина) 96; *М. Захаров* (Киев) 03; *А. Зозуля* (Винница) 03; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 96, 98, 00, 03, 04, 08; 10; *А. Иванов* (Леиинград) 02, *М. Игнатьев* (Саратов) 02—04; *С. Исмаилов* (Баку) 03, 05; *В.* и *И. Каповичи* (Хабаровск) 96, 98, 00, 02—05, 09, 10; *А. Каринский* (Невинномысск) 96; *Д. Карманов* (Москва) 10; *М. Касьянович* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 03; *О. Кирнасовский* (Винница) 96, 00, 02—04; *А. Киселев* (Ленинград) 00, 02—04, 08—10; *И. Кича* (Киев) 03; *А. Кленов* (Тейково) 10; *Т. Кобунков* (Павлодар) 98; *В. Ковалев* (Харьков) 03, 04; *А. Козинский* (Гайворои) 10; *И. Козуля* (Жуковский) 96; *В. Колега* (Червоноград) 10; *А. Кононенко* (Киев) 96, 04; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 04; *Ю. Королев* (Казань) 03; *В. Кочетков* (Винница) 02; *А. Кравченко* (Харьков) 00, 02, 04; *Б. Кругликов* (Харьков) 02—05, 09; *Н. Крылов* (Ленинград) 10; *А. Купчишин* (Алма-Ата) 03; *М.Куринной* (Харьков) 96, 02, 03, 09, 10; *А. Кухарский* (Киев) 10; *Н. Кушлевич* (Москва) 02, 03; *С. Кярас* (Молетай) 98, 02—05; *А. Лазарев* (Москва) 98, 00; *А. Ларкин* (Армавир) 03; *И. Ларцев* (Донецк) 03; *К. Левин* (Киев) 04; *Л. Леняшин* (Ленинград) 03, 08, 10; *М. Либанов* (Ангарск) 10; *О. Лимешко* (Куйбышев) 04, 10; *А. Литвак* (Лениигpад) 96, 02, 03; *М. Литвинов* (Киев) 02, 03; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 96, 04, 08; *В. Ляндин* (Белорецк) 08, 10; *И. Макаров* (Новокузнецк) 96; *Ю. Маринец* (Львов) 96, 98; *Ю. Махлин* (Москва) 02—04; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 04, 08; *З. Мехтиев* (с. Чиликар Даг. АССР) 10; *В. Микщиль* (Ростоа-на-Доиу) 08; *А. Минасян* (Ереван) 02; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 96, 02—04, 08; *Г. Михалкин* (Ленинград) 96, 00, 03, 08, 10; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 03, 04; *Д. Муралашвили* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 08; *Т. Мустафаев* (с. Халафли Аз.ССР) 02, 04; *О. Овецкая* (Донецк) 03, 04; *Е. Орлибасаров* (Алма-Ата) 03; *Д. Пастур* (Харьков) 02, 03, 05, 08, 10; *А. Петрунин* (Ленинград) 02—04; *Я. Печатников* (Ленинград) 02—05; *С. Пиунихин* (Москва) 99, 03; *Т. Поликарпова* (Белорецк) 08, 10; *С. Полинов* (Магнитогорск) 96, 98, 08, 09; *И. Половцев* (Леиинград) 04; *М. Померанцев* (Черкассы) 02, 03, 09, 10; *В. Порошин* (Ленинград) 96; *И. Портной* (Одесса) 03; *А. Пришляк* (Киев) 10; *В. Протасов* (Москва) 10; *В. Пушня* (Харьков) 02—05; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 96, 98—00, 03—05, 09, 10; *Е. Растигеев* (Барнаул) 96; *В. Ратиюк* (Евпатория) 02, 04; *Д. Резман* (Севвстополь) 02; *А. Решетников* (Бахмач) 03; *М. Рзаев* (Баку) 04; *М. Ровинский* (Москва) 08; *А. Розанов* (Киев) 03, 04, 08, 10; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 96, 02—04; *К. Ромец* (Киев) 03; *Н. Ромец* (Кировоград) 10; *А. Ростов* (Винница) 02, 03; *А. Рудницкий* (Рига) 03; *М. Рябов* (Первомайск Горьковской обл.) 03, 04; *С. Савин* (Донецк) 03, 04; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 03, 04; *И. Самовол* (Гайворон) 96, 98, 03, 05; *Б. Самойлов* (Киев) 03; *И. Секлер* (Москва) 03; *К. Семенов* (Киев) 98; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент Даг. АССР) 10; *Р. Сибилев* (Ленинград) 96, 98, 00, 02, 03, 08—10; *И. Симоненко* (Великие Луки) 08; *М. Соколова* (Ленинград) 10; *С. Стасевич* (Брест) 08; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 02—05, 08—10; *В. Судаков* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 10; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 03; *Д. Тамаркин* (Горький) 09, 10; *В. Тарасов* (Алексин) 08; *К. Тищенко* (Минск) 96, 03, 04, 10; *Ю. Томилов* (Виииица) 96, 00, 02—04; *В. Тульчинский* (Киев) 96, 00; *Д. Туляков* (Жданов) 03—05, 09; *М. Фараджев* (Баку) 02; *Н. Федин* (Омск) 96, 04, 10; *С. Фершгерц* (Ташкент) 98, 02, 04, 05; *В. Филимоненков* (Свердловск) 02—04; *Н. Филонов* (Лениигpад) 09, 10; *Е. Финк* (Ленинград) 96, 08—10; *П. Халилов* (с. Худжбала Аз.ССР) 10; *Д. Хачатуров* (Харьков) 10; *М. Хованов* (Москва) 96, 00, 03; *М. Холмянский* *(Москва)* 02, 04; *В. Цапко* (Харьков) 08; *В. Цвиркунов* (Киев) 03, 04; *С. Чебуков* (Симферополь) 96, 98, 00, 02—05; *А. Чевардин* (Челябинск) 10; *Р. Чернявский* (Киев) 02; *В. Чистюхин*

(Продолжение см. на с. 60)

В связи с включением курса «Основы информатики и вычислительной техники» в программу средней школы начиная с 1985—86 учебного года, мы возобновляем регулярные публикации в разделе «Искусство программирования», открытом на страницах «Кванта» еще в 1979 году. Публикуемые нами материалы призваны разъяснять, развивать и углублять школьный курс. Этот учебный год мы начинаем с двух статей члена нашего Редакционного совета академика А. П. Ершова. Основная цель этих статей — научить грамотно записывать алгоритмы. Читая их, следует обратить внимание на слова, набранные курсивом — это специальные термины из информатики, точный смысл которых стоит сверять с учебником.

Компьютер – алгоритм – алгоритмический язык

Академик А. П. ЕРШОВ

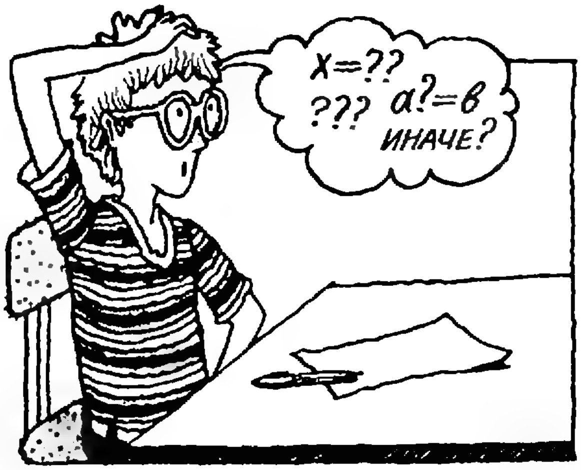
ЭВМ сегодня и завтра

Нет необходимости доказывать, как важны *ЭВМ* в нашей повседневной жизни. Уже сегодня *компьютеры* не только производят всевозможные вычисления, они еще и распределяют авиабилеты, играют в шахматы, рисуют кузовы проектируемых автомашин, сочиняют музыку, судят спортивные соревнования, ставят диагнозы больным, управляют электростанциями. Более того — роль ЭВМ в обществе возрастает все стремительней. Меняется и наше представление о них: это уже не внушительные нагромождения мигающих лампочек в огромных шкафах, а скорее скромные — но элегантные — гибриды телевизора с пишущей машинкой.

А на самом деле ЭВМ — это прежде всего тончайший срез кристалла кремния, размером в почтовую марку, опутанный паутинкой тончайших проводов, который в будущем найдет место практически в каждом промышленном изделии. Научное название такого кристаллика — *микропроцессор*. Промышленный выпуск микропроцессоров, по моему глубокому убеждению,— самое революционное техническое новшество XX века. А по мнению некоторых футурологов в не очень отдаленном будущем оно приведет к тому, что общественное производство будет в основном осуществляться роботами и контролироваться компьютерами, а большая часть населения будет занята составлением программ для их обеспечения.

Так или иначе, люди, трудовая жизнь которых пройдет в основном в двадцать первом веке, не могут быть полноценными членами общества, если они не умеют общаться с компьютером, если они не преодолели порог *второй (компьютерной) грамотности*. Для этой цели в школе введен новый курс «Основ информатики и вычислительной техники».

Сегодня решение научной или практической задачи на ЭВМ — это совместная поэтапная работа человека и машины. Мы начнем с краткого описания основных этапов.



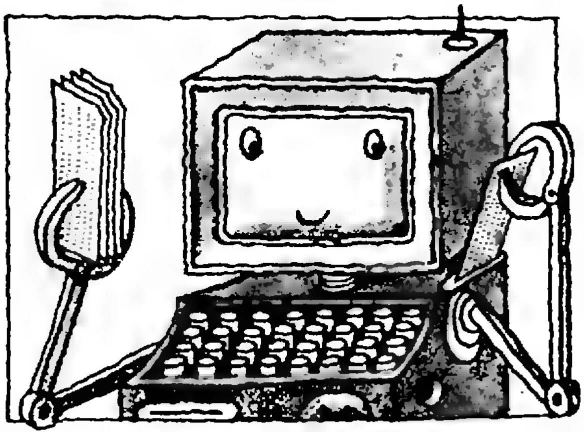
Этапы решения задачи на ЭВМ

1. Создание алгоритма

Прежде всего необходимо найти подходящий алгоритм для решения поставленной задачи. Алгоритмы для серьезных задач обычно придумывают и записывают математики или специалисты по информатике, иногда целые коллективы ученых. А в более простых случаях это сделают *программисты* — профессиональные или ...начинающие. Для многих задач хорошие алгоритмы уже известны — примеры таких алгоритмов имеются в вашем учебнике и будут приводиться на страницах «Кванта», но, как правило, мы будем начинать решение задачи с поиска подходящего алгоритма.

2. Составление программы

Чтобы ЭВМ могла исполнить созданный нами алгоритм, его нужно записать в виде *программы* на одном из тех *языков программирования*, которые понимает данная машина. Программы обычно пишут программисты на таких языках, как *алгол, фортран, бэйсик, паскаль, рапира.* Готовые, часто используемые программы хранятся в *библиотеках стандартных программ.* В «Кванте» на начальных порах мы будем записывать алгоритмы на алгоритмическом языке, основы которого изложены в вашем учебнике.



3. Ввод программы в ЭВМ

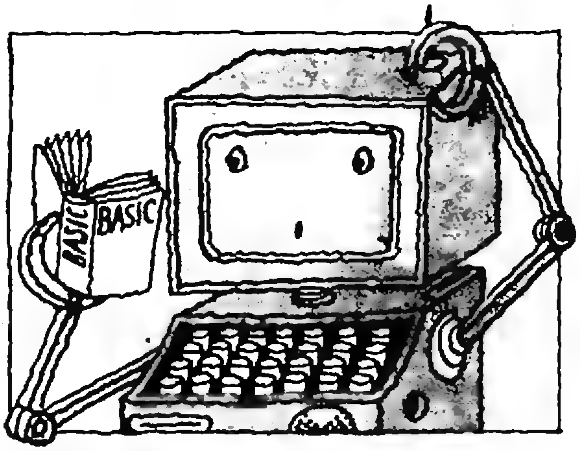
На современном этапе есть два основных способа вводить написанную программу в компьютер. Первый, уходящий в прошлое способ используется при работе в *пакетном режиме*: программа записывается (кодируется) в виде перфорации (дырочек) на *перфокартах*, и колода перфокарт вставляется в машину. Второй способ связан с работой в *диалоговом режиме*: программист или оператор набирает программу на *клавиатуре дисплея* и одновременно следит за правильностью ввода на *экране*.

4. Отладка программы

Обычно оказывается, что в программе есть ошибки (так почти всегда бывает в больших программах). О части ошибок (так называемых *синтаксических ошибках*, или *блохах*) сразу сигнализирует компьютер при вводе программы, другие может обнаружить программист при анализе результатов (*тестирование* или *обкатка* программы). *Отладка* программы — это процесс устранения замеченных в ней ошибок. Делать это «вручную» (без помощи ЭВМ) нелегко: для этого нужно себя поставить на место исполнителя и попробовать «прокрутить программу» в простейших ситуациях.

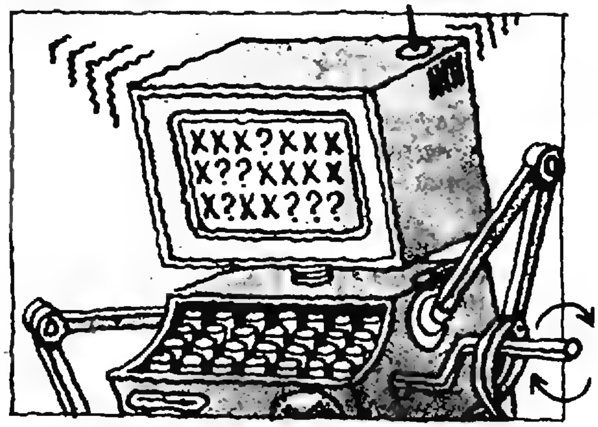
5. Трансляция программы

Чтобы машина могла исполнить введенную в нее программу или найти ошибку, у нее должен быть *транслятор* с того языка программирования, на котором программа написана. Транслятор — как бы электронный переводчик — превращает предписания программы в простейшие операции, непосредственно выполняемые машиной. Хотя создание реальных трансляторов — работа очень сложная, требующая высококвалифицированных *системных программистов*, мы будем делать нечто похожее при работе с микрокалькулятором.



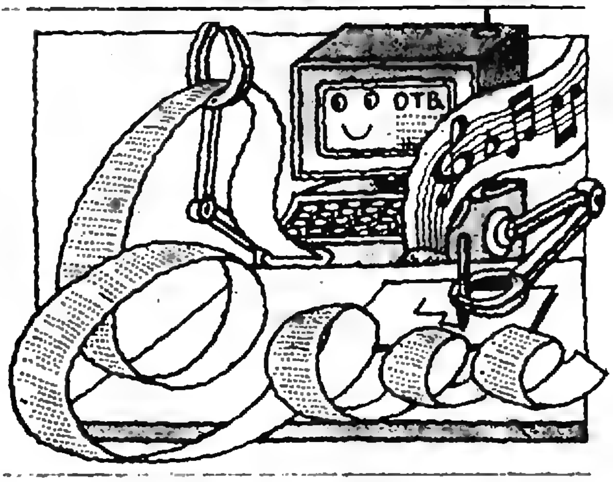
6. Исполнение программы

При традиционном пакетном режиме этот этап работы машина выполняет сама, без помощи человека: с колоссальной скоростью ЭВМ выполняет все операции, предусмотренные оттранслированной программой, одну за другой. В некоторых диалоговых программах в процессе работы компьютер может задавать вопросы пользователю и затем продолжать работу. Так или иначе, на этом этапе хозяйничает машина; здесь сказывается ее преимущество над человеком в скорости, точности, аккуратности.



7. Выдача результата

Современные компьютеры умеют представлять результат исполнения программы в разном виде. Результат (число, текст, таблица, рисунок) может быть высвечен на экране дисплея, напечатан на *АЦПУ (печатающем устройстве)*, нарисован на листе бумаги *графопостроителем*. Некоторые персональные компьютеры снабжены электронным звукомодулятором, на котором они «играют» результат, когда результат — мелодия.



А если нет ЭВМ?

Мы в первую очередь ориентируемся на учащихся, начинающих в этом учебном году заниматься информатикой в школе, еще не оснащенной вычислительными кабинетами. Такие ученики часто спрашивают — зачем же писать программу, если она все равно не будет пропущена на настоящей ЭВМ?

Этот вопрос очень похож на такой — зачем же писать сочинение, если оно все равно не будет отправлено в типографию? И ответ примерно такой же: компьютерной грамотностью можно овладевать и без машины, так же как обычной грамотностью можно овладеть без типографии.

Впрочем, ваши занятия программированием в любом случае не останутся в области чистой теории. Если в вашей школе (или поблизости) нет больших ЭВМ, часть ваших программ можно будет пропускать на *программируемом микрокалькуляторе* (например, на «Электронике БЗ-34» или «МК-52»), который обязательно должен быть у вас в школе.

Однако мы не будем стремиться превратить своих читателей в виртуозов программирования на микрокалькуляторе. Главным для нас будет *поиск алгоритмов*, решающих те или иные задачи, умение записать программу на специальном *алгоритмическом языке*, описанном в вашем учебнике. (Как правило, программировать на микрокалькуляторе мы будем исходя из этой алгоритмической записи, то есть сами будем *транслировать* (переводить) эту запись в коды операций калькулятора.)

Ниже вы ознакомитесь с некоторыми примерами алгоритмов, а в следующей статье мы подробнее поговорим об их записи на алгоритмическом языке.

Алгоритмы

Слово «алгоритм» происходит от имени великого ученого средневековья ал-Хорезми (см. «Квант», 1984, № 8, с. 29), но огромное значение этого понятия прояснилось лишь во второй половине XX века в связи с развитием вычислительной техники и информатики. Определенную роль это понятие играет и в математике (об этом см. «Квант», 1985, № 7, с. 9) — математическая теория алгоритмов примыкает к одной из наиболее изысканных областей математики — математической логике. Однако алгоритмы встречаются и в повседневной жизни, притом на каждом шагу, под такими названиями, как «инструкция», «предписание», «рецепт», «общий способ решений» и тому подобное. Более точно можно сказать, что

> *алгоритм* — это понятное и точное предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на достижение определенной цели или на решение поставленной задачи.

Исполнителем алгоритма может быть человек или автоматическое устройство (компьютер, калькулятор, робот), способное воспринять предписание и выполнить указанные в нем действия.

Примерами алгоритмов являются не только многие обычные математические приемы, такие, как сложение чисел столбиком или алгоритм Евклида для нахождения Н. О. Д., но также и кулинарные рецепты, указания о проезде по городскому транспорту в определенное место, многие руководства по эксплуатации, такие инструкции, как правила пользования междугородным телефоном, отдельные предписания воинского устава. Не всякое предписание, однако, является алгоритмом. Известное из мира сказок «Поди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что», конечно же, нельзя считать алгоритмом: оно недостаточно точно и понятно, не указывает на конкретную последовательность действий. То же можно сказать об обычном приказе разведчику «Действуй по обстановке!» Алгоритм должен предусмотреть все ситуации, которые могут возникнуть при его исполнении, и четко указать, что делать в каждой из них.

Разберем несколько примеров задач и алгоритмов, доставляющих их решения.

Задача нахождения остатка. Даны натуральные числа x и y; требуется найти остаток от деления x на y.

Первый алгоритм (для исполнителя — школьника 4—10 класса):

— Напиши x и y рядом в одну строчку;

— отдели их уголком;

— выполни деление x на y уголком до цифры единиц делимого (x);

— выдай в качестве решения результат последнего вычитания.

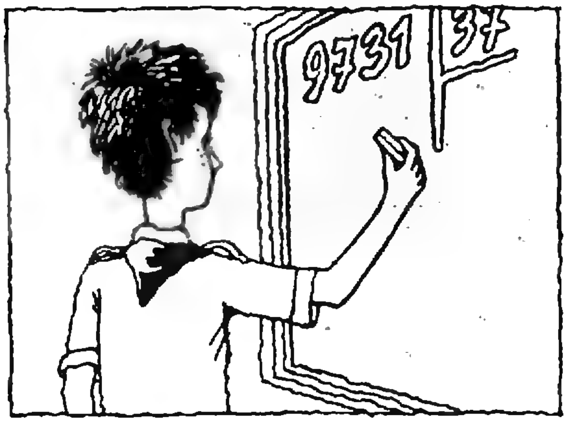
Второй алгоритм (для исполнителя — первоклассника):

— Сравни x и y;

— если $x<y$, выдай x в качестве решения;

— иначе вычти y из x и запомни разность;

— если разность меньше y, выдай ее в качестве решения;



— иначе из разности снова вычти y и продолжай в том же духе, пока очередная разность не окажется меньше y;

— эту очередную разность выдай в качестве решения.

Обсуждение. Первый алгоритм записывается короче и приводит к ответу быстрее, чем второй. Однако первый алгоритм предполагает, что исполнитель владеет делением уголком, и потому не может быть исполнен первоклассником. По этой же причине второй алгоритм лучше, чем первый, как основа программы для компьютера.

Задача о роботе-обходчике. В левом нижнем углу шахматной доски, в некоторых полях которой — ямы, стоит маленький робот-обходчик; с любого поля он может пойти в любое соседнее поле (без ямы), то есть вверх, вниз, вправо, влево; по диагонали робот не ходит; ямы тянутся от левой вертикали, образуя сплошные горизонтальные рвы длиной не более семи полей (см. рисунок); как пройти в ферзи, то есть достичь восьмой горизонтали, не упав в яму?

Первый алгоритм (для слепого робота):

— пойди: вправо; вправо; вправо; вверх; вверх; вправо; вверх; вверх; вправо; вправо; вверх; вверх; вверх; стой.

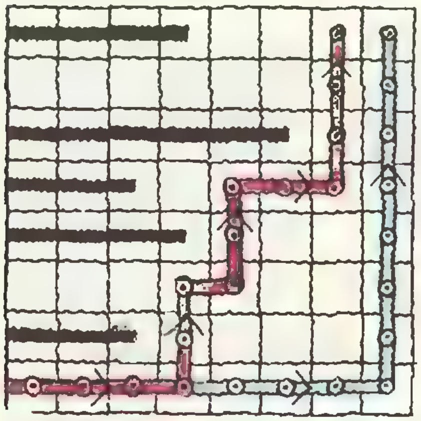
Второй алгоритм (для слепого робота, умеющего считать):

— пойди 7 раз вправо; пойди 7 раз вверх; стой.

Третий алгоритм (для зрячего робота):

— посмотри вверх;

— если сверху свободное поле, сделай ход вверх и вернись к исполнению первой команды;



— иначе сделай ход вправо и вернись к исполнению первой команды.

Обсуждение. Первый алгоритм прост и дает оптимальное решение задачи (по числу ходов), но он специально подобран для данного расположения ям на доске — при другом их расположении робот может упасть в яму! Второй алгоритм универсален в том смысле, что годится для любой системы ям (указанного в задаче типа), но не всегда дает кратчайший по числу ходов ответ; понятно, что второй алгоритм легко переписать для робота, не умеющего считать, — нужно просто повторить слово «вправо» семь раз и слово «вверх» семь раз. Третий алгоритм позволяет достичь восьмую горизонталь за оптимальное число ходов при любой (допустимой по условиям задачи) системе ям, однако после достижения восьмой горизонтали робот еще зачем-то идет вправо, пока не упрется в правый верхний угол доски. Заметим еще следующее: записывая третий алгоритм, мы предполагаем, что при невозможности исполнения команды (в данном случае — команды «шаг вправо» с поля $h8$) робот прекратит работу; если не сделать это предположение, бедный робот *зациклится*, он будет топтаться на месте на поле $h8$ и безуспешно пытаться выполнить первую, вторую, третью команду, а затем снова первую, вторую и т. д.

Упражнения

1. Опишите алгоритм сокращения дробей вида a/b, где $a, b \in \mathbf{N}$. Указание: примените алгоритм Евклида.

2. Опишите алгоритм деления и алгоритм сложения двух дробей a/b и c/d, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$; ответ должен быть несократимой дробью.

3. Опишите алгоритм, который по количеству этажей в многоэтажном доме, числу квартир на одном этаже и номеру квартиры определяет этаж и номер подъезда этой квартиры, а также определяет необходимость пользоваться лифтом (лифтом пользуются только в том случае, когда квартира находится выше второго этажа).

4. На шахматной доске произвольным образом отмечены некоторые клетки (ямы), на которые ходить нельзя. Опишите алгоритм прохода робота с первой горизонтали на последнюю а) в предположении, что путь существует; б) в общем случае, сообщив «прохода нет», если задача не имеет решения.

5. Робот-обходчик занялся альпинизмом. На шахматной доске на каждой из первых семи горизонталей заштриховано 7 или менее клеток, идущих подряд от правого края. Они изображают гору. Как роботу-альпинисту залезть на гору?

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Вокруг «Алисы»

(после долгих раздумий редакция отвечает на вопросы Алисы из «Кванта» № 6)

I Если Кролик бормотал про себя зпт то не могла зпт если же Он бормотал про Себя зпт то могла тчк

П У всех по-разному тчк У кого бежится быстрее зпт потому что думается зпт у кого – наоборот тчк тчк тчк

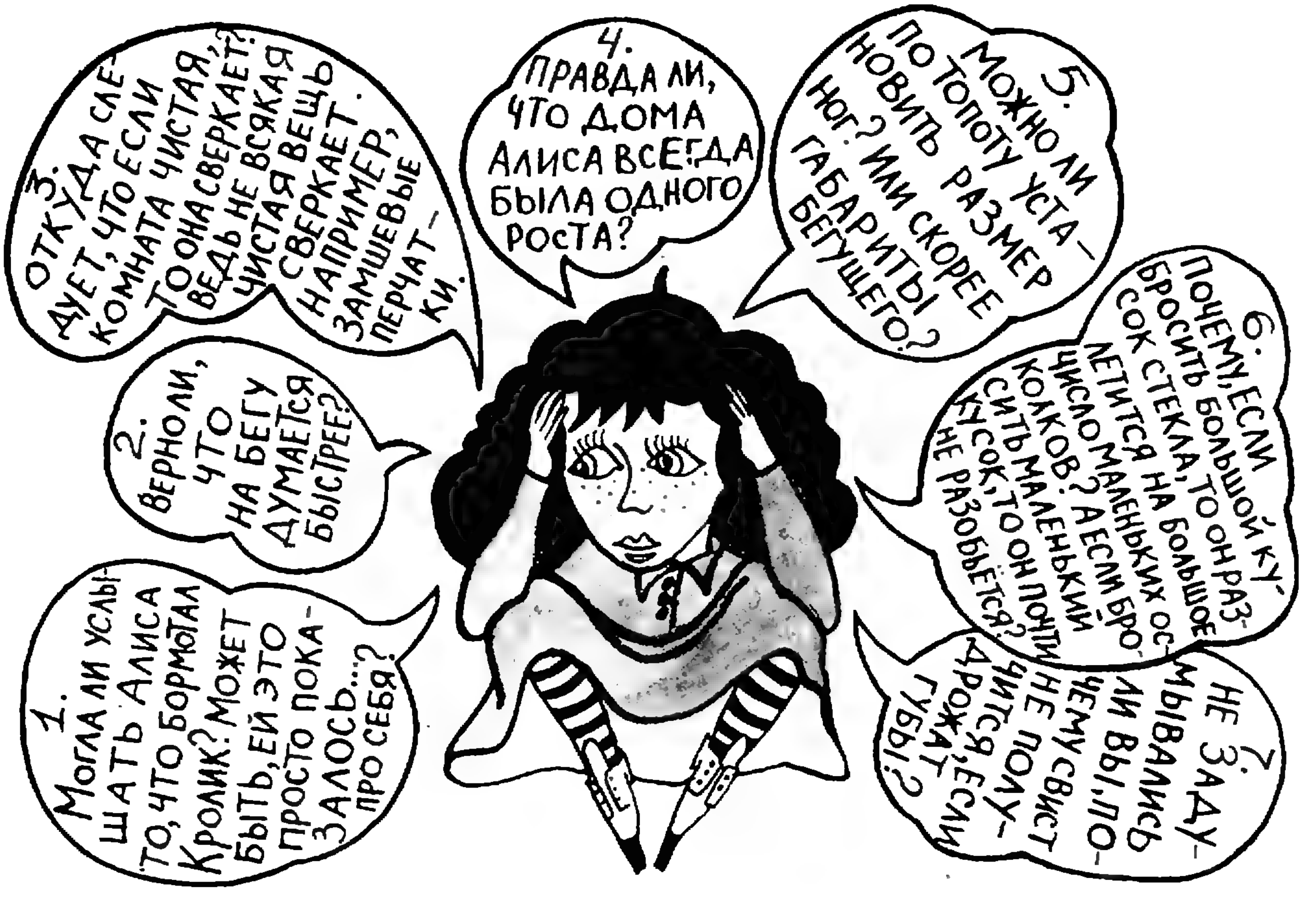
Ш Вовсе ниоткуда и никуда это не следует тчк

IУ Неправда тчк Потому что известно зпт что утром все честные люди (и зпт конечно зпт дети) выше зпт чем вечером тчк

У Как правило зпт чем внезапнее топот и страшнее шепот зпт тем больше габариты тчк тчк тчк

УI Потому что большому куску есть на что ломаться зпт а маленькому не на что тчк

УП Если дрожат губы зпт то скорее можно услышать зпт как стучат зубы тчк тчк тчк


1. МОГЛА ЛИ УСЛЫШАТЬ АЛИСА ТО, ЧТО БОРМОТАЛ КРОЛИК? МОЖЕТ БЫТЬ, ЕЙ ЭТО ПРОСТО ПОКАЗАЛОСЬ...? ПРО СЕБЯ?
2. ВЕРНО ЛИ, ЧТО НА БЕГУ ДУМАЕТСЯ БЫСТРЕЕ?
3. ОТКУДА СЛЕДУЕТ, ЧТО ЕСЛИ КОМНАТА ЧИСТАЯ, ТО ОНА СВЕРКАЕТ? ВЕДЬ НЕ ВСЯКАЯ ЧИСТАЯ ВЕЩЬ СВЕРКАЕТ. НАПРИМЕР, ЗАМШЕВЫЕ ПЕРЧАТКИ.
4. ПРАВДА ЛИ, ЧТО ДОМА АЛИСА ВСЕГДА БЫЛА ОДНОГО РОСТА?
5. МОЖНО ЛИ ПО ТОПОТУ УСТАНОВИТЬ РАЗМЕР НОГ? ИЛИ СКОРЕЕ ГАБАРИТЫ БЕГУЩЕГО?
6. ПОЧЕМУ, ЕСЛИ БРОСИТЬ БОЛЬШОЙ КУСОК СТЕКЛА, ТО ОН РАЗЛЕТИТСЯ НА БОЛЬШОЕ ЧИСЛО МАЛЕНЬКИХ ОСКОЛКОВ? А ЕСЛИ БРОСИТЬ МАЛЕНЬКИЙ КУСОК, ТО ОН ПОЧТИ НЕ РАЗОБЬЕТСЯ?
7. НЕ ЗАДУМЫВАЛИСЬ ЛИ ВЫ, ПОЧЕМУ СВИСТ НЕ ПОЛУЧИТСЯ, ЕСЛИ ДРОЖАТ ГУБЫ?

В этой новой рубрике будут публиковаться заметки, которые познакомят читателей с полупроводниковыми устройствами, лежащими в основе вычислительной техники.

Первое знакомство

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН, кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Наверняка мы не ошибемся, если предположим, что большинство наших читателей лучше представляют себе, что могут делать электронно-вычислительные машины, нежели знают, как эти машины устроены. Многие не только расскажут, какие задачи решаются с помощью ЭВМ, но и продемонстрируют навыки работы с ними. Проделать же некоторые вычисления на микрокалькуляторе способны сегодня практически все школьники старших классов. А вот что там, внутри этих устройств? Что лежит в основе их работы?

Электронные цифровые вычислительные машины появились 40 лет назад, вскоре после окончания второй мировой войны. Машины «Эниак» (США), «БЭСМ-1», «Урал-1» (СССР) и др. содержали несколько десятков тысяч электронных ламп и проделывали 5—10 тысяч операций в секунду.

Современные ЭВМ содержат миллионы полупроводниковых приборов и выполняют десятки миллионов операций в секунду.

Колоссальный прогресс ЭВМ решающим образом связан с развитием физики полупроводников и полупроводниковой техники.

Полупроводниковые приборы — основа современной радиоэлектроники; ЭВМ — самое сложное радиоэлектронное устройство, когда-либо созданное человеком. Схема коротковолнового переносного радиоприемника включает 10—15 полупроводниковых элементов (транзисторов и диодов), цветного телевизора на полупроводниках — более 100. Большая ЭВМ содержит десятки миллионов элементов и намного превосходит все другие устройства по сложности своей внутренней структуры.

И в то же время, это сложнейшее радиоэлектронное устройство состоит из простых элементарных ячеек, называемых логическими схемами. В свою очередь их основой, а следовательно, и основой работы всей машины является один-единственный элемент, обладающий главным свойством: способностью находиться в двух хорошо различимых физических состояниях, одно из которых можно условно назвать «нулем», а другое — «единицей». Физикам известны десятки так называемых «ключевых» приборов, обладающих этим свойством, число таких приборов с каждым годом увеличивается, и на основе любого из них можно, в принципе, построить ЭВМ. Но только в принципе! Реальные компьютеры предъявляют к своему основному элементу целый набор весьма жестких требований.

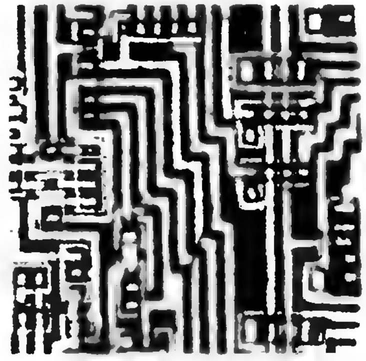
Во-первых, скорость переключения элемента, то есть скорость его перехода из состояния «0» в состояние «1» и обратно, должна быть очень велика, так как она определяет быстродействие всей машины; во-вторых, его размеры должны быть очень малы — ведь элементов в ЭВМ миллионы; в-третьих, по той же причине, потребляемая им мощность и его стоимость должны быть очень низкими; в-четвертых, он должен быть надежен; в-пятых, ..., в-восьмых, ..., в-десятых...

Оказывается, что единственный тип приборов из множества известных сегодня «ключевых» элементов, который удовлетворяет всей совокупности жестких и противоречивых требований современных ЭВМ, — это транзисторы, объединенные в большие и сверхбольшие интегральные схемы (БИС и СБИС).

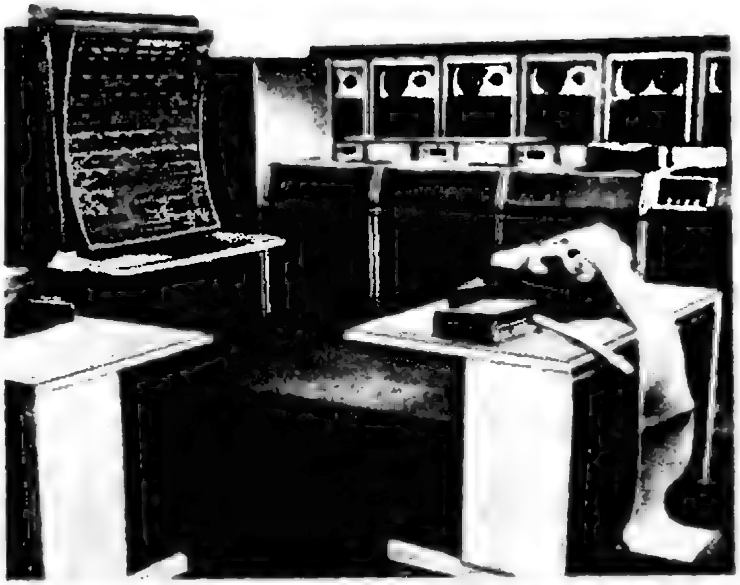
До появления интегральных схем транзисторы создавались следующим образом. На большой кремниевой пластине изготавливалось несколько тысяч транзисторных структур. Далее

Электронные лампы — элементная база ЭВМ первого поколения. Срок службы такой лампы — несколько тысяч часов, объем — несколько см^3. Ламповые ЭВМ весили 20—30 т, потребляли мощность 100—200 кВт.

Транзисторы — основа ЭВМ 2-го поколения. Одна из мощнейших машин этого класса — БЭСМ-6; создана в СССР в 1967 году и эксплуатируется до сих пор. Совершает около 1 млн. операций в секунду. Содержит около 60 тысяч биполярных транзисторов и 200 тысяч диодов.



Идея создавать на полупроводниковой пластине готовую схему, содержащую транзисторы и все необходимые соединения, — интегральную схему (ИС) — возникла в 1952 году и была реализована в 1959 году.



Отечественная ЭВМ ЕС-1060 — одна из самых мощных машин 3-го поколения. Элементная база — ИС на основе биполярных транзисторов. Быстродействие — 3 млн. операций в секунду. Содержит более 10 млн. транзисторов.

ЭЛЕКТРОНИКА
Б3 38
7
8
9
F1
4
5
1
C
CK
=
+

*«Электроника Б3-38» — микрокалькулятор на основе одного кристалла, содержащего 35 тысяч полевых транзисторов. Размер кристалла ~5×
×5 мм². Содержит микропрограммы 34 математических операций. Потребляет менее 600 мкВт, весит менее 50 г.*

пластина разрезалась на множество мелких кристалликов, каждый из которых представлял собой один будущий транзистор. Затем начиналась длинная последовательность трудоемких ручных операций. Кристаллик крепился в специальный держатель, под микроскопом с двух сторон к кристаллу приваривались выводы-проволочки, вся конструкция помещалась в специальный корпус, герметизировалась. И в результате транзистор был готов служить элементом любой радиоэлектронной схемы.

Получалось, что сначала транзисторы отделялись один от другого (когда пластина разрезалась), а затем, при изготовлении схемы, снова соединялись друг с другом.

Идея ИС состоит в том, чтобы изготавливать на пластине одновременно и транзисторы, и необходимые соединения между ними. В результате каждая пластина содержит готовые радиоэлектронные схемы. В корпус помещается теперь не один транзистор, а схема, насчитывающая много (до сотен тысяч) транзисторов и имеющая сравнительно небольшое число внешних выводов. Размеры электронных схем очень сильно уменьшаются, их надежность возрастает.

Если бы знакомый всем микрокалькулятор был собран не на ИС, а на обычных дискретных транзисторах, он был бы размером с письменный стол и выходил из строя каждый час. Электронные наручные часы вообще не могли бы существовать. Да и современные ЭВМ, насчитывающие десятки миллионов транзисторов, были бы практически непригодны: они выходили бы из строя каждые несколько секунд.

В ЭВМ используются ИС, содержащие два основных типа транзисторов: биполярные и полевые.

В наших последующих заметках мы расскажем о принципах работы биполярных и полевых транзисторов и о простейших логических схемах, лежащих в основе действия ЭВМ.

Человеческий мозг может вместить приблизительно 10^{13} единиц информации. Чтобы разместить эту информацию в памяти ЭВМ, в 1960 году потребовалось бы помещение объемом 500 млн. $м^3$.
Если современная скорость сокращения размеров полупроводниковых элементов в ИС сохранится, то в 2050 году эта информация сможет быть размещена в объеме, меньшем, чем объем головы человека.

Задачи юбилейной Московской городской математической олимпиады

В этом году Московская математическая олимпиада проводилась в 48-й раз; в ней приняли участие более 700 школьников. Хотя ее номер и не «круглый», эту олимпиаду можно с полным правом считать юбилейной — первая олимпиада состоялась ровно 50 лет назад. Заключительный тур олимпиады 1985 года прошел 24 марта в Московском университете. Мы приводим предложенные на нем задачи.

7 класс

1. Найти все значения x и y, удовлетворяющие равенству

$$xy+1=x+y.$$

2. Даны пять различных положительных чисел, которые можно разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать?

3. Длины a, b, c, d четырех отрезков удовлетворяют неравенствам $0<a\leqslant b\leqslant c<d$, $d<a+b+c$. Можно ли из этих отрезков сложить трапецию?

4. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырех углов по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью в 1,4 раза большей, чем максимальная скорость зайца?

5. В магазин привезли цистерну молока. У продавца имеются чашечные весы без гирь (на чашки весов можно ставить фляги), а также три одинаковые фляги, две из которых пустые, а в третьей налит 1 л молока. Как отлить в одну флягу ровно 85 л молока, сделав не более восьми взвешиваний?

8 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2.$$

2. Числа a_1, a_2, …, a_{1985} представляют собой переставленные в некотором порядке числа 1, 2, …, 1985. *Каждое число a_k умножается* на его номер k, а затем среди всех полученных 1985 произведений выбирается наибольшее. Доказать, что оно не меньше чем 993^2.

3. На лист бумаги «в клетку» положен бумажный квадрат, площадь которого равна учетверенной площади клетки. Какое наименьшее число узлов может накрывать этот квадрат? (Узел — это точка пересечения линий бумаги; если узел лежит на границе квадрата, то он считается накрытым.)

4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

5. Доказать, что если длина каждой из трех биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $1/\sqrt{3}$.

9 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

2. В некоторой стране 1985 аэродромов. С каждого из них вылетел самолет и приземлился на самом удаленном от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 1985 самолетов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты прямыми.)

3. См. задачу 3 для 8 класса.

4. Доказать, что в любой группе из 12 человек можно выбрать двоих, а среди оставшихся 10 человек еще пятерых так, чтобы каждый из этих пятерых удовлетворял следующему условию: либо он дружит с обоими выбранными вначале, либо не дружит ни с одним из них.

6. Доказать, что любое число 2^n, где $n=3, 4, 5, \ldots$ можно представить в виде $2^n=7x^2+y^2$, где x и y — нечетные числа.

10 класс

1. Решить уравнение

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}.$$

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. Назовем «сложностью» данного числа наименьшую длину числовой последовательности (если такая найдется), которая начинается с нуля и заканчивается этим числом, причем каждый следующий член последовательности либо равен половине предыдущего, либо в сумме с предыдущим составляет 1. Среди всех чисел вида $m/2^{50}$, где $m=1, 3, 5, \ldots, 2^{50}-1$, найти число с наибольшей «сложностью».

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причем объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. Доказать, что если расстояния между скрещивающимися ребрами тетраэдра равны h_1, h_2, h_3, то объем тетраэдра не меньше чем $h_1h_2h_3/3$.

Публикацию подготовили
С. Б. Гашков, И. Н. Сергеев

Новосибирская областная олимпиада по физике

8 класс

1. Бочку конической формы, частично заполненную водой, закрывают двумя одинаковыми пробками, прикладывая к ним одинаковые силы (рис. 1). Рабочий перенес бочку с одного места на другое, держа ее широким днищем вниз, а затем медленно перевернул бочку узким днищем вниз. После этого пробка вылетела, и вода стала вытекать из бочки. Почему вылетела пробка?

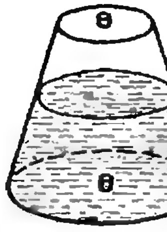


Рис. 1.

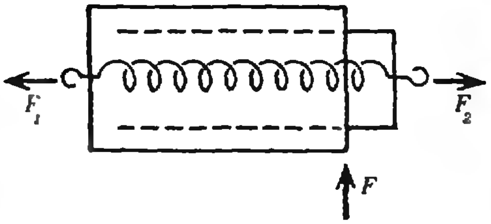


Рис. 2.

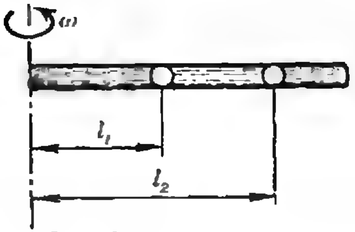


Рис. 3.

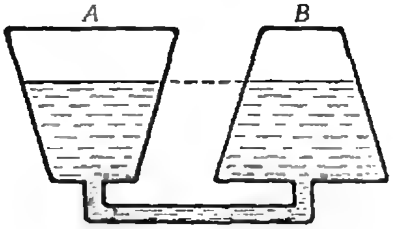


Рис. 4.

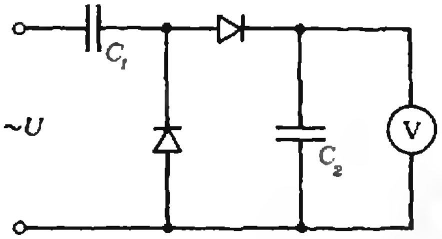


Рис. 5.

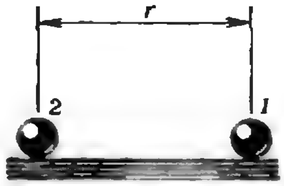


Рис. 6.

2. Гибкая цепочка с мелкими звеньями связывает два небольших шарика, значительно более массивных, чем любое из звеньев цепочки. Один из шариков удерживают в центре гладкого горизонтального стола, имеющего форму круга, а другой вместе с небольшим куском цепочки свешивается с его края. Считая, что высота стола больше длины цепочки, определите, где будут находиться точки первого соприкосновения шариков с полом, если предоставить систему самой себе: 1) внутри круга, имеющего стол своей «крышей»; 2) вне упомянутого круга; 3) на его границе. Трением пренебречь.

3. Тело начинает скользить вниз по шероховатой наклонной плоскости и в нижней точке ударяется об упругую стенку, перпендикулярную направлению его движения. После удара тело поднялось до половины первоначальной высоты. Считая, что при ударе модуль скорости не изменился, определите, что заняло больше времени: подъем или спуск. Во сколько раз?

4. Небольшое тело массой m, подвешенное на невесомой нити, отклоняют от положения равновесия на угол α и отпускают. Определите натяжение нити в первый момент времени.

5. Динамометр представляет собой два цилиндра, соединенных легкой пружиной (рис. 2). Найдите отношение масс этих цилиндров, если при приложенных к ним силах F_1 и F_2 показание динамометра равно F.

9 класс

1. Вагончик монорельсовой дороги имеет двигатель, способный развивать мощность $N=100$ кВт. Вагончик начинает движение с одной станции и останавливается на другой. Найдите минимальное время, необходимое для этого. Коэффициент трения колес о рельс $\mu=0{,}2$. Расстояние между станциями $l=800$ м, масса вагончика 100 кг. Сопротивлением воздуха при движении пренебречь.

2. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, сообщающегося с атмосферой, если в качестве газа первый раз взять водород, а второй раз — гелий? Массой оболочки шара пренебречь.

3. Тонкая закрытая трубка заполнена жидкостью плотности ρ и вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из концов трубки (рис. 3). Давление жидкости в трубке измеряют двумя манометрами, расположенными на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения. Какова будет разность $\Delta p=p_2-p_1$ показаний манометров при равномерном вращении трубки с угловой скоростью ω?

4. См. задачу 5 для 8 класса.

5. На некотором участке шоссе автомобили в колонне уменьшают свою скорость от v_1 до v_2. Какова должна быть начальная дистанция между автомобилями, чтобы они не сталкивались? Длина каждого автомобиля l.

10 класс

1. Система состоит из двух сосудов A и B, соединенных между собой длинной тонкой трубкой и заполненных однородной жидкостью (рис. 4). С системой проводят два опыта. В первом опыте нагревают сосуд A, во втором — B. Будет ли при этом перетекать жидкость по трубке? Если да, то в какую сторону? Расширением сосудов и трубки при нагревании, а также теплопроводностью системы пренебречь.

2. Груз массой M был прицеплен к нижнему концу вертикальной недеформированной пружины и отпущен без начальной скорости, после чего стал совершать вертикальные гармонические колебания. Во сколько раз изменится период и амплитуда колебаний, если на груз без толчка сядет жук, масса которого m составляет 96 % массы груза? Посадка без толчка означает, что в момент соприкосновения скорости жука и груза одинаковы. Рассмотреть случаи посадки: 1) в самой верхней и 2) в самой нижней точках траектории.

3. Прибор, схема которого приведена на рисунке 5, подключен к сети переменного тока с напряжением $U=220$ В. Какое напряжение покажет вольтметр по прошествии достаточно большого промежутка времени?

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Два небольших одинаковых тела массой m каждый заряжены одинаковыми зарядами q и находятся на расстоянии r друг от друга (рис. 6). Сначала отпустили тело *1*. Когда оно удалилось на расстояние $2r$, отпустили также и тело *2*. Найдите скорости тел на большом расстоянии друг от друга. Трения нет.

Публикацию подготовил *В. Г. Харитонов*

Список читателей, приславших правильные решения.

(Начало см. на с. 49)

(Харьков) 96, 00; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 96, 03; *С. Шейнин* (Молодечно) 00; *А. Ширинкин* (Березники) 03; *П. Шрабштейн* (Москва) 02; *Б. Шраер* (Лениград) 96, 02—04; *В. Шульга* (Евпатория) 02, 04; *А. Эфендиев* (п. Маразы Аз ССР) 10; *Е. Юдицкий* (Киев) 96.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 12, 21; *А. Абибуллаев* (Ташкент) 21; *И. Абрамчук* (Винница) 15, 17, 21, 22; *М. Албегов* (Москва) 22; *Д. Алтаев* (Чимкент) 21; *С. Анатольев* (Ярославль) 8, 21, 22; *М. Андронов* (Фрунзе) 21; *Ю. Антимиров* (Рига) 21; *В. Апальков* (Харьков) 8, 9, 12, 17, 21; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 9; *С. Бакин* (Орел) 21; *А. Барабанов* (Киев) 21; *А. Барабаш* (Канев) 8; *Д. Барц* (Харьков) 15, 22; *К. Баталин* (Нижний Тагил) 12; *А. Башлаков* (Москва) 12, 16, 17, 21, 22; *К. Бедов* (Челябинск) 8, 15, 16, 21, 22; *А. Белопольский* (Киев) 9, 16, 21, 22; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 8, 9, 12; *П. Бенедюк* (Пятигорск) 8, 9, 12, 17, 21, 22; *А. Беренгольц* (Кишинев) 21; *В. Березский* (Киев) 8, 9, 21; *О. Бесман* (Алма-Ата) 21; *А. Беспалько* (Сумы) 8; *Н. Блоцкий* (Запорожье) 21, 22; *С. Бобылев* (Березники) 9; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 21; *Л. Боднар* (Винница) 21, 22; *С. Бондаренко* (Волгоград) 21; *Э. Бондаренко* (Полтава) 9, 12; *В. Борисов* (Свердловск) 21; *Ю. Боровский* (Киев) 8, 9, 21; *Е. Боширова* (к-з «Победа» Нарынского р-на УзССР) 8; *С. Братченко* (Торез) 8, 12; *Д. Будько* (Белгород) 21; *М. Валиев* (Самарканд) 21; *Ш. Валитов* (Ташкент) 22; *И. Ванин* (Москва) 22; *А. Васильев* (Красноярск) 8; *Д. Вент* (Тулв) 9, 22; *И. Верный* (Киев) 8, 9, 21, 22; *С. Винтовкин* (Свердловск) 8, 12, 21, 22; *К. Вохолаз-Ихозов* (Сумгаит) 21, 22; *Г. Габададзе* (Тбилиси) 22; *И. Гаврик* (Часов Яр) 8, 9, 16; *А. Гамаюнов* (Полтава) 22; *О. Гендельман* (Харьков) 21, 22; *С. Гершиков* (п. Першотравнсвое Донецкой обл.) 15, 21; *М. Гершкович* (Тбилиси) 21; *М. Годин* (Ленинград) 8; *А. Голев* (Пущино) 8; *Л. Гольдштейн* (Киев) 8, 9, 21, 22; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 12, 21; *С. Гордеев* (Волгодонск) 22; *С. Горелик* (Челябинск) 21; *М. Готман* (Киев) 8, 12; *В. Гринберг* (Москва) 8, 9, 15, 16, 22; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *А. Гущин* (Астрахань) 21; *Д. Дворников* (Донецк) 8; *О. Денисов* (Хабаровск) 21; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 8, 21, 22; *А. Донченко* (Киев) 21; *В. Другаков* (д. Любачин Брестской обл.) 21; *Д. Ежиков* (Минск) 22; *Н. Ершов* (Козьмодемьянск) 21, 22; *С Ефремов* (Запорожье) 9, 16, 17; *А. Жариков* (Киев) 8, 9, 12, 22; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *К. Жихарев* (Жданов) 22; *В. Заводяный* (с. Калининское Херсонской обл.) 21, 22; *П. Задорожный* (Киев) 22; *Д. Зайцев* (Киев) 8; *Л. Запольский* (Москва) 21; *К. Захаров* (Фрунзе) 21, 22; *К. Зимин* (Запорожье) 22; *Б. Зингерман* (Самарканд) 21, 22; *А. Зозуля* (Винница) 21; *М. Иваницкий* (с. Цвитова Ивано-Франковской обл.) 8; *И. Иванов* (Калуга) 21; *С. Иванов* (Уфа) 8, 18, 21, 22; *А. Игнатов* (Тула) 22; *П. Кадурин* (Киев) 21; *В. Калацкий* (Солигорск) 8; *И. Кальчевский* (Омск) 21, 22; *В. Каменский* (Калинин) 22; *Н. Камнева* (Алма-Ата) 21; *А. Камышанский* (Алма-Ата) 21; *В. Капович* (Хабаровск) 21; *А. Карнаухов* (Устинов) 22; *Д. Кашпер* (Киев) 22; *М. Кельмансон* (Москва) 8, 12, 15, 16, 21, 22; *В. Кибук* (Ровно) 8, 17, 22; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 15; *В. Киреев* (Киев) 22; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *П. Кларк* (Тула) 15, 21; *А. Климачев* (Минск) 8, 9; *А. Климов* (Донецк) 21; *В. Княгницкий* (Крушаны) 8, 12; *Ф. Кожевников* (Ставрополь) 17, 21; *Ю. Кондратенко* (Киев) 8; *В. Корилюк* (п. Сосница Черниговской обл.) 8; *С. Короткий* (Целиноград) 22; *Ю. Костив* (Львов) 21; *А. Краев* (Харьков) 21; *М. Кудряшев* (Москва) 12, 16, 17, 22; *Л. Кулинский* (Киев) 17, 22; *А. Курачев* (Новосибирск) 21; *П. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *А. Левенштейн* (Донецк) 8, 21, 22; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 8, 17; *Л. Лиознов* (Москва) 8, 18, 21; *В. Литвин* (Днепропетровск) 21; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 8; *Ю. Лобзаков* (Киев) 22; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 9; *Е. Лозовой* (Киев) 22; *В. Локтин* (Харьков) 21; *К. Лопин* (Фрунзе) 8, 21; *М. Лутохин* (Куйбышев) 22; *К. Луценко* (Донецк) 15, 21; *П. Лушников* (Москва) 9, 12, 15, 16, 21, 22; *О. Мазяр* (Львов) 8, 9, 21, 22; *А. Максимов* (Ташкент) 9, 21; *М. Маргулис* (Харьков) 22; *О. Марова* (Канев) 8, 21; *Р. Марченков* (Рязань) 22; *А. Мастыкин* (Минск) 8; *Ю. Махлин* (Москва) 8; *З. Мачарадзе* (Тбилиси) 21; *П. Медведев* (Горький) 8, 12; *С. Медников* (Баку) 21; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 8; *В. Меньков* (Мончегорск) 12; *В. Микщиль* (Ростов) 21; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 8; *А. Мищаненко* (Новосибирск) 15, 21; *И. Мороз* (п. Мизоч Ровенской обл.) 22; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 8, 17; *С. Мягчилов* (Одесса) 8, 15, 16, 21, 22; *О. Нагаев* (Железнодорожный Московской обл.) 21; *А. Надточий* (Киев) 22; *С. Настенко* (Киев) 21; *А. Недачин* (Киев) 8, 21, 22; *С. Некрасов* (Каменск-Уральский) 8; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 21; *Т. Никольская* (Донецк) 21, 22; *И. Обижаев* (Ташкент) 21, 22; *И. Оводов* (п. Менделеево Московской обл.) 21; *К. Овчаренко* (Днепродзержинск) 8, 12; *В. Овчаров* (Шостка) 21; *А. Онуфриев* (Москва) 8; *О. Осауленко* (Киев) 9, 21; *А. Павленко* (Борисоглебск) 21; *А. Павлыгин* (Киев) 8; *Р. Паламарчук* (Нежин) 17, 21, 22; *А. Парнецкий* (Минск) 21, 22; *Ю. Пастухов* (Омск) 21, 22; *А. Перепеличный* (Владимир) 8, 9; *Е. Петров* (Минск) 22; *Д. Пименов* (Щелковский р-н Московской обл.) 21; *Л. Пилягин* (Вологда) 22; С. *Пиунихин* (Москва) 8, 9, 17, 22; *В. Плотников* (Курск) 22; *И. Погорелов* (Донецк) 21; *А. Поляков* (с. Первомайское ЧувАССР) 22; *В. Поляков* (Кстово) 21; *М. Померанцев* (Черкассы) 21; *О. Посудневский* (Береза) 8, 9; *О. Потапова* (Фрунзе) 21, 22; *А. Прохоров* (Херсон) 21, 22; *А. Пушков* (Москва) 21, 22; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 16; *И. Раджабов* (с. Хив Даг.АССР) 21; *Л. Рафаилов* (Баку) 21; *С. Рахамов* (Казань) 8, 12, 17, 22; *А. Розанов* (Киев) 17; *В. Романенко* (Жданов) 22; *Н. Ромец* (Кировоград) 22; *С. Росл* (Минск) 22; *А. Ростов* (Винница) 9, 21, 22; *А. Рудницкий* (Рига) 21, 22; *М. Рудык* (Винница) 8, 9, 15, 17; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 8, 9, 21, 22;

(Окончание см. на с. 64)

Физико-математическая конференция школьников

16 марта 1985 года в физико-математической школе-интернате при МГУ состоялась научная конференция школьников.

Участники конференции — ученики 9-х и 10-х классов ФМШ при МГУ, 57-й, 179-й, 444-й школ г. Москвы, а также ЗФШ при МГУ — рассказали о самостоятельных исследованиях, которые они проводили под руководством преподавателей своих школ, а также сотрудников Московского университета, Института прикладной математики АН СССР и других научных институтов.

Конференцию открыл председатель ее жюри директор ФМШ при МГУ кандидат физико-математических наук В. Л. Натяганов, пожелавший участникам конференции успехов и отметивший, что главное в их работе даже не конечные результаты (в наше время трудно ожидать от школьников серьезных научных открытий), а то приобщение к науке, к ее духу и к самостоятельному творчеству, которое очень пригодится им в дальнейшем.

Затем состоялось пленарное заседание, на котором был прочитан доклад М. Ерикова (ФМШ при МГУ, 10-й класс) «О принципе Ферма в оптике». Автор доклада исследовал возможности применения принципа Ферма для анализа оптических систем, изучаемых в школьном курсе физики. Он не только собрал и обобщил материал по этой теме, но и получил новые интересные результаты.

Дальнейшая работа конференции проходила в 3-х секциях. На заседаниях секций было прочитано 22 доклада: 8 по математике и 14 по физике.

Все 8 докладов на секции математики были весьма интересными.

Доклады В. Садова (школа № 57) «О моделировании одного физического эксперимента», М. Кудряшова и И. Балабана (школа № 179) «Полет на Луну» и В. Волокитина (школа № 179) «Об одном методе численного решения уравнения Риккати» выделялись своей прикладной направленностью и были посвящены решению с помощью современных ЭВМ задач, непосредственно связанных с серьезными практическими проблемами. Эти работы были выполнены под руководством сотрудников и на вычислительных машинах ИПМ АН СССР. Приятно отметить, что авторы докладов обнаружили незаурядные для школьников познания в области прикладной математики, а также умение программировать на современных ЭВМ.

Остальные пять докладов, выполненные учениками ФМШ при МГУ, были посвящены различным разделам «чистой» математики.

В. Роганов в своем докладе «О некоторых обобщениях теоремы Эйлера» выяснил условия, которым должны удовлетворять радиусы r и R вписанного и описанного кругов выпуклого n-угольника (разумеется, речь идет о многоугольниках, одновременно вписанных и описанных около окружности) и расстояние d между центрами этих кругов. По теореме Эйлера для треугольника $d^2=R^2-2Rr$. Докладчик получил обобщения этой теоремы для $n>3$.

В докладе О. Басова «Игры и группы» шла речь о задачах, позволяющих разобраться в структуре очень популярных сейчас головоломок типа кубика Рубика. С. Пиртли в докладе «Функциональные корни» выяснил, при каких условиях данная непрерывная функция $f(x)$ может быть представлена в виде $h(h(x))=f(x)$, где h — некоторая непрерывная функция. Оказалось, что достаточным условием здесь является возрастание функции h.

Приведены примеры, когда функции h не существует. В целом же задача о существовании «функциональных квадратных корней» еще далека от своего решения. Например, не ясно, существует ли дифференцируемая функция $h(x)$, для которой $h(h(x))=\sin x$.

С. Чепанов и Н. Шамаров исследовали разрешимость диофантовых уравнений вида $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{N}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно различные натуральные числа, а N — натуральное число. В некоторых частных случаях ими получены любопытные результаты.

В докладе А. Слепухина «О преобразовании плоских графов» была доказана, по-видимому, новая теорема из теории графов!

Очень интересными и содержательными были доклады на двух физических секциях.

В докладах А. Солдатова «Оценка энергии связи молекул жидкости по давлению насыщенных паров», Ю. Прохорова «Оценка энергии связи молекул воды в ассоциациях по температурному расширению воды» и В. Лущикова «Об одной безразмерной константе, характеризующей жидкость» авторами получены новые интересные результаты. Следует отметить, что для анализа экспериментальных кривых авторы первых двух докладов использовали ЭВМ, причем во втором докладе программа для ЭВМ была достаточно сложной. Большой интерес участников секции вызвал также доклад В. Костюнина «Проверка законов движения тел на примере планеты Венера». В докладе автор использовал для обработки свои собственные наблюдения, причем для облегчения наблюдений им был сконструирован оригинальный прибор.

Очень интересным был доклад И. Тузова «Экспериментальное изучение ячеек Бенара в жидких средах». Эту работу характеризуют фундаментальность и тщательность проведенного исследования. В докладе С. Козырева «О пределе скорости снарядов, вылетающих из огнестрельного орудия» показано, что при использовании обычных взрывчатых веществ существует некоторая предельная скорость движения снаряда ($v\sim10$ км/с). Эта скорость велика, но ее недостаточно для отправки снаряда, например, на Луну. В докладе Д. Ищенко «О механической устойчивости башен в поле сил тяжести» автор сравнительно просто получил оценку верхнего предела высоты башен, не используя сложного аппарата, с помощью которого обычно анализируется это явление. Интересен был также доклад М. Кузнецова и О. Фоминова «Некоторые вопросы поведения диэлектриков в электрическом поле».

Перечисленные доклады выполнены учениками ФМШ при МГУ под руководством преподавателей школы и сотрудников физического факультета МГУ.

Сильное впечатление произвел доклад Олега Козловского (школа №444) «Баротропная модель атмосферы». В этой работе был теоретически рассмотрен вопрос об образовании атмосферных вихрей — циклонов в атмосфере Земли с учетом ее суточного вращения. Автор проявил хорошее владение аппаратом гидродинамики, причем численные оценки, характеризующие развитие циклона, были проведены на ЭВМ. Полученные результаты, в целом, правильно описывают основные черты развития циклона. Нам кажется, что эта работа представляет научный интерес. Очень интересным был также обзорный доклад С. Фролова (школа № 444) «Возобновляемые источники энергии».

Объем заметки не позволяет нам изложить здесь темы всех докладов. Отметим только, что все они были интересными. Вообще на конференции господствовал дух творчества, увлеченности наукой.

В ее работе приняли участие научные сотрудники ИПМ АН СССР, МГУ, члены редколлегии и сотрудники редакции журнала «Квант».

В дальнейшем эта конференция станет традиционной, и мы надеемся на расширение состава и географии ее участников.

Преподаватели ФМШ при МГУ
А. В. Белов, А. А. Егоров

Ответы, указания, решения

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

Решения задач (1—8)

1. Возьмем на прямой a две точки A и B, вне плоскости α — точку C, и рассмотрим плоскость $\beta=ABC$. Возьмем точку D вне плоскости β и рассмотрим плоскость $\gamma=BCD$. Плоскости γ и α пересекаются по прямой d, отличной от прямой $a=AB$ — иначе точка D лежала бы в плоскости β. Значит, любая точка E прямой d, отличная от B, удовлетворяет требованиям задачи: $E \in \alpha$, $E \notin a$.

В этом решении последовательно используются аксиомы и теоремы (проследите!): I_1, C_1, I_2, 14.3; C_1, 14.2 (где?!), I_2, 14.3; опять 14.3 (где?!) и C_2; наконец, еще раз 14.3 (или 14.1, но с дополнительными рассуждениями). Конечно, как и в остальных задачах, возможны и другие решения.

В серии задач 2—4 проще начать с последней.

4. Возьмем в пространстве две различные точки A и B («аксиома 0»!). Рассмотрим прямую AB и возьмем точку C вне AB (аксиомы I_2 и I_1). Тогда точки A, B, C не лежат на одной прямой (аксиома I_2). Рассмотрим плоскость ABC (теорема 14.1) и возьмем точку D вне нее (аксиома C_1). Тогда точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости (ни в какой плоскости — иначе, согласно теореме 14.3, эта плоскость совпадала бы с ABC и точка D лежала бы в плоскости ABC, в противоречии с ее выбором).

2, 3. Построим точки A, B, C, D так, как в решении задачи 4. Тогда плоскости ABC и ABD различны и пересекаются, а прямые AB и CD не лежат в одной плоскости.

5. а) Пусть a — данная прямая. Возьмем точку B вне a и проведем через a и B плоскость (теорема 14.1). Требуемое доказано.

б) Пусть a — данная прямая, β — только что построенная плоскость. Возьмем точку C вне β — тогда $C \notin a$ и через a и C проходит отличная от β плоскость.

в) Пусть a — данная прямая, а точки B, C и плоскости β, γ — построенные выше, в пп. а) и б). Тогда прямая BC не пересекается с прямой a (иначе a и BC лежали бы в одной плоскости, и плоскости β, γ совпадали бы), поэтому через прямую a и любую точку A прямой BC можно провести плоскость — обозначим ее $\alpha(A)$. Для различных точек A — скажем, A_1 и A_2, соответствующие плоскости — $\alpha(A_1)$ и $\alpha(A_2)$ — *различны*, поскольку в противном случае прямые a и A_1A_2, то есть a и BC, лежали бы в одной плоскости, и плоскости $\beta=\alpha(B)$ и $\gamma=\alpha(C)$ совпадали бы. На любой прямой существует бесконечно много (различных) точек (это следует из аксиомы откладывания отрезков IV и бесконечности множества чисел!), так что через данную прямую a можно провести *бесконечно много* различных плоскостей (это указанные плоскости $\alpha(A)$).

6. Если a — данная прямая, возьмем точки A, B на a, точку C — вне a. Рассмотрим плоскость $\alpha=ABC$ и возьмем точку D вне α. Тогда плоскость $\beta=BCD$ отлична от α и поэтому пересекает прямую $a=AB$ в одной точке — в точке B.

7. Если α — данная плоскость, возьмем точки $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. Тогда прямая $a=AB$ будет пересекать плоскость α в единственной точке — A.

8. Фактически эта задача уже была решена при доказательстве утверждения задачи 5, *в*. Краткое рассуждение: если точки A, B, C и D выбрать как в задаче 6, то прямая $d=CD$ не лежит в одной плоскости с данной прямой $a=AB$, ибо, согласно своему выбору, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Ответы на вопросы (I—III)

I. Не рассмотрен случай, когда все четыре точки лежат на одной прямой (тогда теорема 14.1 формально не применима). Здесь можно заметить, что через прямую (и наши четыре точки) можно провести плоскость (задача 5,*а*) из статьи), так что в указанном случае также приходим к противоречию с условием задачи.

II. Требование, чтобы прямая c не проходила через точку A пересечения прямых a и b, существенно используется в решении. Из него следует, что точки M и N пересечения c с a и b различны, поэтому можно применить теорему 14.2.

III. В учебнике в доказательстве теоремы 14.1 говорится: «... *любые три общие точки*...» (с. 176). Слово «*три*» здесь ни при чем — оно осталось от прежнего доказательства (из учебника 1981 года издания).

Новосибирская областная олимпиада по физике

8 класс

1. При переворачивании бочки узким днищем вниз уровень воды в бочке повышается; следовательно, повышается и давление на нижнюю пробку.
2. Оба шарика коснутся пола вне упомянутого в условии круга.
3. Время спуска в 2 раза больше времени подъема.
4. $T=mg\cos\alpha$. Указание. В первый момент ускорение тела перпендикулярно нити.
5. $m_1/m_2=(F_1-F)/(F-F_2)$.

9 класс

1. $t_{\min}=2\sqrt{l/(\mu g)}=40$ с. Указание. Половину пути вагончик разгоняется с ускорением $a_{\max}=\mu g$, а половину — тормозится с тем же (по модулю) ускорением. Такое движение возможно, поскольку $N \geq F_{\text{тр}}v_{\max}=\mu mg\sqrt{l\mu g}$.
2. $\dfrac{F_{\text{п}1}}{F_{\text{п}2}}=\dfrac{M_{\text{возд}}-M_{\text{H}_2}}{M_{\text{возд}}-M_{\text{He}}}=1{,}08$.
3. $\Delta p=p_2-p_1=\rho(l_2^2-l_1^2)\omega^2/2$.
5. $l_0=l(v_1/v_2-1)$.

10 класс

1. В обоих случаях жидкость будет перетекать из сосуда B в сосуд A.
2. Период колебаний в обоих случаях увеличится в $n=\sqrt{1+m/M}\approx 1{,}4$ раза. Амплитуда колебаний изменится в случае 1) в $n_1=1+m/M=1{,}96$ раза, а в случае 2) — в $n_2=1-m/M=0{,}04$ раза.
3. По прошествии достаточного большого промежутка времени конденсатор емкостью C_2 заряжается до напряжения, равного двум амплитудным значениям напряжения в сети:

$$U_{\text{к}}=2U_{m}=2\sqrt{2}\,U\approx 620 \text{ В}.$$

5. Воспользовавшись законами сохранения энергии и импульса, найдем

$$v_1=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\sqrt{\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 mr}},\quad v_2=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\sqrt{\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 mr}}.$$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. См. рис. 1.
2. Очевидно, что С=1, а Б=9, отсюда 2А=111−99=12. Таким образом, А=6.
3. Мороженое Маши все время будет окружать воздух, имеющий комнатную температуру, а мороженое Павлика будет окружать воздух, охладившийся от воздействия мороженого. Поэтому мороженое Павлика не растает дольше.
4. Из первого условия следует, что дерево, которое у Вити было первым, у Коли было четырнадцатым; значит, дерево, которое у Вити было последним, у Коли было тринадцатым. Отсюда следует, что разность между девяносто четвертым и последним деревом по счету Вити такая же, как разность между седьмым и тринадцатым деревом по счету Коли. Таким образом, последнее дерево имеет номер 94+13−7=100.
5. См. рис. 2.

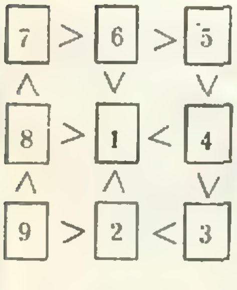


Рис. 1.

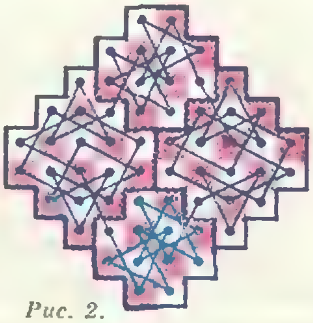


Рис. 2.

Фестиваль задач

(см. «Квант» № 8)

США. «Вашингтон» — это парусник, порт его отправления — Нью-Йорк, плывет он на Бермуды.

«Линкольн» — теплоход, следовавший из Ньюпорта в Галифакс.

«Джефферсон» — пароход, следовавший из Лондона в Бостон.

Австралия. Младшему ребенку 5 лет.

ГДР.

$$\begin{array}{r} 12345678 \\ -\,12325551 \\ \hline 20127 \end{array}$$

Болгария. 150 км.

Австрия. См. рисунок 3.

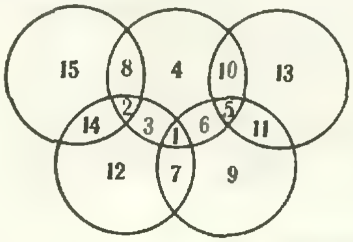


Рис. 3.

Югославия. 1792+8562=10354 и 1753+8493=10246.

Бельгия. Получите соотношение $a^2=b^2+c^2+bc$.

Великобритания. Пусть a — число, стоящее в центре выделенного квадрата. Тогда легко видеть, что каждая из указанных сумм равна $3a$.

Египет. 200.

Греция. 12.

Индия. 16 или 48.

Польша. $7744=(88)^2$.

Чехословакия. 24.

СССР. 1 февраля — в Ленинграде, 8 февраля — в Риге, 1 марта — в Пскове, 8 марта — во Владимире.

Билль вылетает в трубу

(см. «Квант» № 6)

Задачи

1. Разбойнику следует сказать: «Вы меня повесите». Тогда Герцогиня не сможет его казнить, ибо, если его утопят, получится, что он солгал, а если повесят, то сказал правду.
2. Спичку.
3. Первый должен взять 4 пенса, второй — 1 пенс. Указание. Выясните сначала, сколько стоит 1 огурец.
4. 10 м.
5. 20 шагов.
6. 8126+8126=16252.
7. Можно пройти 10 км на север, 10 км на восток и 10 км на юг. При движении по такому маршруту вы обязательно выйдете на границу леса. В самом деле, если весь ваш маршрут целиком лежит в лесу, то и весь квадрат, полученный соединением конечной и начальной точек описанного маршрута, тоже целиком лежит в лесу.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Гоблея — Старосек, Невинномысск, 1984 г.). **1.Л1:e5! de 2.Лd7!** Неожиданно черный ферзь оказался в ловушке: 2...Фс8 3.Ке7+, 1...Ф:d7 (Фе8) 3.Kf6+. Последовало 2...h5 3. **Фg3 Ф:d7 4.Kf6+ Крh8 5.К:d7 Лfd8 6.Фh3** и белые выиграли.

Задание 12 (Туник — Вейгольд, Львов, 1984 г.). 1...Л:d4! Белые немедленно сдались. На 2.Ф:d4 следует 2...Ле1+! 3.Крf2 Ф:d4+ 4.Л:d4 Л:a1 и они остаются без фигуры. Чисто геометрическое решение позиции!

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

М. Рябов (Первомайск Горьковской обл.) 8, 22; *Д. Саввичев* (Таганрог) 22; *М. Савченко* (Белгород) 8, 9, 12; *Т. Сагайдак* (Канев) 8, 22; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 22; *Б. Самойлов* (Киев) 8, 9, 17, 21; *Е. Сачкова* (Гулькевичи) 8; *М. Свердлов* (Минск) 17, 22; *Р. Севастьянов* (Челябинск) 15—17; *А. Сенчик* (Киев) 8, 21; *А. Сиваченко* (Москва) 12, 21; *А. Скиртач* (Запорожье) 8, 21, 22; *М. Скоробогатов* (Киев) 8, 9, 12, 22; *В. Смоляр* (Мозырь) 21; *А. Снижко* (Запорожье) 21, 22; *С. Собесский* (Новосибирск) 9; *А. Соляник* (Верхнеднепровск) 22; *А. Сомов* (Киев) 22; *Е. Степанов* (Ленинград) 21, 22; *В. Стрельников* (Салават) 21, 22; *И. Стрешенский* (Киев) 22; *И. Струговщиков* (Киев) 22; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 17, 21, 22; *Р. Суник* (Киев) 8; *И. Терез* (Симферополь) 9, 21, 22; *С. Толмачев* (Минск) 21; *С. Тужанский* (Винница) 8, 15, 17, 21, 22; *А. Тюрин* (Николаев) 8; *Д. Углов* (Геленджик) 8, 12; *А. Умнов* (Миасс) 9; *С. Ушаков* (Ярославль) 21, 22; *А. Фамов* (Ступино) 21, 22; *Н. Федин* (Омск) 8, 9, 12, 16, 21, 22; *М. Федоров* (Ульяновск) 21; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *В. Фурман* (Ташкент) 9; *А. Хафизов* (п. Красногорский МарАССР) 21; *М. Холмянский* (Москва) 17, 21, 22; *Г. Чевардин* (Челябинск) 22; *О. Чемерченко* (п. Купянск-Узловой Харьковской обл.) 8, 21; *Р. Черныш* (Пермь) 15, 21; *С. Чернышев* (Ташкент) 22; *Е. Чижикова* (Тула) 17; *А. Шаповал* (Киев) 17, 21, 22; *Л. Шаповаленко* (Канев) 8; *В. Шаповалов* (Донецк) 8, 9, 21, 22; *А. Швед* (с. Раздольное Амурской обл.) 8; *Г. Швец* (Киев) 8, 9, 15—17, 22; *Н. Шемелина* (Новосибирск) 22; *И. Шендерович* (Северодвинск) 8, 12, 21, 22; *А. Шехтман* (Минск) 9, 17, 21, 22; *Д. Шкловский* (Ленинград) 16, 17; *С. Школьников* (Ленинград) 21; *Б. Шойхет* (Москва) 9; *З. Шомсутдинов* (Кукморский р-н ТАССР) 22; *Е. Шохов* (Прокопьевск) 22; *О. Юсухно* (Киев) 17, 21, 22; *А. Ястребов* (Севастополь) 17, 22; *А. Ятчени* (Юрьевск) 8, 22.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Виноларова, О. Н. Грачев, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Н. А. Ящук
Фото представили:
В. Т. Брель, А. М. Орехов, Е. С. Петраченкова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32, 1, «Квант»
тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.07.85. Подписано к печати 20.08.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,80
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,24. Т-18805
Тираж 173284 экз. Цена 40 коп. Заказ 1892

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕЙТИНГИ

Семь лет назад в «Кванте» подробно рассказывалось о рейтингах, приводилось их математическое обоснование. По просьбе читателей еще раз остановимся на этом вопросе.

Рейтинг или, иначе, индивидуальный коэффициент шахматиста — это число, характеризующее его силу в данный момент. Выступление в турнире влияет на рейтинг: в случае успеха он увеличивается, при неудаче — уменьшается.

Впервые попадая в «рейтинговый» турнир, шахматист получает начальный рейтинг 2200. Рейтинг каждого участника турнира после его окончания $K_{нов}$ определяется по формуле

$$K_{нов}=K_{ст}+10(N-N_{ож}),$$

где $K_{ст}$ — «старый» рейтинг, $N_{ож}$ — число «ожидаемых» очков, а N — число фактически набранных.

Если два шахматиста играют между собой одну партию, то «ожидаемое» число очков $n_{ож}$ приведено в таблице, составленной американским математиком профессором Эло. Слева в таблице стоит разница рейтингов партнеров, а справа — число «очков», которые должен соответственно набрать игрок с большим и с меньшим рейтингом.

В случае матча, когда два шахматиста играют m партий, $N_{ож}$ равно произведению $n_{ож}m$, округленному до полуочка. Например, если два шахматиста с рейтингами 2550 и 2500 играют матч из 12 партий, то $K_б-K_м=50$, $n_{ож.б.}=0{,}57$, после умножения на 12 получаем 6,84 и после округления $N_{ож.б.}=7$; соответственно $N_{ож.м.}=5$.

В случае турнира надо просто сложить все «ожидаемые» числа очков, которые данный игрок должен набрать в партиях с другими участниками турнира, и округлить полученное число до полуочка. Это и будет $N_{ож}$ данного игрока.

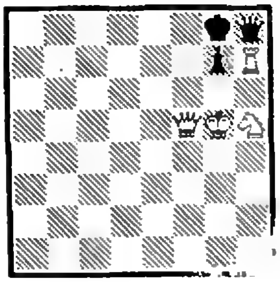
$K_б-K_м$	$n_{ож.б.}$	$n_{ож.м.}$
0—3	0,50	0,50
4—10	0,51	0,49
11—17	0,52	0,48
18—25	0,53	0,47
26—32	0,54	0,46
33—39	0,55	0,45
40—46	0,56	0,44
47—53	0,57	0,43
54—61	0,58	0,42
62—68	0,59	0,41
69—76	0,60	0,40
77—83	0,61	0,39
84—91	0,62	0,38
92—98	0,63	0,37
99—106	0,64	0,36
107—113	0,65	0,35
114—121	0,66	0,34
122—129	0,67	0,33
130—137	0,68	0,32
138—145	0,69	0,31
146—153	0,70	0,30
154—162	0,71	0,29
163—170	0,72	0,28
171—179	0,73	0,27
180—188	0,74	0,26
189—197	0,75	0,25
198—206	0,76	0,24
207—215	0,77	0,23
216—225	0,78	0,22
226—235	0,79	0,21
236—245	0,80	0,20
246—256	0,81	0,19
257—267	0,82	0,18
268—278	0,83	0,17
279—290	0,84	0,16
291—302	0,85	0,15
303—315	0,86	0,14
316—328	0,87	0,13
329—344	0,88	0,12
345—357	0,89	0,11
358—374	0,90	0,10
375—391	0,91	0,09
392—411	0,92	0,08
412—432	0,93	0,07
433—456	0,94	0,06
457—484	0,95	0,05
485—517	0,96	0,04
518—559	0,97	0,03
560—619	0,98	0,02
620—735	0,99	0,01
свыше 735	1,00	0,00

Сделаем несколько замечаний. Поскольку в системе Эло числа $N_{ож}$ как для матча, так и для турнира округляются до полуочка, рейтинги — всегда числа целые и оканчиваются на 0 или 5. Однако у нас при расчете рейтингов советских шахматистов округление производится до 0,1 очка, и потому рейтинги оказываются просто целыми числами.

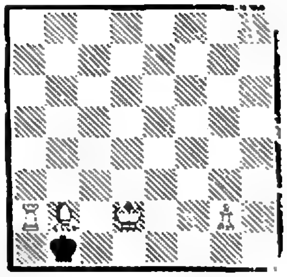
Для расчета $N_{ож}$ в турнирах для простоты вводится «коэффициент турнира» $K_т$, равный среднему арифметическому рейтингов $K_{ст}$ всех участников турнира. После этого $N_{ож}$ для каждого шахматиста находится из приведенной таблицы, где $K_б-K_м$ равно разнице между $K_{ст}$ и $K_т$ (вычитать надо из большего числа меньшее), умножением $n_{ож}$ на число партий, играемых каждым участником, и округлением. Тем самым мы как бы считаем, что участник турнира играет матч с одним «средним» партнером. Впрочем, ввиду большого числа турниров, которые сейчас проводятся, и тысяч шахматистов, играющих в них, для подсчета рейтингов (и международных, и советских) все равно используются ЭВМ.

В СССР рейтинги гроссмейстеров и мастеров публикуются сейчас раз в квартал, на 1 апреля 1985 года рейтинг экстракласса (2600 и выше) имели пять гроссмейстеров: А. Карпов — 2717, Г. Каспаров — 2700, А. Белявский — 2641, Р. Ваганян и Л. Полугаевский — 2614.

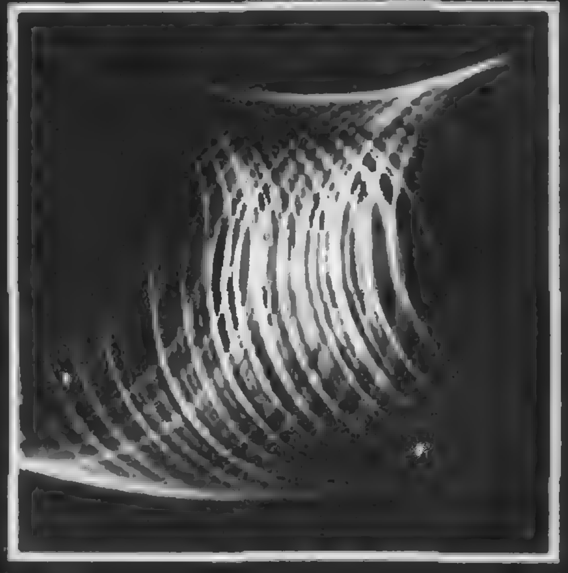
Конкурсные задания



17. Мат в 2 хода



18. Мат в 8 ходов



Приведенные здесь фотографии получены при стробоскопическом освещении (снимки сделаны в Московском театре-студии на Юго-Западе). О том, в чем заключается стробоскопический эффект, лежащий в основе этого метода фотосъемки, можно прочитать в рубрике «Школа в «Кванте» — в заметке, предназначенной восьмиклассникам.

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Эти «жучки» со множеством лапок называются интегральными схемами. Внутри каждого из них упрятан крошечный кристалл полупроводника, содержащий десятки и сотни тысяч электронных «деталей». С помощью таких схем создаются электронно-вычислительные машины с мощной памятью и рекордным быстродействием. Новые технологии позволят в ближайшем будущем создавать микроминиатюрные вычислительные устройства на одном кристалле, не уступающие по своим возможностям большой современной ЭВМ.

О том, что представляют собой «кирпичики» этих сложнейших приборов, вы сможете прочитать в заметках новой рубрики «Полупроводниковые элементы вычислительной техники».

НОМЕР
10

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **10** 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*В. А. Фабрикант.* Первые шаги Нильса Бора в науке	*V. A. Fabrikant.* Niels Bohr's first steps in science
8	*Бл. Х. Сендов, Н. Х. Розов.* История рождения компьютера	*Bl. Kh. Sendov, N. Kh. Rozov.* How the computer was born
	Новости науки	**Science news**
14	Еще один тип радиоактивности	One more kind of radioactivity
	Математический кружок	**Mathematics circle**
15	*С. Б. Гашков.* Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника	*S. B. Gashkov.* Inequalities fo the area and perimeter of convex polygons
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
21	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
24	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
25	Задачи	Problems
26	*А. В. Семёнов.* Трение: вредное, полезное, интересное...	*A. V. Semenov.* Friction: harmful, useful, interesting...
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
29	Задачи М946—М950; Ф958—Ф962	Problems M946—M950; P958—P962
34	Решения задач М926—М930; Ф938—Ф942	Solutions M926—M930; P938—P942
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Искусство программирования	**The art of programming**
42	*А. П. Ершов.* Алгоритмический язык	*A. P. Ershov.* The algoritmic language
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
46	II. Полевые транзисторы	II. Field transistors
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
48	*А. Р. Зильберман.* Повторим колебания	*A. R. Zilberman.* Reviewing oscillations
	Олимпиады	**Olympiads**
52	XI Всероссийская олимпиада школьников	The 11th All-Russian school olympiad
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка (*41*)	**Our cover page** (*41*)
	«Квант» улыбается (*20*)	**Kvant smiles** (*20*)
	Смесь (*19, 24, 28, 40, 41, 55*)	**Miscellaneous** (*19, 24, 28, 40, 41, 55*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Гексагональные шахматы (*3-я с. обложки*)	Hexagonal chess (*3rd cover page*)

Необычная шахматная доска, воспроизведенная на первой странице обложки,— не шутка художника. На таких трехцветных шестиугольных досках играют в гексагональные шахматы. На обложке приведена начальная расстановка черных фигур, белые ставятся аналогично напротив черных. Как играть в такие шахматы, рассказано в сегодняшней «Шахматной страничке».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1985

Первые шаги Нильса Бора в науке

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

Нильс Хенрик Давид Бор. Копенгаген, 1916 год.

> *Я рассматриваю труды Бора как величайший триумф человеческой мысли.*
> *Резерфорд. 1936 г.*

В этом году 7 октября человечество отметило столетие со дня рождения одного из создателей современной физики — Нильса Бора. Важно подчеркнуть, что слова Резерфорда, приведенные в качестве эпиграфа, сказаны им уже после того, как на смену боровской теории атома пришла стройная квантовая механика. Ни в коем случае не умаляя заслуги создателей квантовой механики Гейзенберга, Шредингера и Дирака, Резерфорд справедливо делает акцент на роли Бора.

Дирак, в значительной мере завершивший построение квантовой механики и заложивший основы квантовой электродинамики, так оценивал роль Бора в лекции, прочитанной им в 1975 году: «Я считаю, что появление идей Бора было самым грандиозным шагом в истории развития квантовой механики».

Надо сказать, что роль Бора была весьма своеобразной. Наибольшую известность получила так называемая модель атома Бора, хотя сам Бор относился к этой модели довольно скептически, понимая ее противоречивость. Гораздо более важными были те фундаментальные идеи, которые имел в виду Дирак.

Велики заслуги Бора и как учителя большой плеяды крупных ученых, в том числе выдающегося советского физика Ландау. Это связано не только с масштабами его научного гения, но и с поразительными душевными качествами. Он был человеком исключительной доброты, чистоты и обаяния. К Бору приезжали и молодые, и уже сложившиеся ученые. Он вел с ними поистине изнурительные дискуссии, приводившие к весьма важным новым результатам. Сбылись слова, сказанные о Боре, когда он был еще мальчиком, его отцом: «К Нильсу будут приходить люди и слушать его».

Студент, магистр, доктор

В 1903 году Нильс Бор поступил в Копенгагенский университет, где его отец Кристиан Бор был профессором физиологии. Курс физики в этом университете читал профессор Кристиансен. Широта его интересов и своеобразный подход к предмету, безусловно, сыграли очень большую роль в формировании Нильса Бора как физика.

Интересно, что студенты очень скоро почувствовали незаурядность Нильса Бора. Одна его сокурсница в письме своей кузине, отправленном в 1904 году, писала: «Кстати о гениях. С одним из них я встречаюсь каждый день. Это Нильс Бор, о котором я уже тебе рассказывала: его незаурядные способности проявляются все в большей степени».

В 1905 году Датское королевское общество наук объявило конкурс на лучшую работу по физике. Надо было исследовать колебания струй жидкостей с целью создания метода определения коэффициента поверхностного натяжения (речь шла о развитии работ знаменитого английского физика Рэлея). Бор весьма успешно справился с теоретическими проблемами, но эксперимент успел выполнить только с одной жидкостью — с водой. Важность теоретических результатов Бора была оценена золотой медалью, хотя его конкурент, также награжденный золотой медалью, разработал более простой экспериментальный метод и определил коэффициент поверхностного натяжения ряда жидкостей.

Окончив в 1907 году университет, Бор обратился к Кристиансену за темой для магистерской диссертации. Тот посоветовал заняться электронной теорией металлов. Бор послушался и вскоре написал своему брату Харальду, что работы Лоренца по электронной теории его очаровали. Но очарованность не помешала Бору обнаружить принципиальные недостатки классической электронной теории. В 1909 году Бор получил степень магистра и сразу же начал работать над докторской диссертацией, явившейся продолжением его теоретических исследований.

Докторская диссертация, представленная 12 апреля 1911 года, в частности, содержала доказательство принципиальной невозможности создания теории магнитных свойств вещества на основе чисто классических представлений. Так как диссертация была опубликована только на датском языке, ее результаты не получили широкого распространения, и через восемь лет голландка ван Лёвен заново провела то же доказательство (теорема Бора — ван Лёвен). Важно подчеркнуть, что здесь Бор впервые лично натолкнулся на границу применимости классической физики.

Защита диссертации состоялась 13 мая того же года. В еженедельнике «Политика» была помещена заметка, где кратко описывалось выступление на этой защите профессора Кристиансена: «Он говорил в своей обычной приятной манере, рассказал несколько забавных историй и выразил сожаление, что диссертация Бора не была опубликована на иностранном языке. У нас в Дании едва ли есть такие компетентные в электронной теории люди, кто бы мог судить о диссертации на эту тему». Дальше было написано: «Доктор Бор, бледный и застенчивый молодой человек, не принимал активного участия в обсуждении, побившем по своей непродолжительности все рекорды».

Кристиансен был прав, и поэтому Бор вскоре после защиты с радостью отправился в Кембридж на годичную стажировку.

Бор попадает к Резерфорду

В Кембридже работал сам «отец электрона» Дж. Дж. Томсон. Более компетентного человека в области, интересовавшей Бора, не было. Однако по ряду причин Бору не удалось наладить деловой контакт с Томсоном.

Зато в Кембридже Бор в октябре 1911 года впервые встретился с Резерфордом, приезжавшим сюда из Манчестера на так называемый ежегодный кавендишский обед. Бор вспоминал: «Хотя в этот раз мне не удалось познакомиться с Резерфордом, на меня произвели глубокое впечатление его обаяние и энергия — качества, с помощью которых ему удавалось достигать почти невероятных вещей, где бы он ни работал».

Н. Бор и Л. Д. Ландау на «Празднике Архимеда» в МГУ.

В ноябре Бор поехал в Манчестер к одному из коллег своего отца. Коллега оказался близким другом Резерфорда и познакомил с ним Бора. Позднее Бор писал: «Во время беседы, в которой Резерфорд с подлинным энтузиазмом говорил о многих новых перспективах развития физики, он любезно согласился на мою просьбу о том, чтобы мне присоединиться к группе, работающей в его лаборатории, после того как ранней весной 1912 года я должен был закончить свои занятия в Кембридже». Резерфорд только просил договориться о переезде с Джи-Джи (прозвище Томсона), чтобы эта процедура не выглядела как результат переманивания сотрудника от одного руководителя к другому. Согласие Томсона было получено без особого труда.

Если в Кембридже Бор увлекался моделью атома Томсона, согласно которой отрицательно заряженные электроны вкраплены в облако положительного заряда «как изюминки в кекс», то в Манчестере он быстро освоился с ядерной моделью атома Резерфорда, созданной только год тому назад, где положительный и отрицательный заряды как бы поменялись местами. В этой модели положительно заряженное ядро малых размеров окружено облаком электронов, движущихся по замкнутым орбитам вокруг ядра (как планеты вокруг Солнца). У модели Резерфорда имелся серьезный недостаток — она никак не могла объяснить устойчивость структуры атома, проявлявшуюся буквально на каждом шагу.

Бор с энтузиазмом окунулся в атмосферу манчестерской лаборатории и занялся попытками разрешения этого противоречия. Резерфорд быстро оценил глубину подхода Бора и оказывал ему всяческую поддержку. У Бора возникла идея применить к решению указанной проблемы квантовые представления, развитые Планком и Эйнштейном. Неизвестно, правда, где и когда Бор впервые познакомился с этими представлениями (характерная деталь — в курсе теоретической физики Кристиансена, изданном на немецком языке в 1910 году, нет ни слова о квантах!).

Главная работа Бора

В сентябре 1912 года Бор вернулся в Копенгаген и продолжил свои попытки применить квантовые представления к планетарной модели атома, но дело продвигалось очень туго. В первых числах февраля 1913 года к нему случайно заглянул его университетский товарищ — спектроскопист Хансен. До этой встречи Бор не проявлял никакого интереса к строению линейчатых спектров излучения и поглощения различных элементов. Позднее он говорил: «Они воспринимались так же, как прекрасные узоры на крыльях бабочек,— их красотой можно было восхищаться, но никто не думал, что регулярность в их окраске способна навести

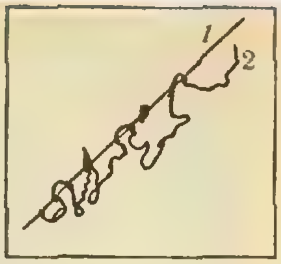
Н. Бор и В. Паули, наблюдающие за вращением волчка.

на след фундаментальных биологических законов». Хансен задал вопрос: «А как твоя теория объясняет спектральные формулы?» Бор, получивший к тому времени, как мы видели, весьма солидную подготовку в области теоретической физики, не понял, о чем идет речь. Он ничего не знал ни о каких спектральных формулах. Хансен сказал: «Тебе необходимо посмотреть эти формулы. Они с замечательной простотой описывают атомные спектры». Бор выполнил этот совет из вежливости, не придавая ему особого значения. Однако, по его словам, как только он увидел формулу Бальмера, все немедленно прояснилось. Формула эта была подобрана Бальмером (швейцарским физиком и математиком) чисто эмпирическим путем еще в конце XIX века и выражала последовательность частот для ряда линий в видимой области спектра атома водорода. Несколько позднее аналогичные закономерности были обнаружены и для невидимых участков водородного спектра.

После знакомства с формулой Бальмера дело быстро пошло на лад, и уже в марте 1913 года Бор завершил работу, которую он назвал «О строении атомов и молекул». В том же году по представлению Резерфорда она была опубликована в в английском журнале «Phylosophical Magazine» в виде трех статей. Мы ограничимся рассмотрением только первой, наиболее важной из «трилогии» Бора статьи — «Связывание электронов положительным ядром».

Между фактическим ходом исследования и изложением его автором в завершающей статье часто существует разрыв. Известный американский биохимик, нобелевский лауреат Сент-Дьёрдьи изобразил часто складывающуюся ситуацию графически (см. рис.), где по одной оси отложено время, по другой — «истина». Ломаная 2 выражает фактический ход исследования, когда периоды роста «истины» сменяются периодами ее спада (то есть заблуждениями), а идеальная прямая *1* изображает изложение этого же процесса в завершающем труде.

Бор, по натуре человек откровенный, не мог так поступить, хотя и переделывал свою статью многократно. Для Бора характерна также щепетильность, с которой он ссылается на своих неудачливых предшественников, пытавшихся применить квантовые представления к объяснению свойств атома.



«График» Сент-Дьёрдьи.

Введение к статье содержит очень важное замечание, касающееся роли квантовой постоянной Планка в теории атома. Это замечание носит совершенно современный характер и связано с так называемой теорией размерностей. Одним из пионеров применения методов теории размерностей в физике был Рэлей (с развития трудов которого, еще студентом, начинал свою научную деятельность Бор).

Если выбрана определенная система основных величин, например в механике — длина, время и масса, то размерности производных величин записываются через размерности основных величин. Так, размерность длины обозначается $[l]=L$, тогда размерность площади $[S]=L^2$ и объема $[V]=L^3$. Размерность времени $[t]=T$, соответственно размерность скорости $[v]=LT^{-1}$, а ускорения $[a]=LT^{-2}$. Так как размерность массы $[m]=M$, то размерность силы $[F]=MLT^{-2}$. И так далее.

Бор обратил внимание на то, что в модели атома Резерфорда имеются только два параметра — заряд e и масса электрона m, из которых нельзя образовать величину, определяющую структуру атома и имеющую размерность длины. Если же добавить планковскую постоянную h, то такая возможность появляется.

Воспроизведем несложные выкладки, отсутствующие в статье Бора, которые помогут понять его идею. При этом мы, так же как это сделал Бор в последующих частях статьи, будем пользоваться так называемой абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ). В ней в качестве основных механических единиц приняты сантиметр, грамм и секунда (отсюда буквы СГС). Размерность заряда электрона в этой системе проще всего определить из закона Кулона (основного закона электростатики), записав его в простейшем виде $F=e^2/r^2$. Тогда $[e^2/r^2]=[F]=MLT^{-2}$, откуда $[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$. Размерность планковской постоянной определяется из формулы для энергии кванта $E=h\nu$. Поскольку частота ν равна единице, деленной на период колебаний, ее размерность $[\nu]=T^{-1}$. Размерность энергии легко получить из выражения для кинетической энергии ($mv^2/2$), которое дает $[E]=ML^2T^{-2}$. Тогда размерность планковской постоянной $[h]=[E]/[\nu]=ML^2T^{-1}$.

Составим выражение $h^2/(me^2)$. Его размерность будет просто L (что легко проверить, воспользовавшись приведенными выше выкладками). Значит, это выражение характеризует некоторую длину. И действительно, если ввести множитель $1/(4\pi^2)$, то есть заменить h на $\hbar=h/2\pi$, получим $h^2/(4\pi^2)(me^2)=\hbar^2/(me^2)$ — величину, равную радиусу атома водорода. Справедливости ради отметим, что метод размерностей не может дать никаких сведений о численных множителях типа $1/(4\pi^2)$.

Теперь об основном содержании статьи. Планк считал частоту излучения, испускаемого атомом, равной частоте колебаний электрона, рассматриваемого как линейный осциллятор (модель — электрон на пружинке). В планетарной модели атома аналогом этой частоты должна служить частота обращения электрона по орбите. Однако в действительности с частотой излучения дело обстоит гораздо сложнее.

Бор при помощи элементарных выкладок, но далеко не безупречным в смысле логики путем выводит выражение для энергии электрона E_n, вращающегося по одной из стационарных орбит. В современных обозначениях

$$E_n=-\frac{2\pi^2me^4Z^2}{n^2h_2}, \qquad (1)$$

где Z — порядковый номер элемента в периодической таблице, $n=1$, 2, 3,... — так называемое квантовое число, задающее номер орбиты. Затем, предполагая, что при переходе с одной стационарной орбиты на другую электрон испускает *один* квант лучистой энергии, он записывает знаменитое боровское условие для частоты:

$$h\nu=E_{n1}-E_{n2}, \qquad (2)$$

откуда

$$\nu=\frac{2\pi^2me^4Z^2}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right). \qquad (3)$$

При $Z=1$ (для атома водорода) и $n_2=2$ это совпадает с эмпирической формулой Бальмера

$$\nu=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right),\ n_1=3, 4, ...,$$

где R — постоянная величина.

Только после завершения этого вывода Бор обращает внимание на то, что для круговых орбит можно получить промежуточное следствие — так называемое правило квантования орбит. Если электрон движется со скоростью v_n по круговой орбите радиуса r_n, то произведение импульса электрона на радиус, называемое в механике моментом импульса, принимает только определенные, дискретные значения, кратные постоянной Планка:

$$mv_nr_n=n\hbar=n\frac{h}{2\pi}. \qquad (4)$$

Теперь, при современных изложениях теории Бора, идут обратным, более простым путем, указанным им самим: сразу постулируют правильность формулы (4) и с ее помощью получают квантование энергии электрона.

При тщательном сравнении формулы (3) с опытными данными обнаружились небольшие расхождения. Бор их быстро устранил, учтя то, что ядро в атоме не неподвижно, а описывает окружность малого радиуса — в планетарной модели атома и ядро и электрон вращаются относительно их центра масс, расположенного вблизи ядра. Это приводит к тому, что в формуле (3) вместо m должно входить $m/(1+m/M)$, где M — масса ядра, у водорода почти в 2000 раз превышающая m. Как нетрудно видеть, поправка действительно мала. Тем убедительнее выглядела модель атома Резерфорда — Бора. Такое же хорошее согласие получалось и для остальных спектральных серий водорода и иона гелия. Однако для других атомов, где число электронов больше одного, эта модель не объясняет спектры их излучения так же хорошо, как для водорода.

Надо сказать, что у Бора не было наивной радости по поводу прекрасного согласия теории и опыта. До конца Бор сохранял свое понимание орбитальной модели как условного «образа» атома.

Как ни важны были конкретные результаты, полученные Бором в этой работе, но еще важнее были основные идеи, заключавшиеся в ней. Приведем их в формулировках, данных самим Бором:

«1) Динамическое равновесие системы (имеется в виду атом — *В. Ф.*) в стационарных состояниях можно трактовать с помощью обычной механики, тогда как переход системы из одного стационарного состояния в другое нельзя трактовать на этой основе.

2) Указанный переход сопровождается испусканием монохроматического*) излучения, для которого соотношение между частотой и количеством выделенной энергии именно такое, которое дает теория Планка».

Существование стационарных состояний Бор «объяснил», приняв в качестве постулата, что, вопреки классической электродинамике, в этих состояниях электрон, движущийся ускоренно по орбите, не излучает. Только гений такого масштаба как Бор мог решиться на этот шаг. Так родились знаменитые постулаты Бора.

Напомним, что первая работа Планка не была лишена противоречивости. Прокладывание принципиальных путей в науке вообще дело весьма нелегкое. Недаром в известном изречении Карла Маркса говорится: «В науке нет широкой столбовой дороги, и только тот может достигнуть ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам». Бор, смело идя на разрыв с классической электродинамикой, вместе с тем использует соображения, из которых родился важный физический принцип — принцип соответствия. Он заключается в том, что все-таки должно существовать некое «соответствие» между результатами квантовых и классических рассмотрений. В предельном случае (когда величина квантов стремится к нулю) это соответствие должно переходить в простое совпадение — подобно тому как механика Эйнштейна переходит в механику Ньютона при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

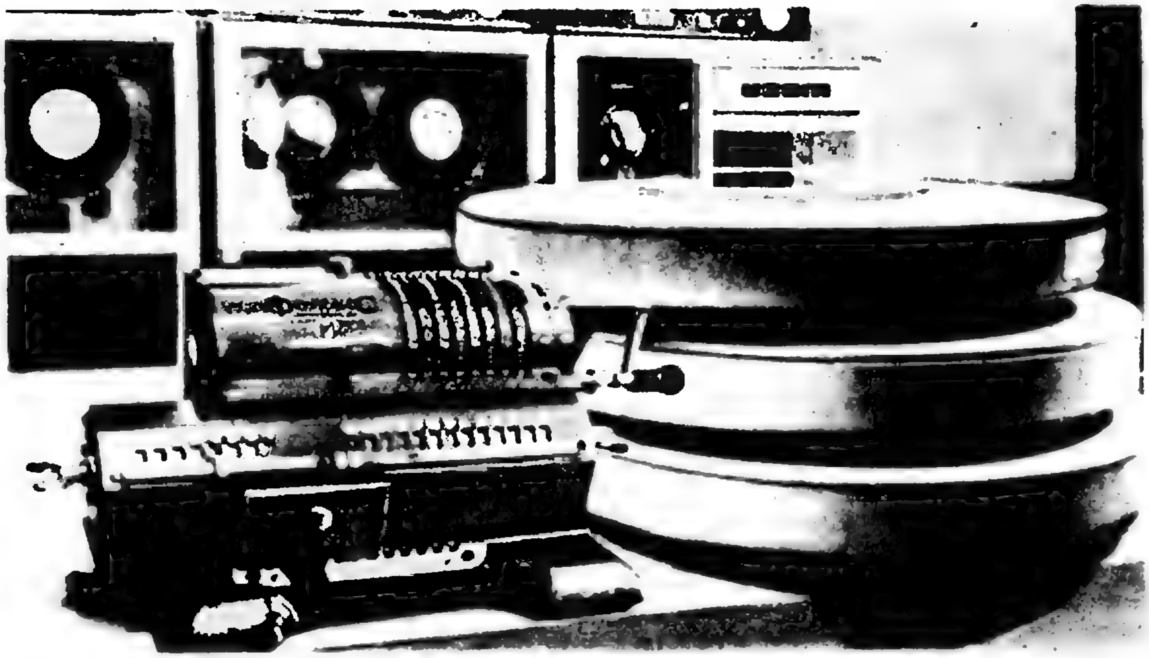
Герб Н. Бора.

Принцип соответствия, несмотря на свою несколько туманную формулировку, сыграл огромную роль в развитии физики атомов и молекул. Ученик Бора нидерландский физик-теоретик Крамерс, с большим успехом применивший этот принцип в своей работе, писал: «Мое глубокое убеждение состоит в том, что в области человеческого мышления вообще, и в физике в частности, наиболее важные и самые плодотворные концепции это те, которым невозможно придать точно определенный смысл». Эти слова друзья Крамерса взяли в качестве эпиграфа к посмертному изданию его сочинений.

В первой работе Бора еще не было сформулированного им принципа дополнительности. Для света, например, этот принцип проявляется в том, что полное описание его свойств должно включать в себя такие противоположные понятия, как волна и частица (фотон). Эти понятия как бы дополняют друг друга. Когда Бор был награжден высшим датским орденом Белого Слона и тем самым получил дворянство, он выбрал себе герб с изображением древнекитайского символа Инь и Янь, где одна светлая фигура, похожая на запятую, дополняет такую же темную фигуру до полного круга. На гербе по-латыни написан девиз: «Противоположности дополняют друг друга».

---

*) Квантовым представлениям не противоречит испускание атомом сразу нескольких фотонов при переходе из одного стационарного состояния в другое. Но тогда излучение перестает быть монохроматическим (см. статью В. А. Фабриканта «Что такое нелинейная оптика»; «Квант», 1985, № 8). Линейчатые спектры, объясненные Бором, соответствуют именно однофотонным процессам.



История рождения компьютера

Академик Болгарской академии наук
Бл. Х. СЕНДОВ,
доктор физико-математических наук
Н. Х. РОЗОВ

В статье «Предыстория рождения компьютера» (см. «Квант», 1985, № 9) было рассказано о многовековом пути человечества от счета на пальцах до арифмометра. Сейчас мы продолжим путешествие по истории — от возникновения теоретической идеи «считающей машины» до создания первых реальных ЭВМ. Этот этап развития вычислительной техники, непосредственно предваряющий эру современных компьютеров, занял примерно столетие.

На грани реального и фантастического

Великая промышленная революция, ознаменовавшаяся постепенным, но неуклонным переходом от мелкого ручного ремесленного труда к крупному машинному фабричному производству, с течением времени затронула все области техники и дала мощный импульс дальнейшему прогрессу науки. Это была эпоха великих открытий, выдающихся изобретений, плодотворных идей. Прогресс не мог в конце концов не проявиться и в вычислительном деле, столь тесно связанном с торгово-индустриальными и научно-техническими проблемами.

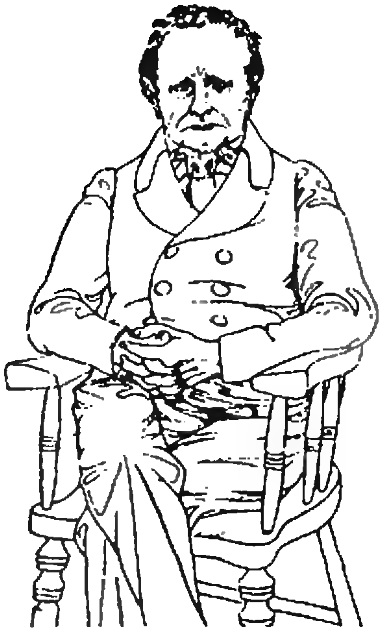
С начала XIX века главное внимание ученых, интересовавшихся облегчением и обеспечением вычислений, было сосредоточено на всестороннем совершенствовании считающих устройств, получавших все более и более широкое распространение. Основное предназначение считающего устройства (наиболее удачным его примером является арифмометр Однера) состояло в том, чтобы самостоятельно осуществлять любую арифметическую операцию над числами.

А можно ли создать машину, которая бы выполняла не просто отдельные арифметические операции, но «умела» автоматически проводить всю цепочку вычислений, необходимую для решения задачи в целом? Такая постановка вопроса представляется сегодня абсолютно естественной и логичной, однако двести-полтораста лет назад даже сама по себе эта мысль была нетривиальной и означала открытие нового направления в научном поиске. Человеком, которому суждено было высказать и впервые попытаться реализовать фундаментальную идею вычислительной машины, явился англичанин Чарльз Бэббидж (1791—1871).

Крупный математик, талантливый инженер, разносторонний изобретатель, известный естествоиспытатель, пытливый исследователь, Ч. Бэббидж, при поразительном многообразии своих интересов и осуществленных дел, всю жизнь неутомимо и упорно занимался разработкой и конструированием вычислительных машин. В 1822 году он построил образец машины, названной им «разностной», и приступил к созданию большой разностной машины, предназначенной для расчета навигационных и астрономических таблиц. Однако эта работа по разным причинам завершена так и не была.

В 1834 году Ч. Бэббидж начинает работу над своим главным детищем — вычислительной машиной, которую он назвал «аналитической» и которая должна была автоматически решать все те вычислительные задачи, с которыми сталкивались инженеры и математики. Грандиозный проект такой машины, разработанный автором с удивительной подробностью, настолько обогнал свое время, что его практическое осуществление не могло не оказаться нереальным.

В чем конкретно состоял сделанный Ч. Бэббиджем шаг вперед в развитии вычислительной техники? Прежде всего, машины Бэббиджа, как аналитическая, так и разностная, рассчитаны не на выполнение каждой арифметической операции по отдельным командам человека, поступающим всякий раз после завершения предыдущей операции, а на комплексное проведение — без вмешательства человека на промежуточных этапах — всего нужного объема вычислений в целом. При этом, если разностная машина была ориентирована на одну вполне определенную, неизменную программу действий с данными числами, то аналитическая машина допускала осуществление различных программ вычислений в зависимости от рассматриваемой задачи. Выражаясь современным языком, разностная машина — это *специализированная вычислительная машина с фиксированной программой*, а аналитическая машина — это *универсальная автоматическая вычислительная машина с программным управлением*.



Чарльз Бэббидж — автор проекта первой универсальной программируемой вычислительной машины.

Нельзя не отметить, что аналитическая машина Бэббиджа представляла собой единый комплекс специализированных блоков: *устройства для ввода* начальной информации (исходных данных), *запоминающего устройства (памяти)*, *арифметического устройства* (осуществляющего действия над числами), *устройства управления* (обеспечивающего выполнение операций в необходимой последовательности), *устройства для вывода* обработанной информации (результата). Иными словами, эта машина, предвосхищая архитектуру современных компьютеров, обладала практически всеми их нынешними основными структурными компонентами.

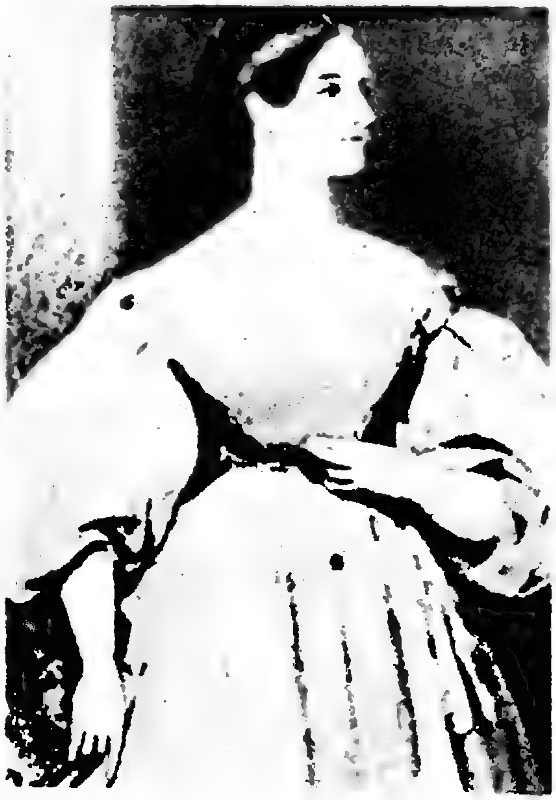
Однако — дитя своей эпохи! — аналитическая машина, как и все предшествующие ей считающие устройства, была (и не могла не быть) чисто механическим калькулятором. Ведь в первой половине прошлого столетия исследования в области электричества, работы по его использованию еще только начинались. Именно поэтому гениальные идеи Ч. Бэббиджа относительно назначения, логической структуры и принципов работы вычислительной машины оказались облеченными в одежды, заранее предопределившие бесперспективность попыток внедрения подобных машин в жизнь. Впрочем, и здесь Ч. Бэббидж пытался сказать новое слово: проект предусматривал, что приводить аналитическую машину в действие должен паровой двигатель.

Первая леди компьютерного королевства

Как показала дальнейшая история, одним из пророческих замыслов Ч. Бэббиджа явилась предложенная им система управления вычислительной машиной с помощью перфокарт. Идея использования карточек с пробитыми в них отверстиями (перфокарт) получила широкое распространение после того, как в 1804 году французский изобретатель Жозеф Мари Жаккар (1752—1834) применил их для автоматизации работы ткацкого станка. Однако Ч. Бэббиджу впервые пришлось заняться детальной разработкой многих вопросов, связанных с введением перфокартами в машину массивов чисел и последовательностей команд.

Управление вычислительной машиной, очевидно, невозможно без развития теории рационального описания комплексов тех операций, которые следует выполнять машине при решении различных задач. Тем самым оказалось неизбежным рождение нового направления науки — программирования. Заслуга создания этого направления принадлежит Августе Аде Лавлейс (1815—1852), дочери великого английского поэта Джорджа Байрона.

Леди Лавлейс, проявлявшая незаурядные математические способности, серьезно интересовалась работой Ч. Бэббиджа и глубоко понимала его идеи. В своей публикации 1843 года, которую по праву считают первой работой по теории программирования, она высказала целый ряд мыслей и принципов, сохраняющих свое значение и сегодня, а некоторые предложенные ею термины закрепились в научном языке. Ей принадлежит и исторически первая достаточно сложная конкретная программа — для вычисления так называемых чисел Бернулли по специально разработанному алгоритму (практически опробовать эту программу она, конечно, не могла по причине отсутствия машины).



Ада Лавлейс — создатель первой программы для вычислительной машины.

Говоря о программировании, нельзя не отметить еще два факта, относящихся к XIX веку и сыгравших особенно важную роль в становлении этой науки. Первый — «изобретение» Ч. Бэббиджем специальной команды, называемой сейчас *командой условного перехода* (говорят еще *ветвления*) и имеющей в современном программировании исключительное значение. Эта команда позволяет самой машине автоматически определять дальнейшую последовательность операций в зависимости от результата, получающегося на определенном шаге работы. Тем самым открывается возможность поручить машине выполнение не только арифметических, но и логических операций.

Однако для того чтобы продвинуться по этому пути, нужно располагать аппаратом формально-математического анализа логических высказываний. Именно таким аппаратом оказалась теория, предложенная в 1847 году английским математиком Джорджем Булем (1815—1864) и получившая название *булевой алгебры*.

Это — второй исторический факт XIX века, предопределивший использование вычислительных машин для решения логических проблем и автоматизации рассуждений.

Время надежд, время исканий

Ч. Бэббидж умер, его аналитическая машина так и осталась незавершенным проектом... Но его основная идея — создать автоматическую вычислительную машину с программным управлением для выполнения научно-технических расчетов — умереть не могла. Ибо она была прозорливым предвидением насущных потребностей продолжающегося развития цивилизации.

Уже с конца прошлого столетия быстро увеличивается число моделей и модификаций арифмометра и других считающих устройств (клавишных, записывающих и т. п.), начинается их широкое производство и применение. Арифмометр существенно облегчил и ускорил наиболее утомительную и рутинную работу — выполнение арифметических операций. Однако фактическое решение сколько-нибудь серьезной конкретной математической задачи, получение в ней реального ответа в виде численных данных, прежде всего обычно и нужного в приложениях, оставалось целой проблемой, непростым и трудоемким делом, требовавшим длительных усилий больших коллективов вычислителей.

Например, одним из основных мостов, связывающих математику с жизнью, являются *дифференциальные уравнения*. Естественно, что отыскание решений (или, как говорят математики, *интегрирование*) таких уравнений служит типичным объектом вычислительных работ. Вот что говорилось по этому поводу в книге «Численное интегрирование дифференциальных уравнений», изданной всего лишь полвека назад, в 1932 году: «Читатель должен твердо уяснить себе главную мысль: решение этих уравнений в огромном большинстве случаев является на практике чрезвычайно трудной операцией, отнимающей часто много времени на вычисления...»

Было совершенно ясно: разрешить все усиливающееся противоречие между уровнем развития математической теории и возможностями ее реальных приложений, ликвидировать громадные трудности на пути осуществления расчетов, в которых остро нуждались техника и наука, экономика и управление, может лишь вычислительная машина. Этим в первую очередь и объясняется, что пристальный интерес к конструированию вычислительных машин, явно наметившийся в конце XIX века, стал затем резко расти. Усилиями отдельных инженеров, физиков, математиков, изобретателей, а чаще — целых коллективов удалось добиться многих замечательных результатов. Нельзя не подчеркнуть, что в значительной мере эти результаты были бы невозможны без сделанных к тому времени открытий и исследований в физике, механике, технике, без достигнутого уровня промышленного производства и технологической культуры.

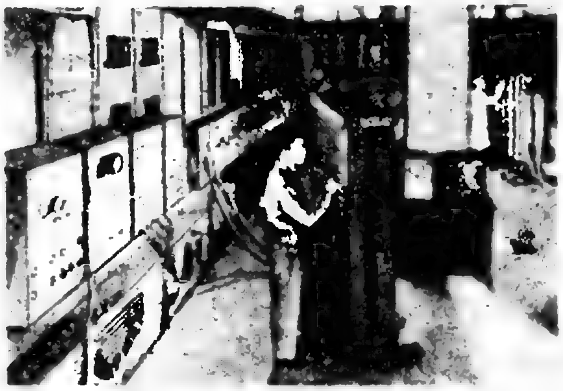
Какие же вычислительные машины были спроектированы и созданы в первой половине нашего столетия? Даже простое перечисление их моделей потребовало бы слишком много места. Поэтому мы ограничимся лишь кратким перечислением их основных, принципиальных особенностей и несколькими примерами.

Большую группу составляли специализированные *электромеханические вычислительные машины*, представлявшие собой механический калькулятор, который приводился в движение электроприводом и управлялся электрическими импульсами. Особое распространение получили *табуляторы* (иначе: счетно-аналитические, или счетно-перфорационные машины), применявшиеся главным образом для механизации решения задач статистики и учета. Первый табулятор разработал еще в 1884 году американский инженер Германн Холлерит (1860—1929).

Были построены электромеханические вычислительные машины, ориентированные и на другие важные практические задачи. Надо признать, что некоторые из них являлись блестящими образцами совершенной конструкторской мысли и идеального технического исполнения. Среди них следует упомянуть первую машину для интегрирования дифференциальных уравнений, изобретенную известным советским математиком и корабелом академиком А. Н. Крыловым (1863—1945). Отметим далее, что в 1915 году фирма «Аскания» (Берлин) изготовила вычислительную машину для определения времени приливов и отливов на северном побережье Германии. Автомат состоял из замысловатого кружева нескольких сотен бронзовых шестеренок и был не так уж громоздок. Для того, чтобы составить расписание приливов на год, он должен был «шевелить шестеренками» восемь часов — быстродействие достаточно поразительное по тем временам. Но еще более поразительно, что машина верой и правдой безотказно служила 60 лет — до 1975 года!

Другую группу составляли *универсальные* электромеханические вычислительные машины с *программным управлением.* В этих машинах применялась техническая новинка — электромагнитное реле. Исторически первой действующей машиной такого типа была машина «Ц-3», построенная в 1941 году немецким инженером Конрадом Цузе, однако развязанная гитлеровской Германией война стала причиной того, что это достижение немецкой науки не получило своевременной известности и не оказало влияния на развитие вычислительной техники.

Самая совершенная из машин этой группы, получившая название «Марк-1», создавалась в 1937—1944 годах под руководством американского физика Говарда Эйкена. Она сыграла большую роль в решении целого ряда ключевых вопросов конструирования компьютеров. Вот некоторые ее характеристики. «Марк-1» весил 4,5 тонны, занимал площадь 17×2,5 м и представлял собой сложную комбинацию огромного числа релейных и механических элементов, соединенных 800 км электропроводки. Ввод начальных данных — 23-значных чисел в обычной (десятичной) форме осуществлялся с помощью перфокарт, а управление работой машины обеспечивалось бумажной перфолентой. На операцию сложения (вычитания) затрачивалось 0,3 секунды, а умножение и деление требовали 5,7 с и 15,3 с соответственно.



ЭНИАК — первая эффективно работающая ЭВМ.

Наконец, упомянем еще большую группу *аналоговых вычислительных машин* (или машин непрерывного действия). Работа этих машин базируется на идее конструирования — по исходным данным — такой модельной схемы (главным образом — электрической), измерение одной из физических характеристик (например напряжения) которой и определяет искомую величину. Эти машины особенно хорошо себя зарекомендовали при решении задач, где в первую очередь важно получить качественное или графическое представление об изменении неизвестной. Однако для особо точных вычислений они практически непригодны.

Итак, достигнутые успехи в создании вычислительных машин были несомненны. И все же эти машины ни в коей мере не могли удовлетворить огромные «вычислительные потребности», сложившиеся к середине XX века. Непомерно дорогостоящей и неприемлемо громоздкой являлась их конструкция, слишком низкой оставалась скорость работы, явно недостаточным был объем памяти, весьма негибким оказывалось на практике управление процессом вычислений. Дальнейшее интенсивное развитие вычислительной техники, ее массовое использование объективно не могло быть обеспечено лишь улучшением реализации уже имевшихся идей.

Требовалась принципиально новая идея...

«АВС» — первый электронный компьютер

Принципиально новая идея состояла в том, чтобы заменить все механические элементы машины, все электромагнитные реле *электронными*

Дж. Атанасов — конструктор первой электронной вычислительной машины.

Академик С. А. Лебедев — создатель первой в СССР (и в Европе) ЭВМ.

вакуумными лампами. Реализация этой идеи привела к появлению ЭВМ — *электронной вычислительной машины* и ознаменовала начало новой эры в развитии вычислительной техники. Напомним, что в 30-е годы нашего столетия электронные лампы были уже довольно подробно изучены и широко распространены в технике, что создавало благоприятные потенциальные возможности успешного их использования в вычислительной технике.

До относительно недавнего времени в различных публикациях, где речь заходила о зарождении ЭВМ, это событие связывалось с именами Джона Мокли и Джона Эккерта. В подтверждение приводился бесспорный и общеизвестный факт: эти два американских физика спроектировали и в 1945 году запустили в действие электронную вычислительную машину, названную «ЭНИАК». На этом основании делался (явно или неявно) вывод, что именно им принадлежит и сама идея, приведшая к революционной перестройке всей вычислительной техники.

Но история возникновения идеи ЭВМ оказалась много более сложной и запутанной, а события, связанные с созданием первой электронной вычислительной машины, протекали совсем не так прямолинейно.

Несомненно, «ЭНИАК» явилась первой в мире работающей ЭВМ, реальной родоначальницей вычислительных машин принципиально нового типа. Ее конструкторы Дж. Мокли и Дж. Эккерт имеют неоспоримые и существенные заслуги в развитии современной вычислительной техники. Однако основополагающие принципы ЭВМ впервые были высказаны не ими.

Эти принципы впервые — и притом в весьма законченной форме — высказал в 1937 году американский физик болгарского происхождения Джон Винсент Атанасов (род. в 1903 году). В частности, он предложил при оперировании с числами в машине использовать двоичную систему счисления, а для ее создания рекомендовал комбинации из ламповых схем и конденсаторов.

Более того, Дж. Атанасов, вместе со своим помощником Клиффордом Бэрри, предпринял и первую попытку спроектировать и построить электронный компьютер. Этот компьютер, названный им позже «АВС», был практически закончен к 1942 году, оставалось лишь укомплектовать периферийное оборудование на перфокартах. И то, что «АВС» так и не удалось ввести в эксплуатацию,— одно из драматических следствий самого трагического события нашего века, второй мировой войны. Надо, впрочем, заметить, что и идеи, и работа Дж. Атанасова над электронным компьютером были известны целому ряду ученых и, в том числе, Дж. Мокли.

Факты, связанные с работой Дж. Атанасова над первым электронным компьютером, стали широко известны лишь в 60-е годы, а несколько позже был официально признан его приоритет.

После появления в 1945 году первого действующего электронного компьютера начался период бурного развития электронной вычислительной техники. История этого периода — тема отдельного разговора. А закончить настоящую статью нам хотелось бы напоминанием о первой советской электронной вычислительной машине «МЭСМ». Она была построена в 1951 году под руководством академика Сергея Алексеевича Лебедева (1902—1974) и была, кстати, первым электронным компьютером в Европе.

Новости науки

Еще один тип радиоактивности

Как уже рассказывалось в «Кванте» (см. «Квант», 1984, № 8, с. 38), несколько лет назад было обнаружено самопроизвольное превращение радия в свинец с испусканием ядер углерода. Были зарегистрированы распады трех изотопов радия:

$$^{222}_{88}\mathrm{Ra}\rightarrow{}^{208}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{14}_{6}\mathrm{C},$$
$$^{223}_{88}\mathrm{Ra}\rightarrow{}^{209}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{14}_{6}\mathrm{C},$$
$$^{224}_{88}\mathrm{Ra}\rightarrow{}^{210}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{14}_{6}\mathrm{C}.$$

Так к давно известным видам радиоактивных превращений тяжелых ядер, встречающихся в природе (альфа- и бета-распады, спонтанное деление ядер и т. д.), добавился новый вид — распад с излучением ядра изотопа углерода, более тяжелого, чем ядро гелия (альфа-частица).

Совсем недавно, в этом году, сотрудниками Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна), а также группой американских физиков был обнаружен еще один тип распада, с излучением еще более тяжелого ядра — ядра неона.

Так, например, распадается изотоп урана с массовым числом 233:

$$\boxed{^{233}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{209}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{24}_{10}\mathrm{Ne}}$$

или

$$\boxed{^{233}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{208}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{25}_{10}\mathrm{Ne}.}$$

— распад идет с излучением изотопа неона с массовым числом 24 или 25. Какой именно происходит распад — пока не ясно.

Вероятность такого распада очень мала: примерно на 10^{12} излученных альфа-частиц приходится одно ядро неона. Если бы альфа-распада урана не было, ядро урана жило бы в среднем около 10^{17} лет, дожидаясь своего неонного распада (период полураспада изотопа урана-233 с испусканием альфа-частицы составляет $1{,}62\times\times10^5$ лет).

Распадается и другой изотоп урана — с массовым числом 232:

$$\boxed{^{232}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{208}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{24}_{10}\mathrm{Ne}.}$$

Вероятность вылета ядра неона в этом случае тоже примерно в 10^{12} раз меньше вероятности вылета альфа-частицы.

Обнаружен такой же распад еще одного ядра — ядра протактиния:

$$\boxed{^{231}_{91}\mathrm{Pa}\rightarrow{}^{207}_{81}\mathrm{Tl}+{}^{24}_{10}\mathrm{Ne}.}$$

Образовавшийся таллий-207 превращается в свинец-207 (среднее время жизни таллия-207 составляет 6,8 мин) с излучением электрона (бета-распад). Вероятность неонного распада протактиния меньше вероятности его альфа-распада приблизительно в 10^{11} раз.

Все вновь открытые распады, как мы видим, заканчиваются на изотопах свинца, на которых заканчиваются и все естественно-радиоактивные ряды — семейства урана, тория и актиния. Природа нашла еще один — обходной — путь превращения различных элементов в устойчивый свинец.

Я. С.

Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника

Кандидат физико-математических наук
С. Б. ГАШКОВ

Возможно, читателю известно, что среди всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Если нет, советуем прочитать статью В. В. Трофимова «Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки» в пятом номере журнала за этот год.

Здесь же мы познакомим читателя с аналогичными экстремальными свойствами правильных n-угольников, выделяющими их среди всех прочих n-угольников, и в качестве следствий получим несколько интересных неравенств, связывающих между собой площадь и периметр n-угольника, радиусы «вписанного» и «описанного» кругов и другие его характеристики. Для точной формулировки и доказательства этих утверждений нам придется определить несколько вспомогательных понятий, а для треугольников упомянутые утверждения можно сформулировать уже сейчас.

Упражнения

1. Среди треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь (и периметр) имеет правильный треугольник.

2. Среди треугольников, описанных около данного круга, наименьшую площадь (и периметр) имеет правильный.

3. Среди треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный.

4. Среди треугольников с данной минимальной высотой наименьшую площадь (и периметр) имеет правильный.

5. Среди треугольников с данной максимальной стороной наибольшую площадь (и периметр) имеет правильный.

Далее аналоги утверждений 1-5 будут доказаны для произвольных выпуклых n-угольников.

Что такое выпуклый многоугольник?

Определение 1. *Многоугольник P называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через какие-нибудь две соседние его вершины.* Такие прямые далее называются касательными к многоугольнику P, так что касательная — это прямая, содержащая какую-нибудь его сторону. Далее рассматриваются только выпуклые многоугольники, а появление невыпуклых многоугольников оговаривается особо.

Упражнения

6. Докажите, что выпуклый многоугольник совпадает с пересечением своих касательных полуплоскостей. Полуплоскость называется касательной к P, если она содержит P и ограничена касательной к P.

7. Докажите, что прямая, имеющая общие точки с выпуклым многоугольником, либо разрезает его на два многоугольника, либо проходит через его вершину так, что он целиком лежит в одной из полуплоскостей, определяемых рассматриваемой прямой.

Определение 2. *Прямая, проходящая через вершину выпуклого многоугольника так, что он лежит целиком по одну сторону от этой прямой, называется опорной к этому многоугольнику.* Любая касательная является опорной, но не каждая опорная является касательной (см. рис. 1).

Упражнение 8. Докажите, что выпуклый многоугольник имеет в точности две опорные прямые, параллельные данному направлению. Эти прямые ограничивают полосу, содержащую этот многоугольник.

Определение 3. *Полоса, ограниченная параллельными опорными прямыми, называется опорной полосой; опорная полоса, у которой хотя бы одна из ее граничных прямых является касательной, называется касательной полосой* (см. рис. 2).

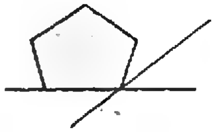


Рис. 1

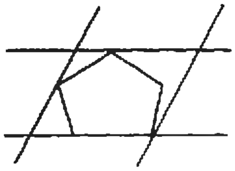


Рис. 2

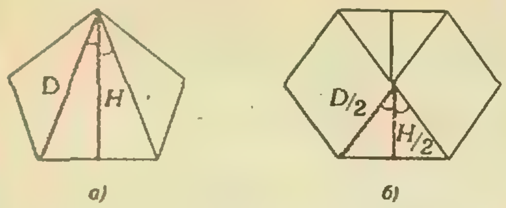


Рис. 3.

Упражнения.

9. Докажите, что выпуклый многоугольник совпадает с пересечением своих касательных полос.

10. Докажите, что невыпуклый многоугольник содержится в выпуклом многоугольнике большей площади и меньшего периметра.

Диаметр и ширина многоугольника

Понятия, которые здесь будут определены, необходимы для формулировки теоремы, обобщающей утверждения упражнений 4 и 5.

Определение 4. *Диаметром многоугольника называется наибольшее расстояние между его вершинами.*

Упражнение 11. Докажите, что наибольшее расстояние между точками а) треугольника, б) произвольного n-угольника равно его диаметру.

Определение 5. *Шириной многоугольника называется наименьшая ширина его касательных полос.*

Упражнения

12. Докажите, что ширина любой опорной полосы не меньше ширины многоугольника (откуда следует, что наименьшая ширина опорных полос равна ширине многоугольника).

Очевидно, что ширина треугольника равна его наименьшей высоте.

13. Докажите, что ширина H, диаметр D и периметр P правильного n-угольника связаны равенствами $2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} H = P = 2n \sin \frac{\pi}{2n} D$ (если n нечетно), $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} H = P = n \sin \frac{\pi}{n} D$ (если n четно).

Указание: см. рис. (3 *а*, *б*)

Изопериметрическое и другие экстремальные свойства правильных многоугольников

Докажем следующую теорему

Теорема 1. а) Среди выпуклых n-угольников, лежащих в данном круге, наибольшую площадь (и периметр) имеет вписанный в этот круг правильный n-угольник.

б) Среди n-угольников, содержащих данный круг, наименьшую площадь (и периметр) имеет описанный около этого круга правильный n-угольник.

в) Среди n-угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

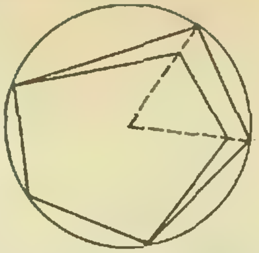


Рис. 4.

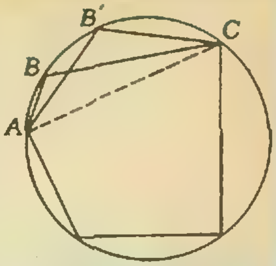


Рис. 5.

Для доказательства теоремы понадобятся пять вспомогательных утверждений, доказать которые мы предлагаем читателю в качестве упражнений.

Упражнения.

14. Если один выпуклый многоугольник содержит второй, то периметр первого больше периметра второго.

15. а) Вписанный в круг равносторонний многоугольник имеет равные углы, то есть является правильным.

б) Описанный около круга равноугольный многоугольник имеет равные стороны, то есть является правильным.

16. Среди треугольников с данными основанием и углом при вершине наибольшую площадь (и периметр) имеет равнобедренный треугольник.

17. а) Среди треугольников с данными вписанной окружностью и углом при вершине наименьшее основание имеет равнобедренный треугольник.

б) Среди треугольников с данным углом при вершине и данной вневписанной окружностью, касающейся основания и продолжений боковых сторон, наименьшее основание имеет равнобедренный треугольник.

18. Среди треугольников с данными основанием и периметром наибольшую площадь (и угол при вершине) имеет равнобедренный треугольник.

Докажем, наконец, теорему. Начнем с пункта а). Заметим, что если n-угольник не является вписанным в рассматриваемый круг, то можно построить n-угольник, вписанный в этот круг и имеющий большую площадь и (см. упражнение 14) больший периметр (см. рис. 4). Если же n-угольник, вписанный в круг, не является правильным, то (см. упражнение 15 а)) у него найдутся соседние неравные стороны, которые на рисунке 5 обозначены AB и BC. Обозначим B' середину дуги AC (см. рис. 5). Тогда $B \neq B'$, $|AB'| = |B'C|$ и из упражнения 16 следует, что изображенный на рис. 5 n-угольник с вершиной B' вместо B

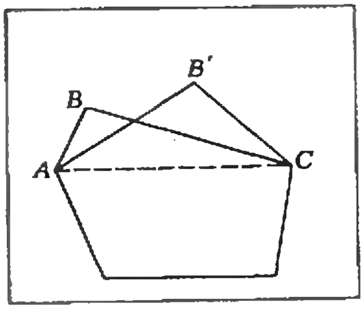


Рис. 6.

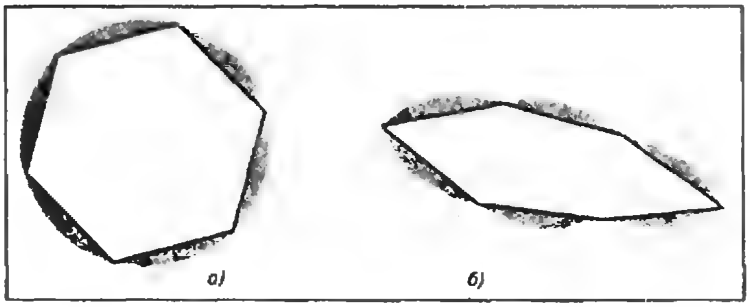


Рис. 7.

имеет больший периметр и большую площадь. Из сделанных замечаний следует, что если среди всех n-угольников, лежащих в данном круге, существует тот, который имеет наибольшую площадь (периметр), то он обязательно будет правильным n-угольником, вписанным в этот круг.

Очевидную на первый взгляд теорему существования на самом деле не так просто строго доказать, поэтому мы опускаем ее доказательство.

Задача 1 (для самостоятельного решения). Используя упражнения 18, 15 б) и соотношение $S=\frac{rP}{2}$ между площадью, периметром и радиусом вписанного в n-угольник круга, докажите пункт б).

Докажем теперь пункт в). Заметим, что если выпуклый n-угольник не является равносторонним, то можно построить n-угольник с тем же периметром, но большей площадью (см. рис. 6, на котором $|AB|\neq|BC|$, $|AB'|=|B'C|=\frac{|AB|+|BC|}{2}$, площадь треугольника $AB'C$, согласно упражнению 18, больше площади треугольника ABC). Если же n-угольник не является выпуклым, то из упражнения 10 следует, что существует n-угольник с тем же периметром и большей площадью. Остается показать, что среди выпуклых равносторонних n-угольников с данной стороной наибольшую площадь имеет правильный n-угольник. Для этого придется применить изопериметрическое свойство круга (читайте о нем в упоминавшейся статье В. В. Трофимова). Сравним площади правильного и неправильного n-угольников с равными сторонами, изображенных на рисунке 7. Первый из них на этом рисунке вписан в круг, а к сторонам второго приложены сегменты того же круга. Из выпуклости n-угольника следует, что эти сегменты не пересекаются, значит, периметры изображенных на рисунке 7 фигур равны, а для сравнения площадей рассматриваемых n-угольников достаточно сравнить площади изображенных фигур. Первая из них — круг, а вторая кругом не является (в противном случае из упражнения 16 а) следовало бы, что и второй n-угольник правильный, что противоречит сделанному предположению). Значит, согласно изопериметрическому свойству круга, вторая фигура имеет меньшую площадь. Теорема доказана.

Следствие. Если выпуклый n-угольник имеет площадь S, периметр P, лежит в круге радиуса R и содержит круг радиуса r, то справедливы неравенства

$$2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,r\leqslant 2\sqrt{n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,S}\leqslant P\leqslant 2n\sin\frac{\pi}{n}\,R,$$

каждое из которых может обращаться в равенство, лишь когда n-угольник является правильным.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R и описанного около круга радиуса r, справедливы равенства

$$2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,r=2\sqrt{n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,S}=P=2n\sin\frac{\pi}{n}\,R,$$

и применить теорему 1.

Изложенное доказательство теоремы 1 имеет существенный недостаток: оно опирается на утверждения, которые нельзя строго доказать в рамках школьной программы (см. об этом упоминавшуюся статью В. В. Трофимова). Но все прямые (то есть лишенные отмеченных недостатков) доказательства этой теоремы более сложные и их помещать здесь нецелесообразно.

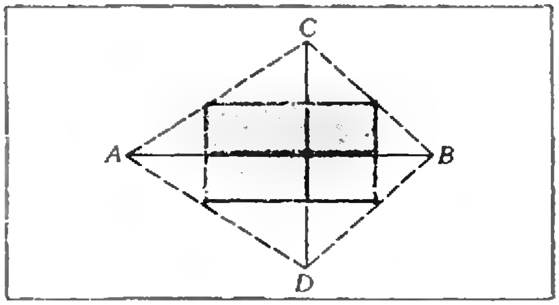


Рис. 8.

Для дальнейшего понадобятся некоторые вспомогательные понятия, интересные и сами по себе. Их изложению посвящен следующий параграф.

Смешение и симметризация многоугольников

Излагаемые далее понятия были введены в геометрию Г. Минковским, который применял их в своих знаменитых исследованиях о выпуклых множествах.

Определение 6. *Смешением (полусуммой) двух точечных множеств называется множество середин всех отрезков, концы которых принадлежат этим множествам (один конец первому множеству, а другой — второму).* (На рисунке 8 показано смешение отрезков AB и CD.)

Упражнения

19. а) Смешением параллельных прямых является прямая, делящая пополам полосу между ними.

б) Смешением отрезков, лежащих на параллельных прямых, является средняя линия трапеции (параллелограмма), образованной этими отрезками.

в) Смешением параллельных полос ширины H_1 и H_2 является параллельная им полоса ширины $\frac{H_1+H_2}{2}$.

г) Смешением кругов радиуса R_1 и R_2 является круг радиуса $\frac{R_1+R_2}{2}$.

20. Опорная полоса смешения двух многоугольников является смешением параллельных ей опорных полос этих многоугольников.

Очень важной для дальнейшего является утверждение следующей задачи.

Задача 2. Смешением двух многоугольников P_1 и P_2 является многоугольник P, для каждой стороны которого найдется параллельная ей сторона одного из многоугольников P_1 или P_2, причем для любой из сторон многоугольников P_1 или P_2 найдется параллельная ей сторона многоугольника P. Периметр многоугольника P равен полусумме периметров многоугольников P_1 и P_2.

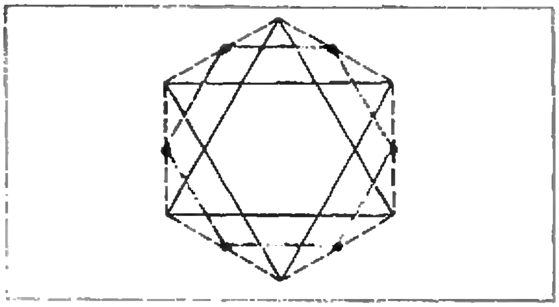


Рис. 9.

Определение 7. *Многоугольник M^* называется симметризацией многоугольника M, если он является смешением многоугольников M и M', центрально-симметричных друг другу относительно некоторой точки O.*

На рисунке 9 показана симметризация правильного треугольника. Она ограничена красным шестиугольником.

Задача 3. Докажите, что при симметризации многоугольника получается центрально-симметричный многоугольник, периметр, диаметр и ширина не меняются, а число вершин увеличивается не более чем в два раза.

Упражнение 21. Докажите, что центрально-симметричный многоугольник диаметра D и ширины H лежит в круге диаметра D и содержит круг диаметра H.

После проведенной подготовки можно коротко доказать замечательное неравенство, впервые доказанное в 1922 году К. Рейнхардтом.

Теорема Рейнхардта

Теорема 2. Для ширины, периметра и диаметра любого выпуклого n-угольника справедливы неравенства

$$2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} H \leqslant P \leqslant 2n \sin \frac{\pi}{2n} D,$$

каждое из которых обращается в равенство, например, для правильного n-угольника при нечетном n.

Доказательство. Рассмотрим вместо n-угольника его симметризацию, которая, согласно задаче 3, является выпуклым центрально-симметричным $2m$-угольником с теми же периметром, шириной и диаметром. Согласно упражнению 21 этот $2m$-угольник содержит круг диаметра H и сам содержится в круге диаметра D. Применяя к нему следствие из теоремы 1, получаем неравенство:

$$2m\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}H \leqslant P \leqslant 2m\sin\frac{\pi}{2m}D.$$

Так как $m \leqslant n$, то неравенства теоремы вытекают из доказанного неравенства и упражнения 22.

Упражнение 22. Функция $x\sin\frac{\pi}{x}$ строго возрастает, а функция $x\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$ строго убывает при $x > 2$.

Доказательства остальных утверждений теоремы содержатся в упражнениях 13 и 14.

Дополнением к теореме 2 является следующее утверждение.

Задача 4. Площадь выпуклого n-угольника удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{3}}H^2 \leqslant S \leqslant \frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}D^2.$$

Левое неравенство обращается в равенство лишь для правильного треугольника, а правое — лишь для правильного n-угольника и только, если n нечетно.

Мы надеемся, что вам удастся найти короткое и красивое доказательство этого утверждения.

Задачи для исследования

Выше были доказаны неравенства Рейнхардта, связывающие между собой периметр P, площадь S, диаметр D и ширину H произвольного выпуклого n-угольника.

Читателю, желающему выяснить условия, при которых эти неравенства обращаются в равенства, мы предлагаем ряд задач для самостоятельного решения.

1. Если n нечетно, то для правильного n-угольника неравенства Рейнхардта обращаются в равенства. Если n четно, то это неверно.

2. Если $n \neq 2^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, то в случае выполнения одного из равенств

$$H\cdot 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = P,$$

$$D\cdot 2n\sin\frac{\pi}{2n} = P \quad (*)$$

выполняется другое.

Многоугольники, для которых выполняются условия задачи 2, называются далее *экстремальными*. Любой равносторонний n-угольник назовем *k-полуправильным*, если k его вершин можно окрасить в белый цвет, а остальные — в черный так, что между каждыми соседними белыми вершинами лежит $\frac{n}{k} - 1$ черных вершин, углы при белых вершинах равны $\pi - \frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{n}$, а углы при черных — $\pi - \frac{\pi}{n}$.

3. Если $n \neq 2^m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ и k — максимальный нечетный делитель n, то k — полуправильный n-угольник является экстремальным.

4. Найти все экстремальные n-угольники. Удовлетворительное решение этой задачи автору неизвестно. Впрочем, имеется «алгоритм», позволяющий для любого конкретного n найти все экстремальные n-угольники. С его помощью можно доказать, что:

а) если p — простое, то единственным экстремальным p-угольником является правильный p-угольник;

б) если p — прóстое и $p > 2$, то единственным экстремальным $2p$-угольником является p-полуправильный $2p$-угольник (впрочем, других полуправильных $2p$-угольников нет);

в) существует только два экстремальных девятиугольника — правильный и 3-полуправильный (других полуправильных девятиугольников нет);

г) для всех остальных n, не равных степени двойки, существуют экстремальные n-угольники, не являющиеся ни правильными, ни полуправильными; все экстремальные n-угольники являются равносторонними;

д) если $n = p$ или $n > 2p$, p — простое, $p > 2$, то существует один экстремальный n-угольник, а для любого другого $n \neq 2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, их существует несколько.

5. Для любого $n = 2^k$, $k \in N$, найти наилучшие константы h_n и d_n, для которых выполняются неравенства $h_nH \leqslant P \leqslant d_nD$. Найти также все n-угольники, для которых хотя бы одно из них обращается в равенство. Решение этой задачи автору неизвестно. Ясно лишь, что $h_n > 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, $d_n < 2n\sin\frac{\pi}{2n}$. Можно предположить, что $d_n = 2(n-2)\times$ $\times\sin\frac{\pi}{2(n-1)} + 4\sin\frac{\pi}{4(n-1)}$. При $n = 4$ это действительно так, в чем можно убедиться, решив задачу 6.

6. Среди всех выпуклых четырехугольников заданного диаметра найти тот, который имеет наибольший периметр.

Простое решение этой задачи автору неизвестно. Довольно длинное ее решение можно прочитать в книге Шклярского, Ченцова, Яглома «Геометрические оценки и задачи по комбинаторной геометрии», «Наука», 1974.

7. Для любого четного n найти наилучшую константу c_n, для которой справедливо неравенство $S \leqslant c_nD^2$, а также все n-угольники, для которых оно обращается в равенство.

При $n > 4$ решение этой задачи автору неизвестно. Ясно, что $c_n < \frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$. Довольно очевидно, что $c_4 = \frac{1}{2}$.

8. Доказать неравенства

$$D \geqslant \left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1},$$

$$H \leqslant \left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)^{-1}.$$

При $n \neq 2^m$, $m \in N$, эти неравенства неулучшаемы и каждое из них обращается в равенство только для экстремальных n-угольников.

9. Найти неулучшаемые неравенства для $n = 2^m$, $m \geqslant 3$.

Решение этой задачи при $m > 2$ автору неизвестно.

С. Г.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Нильс Бор и «Журнал шутливой физики»

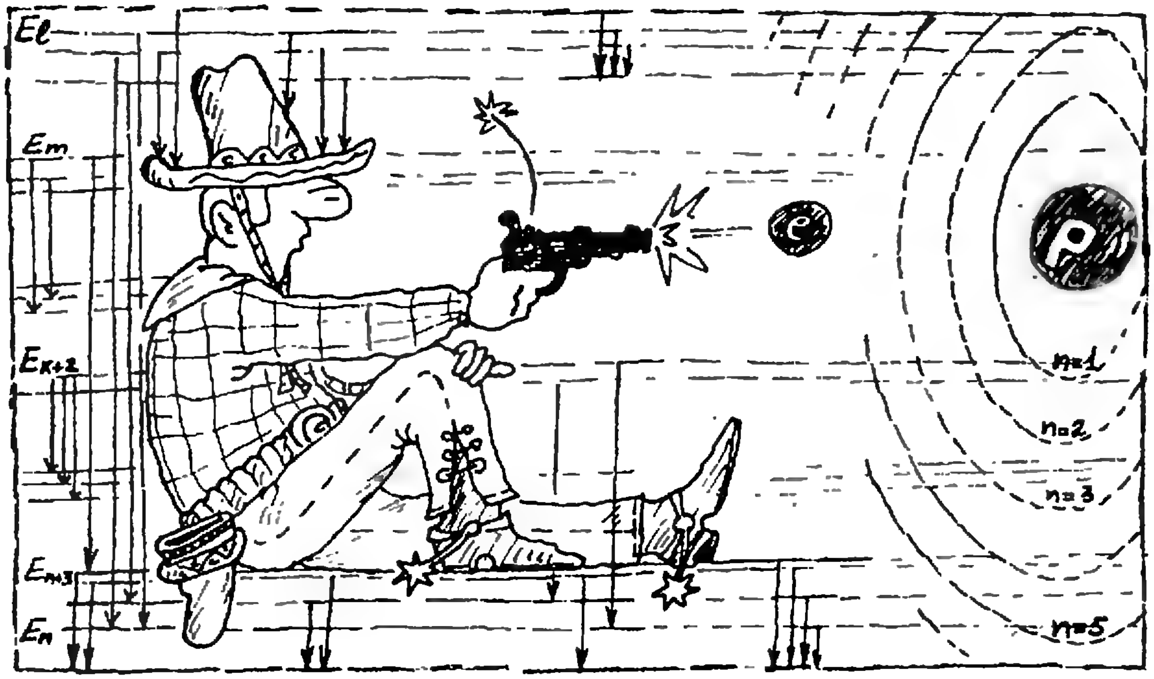
В 1935 году к 50-летию Нильса Бора сотрудники руководимого им Института теоретической физики выпустили первый том рукописного сборника "The Journal of Jocular Physics" («Журнал шутливой физики»). В предисловии к сборнику говорилось:

«Большое событие, отмечать которое мы готовились, явилось великолепным поводом совершить, наконец, тот шаг, который был уже подготовлен бурным развитием нашей науки и в котором давно ощущалась необходимость: организовать и легализовать довольно старую область физики — The Jocular Physics. По причинам, еще не выясненным, она до сих пор влачила просто жалкое существование на общем фоне стремительного развития науки. В качестве первой меры мы предприняли издание этого сборника, который знаменует рождение нового периодического издания, и посвящено оно будет исключительно юмористической стороне многогранной жизни мира физиков».

Сборник действительно стал периодическим и выходил ... раз в 10 лет (второй том вышел к 60-летию Н. Бора, третий — к 70-летию). Аналогичный сборник под названием "The Journal of Unclear Physics" («Журнал нечистой физики») был выпущен к 50-летию английского физика Р. Пайерлса. Здесь мы помещаем два материала из этих сборников.

Атом, который построил Бор

Вот Бор всем известный...
А вот дополнительности закон,
Который был Бором провозглашен,
Который описывает с двух сторон
Как электрон, так и протон
Атома,
Который построил Бор.
А вот электронные уровни
Атома,
Который построил Бор,
Которые спектр характерный дают
На них перескакивают электроны,
Атома,
Который построил Бор.
А вот ядро
Атома,
Который построил Бор,
Которое видит он как каплю,
Которая находится точно в центре
Атома,
Который построил Бор.



Н. Бор и вестерны

Нильс Бор любил ходить в кино, причем из всех жанров признавал только один — ковбойские вестерны. Трудно себе представить, что привлекало Бора в этих картинах. «Я вполне могу допустить,— говорил он,— что хорошенькая героиня, спасаясь бегством, может оказаться на извилистой и опасной горной тропе. Менее вероятно, но все же возможно, что мост над пропастью рухнет как раз в тот момент, когда она на него ступит. Исключительно маловероятно, что в последний момент она схватится за былинку и повиснет над пропастью, но даже с такой возможностью я могу согласиться. Совсем уж трудно, но все-таки можно поверить в то, что красавец ковбой как раз в это время будет проезжать мимо и выручит несчастную. Но чтобы в этот момент тут же оказался оператор с камерой, готовый заснять все эти волнующие события на пленку,— уж этому, увольте, я не поверю!»

Математика
8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена десятиклассникам. Однако первая ее часть может быть полезной и учащимся 8-х и 9-х классов.

Векторы в геометрических задачах

1. Параллельность и отношение отрезков

Задача 1. *Точки K, L, M, N — середины сторон BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q — середины отрезков KM и LN. Доказать, что отрезки PQ и AB параллельны, и найти отношение их длин (рис. 1).*

Переведем утверждение задачи на векторный язык.

Параллельность отрезков PQ и AB записывается равенством $\overrightarrow{PQ}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, где k — некоторое действительное число. Вычислив k, мы найдем отношение длин отрезков PQ и AB.

Основной в решении этой задачи оказывается формула $\overrightarrow{OZ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY})$, где Z — середина отрезка XY, а O — произвольная точка.

Решение. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM})=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})\Big)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$

Отсюда следует, что отрезки PQ и AB параллельны, а отношение их длин равно $\frac{1}{4}$.

В приведенном решении мы дважды использовали «формулу разности» $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$, позволяющую выразить любой вектор через векторы, отложенные от одной и той же точки.

Вот несколько примеров записи одного и того же утверждения на геометрическом и векторном языках:

1. *Точки A, B, C лежат на одной прямой.*	1. $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. *Точка M делит отрезок AB в отношении $\lvert AM\rvert:\lvert MB\rvert=l:k$*	2. $k\cdot\overrightarrow{AM}=l\cdot\overrightarrow{MB}$ $(k>0,$ $l>0)$.
3. *M — точка пересечения медиан (центроид) треугольника ABC.*	3. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
4. *$ABCD$ — параллелограмм.*	4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

В двух последних случаях геометрическое и векторное утверждения равносильны при условии, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Задача 2. *Доказать, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой (рис. 2).*

Решение. Пусть M, N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей. Из подобия треугольников AOD и BOC следует: $\frac{|OA|}{|OC|}=\frac{|OD|}{|OB|}$. Обозначая эти

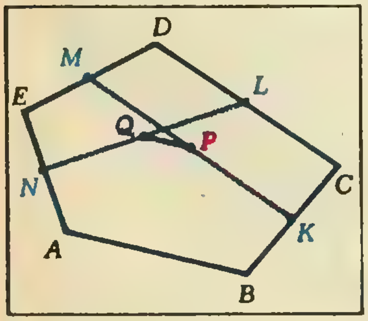


Рис. 1.

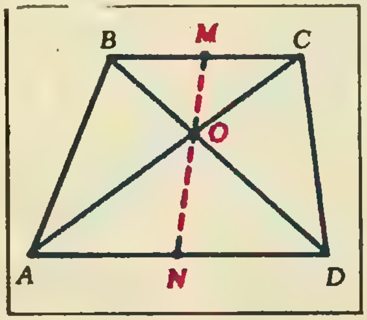


Рис. 2.

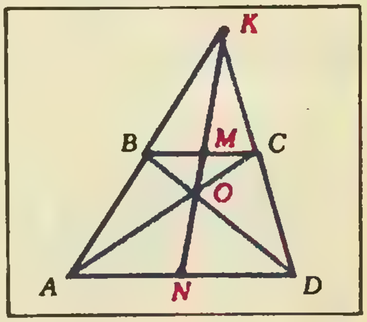


Рис. 3.

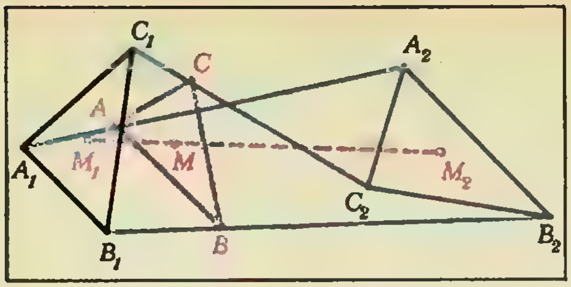


Рис. 4.

отношения через k, получим $\overrightarrow{OA}=-k\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=-k\cdot\overrightarrow{OB}$.

Тогда $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(-k\cdot\overrightarrow{OC}-k\cdot\overrightarrow{OB})=-k\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})=-k\cdot\overrightarrow{OM}$, то есть точки M, O, N лежат на одной прямой.

Аналогично доказывается, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой. Таким образом, любая трапеция обладает следующим свойством: *середины ее оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (рис. 3).*

Задача 3. *Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки A, B, C делят отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в одном и том же отношении:*

$$\frac{|A_1A|}{|AA_2|}=\frac{|B_1B|}{|BB_2|}=\frac{|C_1C|}{|CC_2|}.$$

Докажите, что если эти точки не лежат на одной прямой, то центроиды треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.

Решение. Пусть M, M_1, M_2 — центроиды треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ (рис. 4), O — произвольная точка. Обозначим через k отношение $\frac{|A_1A|}{|AA_2|}$. Тогда $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})=\frac{1}{3}((\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB_1})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}))=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})$.

Аналогично

$$\overrightarrow{MM_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}).$$

Так как $\overrightarrow{A_1A}=k\cdot\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{B_1B}=k\cdot\overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{C_1C}=k\cdot\overrightarrow{CC_2}$, получаем $\overrightarrow{M_1M}=k\cdot\overrightarrow{MM_2}$ — точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой.

2. Центроид системы точек

Понятие центроида легко переносится с треугольника на произвольную конечную систему точек пространства:

Точка M называется центроидом системы n точек A_1, A_2, ..., A_n, если $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$.

С помощью формулы разности последнее равенство можно переписать так: $(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OM})+\ldots+(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM})=\vec{0}$ (O — произвольная точка),

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}-n\cdot\overrightarrow{OM}=\vec{0},$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}).$$

Из последней формулы следует, что любая конечная система точек имеет единственный центроид. Причем центроид системы, состоящей из одной точки, — сама эта точка, центроид пары точек — середина соединяющего их отрезка. Нахождение центроида большего числа точек упрощается благодаря следующему принципу: *если M_1 — центроид системы k точек A_1, A_2, ..., A_k, а M_2 — центроид системы l точек B_1, B_2, ..., B_l и эти системы не имеют общих точек, то центроид системы $k+l$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $B_1, B_2, \ldots, Bl$ — это точка M, принадлежащая отрезку M_1M_2 и делящая его в отношении $|M_1M|:|MM_2|=l:k$.*

Действительно, пусть $k\cdot\overrightarrow{M_1M}=l\cdot\overrightarrow{MM_2}$.

Используя формулу разности, получим:

$$k(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1})=l(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}),$$
$$k\cdot\overrightarrow{OM}-k\cdot\overrightarrow{OM_1}=l\cdot\overrightarrow{OM_2}-l\cdot\overrightarrow{OM},$$
$$(k+l)\cdot\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OM_1}+l\cdot\overrightarrow{OM_2},$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OM_1}+\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OM_2}.$$

По формуле (1)

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}),\ \overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{l}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}),$$

так что

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k+l}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}),$$

и мы получили требуемое.

Применяя этот принцип к тройке вершин треугольника, мы получим, что центроид треугольника лежит на

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	4	1	2
$\vec b$	1	4	0
$\vec c$	2	0	2

Табл. 1.

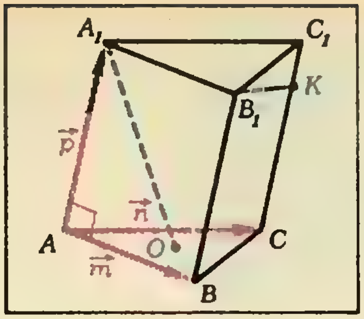


Рис. 5.

	$\vec m$	$\vec n$	$\vec p$
$\vec m$	a^2	$\frac{1}{2}a^2$	0
$\vec n$	$\frac{1}{2}a^2$	a^2	a^2
$\vec p$	0	a^2	$4a^2$

Табл. 2.

отрезке, соединяющем вершину с центроидом двух других вершин, то есть с серединой противоположной стороны, и делит этот отрезок в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда следует известная теорема планиметрии: *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершин.*

Аналогично доказывается, что *отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра — и делятся в этой точке в отношении 3:1, считая от вершин.*

3. Вычисление расстояний и углов

Задав в пространстве тройку некомпланарных векторов — базис, можно разложить по этому базису любой вектор единственным образом. Зная же скалярные произведения базисных векторов, мы сможем легко вычислить скалярные произведения любых векторов, а следовательно, их длины и углы между ними.

Задача 4. *Дано* $\vec a\vec b=1$, $\vec a\vec c=2$, $\vec b\vec c=0$, $\vec a^2=\vec b^2=4$, $\vec c^2=2$.

Найти $|\vec p|$, $|\vec q|$, $(\widehat{\vec p, \vec q})$, *если* $\vec p=2\vec a-\vec b$, $\vec q=\vec a+\vec b+\vec c$.

Решение: Перепишем условие задачи в виде «таблицы умножения» (табл. 1). Находим: $|\vec p|=\sqrt{\vec p^2}=$

$$=\sqrt{(2\vec a-\vec b)^2}=\sqrt{4\vec a^2-4\vec a\vec b+\vec b^2}=\sqrt{16}=4;$$

$$|\vec q|=\sqrt{\vec q^2}=\sqrt{(\vec a+\vec b+\vec c)^2}=$$

$$=\sqrt{\vec a^2+\vec b^2+\vec c^2+2\vec a\vec b+2\vec a\vec c+2\vec b\vec c}=$$

$$=\sqrt{16}=4.$$

Из определения скалярного произведения получаем:

$$\cos(\widehat{\vec p, \vec q})=\frac{\vec p\vec q}{|\vec p|\cdot|\vec q|}=\frac{2(\vec a-\vec b)(\vec a+\vec b+\vec c)}{16}=$$

$$=\frac{2\vec a^2+\vec a\vec b+2\vec a\vec c-\vec b^2-\vec b\vec c}{16}=\frac{9}{16},$$

откуда $(\widehat{\vec p, \vec q})=\arccos\frac{9}{16}$.

Задача 5. *Основание призмы* $ABCA_1B_1C_1$ *— правильный треугольник. Боковое ребро* AA_1 *вдвое больше стороны основания и образует углы* $\widehat{A_1AB}=90°$, $\widehat{A_1AC}=60°$. O *— центр треугольника* ABC. *Найти на прямой* CC_1*, такую точку* K*, что прямые* B_1K *и* A_1O перпендикулярны.

Решение. Положение точки K на прямой CC_1 определяется значением коэффициента x в равенстве $\overrightarrow{C_1K}=x\cdot\overrightarrow{C_1C}$. Обозначим через a длину стороны основания призмы, выберем в качестве базиса тройку векторов $\vec m=\overrightarrow{AB}$, $\vec n=\overrightarrow{AC}$, $\vec p=\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 5), после чего составим «таблицу умножения» (табл. 2).

Разложим векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{B_1K}$ в базисе $(\vec m, \vec n, \vec p)$: $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=$

$$=-\vec p+\frac{1}{3}(\vec m+\vec n)=\frac{1}{3}(\vec m+\vec n-3\vec p),$$

$$\overrightarrow{B_1K}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1K}=-\vec m+n-x\vec p.$$

Записав условие перпендикулярности прямых A_1O и B_1K:

$$(\vec m+\vec n-3\vec p)(-\vec m+\vec n-x\vec p)=0,$$

получим, используя таблицу 2: $11a^2x-3a^2=0$, откуда $x=\frac{3}{11}$.

Упражнения

1. В тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер AB и CD. Докажите, что середины отрезков CE, DE, AF и BF являются вершинами параллелограмма.

2. Точки A, B, C, D, E, F не лежат в одной плоскости. Докажите, что если прямые AB и DE, BC и EF, CD и AF параллельны, то $|AB|=|DE|$, $|BC|=|EF|$, $|CD|=|AF|$.

3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон основания четырехугольной пирамиды с центроидами противоположных боковых граней, пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся этой точкой?

4. Докажите, что середины четырех отрезков, о которых идет речь в предыдущем упражнении, являются вершинами параллелограмма.

Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади основания пирамиды.

5. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат, каждое из боковых ребер вдвое больше стороны основания. Найдите угол между прямыми SM и BN, где M и N — середины ребер AB и SC.

6*. Прямые a и b пересекаются в точке O. Из произвольной точки M, отличной от O, опущены перпендикуляры MA и MB на прямые a и b. Из точек A и B опущены перпендикуляры AA_1 на прямую b и BB_1 на прямую a. Докажите, что прямые A_1B_1 и OM взаимно перпендикулярны.

7*. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны. Докажите, что векторы

$$\vec{m}=(\vec{a}\vec{a})\,\vec{a}+(\vec{a}\vec{b})\,\vec{b}+(\vec{a}\vec{c})\,\vec{c},$$
$$\vec{n}=(\vec{b}\vec{a})\,\vec{a}+(\vec{b}\vec{b})\,\vec{b}+(\vec{b}\vec{c})\,\vec{c},$$
$$\vec{p}=(\vec{c}\vec{a})\,\vec{a}+(\vec{c}\vec{b})\,\vec{b}+(\vec{c}\vec{c})\,\vec{c}$$

также некомпланарны.

Ю. И. Ионин, В. Б. Некрасов

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. При каких натуральных n сократима дробь $\frac{8n+71}{5n+46}$?

2. Решите уравнение $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=16$.

3. В окружности радиуса R проведены два диаметра, угол между которыми равен α. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на эти диаметры, не зависит от положения точки на окружности, и найдите его.

4. Докажите, что число $n^2+5n+16$ ни при каком натуральном n не делится на 169.

5. Постройте квадрат, если даны 4 точки: по одной точке на каждой из прямых, содержащих стороны квадрата.

Девятый класс

6. Разложите на множители выражение

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n)^2-x^n,$$

где n — натуральное число, $n>3$.

7. Высоты треугольника пересекаются в точке H. Известно, что $|HC|=|AB|$. Найдите угол при вершине C.

8. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые a и b. Проведите прямую, пересекающую обе данные прямые и: а) проходящую через данную точку M, не лежащую на a и b; б) параллельную данной прямой l. В каком случае решение возможно?

9. а) При каком условии прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны?

б) Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы $y=x^2-8x+16$ до прямой $y=-2x+1$.

10. В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые a и b. Найдите множество середин отрезков AB данной длины d таких, что $A\in a$, $B\in b$.

Десятый класс

11. Как нужно разместить в пространстве правильный тетраэдр, чтобы его ортогональная проекция на данную плоскость имела наибольшую площадь? Найдите значение этой площади, если ребро тетраэдра имеет длину a.

12. Решите уравнение

$$\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y).$$

13. Докажите *формулу Симпсона:* пусть площадь сечения тела плоскостью P_x, проведенной перпендикулярно координатной оси Ox через точку этой оси с координатой x, выражается при $x\in[a;\,b]$ многочленом от x не выше третьей степени (тело заключено между плоскостями P_a и P_b); тогда объем тела V можно вычислить по формуле

$$V=\frac{h}{6}\,(S_a+4S_{\text{ср}}+S_b),$$

где $h=b-a$, $S_a=S(a)$, $S_b=S(b)$, $S_{\text{ср}}$ — площадь «среднего» сечения — сечения плоскостью $P_{(a+b)/2}$, соответствующего координате $x_0=(a+b)/2$.

14. Дан прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат $ABCD$ со стороной 10, боковое ребро AA_1 имеет длину 40. Пусть P — середина AB, Q — середина CD, E — точка, принадлежащая PQ и удаленная от стороны AB на расстояние 1. Найдите длину кратчайшего пути, проходящего по поверхности этого параллелепипеда и соединяющего точку E с точкой F, симметричной точке E относительно центра параллелепипеда.

15. Решите уравнение $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$.

Публикацию подготовил *Б. М. Ивлев*

Уголок коллекционера

Нильс Бор и филателия

Существуют десятки марок и почтовые блоки, посвященные Альберту Эйнштейну. «Филателистическая судьба» другого выдающегося физика XX века — Нильса Бора сложилась иначе. Единственная марка с портретом Бора вышла на его родине, в Дании, в 1963 году, к пятидесятилетию создания основ квантовой теории строения атомов. На ней изображена также схематическая модель атома водорода и приведена формула для определения энергии излученных фотонов: $h\nu=E_2-E_1$.

Мы воспроизводим здесь эту марку.

В. Р.

квант для младших школьников

Задачи

1. Переложите две спички так, чтобы равенство, изображенное на рисунке, стало верным.

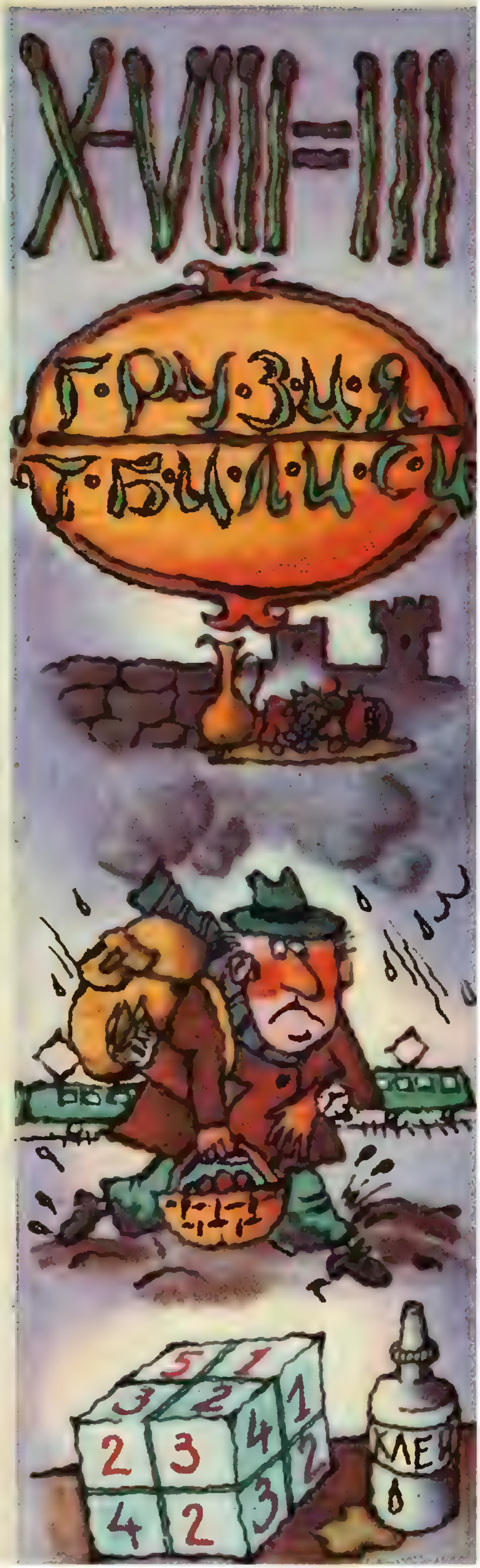
2. Чему равно выражение $\frac{\text{Г}\cdot\text{Р}\cdot\text{У}\cdot\text{З}\cdot\text{И}\cdot\text{Я}}{\text{Т}\cdot\text{Б}\cdot\text{И}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{С}\cdot\text{И}}$, если буквам соответствуют цифры, причем одинаковым буквам — одинаковые цифры, а разным — разные?

3. Однажды дождливым осенним вечером я шел на станцию по проселочной дороге. Грязь, вылетавшая из-под моих ботинок, оседала на обшлагах брюк. Придя на станцию, я обнаружил, что с внутренней стороны брюки стали грязными до колен. Но брызги грязи так высоко не поднимались. Почему же я так испачкался?

4. Число 6116 обладает следующим свойством: какую бы пару его цифр ни взять, последняя цифра их суммы такая же, как последняя цифра суммы двух других цифр. Сколько четырехзначных чисел с таким свойством?

5. Детский кубик я оклеил чистой бумагой, каждую грань разделил на четыре квадратика и в каждый квадратик попытался записать целое число так, чтобы сумма этого числа и четырех чисел в соседних квадратиках равнялась 13 (см. рисунок; соседними считаются квадратики, имеющие общую сторону). Однако у меня ничего не получилось. Может быть, вам удастся? Или же это сделать невозможно?

Эти задачи нам предложили: *Сережа Алтунджи*, ученик 7 класса, *Л. А. Штейнгарц, А. П. Савин, М. И. Музаффаров, В. В. Произволов.*



ОВОЩИ-Ф

Трение: вредное, полезное, интересное...

А. В. СЕМЁНОВ

Приходилось вам катать на санках своего приятеля? Конечно — да. И, конечно, вы замечали, что по льду катить санки одно удовольствие, по снегу — потруднее, а если попадется голый, без снега, асфальт, то тащить санки ох как тяжело. А почему? Наверное, каждый ответит сразу: при движении по асфальту трение больше. И будет прав. Но давайте разеберемся с трением чуть подробнее.

Как вы думаете, если твердые соприкасающиеся поверхности неподвижны — может ли быть между ними трение? Как следует подумайте, обратитесь к своему повседневному опыту...

Конечно, может. Если бы не сила трения, мы не смогли бы стоять даже на слегка пологой горке; никакое тело не смогло бы удержаться на наклонной плоскости — в результате действия силы тяжести оно съезжало бы. Именно трение мешает нам, когда мы пытаемся подвинуть какой-нибудь предмет. Такое трение называют трением покоя, в отличие от трения скольжения, возникающего при движении поверхностей друг относительно друга.

Итак, когда тело, скажем ящик, стоит на полу, а мы пытаемся его сдвинуть, мы преодолеваем силу трения покоя. Когда нам это удалось и ящик поехал по полу, действует сила трения скольжения.

Между трением покоя и трением скольжения есть существенное различие. Сила трения покоя зависит от того, с какой силой мы действуем на тело, пытаясь сдвинуть его с места. Мы прикладываем маленькую силу — и сила трения покоя маленькая, как раз такая, чтобы уравновесить приложенную силу. Мы увеличиваем усилие — и сила трения покоя растет. Но вот при каком-то усилии нам удалось сдвинуть ящик, он заскользил по полу. При этом сила трения скольжения остается практически постоянной и равной максимальной силе трения покоя. При каком же усилии нам наконец удастся сдвинуть тело? Иными словами, какова наибольшая сила трения покоя? От чего она зависит?

Над этими вопросами (и вообще над тем, что такое трение) ученые думали уже много веков назад. Размышления о силе трения встречаются среди записей Леонардо да Винчи. Но строгие ответы, в форме законов, были сформулированы в 1699 году французским физиком Амонтоном. Через сто лет после Амонтона законы трения были переоткрыты Кулоном, и теперь их чаще всего называют законами Амонтона — Кулона.

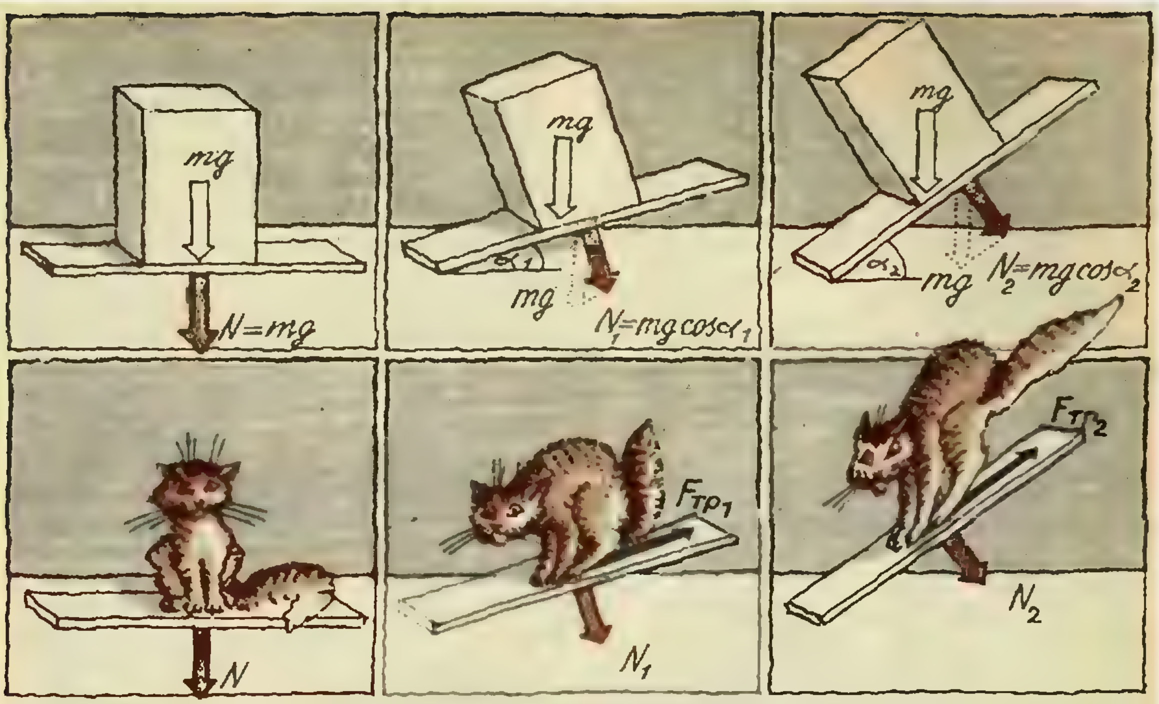
Основной из этих законов можно сформулировать так: максимальная сила трения покоя (f_{max}) между поверхностями двух тел прямо пропорциональна величине силы (N), с которой тела прижаты друг к другу:

$$f_{max}=\mu N.$$

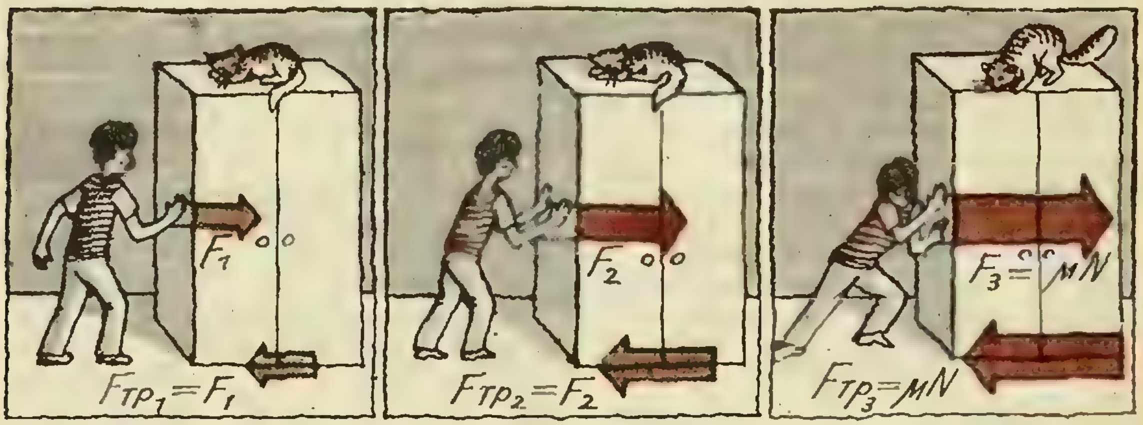
Для ящика, стоящего на полу, сила N равна силе тяжести, на наклонной плоскости прижимающая сила станет меньше, соответственно меньшей будет и сила трения. Коэффициент пропорциональности μ зависит от материалов, из которых сделаны соприкасающиеся поверхности, и от того, как они обработаны. Как это ни удивительно, сила трения не зависит от площади поверхности соприкосновения тел.

Говоря о трении, мы все время подразумевали «вредность» его действия: из-за трения протираются подошвы, «лысеют» автомобильные шины, снашиваются детали машин. С этим вредным трением борются, стараются его уменьшить. Но трение — буквально вездесуще, бывает оно и полезно.

Прежде всего, именно благодаря силе трения мы с вами можем ходить по земле. Припомните: как трудно бывает в гололед ходить по улице. Все это происходит из-за того, что уменьшается сила трения при движении: по льду она меньше, чем по асфальту. И только благодаря трению



Когда тело находится на горизонтальной поверхности, сила, прижимающая его к этой поверхности, равна силе тяжести. Если поверхность не горизонтальна, а составляет какой-то угол α с горизонтом, то прижимающая сила тем меньше, чем больше этот угол ($\alpha_2>\alpha_1$, и $N_2<N_1$). И соответственно, чем более крутая наклонная плоскость, тем меньше сила трения скольжения ($F_{тр_2}<F_{тр_1}$).



Шкаф не сдвинется с места до тех пор, пока прикладываемая к нему «движущая» сила не станет равной μN. А до этого момента сила трения покоя всякий раз уравновешивает «движущую» силу, и шкаф остается неподвижным.

можем мы подняться по лестнице так, чтобы ноги не скользили по ступенькам, а руки по перилам.

На рисунке на странице 26 художник попытался показать, что случится, если внезапно исчезнет сила трения. Но не все последствия этого поистине катастрофического исчезновения ему удалось предвидеть. Подумайте сами, чего художник не предусмотрел.

Нет сомнений, что перед нами безумная теория, но весь вопрос в том, достаточно ли она безумна, чтобы оказаться еще и верной!

Н. Бор

...цивилизация стоит перед наиболее серьезной проблемой, требующей обеспечения урегулирования отношений между народами, чтобы беспрецедентные опасности были устранены, и народы мира могли бы совместными усилиями повышать благосостояние людей на основе достигнутого научного прогресса.

Н. Бор

задачник кванта

Задачи

M946—M950; Ф958—Ф962

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M946, M947» или «Ф958». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M946—M950 предлагались на XI Всероссийской олимпиаде по математике; задачи Ф958—Ф961 предлагались на заключительном этапе XIX Всесоюзной олимпиады по физике.

M946. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Л. П. Купцов

M947. На доске в строку написаны числа

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

а) Докажите, что как бы мы ни расставили знаки «+» и «—» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «—» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

M948. Правильный треугольник *ABC* полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками*). Докажите, что треугольник *ABC* можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками (эти треугольники разрешается передвигать).

В. В. Произволов

M949. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были бы одинаковы во всех пяти группах?

Е. П. Ерошенков

M950. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более, чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были бы соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону.)

С. В. Конягин

Ф958. Космическая станция массой M и состыкованный с ней спутник массой m движутся вокруг

---

*) В данной задаче треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью.

Земли по круговой орбите, радиус которой равен 1,25R, где R — радиус Земли. В некоторый момент спутник катапультируется со станции в направлении ее движения и переходит на эллиптическую орбиту с апогеем, удаленным от центра Земли на расстояние 10R. При каком отношении m/M спутник встретится со станцией, совершив один оборот вокруг Земли?

А. А. Бирюков, Б. В. Данилюк

Ф959. При относительной влажности воздуха $r_1=50$ % вода, налитая в блюдце, испарилась на открытом воздухе за время $t_1=40$ мин. За какое время испарилась бы вода при $r_2=80$ %?

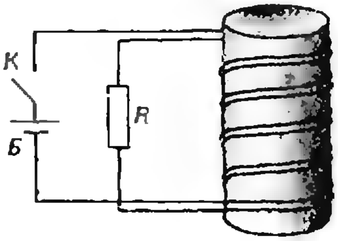


Рис. 1.

Ф960. Для того чтобы получить две совершенно одинаковые катушки, их наматывают на немагнитный сердечник одновременно, используя сложенные вместе провода (рис. 1). Одну из катушек подключают через ключ K к батарейке $Б$ с напряжением U_0, вторую — к резистору R. Ключ замыкают. Рассчитайте мощность тока на резисторе. Нарисуйте график зависимости силы тока через батарейку от времени.

Через время τ ключ размыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе, начиная с этого момента?

Индуктивность каждой из катушек L. Батарейку считать идеальной. Сопротивлением проводов пренебречь.

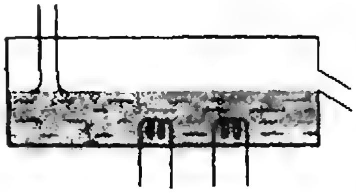


Рис. 2.

Ф961. Для поддержания постоянной температуры воды в проточном аквариуме пользуются двумя одинаковыми нагревателями (рис. 2). В обычном режиме используют один из них, а если подключают параллельно второй нагреватель, то расход холодной воды приходится увеличить в 3 раза. Как нужно изменить расход холодной воды, если нагреватели включены в сеть последовательно? Каким должен быть расход холодной воды, если включена одна спираль мощностью $P=100$ Вт? Температура холодной воды $t_1=10$ °C, температура воды в аквариуме $t_2=27$ °C. Вода быстро перемешивается.

А. Р. Зильберман

Ф962. Точечные источники, расположенные на главной оптической оси линзы, образуют равномерно светящуюся нить (проходящую через фокус линзы). Найти закон изменения $E(x)$ освещенности в точках, лежащих на той же оси по другую сторону линзы на больших от нее расстояниях x ($x \gg F$, где F — фокусное расстояние линзы).

М. А. Воронцов, В. Е. Куницын

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires *no* **information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*).** *After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us.* **It goes without saying that not all these problems are first publications.** *The solutions of* **problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems** *from different issues,* **under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the acade**-*mic year we sum up the results* **of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover,** *in two copies* **(in Russian or in English); including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).**

Problems M946—M950 were proposed at the 11th All-Russian olympiad in mathematics; problems P958—P961 were proposed at the final stage of the All-Union olympiad in physics.

M946—M950, P958—P962

M946. Two parabolas on the plane have four common points and perpendicular axes of symmetry. Prove that the four common points lie on a circle.

L. P. Kuptsov

M947. The following numbers are written in line on the blackboard.

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \cdots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

a) Prove that for any disposition of the signs "+" and "—" between them the corresponding sum will be non-zero.

b) What least amount of numbers must be erased from this list so that for a certain disposition of the signs "+" and "—" between the remaining numbers the corresponding sum vanishes?

M948. The equilateral triangle ABC is entirely covered by five smaller equilateral triangles. Prove that the triangle ABC can be entirely covered by four of these triangles.

V. V. Proizvolov

M949. A total of 1985 weights of mass 1g, 2g, 3g,...,1984g, 1985g are given. Can the weights be divided into five groups so that the number of weights and their total mass in each group is the same?

E. P. Eroshenkov

M950. Garden plots in the City of Flowers are being distributed among twenty five dwarfs. Each plot is a 1 by 1 square, together they constitute a 5 by 5 square. Each dwarf is on bad terms with no more than three other dwarfs. Prove that the plots can be distributed so that no two dwarfs on bad terms with each other are given neighbouring plots. (Plots are called neighbouring if they have a common side.)

S. V. Konyagin

P958. A space station of mass M linked together with a sputnik of mass m moves along a circular orbit of radius $1.25R$ around the Earth, where R is the Earth's radius. At some moment the sputnik is catapulted from the station in the direction of motion and then moves along an elliptic orbit with apogee at a distance $10R$ from the Earth's centre. For what ratio m/M will the sputnik meet the space station after one rotation around the Earth?

A. A. Biryukov, B. V. Danilyuk

P959. When the atmosphere's relative humidity was $r_1=50\ \%$, the water contained in a saucer and placed outdoors evaporated in time $t_1=40$ min. Now fast would the water have evaporated if $r_2=80\ \%$?

P960. In order to obtain two absolutely identical coils, they are simultaneously wound around the same non-magnetic cylinder using two wires put together (see Рис. 1). One of the coils is connected through the switch K to the battery B of voltage U_0, the second to the resistor R. The switch K is then turned on. Calculate the power of current on the resistor. Plot the dependence on time of the current flowing through the battery. After time τ the switch is turned off. How much heat will be developed on the resistor from that time on? The inductivity of each coil is L. The battery may be assumed ideal, the resistance of the wires negligible.

P961. Two identical heaters are used to maintain constant water temperature in a flow-through aquarium (Рис. 2). When the water flow is normal, it suffices to use one heater, but if the second heater is connected in parallel to the first one, the water flow must be increased three fold. How must the water flow be changed when the two heaters are connected

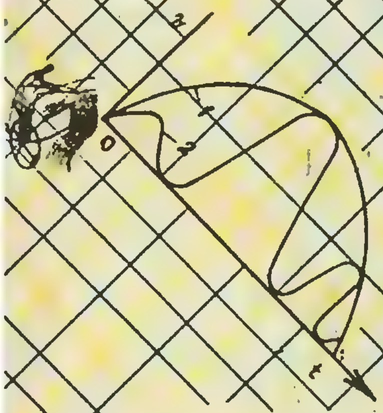
(Окончание см. на с. 34)

калейдоскоп

вопросы и задачи

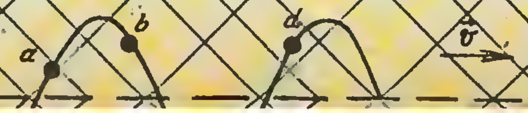
СКОРОСТЬ

1. График изображает зависимость от времени скоростей двух прямолинейно движущихся тел на протяжении одного и того же промежутка времени. Какое из тел имело за этот промежуток бóльшую среднюю скорость?



2. Лодку подтягивают за веревку к берегу. Определить скорость движения лодки в момент, когда угол наклона веревки α, скорость ее вытягивания — $v_в$.

3. На рисунке изображено расположение точек, участвующих в поперечном волновом движении, в какой-то момент времени ($\bar{v}$ — вектор скорости волны). Каковы направления векторов мгновенных скоростей точек a, b, c и d в этот момент времени?



«...если бы камень, выпущенный с вершины мачты плывущего с большой скоростью корабля, упал в точности в то же самое место, куда он падает, когда корабль стоит неподвижно, то какую службу сослужил бы этот опыт с падением для решения вопроса, стоит ли судно неподвижно или же плывет?»

Г. Галилей

«Диалог о двух главнейших системах мира»

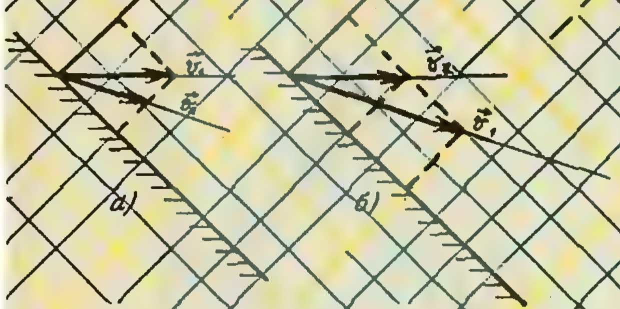
Δx
t
t₁
событие
встреча

7. Определить скорость падения капель дождя, оставляющих след на стеклах электрички, если известна ее скорость и угол наклона следа по вертикали. Ветра нет.

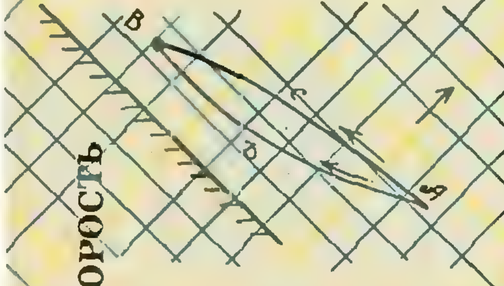
8. Тело брошено с начальной скоростью $\bar{v}_0$ под углом α к горизонту. Найти изменение скорости тела за время полета, пренебрегая сопротивлением воздуха.

9. В какой точке траектории летящее тело (см. задачу 8) обладало наименьшей скоростью?

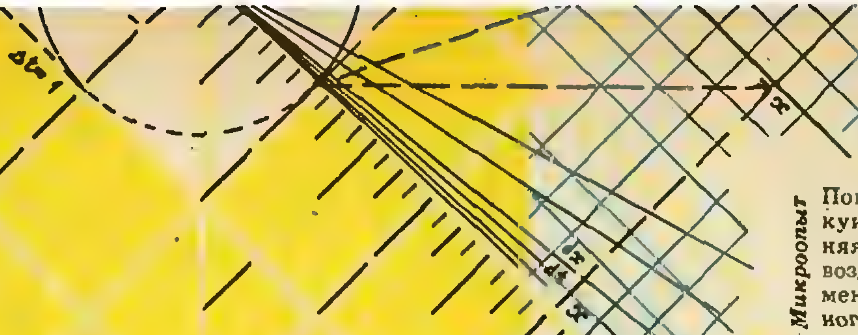
4. Два камня брошены с поверхности Земли под различными углами к горизонту со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ так, как показано на рисунках. Какой из камней улетит дальше? Сопротивлением воздуха пренебречь.



5. Тело соскальзывает из точки A в точку B один раз (не отрываясь) по дуге ACB, другой раз по дуге ADB. В каком случае скорость тела в точке B больше, если коэффициент трения один и тот же?



6. Может ли человек бежать быстрее своей тени?



А так ли хорошо знакомо вам понятие

СКОРОСТЬ ?

Скорость — слово, которым пользуются задолго до того, как узнают, что же скрывается за ним в строгом понимании, прежде всего связывая его с быстротой движения.

Скорость — одна из первых векторных физических величин, с которыми вам пришлось познакомиться. Чтобы задать скорость, надо определить не только ее модуль, но и направление.

Скорость — величина относительная. Одно и то же тело может одновременно двигаться и находиться в покое в разных системах отсчета.

Скорость, с которой распространяется свет в вакууме,— максимально возможная скорость в природе, фундаментальная физическая константа.

Продолжим же знакомство с этим богатым по содержанию физическим понятием. Скорость — тема сегодняшнего «Калейдоскопа».

Квант 10/85

Микроопыт

Попробуйте, имея газету и секундомер, показать, что средняя скорость движущегося в воздухе тела тем больше, чем меньше площадь его поперечного сечения.

Любопытно, что...

...некоторые объекты могут достигать на Земле скоростей, значительно превышающих вторую космическую, однако от Земли не отрываться. Это, например, электроны, движущиеся в атомах, сами атомы при тепловом движении.

...скорости, сравнимые со скоростью света, получают в земных условиях на ускорителях элементарных частиц. Однако в природе существуют и гигантские объекты, удаляющиеся от нас с подобными скоростями, — это квазары, расстояние до которых измеряется миллиардами световых лет.

Что читать о скорости в *«Кванте»* *(публикации последних лет)*

«Кинематика. Относительность движения» — 1982, № 10;

«Равномерное движение» — 1983, № 3;

«Движение по окружности» — 1984, № 6;

«Как вводятся физические величины» — 1984, № 10;

«Принцип относительности» — 1984, № 10;

«Об одном стихотворении А. С. Пушкина» — 1984, № 10.

Квант 10/85

in sequence? How much water must be used when one heater of power $P=100$ Wt is working? The temperature of the water source is $t_1=10$ °C, the aquarium water temperature is 27 °C, its water mixes very rapidly.

A. R. Zilberman

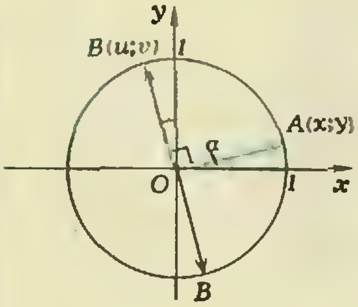
P962. Point sources, located on the principal optical axis of a lens, constitute a uniformly lighted string (passing through the lens' focus). Find the rule $E(x)$ expressing the luminosity at points of the optical axis on the opposite side of the lens, when the distance x from the lens is large ($x \gg F$, where F is the lens' focal distance).

M. A. Vorontsov, V. E. Kunitsin

Решения задач

М926 — М930; Ф938 — Ф942

М926. *Докажите, что если* $x^2+y^2=u^2+v^2=1$, $xu+yv=0$, то $x^2+u^2=y^2+v^2=1$, $xy+uv=0$.



Условие задачи удобно представить геометрически. Отметим на координатной плоскости Oxy точки $A(x; y)$ и $B(u; v)$. Угол AOB прямой, так как $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=xu+yv=0$. Кроме того, $OA^2=x^2+y^2=1$ и $OB^2=1$, поэтому точка B получается из точки A поворотом вокруг O на $\pm 90°$ (см. рисунок) и $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, где α — угол между вектором $\vec{OA}$ и осью Ox, а значит, $u=\cos(\alpha\pm 90°)=$ $=\mp\sin\alpha=\mp y$, $v=\sin(\alpha\pm 90°)=\pm\cos\alpha=\pm x$. Следовательно,

$$x^2+u^2=x^2+y^2=1,$$
$$y^2+v^2=y^2+x^2=1,\ xy+uv=xy-xy=0.$$

Приведем еще одно, чисто алгебраическое, решение. В тождестве

$$(x^2+y^2-1)^2+(u^2+v^2-1)^2+2(xu+yv)^2=$$
$$=x^4+y^4+u^4+v^4+2-2(x^2+y^2+u^2+v^2)+$$
$$+2(x^2y^2+u^2v^2+x^2u^2+y^2v^2)+4xuyv=$$
$$=(x^2+u^2-1)^2+(y^2+v^2-1)^2+2(xy+uv)^2$$

левая часть, по условию, равна нулю; следовательно, равна нулю и правая часть, то есть справедливы три доказываемых равенства.

Попробуйте обобщить нашу задачу на трехмерный случай — доказать, что если три вектора длины 1 в пространстве с координатами $(x_1; x_2; x_3)$, $(y_1; y_2; y_3)$, $(z_1; z_2; z_3)$ попарно перпендикулярны, то векторы $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ и $(x_3; y_3; z_3)$ тоже имеют длину 1 и попарно перпендикулярны.

С. В. Дужин

◆

М927.* *На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведено несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешается менять: если какие-то два из них, AC и BD, пересекаются, их можно стереть и провести*
а) отрезки AB и CD,
б) отрезки AB и BC.
(Если «новый» отрезок уже проведен, проводить его второй раз не нужно.)
Можно ли после нескольких таких замен (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

а) Докажем, что через конечное число операций «типа а» — замены пересекающихся отрезков AC и BD на непересекающиеся AB и CD — мы придем к конфигурации, в которой уже не будет пересекающихся отрезков.

Рассмотрим сумму s длин всех отрезков конфигурации. При каждой операции типа a она уменьшается:

$$AB+CD<AC+BD \qquad (*)$$

(для треугольников APB и CPD, где P — точка пересечения AC и BD — рис. 1, выполнены неравенства $AB<AP+PB$ и $CD<CP+PD$; сложив их, получим (*)).

С другой стороны, величина s может принимать лишь конечное число различных значений, по-

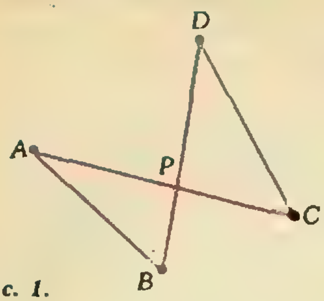


Рис. 1.

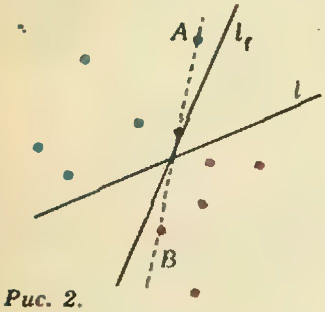


Рис. 2.

скольку существует лишь конечное число различных конфигураций из отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому через конечное число шагов мы придем к конфигурации, с которой уже нельзя проделать операцию, уменьшающую s.

Это решение дает очень грубую верхнюю оценку для максимального количества T_n операций, которое может быть проделано с конфигурацией на n точках — можно сказать лишь, что оно меньше числа всех конфигураций, то есть $2^{n(n-1)/2}$ ($n(n-1)/2$ — это число различных отрезков с концами в данных n точках).

Приведем идею другого решения, дающего значительно лучшую оценку. Рассмотрим произвольное разбиение f данных точек на два непустых множества, каждое из которых лежит целиком по одну сторону от некоторой прямой l. Таких прямых для данного разбиения, конечно, бесконечно много, но одну из них всегда можно получить, повернув по часовой стрелке прямую, соединяющую две какие-либо точки A и B на очень маленький угол вокруг середины отрезка AB (рис. 2); эту прямую обозначим l_f. Число прямых l_f, а значит и число рассматриваемых «выпуклых» разбиений не превосходит числа пар точек $n(n-1)/2$.

Назовем *балансом конфигурации* суммарное число b пересечений ее отрезков со всеми прямыми l_f; ясно, что $0 \leqslant b \leqslant (n(n-1)/2)^2$. При операции типа а число пересечений любой прямой l_f с отрезками конфигурации не увеличивается, а по крайней мере для одной прямой оно уменьшается на 2. Следовательно, $T_n \leqslant n^2(n-1)^2/8$. Интересно было бы получить еще более точную оценку для T_n.

б) Приведем пример, показывающий, что для операции «типа б» — замены пересекающихся отрезков AC и BD на имеющие общий конец AB и BC — процесс может «зациклиться» и тем самым продолжаться неограниченно. Расположим 18 точек в вершинах правильного 18-угольника и обозначим через $D(k, l)$ конфигурацию из 36 отрезков, в которой каждая из 18 точек соединена с k-й и l-й от нее по счету.

Чтобы пройти за 54 операции путь $D(4,8) \to D(5,9) \to D(6,7) \to D(4,8)$ (рис. 3), достаточно каждую из операций, изображенных на рисунке 4, проделать по 18 раз (поворачивая картинку каждый раз на 20°).

По-видимому, существуют и примеры с существенно меньшим числом точек n и длиной цикла T, чем $n=18$ и $T=54$.

Н. Б. Васильев, В. Е. Колосов

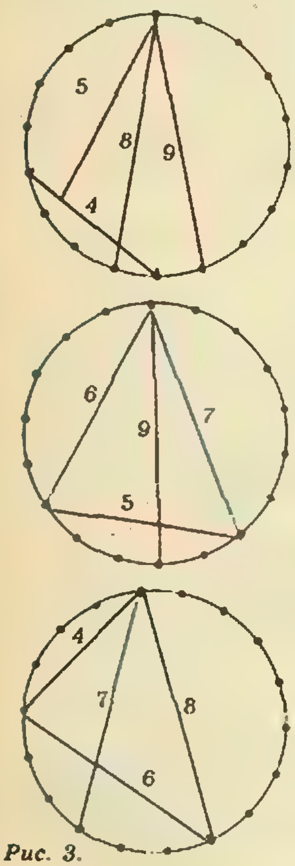


Рис. 3.

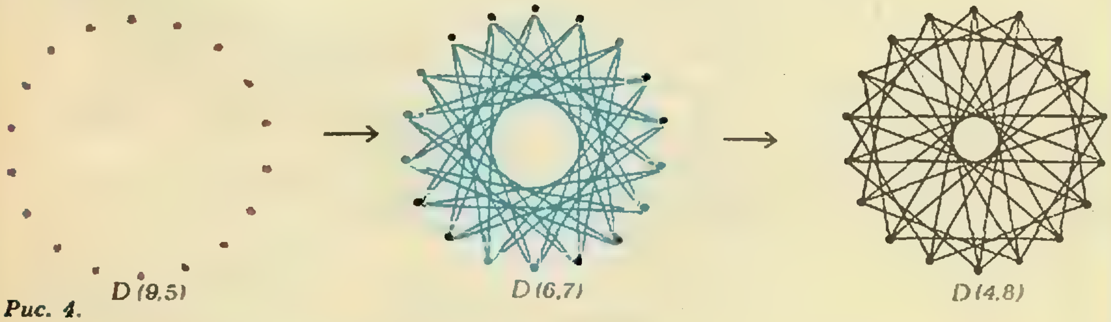


Рис. 4.

M928. *В кинотеатре $N+1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием места (в их числе и Игорь) сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять свое место; если оно занято — сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)*

Ответ: 1/2. Докажем, что выгодных для Игоря размещений столько же, сколько невыгодных, установив взаимнооднозначное соответствие между теми и другими.

Пусть при некотором исходном размещении P N зрителей на $N+1$ местах Игорь пересел на свободное место. Тогда получится новое размещение P'. Таким образом, все возможные размещения разбиваются на пары (P, P') и достаточно показать, что в каждой паре одно размещение — выгодное для Игоря (его не сгонят), а другое — невыгодное.

Если P — выгодное размещение, то последний зритель, участвующий в пересадках (то есть имеющий билет на свободное место), при размещении P' сгонит Игоря. Значит, P' — невыгодное размещение. Если же P — невыгодное размещение, то зрителю, который сгоняет Игоря, при размещении P' сгонять будет некого, поэтому на нем пересадки закончатся, то есть P' — выгодное для Игоря размещение.

И. Б. Алексеев-Астафьев

◆

M929. *Натуральные числа a, b, c, d, и e удовлетворяют условию $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Докажите, что по крайней мере а) три из них четны, б) три делятся на 5, в) два делятся на 10.*

а) Заметим, что *число n^4 при четном n делится на 16, а при нечетном n дает при делении на 16 остаток 1.* (Действительно, при $n=2k+1$

$$n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)=$$
$$=8k(k+1)(2k^2+2k+1),$$

а $k(k+1)$ всегда делится на 2.)

Следовательно, остаток от деления $a^4+b^4+c^4+d^4$ на 16 равен количеству нечетных чисел среди a, b, c, d. А поскольку он должен совпадать с аналогичным остатком для e^4, мы получаем, что условие задачи может выполняться, только если все пять чисел четны, или если число e и ровно одно из остальных чисел нечетны. Тем самым доказано и утверждение а).

б) Для остатка от деления числа n^4 на 5 справедливо утверждение, аналогичное доказанному в пункте а): *этот остаток равен 0 или 1 в зависимости от того, делится n на 5 или нет.* (Действительно, если $n=5k\pm1$, то $n^2-1=5k(5k\pm2)$ делится на 5; если $n=5k\pm2$, то $n^2+1=5k(5k\pm4)+5$ делится на 5. Поэтому $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$ всегда делится на 5, если n не кратно 5. Это утверждение есть частный случай так называемой малой теоремы Ферма, формулировка которой приводится на полях.)

Малая теорема Ферма

Для любого целого числа n и простого числа p число n^p-n делится на p.

Теперь точно так же, как в решении пункта а), доказывается, что либо все числа a, b, c, d, e делятся на 5, либо число e и ровно одно из остальных четырех не делятся на 5, откуда следует б).

в) Рассмотрим три случая.

1) Число e четно. Из решения задачи а) следует, что все остальные числа тоже четны, а из решения задачи б) — что по крайней мере три из них делятся на 5, а значит, и на 10.

2) Число e делится на 5. Этот случай рассматривается так же, как предыдущий: все

числа a, b, c, d делятся на 5 и к тому же хотя бы три из них — на 2.

3) Число e не делится ни на 2, ни на 5. Тогда, как следует из решений задач а) и б), среди чисел a, b, c, d найдутся три четных и три кратных 5, а значит, хотя бы два из них делятся на 10.

Равенство $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$ показывает, что числа, удовлетворяющие условию задачи, существуют и что оценки а), б), в) нельзя усилить.

В заключение отметим, что до сих пор неизвестно, имеет ли уравнение $a^4+b^4+c^4=d^4$ решение в натуральных числах. Но сравнительно недавно (1966 г.) было обнаружено решение уравнения $a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$:

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5.$$

В. Д. Яковлев

◆

M930. *Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что в одном из них найдется три числа, одно из которых равно сумме двух других (или два числа, из которых одно вдвое больше другого).*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что утверждение задачи неверно. Это означает, что разность любых двух чисел каждого из наших 6 множеств не принадлежит этому множеству.

Поскольку $1985:6>330$, хотя бы одно из данных множеств содержит по крайней мере 331 число. Обозначим эти числа в порядке возрастания через $a_0, a_1, \ldots, a_{330}$, а само это множество — через A. По предположению

$$a_j-a_i\notin A \text{ при всех } i,\ j,\ 0\leqslant i<j\leqslant 330. \qquad (1)$$

Рассмотрим разности a_1-a_0, a_2-a_0, ..., $a_{330}-a_0$. Это различные числа, заключенные между 1 и 1985 и содержащиеся в силу (1) в пяти из данных множеств. Поскольку $330:5=66$, хотя бы одно из этих множеств (назовем его B) содержит 66 чисел — в порядке возрастания, $b_0, b_1, \ldots, b_{65}$. Разность любых двух из них совпадает с разностью каких-то двух чисел из $a_1, \ldots, a_{330}$ (если $b_j=a_k-a_0$, а $b_i=a_l-a_0$, то $b_j-b_i=a_k-a_i$), поэтому в силу (1) и с учетом нашего исходного предположения

$$b_j-b_i\notin A\cup B \text{ при всех } i,\ j,\ 0\leqslant i<j\leqslant 65. \qquad (2)$$

Продолжая рассуждать таким же образом, мы выберем из разностей $b_1-b_0, \ldots, b_{65}-b_0$ $[65/4]+1=17$*) чисел $c_0<c_1<\ldots<c_{16}$, принадлежащих третьему из данных множеств, отличному от A и B (назовем его C). При этом в силу (2) и нашего предположения

$$c_j-c_i\notin A\cup B\cup C \text{ при всех } i,\ j,\ 0\leqslant i<j\leqslant 16$$

(если $c_j=b_k-b_0$, $c_i=b_l-b_0$, то $c_j-c_i=b_k-b_l$).

Аналогично выбираются 6 чисел $d_0<d_1<\ldots<d_5$ $(5=[16/3])$ из четвертого множества D, для которых

$$d_j-d_i\notin A\cup B\cup C\cup D \text{ при } 0\leqslant i<j\leqslant 5;$$

затем 3 числа $e_0<e_1<e_2$ $(2=[5/2])$ из пятого множества E, попарные разности которых e_j-e_i, $0\leqslant i<j\leqslant 2$ могут принадлежать уже только шестому множеству F, и, наконец, два различных чис-

---

*) $[a]$ — целая часть числа a.

ла $f_0=e_1-e_0$ и $f_1=e_2-e_0$ из множества F, разность $f_1-f_0=e_2-e_1$ которых тоже должна принадлежать множеству F, что противоречит нашему предположению.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Рассуждая так же, как в приведенном решении, нетрудно показать, что утверждение задачи выполняется для любого разбиения первых N чисел $1, 2, \ldots, N$ на k множеств при

$$N=N_k=k!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right) \tag{3}$$

($n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$). Значения N_k для $k=1, \ldots, 6$ выписаны в таблице на полях. Очевидно, что и для любого $N\geqslant N_k$ утверждение задачи будет верно для k множеств; в нашем случае $1985>1957=N_6$. Отметим, что сумма в скобках в правой части (3) при $k\to\infty$ очень быстро сходится к основанию натуральных логарифмов — числу $e=2{,}718\ldots$ Можно проверить, что $N_k=[k!e]$, однако эта красивая формула, к сожалению, не дает *наименьшего* подходящего значения N для данного k; например, для $k=3$ наименьшее значение равно 14, а не 16. Здесь возникает интересная, но, видимо, трудная задача оценки этого наименьшего значения снизу. Верно ли, например, что оно всегда больше $ck!$, где c — некоторая постоянная? Лучшей известной пока *оценкой* остается $(3^k-1)/2$ *А. Ходулева* (см. решение задачи М540, «Квант» № 12, 1979, с. 23).

А. Д. Валиев, В. Н. Дубровский

k	N_k
1	2
2	5
3	16
4	65
5	326
6	1957

◆

Ф938. *Пилот космического корабля, движущегося со скоростью $v=1$ км/с, заметил прямо по курсу астероид диаметром $d=7$ км, когда до его поверхности оставалось расстояние $l=8{,}5$ км. Космонавт сразу же включил аварийные двигатели, которые за пренебрежимо малое время сообщают кораблю дополнительную скорость $\Delta v=300$ м/с, направление которой задается космонавтом. Может ли корабль избежать столкновения?*

Чтобы избежать столкновения, космонавт должен так изменить скорость корабля, чтобы угол между первоначальным направлением «на астероид» и новым курсом был больше угла α_0, определяемого условием (рис. 1)

$$\sin\alpha_0=\frac{d/2}{l+d/2}=\frac{d}{2l+d}\approx0{,}292.$$

Максимальное отклонение от первоначального курса при сообщении кораблю дополнительной скорости Δv обеспечивается в том случае, когда вектор $\vec{\Delta v}$ оказывается перпендикулярным вектору $\vec{v}_1=\vec{v}+\vec{\Delta v}$ (рис. 2), то есть когда

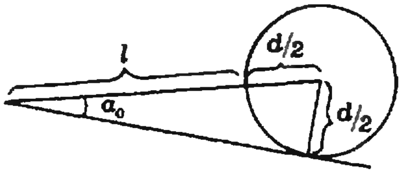


Рис. 1.

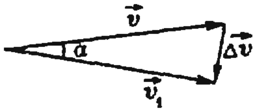


Рис. 2.

$$\sin\alpha=\frac{\Delta v}{v}=0{,}3.$$

Значит, при включении аварийных двигателей космонавт может изменить курс корабля на угол $\alpha>\alpha_0$, и столкновения с астероидом не произойдет.

А. В. Андрианов

◆

Ф939. *Дно сосуда наклонено под углом $\alpha=45°$ к горизонту. В дне имеется полусферическая выпуклость радиусом R*

Рассмотрим тело, имеющее форму половины шара радиуса R. Предположим, что оно находится в жидкости плотности ρ и ориентировано в про-

(рисунок 1). Высота столба жидкости над выпуклостью равна H. Какая вертикальная сила действует со стороны жидкости на выпуклый участок дна? Плотность жидкости равна ρ.

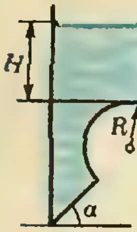


Рис. 1.

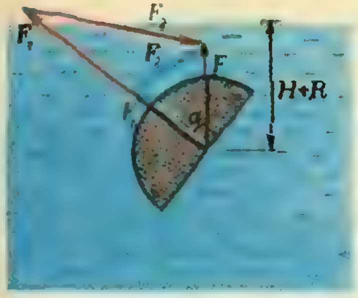


Рис. 2.

странстве точно так же, как и выпуклость в дне данного сосуда.

Согласно закону Архимеда, на это тело действует выталкивающая сила $\vec{F}$, направленная вертикально вверх и равная по модулю

$$F=\rho gV=\rho g\,\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\rho g\pi R^3.$$

С другой стороны, силу $\vec{F}$ можно представить как равнодействующую двух сил давления со стороны жидкости: силы $\vec{F}_1$, действующей на «основание» половины шара, и силы $\vec{F}_2$, действующей на его боковую поверхность (на рисунке 2 показаны два возможных случая):

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$

Нас интересует проекция силы $\vec{F}_2$ на вертикальную ось (обозначим ее через X и направим вверх):

$$F_{2x}=F-F_{1x}\quad\text{(для одного случая)}$$

или

$$F_{2x}=F_{1x}-F\ \text{(для другого случая)}.$$

Для нахождения модуля и проекции силы $\vec{F}_1$ заметим, что давление линейно возрастает с глубиной и поэтому можно воспользоваться его средним значением:

$$F_1=p_{\text{ср}}S=\rho g\,(H+R)\,\pi R^2,$$
$$F_{1x}=\rho g\,(H+R)\,\pi R^2\cos\alpha.$$

Тогда для искомой величины получим

$$F_{2x}=F-F_{1x}=\frac{2}{3}\rho g\pi R^3-\rho g\,(H+R)\,\pi R^2\cos\alpha$$

или

$$F_{2x}=F_{1x}-F=\rho g\,(H+R)\,\pi R^2\cos\alpha-\frac{2}{3}\rho g\pi R^3.$$

При угле $\alpha=45°$ первый случай оказывается *невозможным*: $2/3<\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, поэтому $F_{2x}<0$, чего в данной ситуации быть не может. Таким образом, остается второй случай:

$$F_{2x}=\rho g\pi R^2\left((H+R)\cos\alpha-\frac{2}{3}R\right).$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф940. *Почему при кладке кирпичных печей для скрепления кирпичей используют глиняный раствор, а не, например, цементный (хотя он более твердый)?*

В печи возможны большие и неравномерные по времени и по объему перепады температуры. Если кирпичи и раствор сделаны из разных материалов (то есть из материалов с разными коэффициентами теплового расширения), то при изменении температуры (охлаждение, нагревание) они будут по-разному меняться в объеме (расширяться, сжиматься). Это приведет к возникновению больших внутренних напряжений в местах контактов кирпич — раствор; в результате печь растрескается.

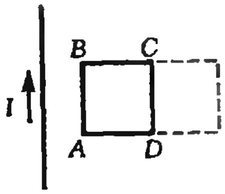
В. А. Ильин

◆

Ф941. *В магнитном поле постоянного прямолинейного тока находится квадратная металлическая рамка ABCD (см.*

При переводе рамки в новое положение изменяется пронизывающий ее магнитный поток. В результате в рамке индуцируется электродвижущая си-

рисунок). Рамку переводят в новое положение, показанное на рисунке пунктиром. Это можно сделать двумя способами: равномерным поворотом вокруг стороны CD или равномерным параллельным переносом вдоль AD. При каком способе выделится больше тепла, если время перевода рамки в новое положение в обоих случаях одинаковое?



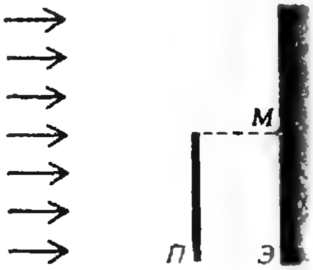
ла, возникает ток и выделяется тепло. ЭДС индукции, а значит, и выделившееся в рамке количество теплоты зависят от изменения магнитного потока через рамку и от времени, за которое это изменение произошло.

Во время поворота рамки вокруг стороны CD магнитный поток изменяется от некоторого начального значения до нуля и далее до некоторого значения с противоположным, по сравнению с первоначальным, знаком. При параллельном переносе рамки вдоль AD изменение магнитного потока происходит от начального значения до другого, меньшего значения, но с тем же знаком. Таким образом, в первом случае изменение магнитного потока больше, чем во втором. Это означает, что и тепла в рамке выделится больше в первом случае.

С. С. Кротов

◆

Ф942. *Плоская световая волна падает нормально на экран Э. Как изменится освещенность экрана в точке М (см. рисунок), если на пути волны поместить полубесконечную непрозрачную пластину П, параллельную экрану?*



Волновая поверхность плоской волны — плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны. На пластину $П$ свет падает нормально, поэтому плоскость, в которую помещают пластину, является одной из волновых поверхностей, и ее можно рассматривать как совокупность одинаковых вторичных источников, колеблющихся в фазе. Результирующее колебание в точке M на экране представляет собой суперпозицию колебаний, приходящих от этих источников.

При внесении пластины закроется половина вторичных источников. Поэтому амплитуда результирующего колебания в точке M уменьшится в 2 раза. Освещенность экрана в точке M пропорциональна квадрату этой амплитуды. Следовательно, при внесении пластины освещенность уменьшится в 4 раза.

Д. А. Купцов

Это было так, точно из-под ног ушла земля и нигде не было видно твердой почвы, на которой можно было бы строить. Мне всегда казалось чудом, что этой колеблющейся и полной противоречий основы оказалось достаточно, чтобы позволить Бору — человеку с гениальной интуицией и тонким чутьем — найти главнейшие законы спектральных линий и электронных оболочек атомов, включая их значение для химии. Это кажется мне чудом и теперь. Это — наивысшая музыкальность в области мысли.

А. Эйнштейн

Во всей мировой науке в наши дни не было человека с таким влиянием на естествознание, как Бор. Из всех теоретических троп тропа Бора была самой значительной.

П. Капица

Я приехал в СССР, чтобы встретиться со старыми друзьями и найти новых, потому что содружество ученых разных стран помогает не только развитию науки, но и делу мира.

Н. Бор

Я до сих пор изумляюсь, когда смотрю на ядерный реактор.

Н. Бор

Если я что-нибудь немножко умею, то разве что думать...

Н. Бор

Квантовая теория больше не влечет меня к своим проблемам. Ныне первостепенная проблема — найти путь к предотвращению ядерной войны!

Н. Бор

Мы продолжаем публикацию стереометрических задач с чертежами, начатую во 2-м номере «Кванта» за этот год (см. также обложки 3, 5 и 6 номеров). Ниже приводятся условия двух задач; первая из них предлагалась на приемных экзаменах в Московский физико-технический институт в 1984 году. Вторая задача интересна тем, что рассматриваемую в ней конфигурацию не очень-то легко себе представить. Чтобы дать читателям возможность поразмыслить над ней самостоятельно, чертеж к ней мы поместим на обложке одного из следующих номеров.

Задача 1. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $|AC|=2|AB|$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Сфера касается плоскости $ABCD$ и всех боковых ребер пирамиды. Найти объем пирамиды, если радиус сферы равен R, а угол SDC равен α.

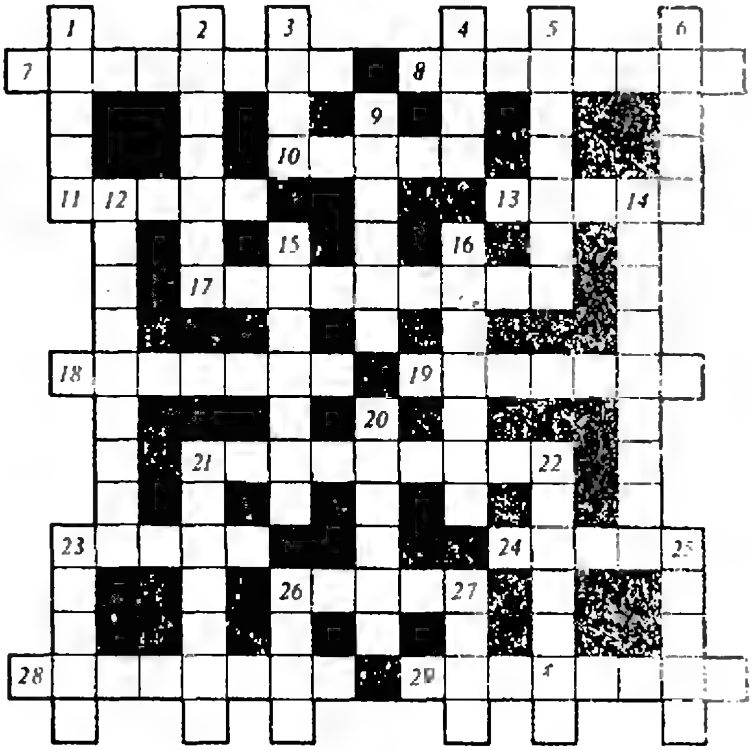
Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые BD и AC соответственно в точках P и Q ($|DP|>|BP|$, $|AQ|>|CQ|$). Найти отношение $|BP|:|BD|$, если:

а) $|BP|=|CQ|$,

б) $|CQ|=3|AC|$.

Задача 2. Имеется шесть предметов, два одинаковых шара радиуса R_1, [illegible] еще два одинаковых шара радиуса R_2, очень длинный цилиндр с радиусом основания r и плоскость. Они расположены в пространстве так, что каждый из них касается пяти остальных (цилиндр — своей боковой поверхностью). Выразить R_1 и R_2 через r.

Кроссворд



По горизонтали: 7. Советский ученый-физик, удостоенный Нобелевской премии. 8. Прибор для измерения атмосферного давления. 10. Буква греческого алфавита. 11. Физическая величина. 13. Продукт механического соединения каких-либо веществ. 17. Прибор для измерений на сферах. 18. Звезда, красный гигант. 19. Прибор для регулирования силы тока в цепи. 21. Советский космонавт. 23. Наименьшая порция электромагнитной энергии. 24. Процесс распространения колебаний в пространстве. 26. Приставка для образования наименований дольных единиц. 28. Одна из декартовых координат точки. 29. Утверждение, принимаемое без доказательства, в рамках какой-либо научной теории.

По вертикали: 1. Трехэлектродная электронная лампа. 2. Тригонометрическая функция. 3. Прозрачная, бесцветная жидкость. 4. Один из элементов транзистора. 5. Вещество, состоящее из макромолекул. 6. Сплав железа с углеродом. 9. Гениальный английский физик. 12. Первый русский академик. 14. Единица измерения телесного угла. 15. Металл, имеющий наименьшее удельное сопротивление. 16. Прибор для преобразования электрических колебаний в звуковые. 20. Неправильность в действиях, мыслях. 21. Тригонометрическая функция. 22. Прибор для измерения силы тока, напряжения и сопротивления. 23. Минерал, природный кремнезем. 25. Самый твердый минерал. 26. Единица измерения длины. 27. Газ, предохраняющий живые организмы на Земле от вредного влияния солнечной радиации.

Составил Г. Н. Плотников

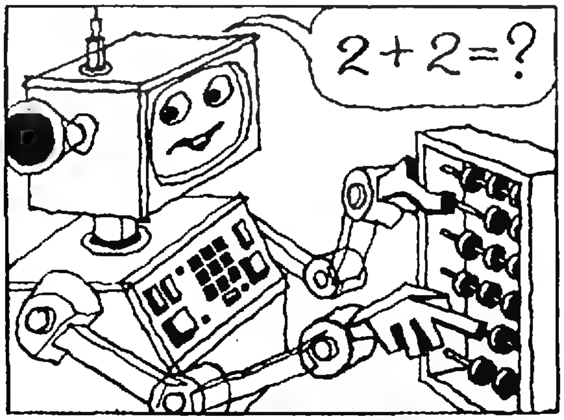
Алгоритмический язык

Академик А. П. ЕРШОВ

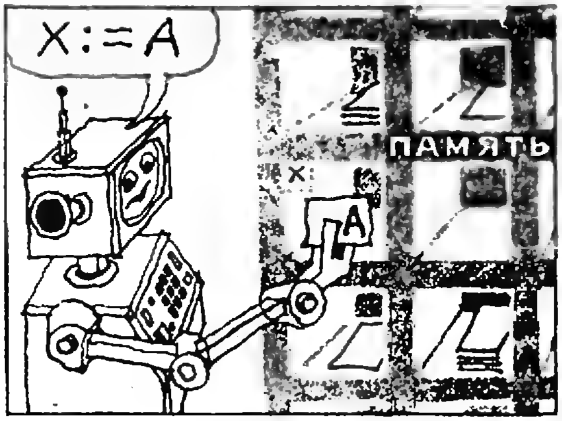
В этой статье продолжается разговор об основных понятиях информатики, начатый автором в предыдущем номере «Кванта». Как и прежде, следует обращать внимание на слова, набранные курсивом — это термины из информатики. А вот короткие слова, напечатанные жирным шрифтом, — это служебные слова, они появляются только в программах, выполняя в них определенные функции, в которых вам следует разобраться.

В прошлой статье мы рассмотрели несколько примеров алгоритмов. Теперь же наша цель — научиться записывать алгоритмы «по всем правилам науки». Но прежде чем разбирать правила отдачи приказа, следует понять, на что способен исполнитель приказов. Мы начнем поэтому с ответа на следующий вопрос:

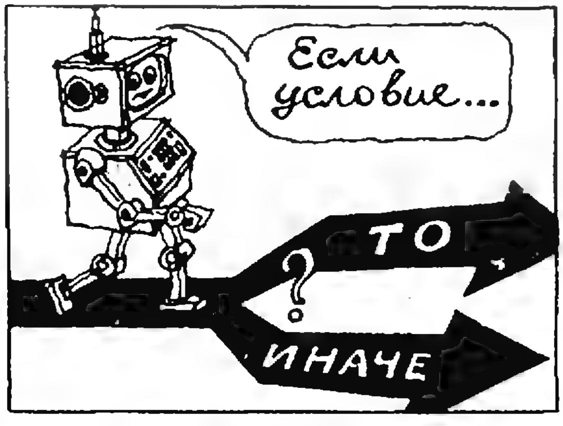
Что должен уметь исполнитель?



1°. **Считать.** Исполнитель должен не только быстро и безошибочно производить все четыре арифметических действия, но и понимать порядок их выполнения, «понимать скобки», а также находить *численные значения* переменных величин. Например, хороший исполнитель почти сразу сообщает, что при $x=0{,}17$ и $y=1{,}32$ выражение $(x^2+3x)(y^3+5xy)/\sqrt{x^2+xy}$ равно 3,66409 ... и даже быстро укажет, что $\cos 0{,}29°=0{,}99998719$ ... или $\sin(x^2+x)=0{,}003471$ ... при $x=0{,}17°$. Не страшны ему ни большие числа, ни большие объемы вычислений.

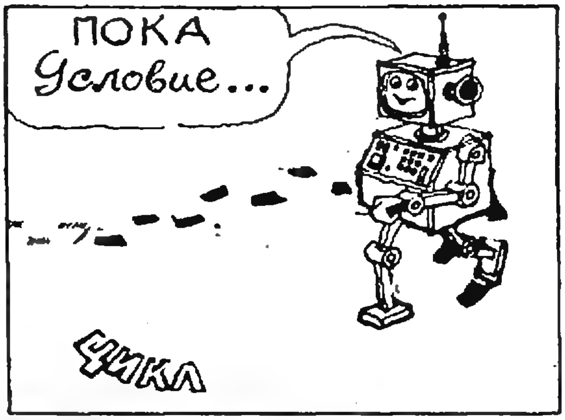


2°. **Запоминать.** Исполнитель умеет заносить сообщаемые ему данные в определенные (известные ему) места своей *памяти*. Данные могут быть как *числовыми*, так и *текстовыми (литерными) величинами*. В частности, он может запомнить какую-нибудь *команду* или *серию команд*. При необходимости исполнитель может уничтожить эти данные, заменить или изменить их. В частности, переменные числовые величины могут подвергаться многократным изменениям в процессе исполнения алгоритма.

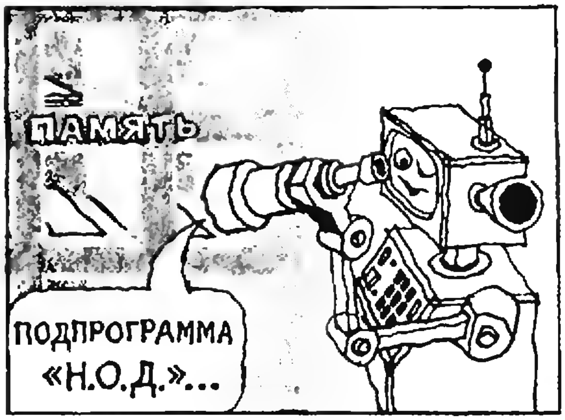


3°. **Выбирать.** Исполнитель должен уметь сам принимать решения о своих дальнейших действиях в зависимости от обстановки. Именно, он проверяет, выполнено ли некоторое сообщаемое ему *условие*, и **если** оно выполнено, он исполняет одну серию команд, **иначе** — другую серию. Такой выбор между двумя сериями команд программисты называют *условной командой* или *ветвлением*. Разумеется, исполнитель должен понимать заданное условие и уметь его проверить.

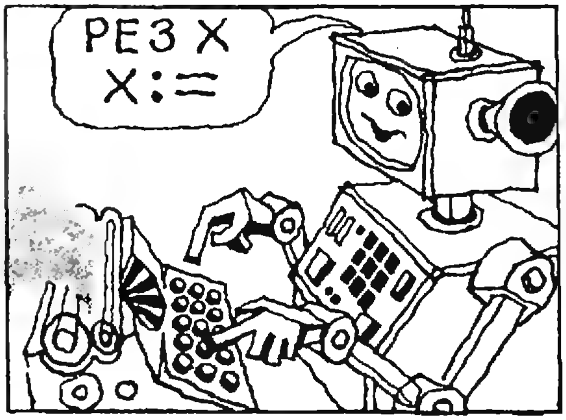
4°. Повторять. Исполнитель повторяет (быстро и, быть может, многократно) одну и ту же серию команд (*цикл*), пока выполнено определенное условие (*условие цикла*). Это условие он должен проверить перед каждым выполнением серии, а обнаружив, что оно нарушается, он должен перейти к следующей за циклом команде. Хороший исполнитель — например современный компьютер — силен именно умением с колоссальной скоростью таким образом *работать в цикле*.



5°. Вспоминать. Среди текстов, записанных в память исполнителя, могут быть разные данные (числовые, литерные), которые он должен уметь при необходимости вспомнить. В частности, в память могут быть занесены *вспомогательные алгоритмы*. Хороший испольнитель вспоминает (и выполняет) их по одному упоминанию их названия (*имени*), не требуя повторения всех команд вспомогательного алгоритма. Такой прием программисты называют *вызовом подпрограммы*.



6°. Печатать. Исполнитель печатает (например, карандашом на бумаге, на *печатающем устройстве* или на экране дисплея) решение задачи (ответ), то есть результаты выполнения программы, постепенно образовавшиеся в нужных местах его памяти в процессе работы. (Впрочем, при работе в диалоговом режиме с заказчиком компьютер-исполнитель пользуется печатью на дисплее не только в конце работы, но и в процессе работы для того, чтобы задавать вопросы.)



Примеры записи алгоритмов

Ниже приводятся примеры записи алгоритмов. Эти записи выполнены в соответствии с правилами *алгоритмического языка*, принятого в вашем учебнике. Мы предлагаем внимательно прочитать их и разобрать, как они работают, то есть сыграть роль исполнителя алгоритма (для предложенных исходных данных — значений аргументов). Если это сразу не получится, стоит еще раз просмотреть §§ 2—4 вашего учебника, прочитать общие пояснения, приведенные ниже, и затем вернуться к исполнению алгоритмов. Более подробные комментарии приводятся в конце статьи. Прочитав их, вы проверите, правильно ли вы исполнили данные алгоритмы, и будете готовы самостоятельно писать простые программы на алгоритмическом языке.

В частности, вы сможете записать алгоритмы, решающие задачи из предыдущей статьи этого раздела («Квант» № 9) на алгоритмическом языке. В таком виде часть решений (задачи про роботы) приводятся на следующей странице, остальные появятся в одном из ближайших номеров «Кванта».

Корни квадратного уравнения

```
алг КОРНИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
    (цел a, b, c, вещ x1, x2, лит C)
    арг a, b, c
    рез C, x1, x2
нач вещ d
    $d := b^2 - 4ac$
    если $d < 0$
      то C := «НЕТ РЕШЕНИЯ»
      иначе C := «РЕШЕНИЕ»
        если $d = 0$
          то $x1 := -b/2a$
             $x2 := x1$
          иначе $x1 := (-b + \sqrt{d})/2a$
                $x2 := (-b - \sqrt{d})/2a$
        все
    все
кон
```

Упражнение 1. Примените этот алгоритм к следующим тройкам чисел (a; b; c): (1; 2; 1), (2; 3; 7), (0; 4; 2).

Робот на шахматной доске

В следующих задачах маленький робот ходит по шахматной доске; через (x; y) обозначены его координаты (например, поле e2 записывается как (5; 2), поле $h5$ — как (8; 5)); ход вверх увеличивает y на 1, ход вправо увеличивает x на 1.

```
алг РОБОТ ХОДОК (цел x, y, лит C)
    арг x, y
    рез C
нач пока x  7
    нц
      шаг вправо
      $x := x + 1$
    кц
    пока $y \leqslant 7$
    нц
      шаг вверх
      $y := y + 1$
    кц
    C := «ПРИШЕЛ»
кон
```

Упражнение 2. Примените алгоритм в ситуации, показанной на рисунке 1, где (x; y) = (2; 3).

```
алг РОБОТ СКАЛОЛАЗ (цел y, лит C)
    арг y
    рез C
нач пока $y \leqslant 7$
    нц
      пока справа нет горы
      нц
        шаг вправо
      кц
      шаг вверх
      $y := y + 1$
    кц
    C := «УРА, ЗАЛЕЗ!»
кон
```

Упражнение 3. Примените алгоритм в ситуации, показанной на рисунке 2.

```
алг РОБОТ ОБХОДЧИК (цел x, y, g, лит C)
    арг x, y
    рез C, g
  нач пока $y \leqslant 7$
      нц
        если сверху нет ямы
          то шаг вверх
             $y := y + 1$
             $g := y$
          иначе если $x \leqslant 7$
                  то шаг вправо
                     $x := x + 1$
                  иначе $g := y$
                        $y := 8$
                все
        все
      кц
    C := «Я НА ГОРИЗОНТАЛИ №»
кон
```

Упражнение 4. Примените алгоритм в ситуации рисунка 1 и сравните с упражнением 2*).

Делимость

```
алг ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ (цел x, y, r, лит C)
    арг .x y
    рез C, r
нач C := «ОСТАТОК РАВЕН »
    пока $x < y$
    нц
      $x := x - y$
    кц
    $r := x$
кон
```

Упражнение 5. Примените алгоритм к числам (x; y), равным (14, 5), (100000, 3), (27, 0)

```
алг ПРОВЕРКА ПРОСТОТЫ (цел x, d, r, лит C)
    арг x
    рез C
нач цел d
    C := «ЧИСЛО — ПРОСТОЕ»
    $d := 2$
    пока $d \leqslant \sqrt{x}$
    нц
      ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ (x, d, r, E)
      если $r = 0$
        то C := «ЧИСЛО — СОСТАВНОЕ»
           $d := x + 1$
        иначе $d := d + 1$
      все
    кц
кон
```

Упражнение 6. Примените алгоритм к x, равному 7, 15, 49.

---

*) Обратите внимание на присваивания $g := y$ и $y := 8$ — они обеспечивают выход из цикла.

Общие пояснения

Все приведенные записи алгоритмов начинаются с *заголовка* (выделенного синим цветом). Заголовок начинается с *названия* или *имени алгоритма* (оно напечатано заглавными буквами после служебного слова **алг**(оритм)) и списка *параметров* (список переменных величин стоит в скобках после названия алгоритма). Далее (после слов **арг**) следует список *аргументов* (это те параметры, которые в начале нужно ввести в машину — их она *запоминает*). Завершается заголовок списком *результатов* (они перечислены после слова **рез**). Мы будем считать, что машина напечатает их значения, когда алгоритм будет исполнен.

После заголовка идет *тело* программы. Оно начинается со служебного слова **нач**(ало), далее идут все *команды*, которые завершаются словом **кон**(ец).

Обратим сперва внимание на те команды, в которых машина *считает*. Здесь имеются как совсем простые вычисления (например прибавленные единицы), так и более сложные (скажем $(-b+\sqrt{d})/2a$). Записываются эти вычисления самым обычным образом — так, как вас учат на уроках математики. Поэтому этот аспект записи алгоритмов у вас не вызовет никаких трудностей. Стоит, однако, обратить внимание на команду *присваивания* (значок $:=$). Запись $x:=a$ означает, что параметру x машина присваивает значение a (здесь a может быть и числом, и текстом, и другим параметром). В этом случае машина *запоминает*, что x равно a. Если теперь она должна *напечатать* x, то она напечатает не букву x, а число (текст) a.

В *теле* программы для наглядности мы цветом выделили все ветвления и повторения. *Ветвления* показаны здесь раздваивающимися красными стрелками. Запись ветвления начинается со служебного слова **если** и кончается служебным словом **все**. После слова **если** стоит *условие*, затем служебное слово **то**, за ним первая серия *команд*, затем служебное слово **иначе**, а за ним вторая серия *команд*. Напомним, что при ветвлении машина проверяет условие, далее исполняет либо первую серию команд (если условие выполнено), либо вторую (в противном случае). Можно сказать, что машина *выбирает* нужную ей серию команд. Исполнив ее, машина переходит к следующей команде.

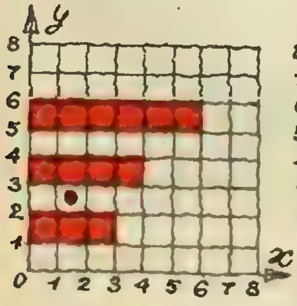


Рис. 1.

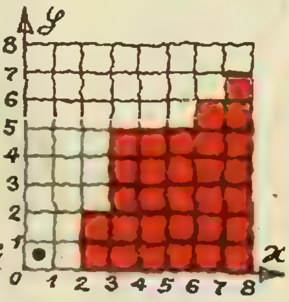


Рис. 2.

Повторения (или *циклы*) выделены здесь желтыми кружками. Каждый цикл открывается служебным словом **пока** и завершается словом **кц** (конец цикла). После слова **пока** стоит *условие цикла*, затем служебное слово **нц** (начало цикла), за ним серия команд цикла. Напомним, что при исполнении цикла машина сначала проверяет условие; если оно выполнено, машина выполняет серию команд цикла и вновь проверяет условие; если оно опять выполнено, машина снова исполняет серию и так далее, пока условие не окажется нарушенным; тогда она переходит к следующей команде (после слова **кц**); если условие никогда не нарушится, машина будет «работать вечно»,— говорят, что она *зациклилась*. Чтобы избегать зацикливания, нужно позаботиться о *выходе из цикла*, то есть добиться нарушения условия цикла.

Вспомогательный алгоритм (подпрограмма) вызывается своим именем, с указанием списка переменных (в скобках); указывать аргумент и результат не следует. Машина исполняет подпрограмму и присваивает переменным из ее списка соответствующие значения. Поэтому важно правильно согласовать имена этих переменных с именами переменных из основной программы.

Когда все команды программы исполнены (перед заключительным служебным словом **кон**), машина *печатает* подряд полученные значения тех переменных, которые в заголовке стоят после служебного слова **рез** (те переменные, которым никакие значения не присвоены, не печатаются). Не печатаются также кавычки, обрамляющие значения литерных переменных.

II. Полевые транзисторы

Доктор физико-математических наук
М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук
Г. С. СИМИН

Принцип работы полевого транзистора (ПТ) очень прост (рис. 1). На тонкой полупроводниковой пластинке расположены три электрода. Если приложить напряжение между электродами 1 (истоком) и 2 (стоком), то по пластинке, называемой каналом, потечет ток. Величина протекающего по каналу тока изменяется при приложении к третьему электроду (затвору) управляющего напряжения.*)

Различные типы полевых транзисторов (а их существует довольно много) отличаются друг от друга принципом работы затвора. Существуют ПТ, в которых роль затвора играет *p*—*n*-переход, контакт металл — полупроводник, структура металл — диэлектрик — полупроводник (МДП-структура) и т. д.

На рисунке 2 показан ПТ, в котором в качестве затвора используется *p*—*n*-переход, смещенный в обратном направлении. Как известно («Физика 9» §79), на границе между электронным (*n*-типа) и дырочным (*p*-типа) полупроводниками образуется слой, обедненный свободными носителями тока (запорный слой). Если приложить к *p*—*n*-переходу запирающее напряжение $U_з$: «плюс» к *n*-типу и «минус» — к *p*-типу, то ширина этого слоя растет. Поскольку свободных носителей в запорном слое нет, ток через него не протекает. Таким образом, увеличение напряжения на затворе приводит к сужению канала, по которому протекает ток, и при неизменном напряжении сток — исток происходит уменьшение тока через транзистор. Еще большее напряжение на затворе полностью перекрывает канал, и ток обращается в нуль.

На рисунке 3 изображен другой тип транзистора, чрезвычайно широко используемый в современных ЭВМ, особенно в микрокалькуляторах. В качестве затвора в этом ПТ используется МДП-структура. Металлический затвор отделен от полупроводниковой пластины тончайшим (сотые доли микрона) слоем двуокиси кремния SiO_2, которая является хорошим диэлектриком. Поэтому транзисторы этого типа иногда называются также МОП—ПТ (металл—окисел—полупроводник). На пластине кремния *p*-типа под стоком и истоком созданы области *n*-типа (рис. 3, а). Напряжение сток—исток $U_{си}$, таким образом, прикладывается к двум последовательно соединенным *p*—*n*-переходам. Какова бы ни была полярность напряжения $U_{си}$ в отсутствие напряжения на затворе, один из *p*—*n*-переходов всегда оказывается запертым. В таком состоянии сопротивление *p*—*n*-перехода очень велико, и ток, протекающий через транзистор, близок к нулю.

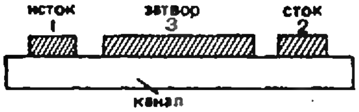


Рис. 1.

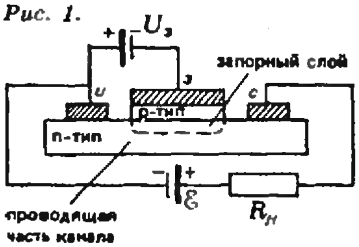


Рис. 2.

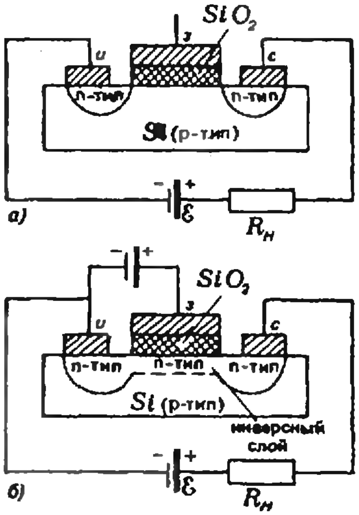


Рис. 3.

Большие интегральные схемы (БИС) для ЭВМ, содержащие на одном кристалле десятки и сотни тысяч транзисторов, в настоящее время изготавливаются из кремния. Подвижность электронов в кремнии $\sim 0{,}1$ *м*^{2}*/(В · с). К началу 90-х годов нашего века ожидается появление БИС на основе арсенида галлия (GaAs). Подвижность электронов в GaAs* ~ 1 *м*^{2}*/(В · с). В исследовательских лабораториях созданы структуры, имеющие подвижность до 100 м*^{2}*/(В · с), пригодные для изготовления полевых транзисторов.*

Минимальная достижимая длина канала L определяется совершенством технологии. Для полевого транзистора 60-х годов $L \cong 20$ *мкм. Для современного серийного кремниевого МДП-транзистора* $L \cong 3$ *мкм. В исследовательских лабораториях получены приборы с* $L \lesssim 0{,}3$ *мкм.*

Собственное предельное время переключения «3 мкм — транзистора» — $3 \cdot 10^{-11}$ *с. Практическая скорость сраба-*

---

*) Поскольку управление сопротивлением канала производится электрическим полем затвора, транзисторы этого типа и называются *полевыми*.

тывания современной серийной логической МДП-ячейки составляет $5 \cdot 10^{-9}$ с. Рекордно малое время переключения МДП-транзистора, полученное в 1984 году, составляет $\sim 10^{-11}$ с.

Микрофотография фрагмента МДП—БИС. Длина канала самых больших элементов ~10 мкм, самых маленьких ~1 мкм.

При громадной плотности упаковки элементов на пластине ($\sim 10^5$) и крошечных размерах элементов ($\lesssim 1$ мкм), каждая пылинка, севшая на пластину, приводит к выходу из строя всей БИС.

В таких костюмах обычно работают хирурги. Но эта девушка «оперирует» не больного: она проводит операцию по изготовлению БИС.

Если же приложить сравнительно небольшой положительный потенциал к затвору $U_з$, то по другую сторону диэлектрика, в p-канале, который как бы служит второй обкладкой конденсатора, начнут скапливаться отрицательные заряды. Положительный заряд на затворе индуцирует появление в канале электронов, которые притягиваются полем металлического электрода. При некотором напряжении $U_з = U_0$, называемом пороговым напряжением, в узком слое под затвором концентрация индуцированных полем электронов превысит исходную концентрацию дырок в p-канале. Произойдет изменение характера проводимости (инверсия). Вместо полупроводника p-типа в пределах этого слоя возникнет полупроводник n-типа. В результате исчезают p—n-переходы между стоком и истоком и образуется сплошной проводящий канал (рис. 3, б). В таком состоянии сопротивление транзистора мало.

ПТ, у которых в отсутствие управляющего напряжения на затворе канал для тока открыт и сопротивление мало, называются нормально открытыми. ПТ, у которых, наоборот, в отсутствие управляющего напряжения канал закрыт, называются нормально закрытыми. МДП—ПТ, принцип работы которого рассмотрен выше (рис. 3), относится к нормально закрытым ПТ.

Для того чтобы схема, содержащая ПТ, имела два легко различимых состояния «0» и «1», и таким образом, могла служить элементом логической ячейки, достаточно последовательно с транзистором в цепь сток — исток включить сопротивление нагрузки $R_н$ и источник напряжения $\mathscr{E}$.

Если в такой схеме используется, например, нормально закрытый ПТ, то в отсутствие напряжения на затворе ($U_з = 0$) сопротивление транзистора очень велико и практически все напряжение источника $\mathscr{E}$ падает на транзисторе. Когда напряжение на затворе превышает пороговое значение U_0, сопротивление транзистора мало, и все напряжение падает на сопротивлении $R_н$. Эти два легко различимых состояния соответствуют состояниям «0» и «1» в логических схемах на основе МДП-транзисторов. Достаточно небольшого (≈ 1 В) сигнала на затворе, чтобы перевести транзистор из состояния «0» в состояние «1».

Важнейшим параметром транзистора в качестве элемента логических схем ЭВМ является скорость его переключения из открытого состояния в закрытое и обратно. Эта скорость определяется как свойствами самого прибора, так и схемой, в которую он включен. Самое малое время переключения, которое, в принципе, может быть получено, приблизительно равняется времени прохождения носителей τ вдоль канала под действием приложенного напряжения $U_{си}$. При длине канала L и скорости носителей v время пролета τ составит $\tau = L/v$. Скорость дрейфа электронов (или дырок) в электрическом поле, как известно, пропорциональна напряженности поля E ($v = \mu E$). Коэффициент пропорциональности μ, имеющий размерность $м^2/(В \cdot с)$, называется подвижностью. Поскольку напряженность поля в канале $E = U_{си}/L$, окончательно получаем: $\tau = L^2/\mu U_{си}$. Таким образом, предельное быстродействие полевых транзисторов определяется тем, насколько коротким удается сделать канал транзистора, и подвижностью носителей в материале, из которого изготовлен транзистор.

О том, каковы реальные размеры транзисторов, скорости их переключения и плотность упаковки в современных ЭВМ, вы узнаете из соседней колонки.

Повторим колебания

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Колебания возникают в системе, выведенной из состояния устойчивого равновесия. Во многих практически важных случаях, если возвращающая в положение равновесия сила линейно зависит от смещения, получаются гармонические колебания. Обычно это «малые» колебания, когда равновесие нарушено незначительно.

Простейший пример — колебания математического маятника при небольших углах отклонения нити от вертикали. Еще пример — колебания груза под действием силы упругости пружины в отсутствие других сил. Он интересен тем, что колебания оказываются гармоническими, даже если они не малые — лишь бы пружина подчинялась условию (закону Гука) $F=-kx$, где x — удлинение пружины (смещение груза из положения равновесия), k — жесткость пружины, F — сила упругости пружины.

Разберем этот пример подробнее. Пусть груз прикреплен к горизонтальной пружине, второй конец которой закреплен, и находится на гладкой горизонтальной поверхности. Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид

$$mx''=-kx,$$

или

$$x''+\frac{k}{m}x=0 \qquad (1)$$

(здесь m — масса груза, x'' — его ускорение, точнее — проекция ускорения на горизонтальную ось X). Решением такого уравнения является функция

$$x=x_m\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)=$$
$$=x_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (2)$$

где x_m — амплитуда, $\omega_0=\sqrt{k/m}$ — собственная частота, φ_0 — начальная фаза колебаний. Частота определяется параметрами колеблющейся системы (k и m), а амплитуда и начальная фаза зависят от того, как именно систему вывели из состояния равновесия, то есть определяются начальными условиями.

Для нахождения x_m и φ_0 нужно составить дополнительно два уравнения. Достаточно задать, например, смещение x_0 и скорость v_0 в начальный момент времени $t_0=0$:

$$x_0=x(t_0)=x_m\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0+\varphi_0\right)=$$
$$=x_m\cos\varphi_0,$$

$$v_0=v(t_0)=x'(t_0)=$$
$$=-x_m\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0+\varphi_0\right)=$$
$$=-x_m\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi_0.$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем φ_0:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0},\quad \varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0}\right).$$

Величину x_m проще всего найти, исключая тригонометрические функции обычным методом возведения в квадрат и сложения уравнений:

$$x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2=x_m^2,\quad x_m=\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}.$$

Можно задавать координаты $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в какие-то «удобные» моменты времени t_1 и t_2, или скорости $v(t_1)$ и $v(t_2)$ или координату $x(t_1)$ и скорость $v(t_2)$ и т. д. Важно только, чтобы моменты времени t_1 и t_2 не оказались разделенными целым числом полупериодов.

Таким образом, зная уравнение движения системы (уравнение (2)) и два дополнительных данных, мы полностью опишем движение. То же можно сказать, например, и про равноускоренное движение — ускорение определено силами, а вместе с начальными координатой и скоростью это позволяет знать о таком движении абсолютно все.

Уравнения, похожие на уравнение (1), получаются во многих задачах на колебания — нужно только правильно выбрать переменную. Проиллюстрируем это, несколько усложнив задачу про груз на пружине.

Задача 1. *Груз — чашка весов массой M — висит на пружине жесткости k, а колебания возникают при падении в чашку грузика массой m (он пролетает до удара путь h и прилипает к чашке). Опишите движение чашки.*

Направим ось координат X и выберем начало координат 0 так, как показано на рисунке 1. Учитывая, что вначале чашка была в равновесии, запишем

$$Mg - k(l - l_0) = 0$$

(l — длина пружины с подвешенной чашкой, l_0 — без нее). При отклонении на x от начального положения, когда грузик уже прилип к чашке, уравнение движения системы будет иметь вид:

$$(M+m)g - k(l - l_0 + x) = (M+m)x''.$$

Раскрывая скобки и учитывая первое уравнение, получим

$$x'' + \frac{k}{M+m}x = \frac{mg}{M+m}.$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (1), мешает только правая часть — она не равна нулю. Ясно, почему так получилось: мы взяли начало координат не там, где нужно, — ведь положение равновесия у потяжелевшей чашки сдвинулось вниз на расстояние $\Delta x = mg/k$. Если мы введем новую переменную

$$x_1 = x - \Delta x = x - \frac{mg}{k},$$

то уравнение для x_1 будет практически таким, как (1):

$$x_1'' + \frac{k}{M+m}x_1 = 0$$

(напомним, что при такой замене переменной производные от x_1 такие же, как от x).

Мы не станем здесь решать задачу до конца, главное мы сделали — получили уравнение колебаний. Из него сразу найдем частоту колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

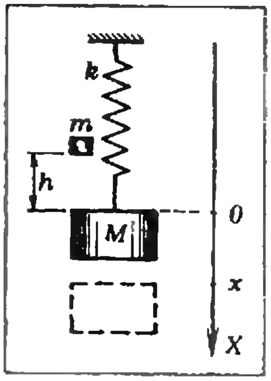


Рис. 1.

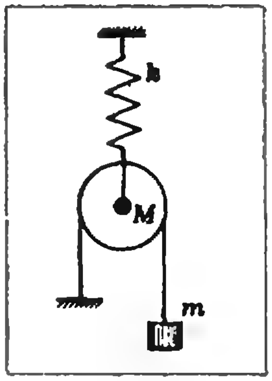


Рис. 2.

Для полного описания движения системы нужно вначале решить задачу о неупругом ударе груза о чашку, а затем найти амплитуду и начальную фазу колебаний. Проделайте это сами (ответ приведен в конце номера на с. 59).

Частоту гармонических колебаний системы можно находить и из энергетических соображений. Покажем это на примере идеального колебательного контура (без потерь).

Обозначим максимальный заряд конденсатора (амплитуду колебаний заряда) через q_m, а максимальный ток через катушку (амплитуду колебаний тока) — I_m. Ток — это первая производная от заряда обкладок по времени, поэтому для гармонических колебаний справедливо соотношение

$$I_m = q_m\omega_0.$$

В тот момент, когда заряд максимален ($q = q_m$), ток равен нулю, а при $i = I_m$ заряд конденсатора обращается в нуль. Найдем энергии контура в указанные моменты времени и приравняем их:

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}, \text{ или } \frac{q_m^2}{2C} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2},$$

где C — емкость конденсатора, L — индуктивность катушки. Отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для примера применения энергетического метода разберем следующие две задачи.

Задача 2. *Найдите период вертикальных колебаний груза массой m в системе, изображенной на рисунке 2. Считать массу блока M сосредоточенной в его оси. Пружина имеет жесткость k, нить нерастяжима.*

Приравняем энергии системы в положении равновесия и в крайнем положении, когда скорость груза обращается в нуль. Но сначала немного статики. Обозначая длину нерастянутой пружины через l_0, а длину ее в положении равновесия через l, запишем

$$k(l - l_0) = Mg + 2mg$$

(вниз на блок действуют две одинаковые силы натяжения нити, равные весу груза).

Пусть максимальное смещение оси блока вниз от положения равновесия равно x_m, тогда полная энергия системы в крайнем положении

$$W_1=\frac{k(l-l_0+x_m)^2}{2}-Mgx_m-mg(2x_m).$$

Обозначив скорость оси блока при прохождении положения равновесия через v_m, найдем выражение для полной энергии системы в этот момент:

$$W_2=\frac{k(l-l_0)^2}{2}+\frac{1}{2}Mv_m^2+\frac{1}{2}m(2v_m)^2.$$

Для гармонических колебаний в этом случае $v_m=x_m\omega_0$. Поэтому приравняв энергии W_1 и W_2, после простых преобразований получим

$$\frac{kx_m^2}{2}=\frac{Mx_m^2\omega_0^2}{2}+2mx_m^2\omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+4m}}.$$

Эту задачу можно решить и при другом распределении масс в блоке, для этого к энергии поступательного движения блока нужно лишь прибавить энергию его вращения. Если, например, масса M не сосредоточена в оси, а распределена по окружности радиуса r с центром на оси, то полная кинетическая энергия

$$W_k=\frac{Mv^2}{2}+\frac{M(vr/R)^2}{2}.$$

где R — радиус блока.

Задача 3. *В системе зажигания двигателя внутреннего сгорания используется явление самоиндукции. Катушка индуктивности L подключается к аккумулятору с напряжением U_0 (рис. 3), и когда ток достигает значения I_0, цепь размыкают. Параллельно катушке подключен разрядник P («свеча» зажигания), в котором при достижении напряжения U ($U \gg U_0$) проскакивает искра. Какой важный параметр мы не задали? При каких соотношениях между всеми параметрами система будет работать?*

Важным параметром тут является емкость C (конденсатор емкости C на схеме подключен параллельно разряднику). Она складывается из емкости разрядника, емкости между подводящими проводами и емкости между витками катушки.

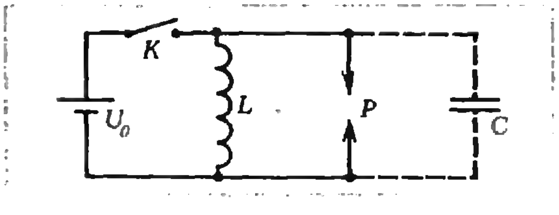


Рис. 3.

Проделаем расчет. Если бы разрядника не было, в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, возникли бы колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе получается при токе катушки, равном нулю. Это напряжение можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI_0^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2},\quad U_m=I_0\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Разряд происходит при условии $U \leqslant U_m$, то есть

$$U\leqslant I_0\sqrt{\frac{L}{C}},\text{ или } I_0\geqslant U\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В этой задаче есть одна тонкость. Как бы ни был устроен выключатель, он не может действовать мгновенно. В процессе размыкания активное сопротивление цепи меняется от нуля (вначале) до очень большой величины (когда цепь разомкнута), и в цепи выделяется тепло. Здесь снова важно влияние емкости C. Если время размыкания τ мало́ по сравнению с периодом колебаний $T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$, то выделившимся количеством теплоты по сравнению с энергией, запасенной в катушке, можно пренебречь.

Иногда «колебательное» уравнение возникает в задачах явно не колебательных. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Тонкий однородный брусок длиной l скользит сначала по гладкому горизонтальному столу, а затем попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения μ. Брусок останавливается, въехав туда наполовину. Найдите начальную скорость бруска и время торможения.*

Пусть на шероховатой поверхности находится часть бруска длиной $x<l/2$. Считая, что силы нормальной реакции распределены вдоль бруска равномерно, найдем силу трения:

$$F_{\text{тр}}=-\mu mg\frac{x}{l}$$

и ускорение бруска:

$$a=x''=\frac{F_{\text{тр}}}{m}=-\mu g\frac{x}{l}.$$

Получили знакомое уравнение

$$x''+\frac{\mu g}{l}x=0.$$

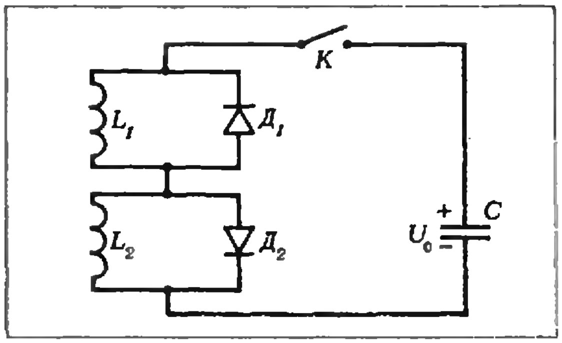


Рис. 4.

Торможение начинается в момент, когда $x=0$, и заканчивается при скорости $v=0$, что соответствует ровно четверти периода «колебаний»; следовательно, время торможения

$$\tau=\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Разумеется, настоящих колебаний не будет — брусок после остановки назад не поедет (при отсутствии проскальзывания сила трения упадет до нуля).

Легко теперь записать выражение для координаты x:

$$x=\frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t \quad (\text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant\tau)$$

и для скорости v:

$$v=x'=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\cos\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t$$

$$(\text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau).$$

Отсюда найдем начальную скорость

$$v=v\,(t=0)=\frac{1}{2}\sqrt{\mu g l}.$$

Эту задачу можно усложнить, увеличив скорость так, чтобы брусок весь въезжал на шероховатую часть стола, — тогда после «гармонического» торможения наступит обычное. Хитрость же в том, что теперь «гармоническая» часть займет уже не четверть периода, а меньше. Рассчитайте сами время торможения при $v_0=2\sqrt{\mu g l}$ (ответ приведен на с. 59).

Теперь обсудим задачу про слабо затухающие колебания в контуре.

Задача 5. *Катушка индуктивностью $L=1$ Гн, имеющая активное сопротивление $R=1$ Ом, и конденсатор емкостью $C=1$ мкФ образует колебательный контур. В некоторый момент напряжение на конденсаторе равно $U_1=0{,}1$ В, а ток — максимален. Чему равен этот ток? Найдите приближенно потери энергии в контуре за один период. Через какой промежуток времени заряд конденсатора окажется нулевым? Подсказка: при выбранных параметрах контура колебания затухают медленно.*

Выделим в схеме отдельный элемент — резистор, обладающий только активным сопротивлением. В тот момент, когда ток в контуре максимален, ЭДС индукции, возникающая в катушке, равна нулю. Значит, сумма напряжений на резисторе и конденсаторе — тоже нуль. Отсюда найдем максимальный ток:

$$I_m=\frac{U_1}{R}=0{,}1\ \text{А}.$$

Для оценки тепловых потерь энергии в течение одного периода будем считать ток синусоидальным с амплитудой I_m. Тогда

$$\Delta W=Q=\frac{1}{2}I_m^2RT=\frac{1}{2}I_m^2R2\pi\sqrt{LC}\approx$$
$$\approx 3\cdot10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Энергия, запасенная в контуре,

$$W=\frac{1}{2}LI_m^2+\frac{1}{2}CU_1^2\approx5\cdot10^{-3}\ \text{Дж}\gg\Delta W,$$

значит, наше приближение было корректным.

Для расчета времени τ «доразряда» конденсатора от заряда $q_1=CU_1$ до нуля воспользуемся связью между зарядом и током:

$$q_1=\int_0^\tau i\,(t)\,dt=\int_0^\tau I_m\cos\omega_0 t\,dt=$$
$$=\frac{I_m}{\omega_0}\sin\omega_0\tau,$$

откуда

$$\tau=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{CU_1\omega_0}{I_m}=$$
$$=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\,(\omega_0 RC)\approx1\cdot10^{-6}\ \text{с}.$$

Упражнения

1. Рассчитайте период колебаний столба воды в U-образной трубке с площадью поперечного сечения $S=0{,}2$ см^2. Масса воды $m=5$ г. Вязкостью пренебречь.

2. Электродвигатель вращает маховик массой $m=0{,}1$ кг и радиусом $R=5$ см при помощи резинового приводного ремня жесткостью $k=20$ Н/см. При каком числе оборотов мотора колебания скорости маховика могут стать недопустимо большими? Считайте, что масса маховика сосредоточена на расстоянии $r=3$ см от оси вращения.

Подсказка: из-за неровностей вала мотора происходят толчки — один раз за оборот вала. Тут опасен резонанс.

3. В некоторый момент в схеме, изображенной на рисунке 4, ключ K замыкают. Нарисуйте графики зависимостей $U_C(t)$, $I_{L1}(t)$ и $I_{L2}(t)$. Диоды считать идеальными.

XI Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходит заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Зональному этапу предшествуют школьные, районные, городские и областные (краевые) олимпиады, по результатам которых каждая область (край) представляет по одному победителю от каждого класса по каждому из предметов.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился в четырех городах — Смоленске (для Северо-Западной зоны), Казани (для Центральной зоны), Грозном (для Юго-Западной зоны) и Омске (для Сибири и Дальнего Востока). Кроме того, в это же время проходил заключительный этап олимпиады в физико-математических школах-интернатах при Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Задание по математике для заключительного этапа олимпиады состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшие трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии, комбинаторике и анализу. Значительные трудности у восьмиклассников вызвала задача о разложении многочлена на множители. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали типичные ошибки.

Особенностью заключительного этапа олимпиады по математике этого года было проведение практического тура, в котором участвовали школьники 9 и 10 классов. Задачи, предложенные на практическом туре, вызвали большой интерес как у участников олимпиады, так и у руководителей команд: впервые на наших олимпиадах использовались микрокалькуляторы. Хотя результаты решения этих задач не учитывались при определении победителей олимпиады, школьники, хорошо проявившие себя в практическом туре, были награждены грамотами и специальными призами. Подводя итоги, Центральный Оргкомитет принял решение рассмотреть возможность включения задач практического тура в число конкурсных задач олимпиады.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный. Задание теоретического тура включало пять задач, экспериментального — две задачи. На выполнение каждого задания отводилось четыре часа. По результатам проверки оказалось, что наибольшие трудности у восьмиклассников вызвала первая задача, у девятиклассников — вторая, у десятиклассников — третья задача теоретического тура.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе Всероссийской олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из числа призеров была сформирована команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде.

Специальными грамотами были награждены также учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров XI Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Докажите, что для любых чисел x и y, отличных от нуля, выполняется неравенство

$$x^4+y^4<\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}.$$

2. На доске в строку написаны числа

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \dots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

а) Докажите, что, как бы мы ни расставили знаки «+» и «—» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «—» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

3. На плоскости даны отрезок AB и точка C, являющаяся внутренней точкой отрезка AB. Найдите множество точек M плоскости, таких, что $\angle AMB=\angle ACM$.

4. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками. (В данной задаче треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью.)

5. Представьте многочлен $x^{1985}+x+1$ в виде произведения двух многочленов.

9 класс

1. Докажите, что, для того чтобы знаки чисел a, b, c были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$ab+bc+ca>0, \ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0.$$

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные параллелограммы $AKMT$, вершины K, M, T которых лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно.

а) При каком положении точки K длина диагонали AM будет наименьшей?

б) При каком положении точки K длина диагонали KT будет наименьшей? Опишите в этом случае метод построения точки K с помощью циркуля и линейки.

3. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были одинаковы во всех пяти группах?

4. Две окружности радиусов R и r расположены на плоскости так, что одна находится вне другой. К окружностям проведены две внешние касательные и одна внутренняя касательная. Внутренняя касательная пересекает внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C. Докажите, что справедливо равенство

$$R\cdot r=|AC|\cdot|BC|.$$

5. Дано натуральное число m. Последовательность чисел (x_n) строится следующим образом: $x_1=1$, а число x_{n+1} при $n\geqslant 1$ равно сумме цифр числа mx_n. Докажите, что в последовательности (x_n) обязательно найдутся два равных числа.

10 класс

1. Докажите, что уравнение

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$$

не имеет решений в целых числах.

2. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

3. На плоскости даны правильный треугольник ABC и квадрат $DEHK$. Они расположены так, что вершина D квадрата является серединой стороны AC, вершина E лежит на стороне AB, вершина H — на стороне BC. Докажите, что вершина K лежит вне треугольника ABC.

4. Ребра AA_1, BB_1, CC_1 многогранника $ABCA_1B_1C_1$ лежат на параллельных прямых l_1, l_2, l_3 соответственно. Его треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ лежат, вообще говоря, в непараллельных плоскостях. Докажите, что объем многогранника равен

$$V=\frac{1}{3}\left(|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|\right)\cdot S,$$

где S — площадь треугольника, вершинами которого являются точки пересечения прямых l_1, l_2, l_3 с перпендикулярной им плоскостью.

5. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном Городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону.)

Задачи практического тура

9 класс

1. С помощью калькулятора вычислите число

$$4\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}.$$

2. Калькулятор выполняет арифметические операции с числами, не более чем двузначными. Как на этом калькуляторе можно умножить 10-значное число на 10-значное?

3. Калькулятор выполняет только две арифметические операции: сложение и вычитание. Известно, что функция $f(x)$ является линейной функцией. Известны ее значения $f(1)=16{,}3$ и $f(2)=15{,}1$. Как можно вычислить значение $f(1985)$? Чему оно равно?

4. Сколько цифр имеет число 2^{1985}? Дайте обоснование результата.

5. Какое количество арифметических операций следует выполнить, чтобы вычислить число ax^3+bx^2+cx+d? (Здесь a, b, c, d, x — данные числа.)

6. С помощью линейки постройте точку, являющуюся центром тяжести шестиугольника $ABCDEF$, вырезанного из однородного куска фанеры, если $[AB]\parallel[FE]\parallel[DC]$, $[BC]\parallel[ED]\parallel[AF]$ (рис. 1).

10 класс

1. С помощью калькулятора вычислите число

$$\sqrt[3]{200+126\sqrt[3]{2}+\frac{54}{1+\sqrt[3]{2}}}+\sqrt[3]{\frac{18}{1+\sqrt[3]{2}}-6\sqrt[3]{2}}.$$

2. Какое количество арифметических операций следует выполнить, чтобы вычислить число $\dfrac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$? (Здесь a, b, c, A, B, C, x — данные числа.)

3. Сколько цифр имеет число 3^{1985}? Дайте обоснование результата.

4. Калькулятор выполняет только две арифметические операции: сложение и вычитание. Известно, что функция $f(x)$ является квадратичной функцией. Известны ее значения $f(1)=5{,}699$, $f(2)=5{,}404$, $f(3)=6{,}127$. Как можно на данном калькуляторе вычислить число $f(1985)$? Чему оно равно?

5. Проверьте, что $e^6>\pi^4+\pi^5$. При каком наибольшем натуральном n выполняется неравенство $0<e^6-\pi^4-\pi^5<10^{-n}$? (Числа e и π

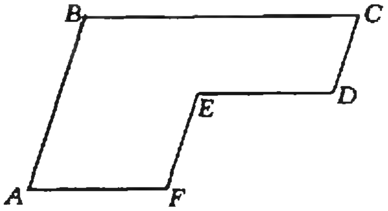


Рис. 1.

даны с пятнадцатью знаками после запятой:

$e=2{,}718281828459045\ldots,$

$\pi=3{,}141592653589793\ldots$)

6. С помощью циркуля и линейки постройте точку, являющуюся центром тяжести выпуклого четырехугольника, вырезанного из однородного куска фанеры.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В схеме, изображенной на рисунке 2, напряжение батарейки неизменно, а напряжение U источника можно изменять. Оказалось, что при $U_1=3$ В ток через источник не идет. При каком напряжении источника батарейка не будет разряжаться? График зависимости тока через лампочку от напряжения на ней приведен на рисунке 3.

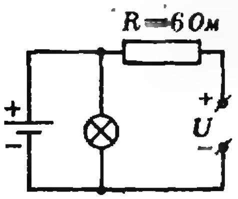


Рис. 2.

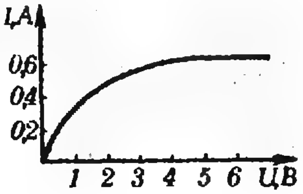


Рис. 3.

2. Упоры-ролики A и $Б$ позволяют «закрепить» балку горизонтально (рис. 4). Давить на балку роликом можно с силой, не превышающей F_0, иначе она разрушается. Какой самый большой груз можно подвесить к правому концу балки? Как нужно ее расположить при этом? Масса балки m, длина L, расстояние между роликами по горизонтали l.

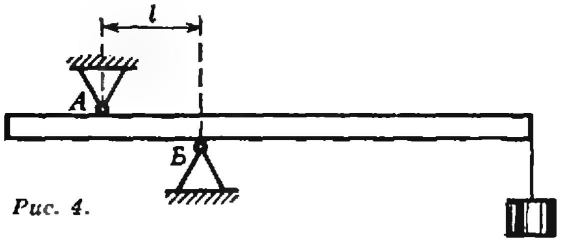


Рис. 4.

3. Мальчик равномерно крутил над головой камень массой m, привязав его к веревке длиной l (рис. 5). Оказалось, что кисть руки при этом описывает окружность радиуса l. Определите радиус окружности, по которой движется камень, если сила сопротивления воздуха движению камня равна γv^2, где γ — заданный постоянный коэффициент, v — скорость камня. Силой тяжести камня можно пренебречь.

4. На каменистом дне водоема лежит куб (рис. 6), материал которого имеет плотность, в 7 раз большую плотности воды. Ребро куба $a=2$ м. Куб пытаются поднять со дна с помощью устройства, работающего по принципу присоски,— квадратного со стороной a щита, плотно прилегающего к верхней грани куба, из-под которого откачивается воздух до давления $p\approx 0$. Можно ли с помощью этого устройства поднять куб до поверхности? Если нет, то на какой глубине он оторвется от присоски? $p_{\text{атм}}\approx 10^5$ Па; $g\approx 10$ м/с^2; $\varrho_{\text{в}}=10^3$ кг/м^3.

9 класс

1. При сжатии некоторой порции влажного воздуха в 4 раза его давление возросло в 3 раза. Когда воздух сжали еще в 2 раза, давление стало в 5 раз больше первоначального. Все происходило при неизменной температуре. Какова была относительная влажность в самом начале?

2. По нефтепроводу диаметром d_1 перекачивают в сутки некоторое количество нефти. Во сколько раз больше будет перекачиваться нефти за сутки по другому нефтепроводу диаметром $d_2=2d_1$ той же длины, если насосная станция обеспечивает прежнюю разность давлений? Считать, что сила сопротивления движению жидкости пропорциональна скорости.

3. Тонкостенный цилиндр радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и положили между двумя наклонными плоскостями (рис. 7; $\alpha=\pi/4$). Коэффициент трения скольжения μ не зависит от скорости проскальзывания. Определите число оборотов, которое сделает цилиндр до прекращения вращения, если известно, что ось цилиндра при торможении покоилась.

4. Оцените мощность нагрузки, при которой перегорит волосок предохранителя в электросети, если при мощности $P_1=1$ кВт он нагревается до $t_1=120$ °C при температуре в комнате $t=20$ °C. Температурный коэффициент сопротивления материала волоска $\alpha=4\cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, температура плавления $t_{\text{пл}}=320$ °C. Теплоотдача растет пропорционально разности температур.

10 класс

1. В колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных резистора с сопротивлением R, катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C, происходят затухающие колебания. За некоторое время амплитуда тока в контуре уменьшилась от I_1 до I_2. Какое количество теплоты выделилось за это время на резисторе?

2. Тонкий обруч (радиуса R), массой которого можно пренебречь по сравнению с массами двух прикрепленных к нему одинаковых грузиков ничтожно малых размеров, просверлен посередине между грузиками (рис. 8). За это отверстие обруч подвешен на вбитый

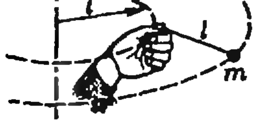


Рис. 5.

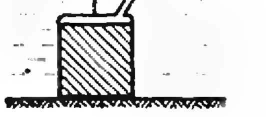


Рис. 6.

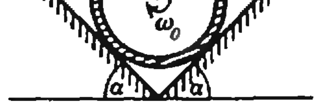


Рис. 7.

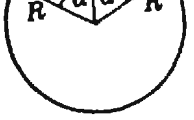


Рис. 8.

в стену гвоздь и может совершать малые гармонические колебания в вертикальной плоскости (как маятник) без потерь энергии. Характеризуя расположение грузиков угловым расстоянием между ними 2α, начертите график зависимости периода T колебаний от угла α. Какой длины математический маятник совершает свободные колебания с тем же периодом, что и данный маятник?

3. В герметичном цилиндрическом сосуде с нагревателем под поршнем массы M находится некоторое количество воды и ее паров, над поршнем — вакуум (рис. 9). Известно, что при мощности нагревателя N_1 поршень медленно поднимался с установившейся скоростью v_1, а при увеличении мощности до $N_2=2N_1$ его скорость стала $v_2=2{,}5\,v_1$. Температура внутри цилиндра при этом не менялась. Найдите эту температуру. Удельная теплота парообразования при данных условиях $\lambda=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, $N_1=100$ Вт, $M=10$ кг, $v_1=0{,}05$ м/с. Потери тепла происходят только через дно сосуда.

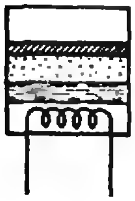


Рис. 9.

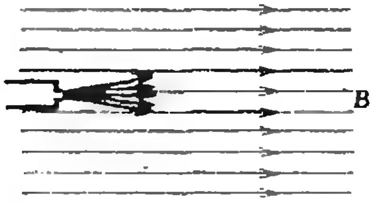


Рис. 10.

4. Для фокусировки пучка электронов, ускоренных разностью потенциалов U и распространяющихся в пределах узкого конуса, используется однородное магнитное поле, линии которого параллельны оси пучка (рис. 10). При каком значении магнитной индукции B пучок будет фокусироваться на экране, отстоящем от электронной пушки на расстоянии L? Отношение заряда к массе e/m для электрона считать известным.

Экспериментальный тур

8 класс

1. При наложении двух расчесок с различным шагом зубьев возникает чередование просвечивающих и темных участков, называемое муаром. Исследуйте, как зависит скорость движения полос муара от скорости движения расчесок.

Оборудование: две расчески, миллиметровая бумага.

2. Определите массу бруска несколькими способами.

Оборудование: динамометр школьный, брусок, штатив с муфтой и планкой, линейка, нить.

9 класс

1. Измерьте элементарный электрический заряд.

Оборудование: источник постоянного тока с регулируемым напряжением, сосуд с раствором поваренной соли (хлорид натрия), два металлических стержня (электроды), трубка стеклянная с пробкой, миллиамперметр, ключ, часы с секундной стрелкой, пластилин, линейка.

2. Определите отношение сопротивлений двух резисторов, располагая вольтметром с неизвестным внутренним сопротивлением.

Оборудование: плоская батарейка 3336, вольтметр школьный, два резистора, соединительные провода.

10 класс

1. Оцените размеры молекул олеиновой кислоты, считая, что она растекается на поверхности воды мономолекулярным слоем.

Оборудование: 0,15 % раствор олеиновой кислоты в спирте, пипетка с водой, линейка, весы и гири, ликоподий или тальк, стакан.

Известно, что плотность олеиновой кислоты $\rho=895$ кг/м^3, а химическая формула — $C_{18}H_{34}O_2$.

2. Предложите методику измерений, которая позволит измерить неизвестную ЭДС источника тока при помощи не более двух собранных электрических схем.

Оборудование: источник тока, два вольтметра.

Б. Б. Буховцев, Л. П. Купцов,
О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1986 год.

Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Публикуемые в журнале материалы помогают лучше понять физику и математику и научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, знакомят с основами программирования и вычислительной техники и их ролью в ускорении научно-технического прогресса.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука».

Подписка на журнал «Квант» принимается без ограничений в течение всего года в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Подписная цена на год 4 р. 80 коп. Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Призеры XI Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Гусманов Р. (п. Дюртали Башкирской АССР, с. ш. № 3),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 10),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40),
Южаков В. (Бийск, с. ш. № 18);

по 9 классам
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Муштари А. (Казань, с. ш. № 18),
Ханочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 10 классам —
Вертгейм Л. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Кирилин П. (Дубна, с. ш. № 10),
Корнилов Э. (Чебоксары, с. ш. № 27);

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Дзигоева Л. (орджоникидзе, с. ш. № 2),
Когон Л. (Кемерово, с. ш. № 89),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Сухих В. (Сыктывкар, с. ш. № 31);

по 9 классам —
Игнатьев М. (Саратов, с. ш. № 13),
Крестьянинов А. (Славгород, с. ш. № 10),
Прокопенко Б. (Гатчина, с. ш. № 3),
Филимоненков В. (Свердловск, с. ш. № 130);

по 10 классам —
Васильев В. (Воронеж, с. ш. № 59),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Милов С. (Тула, с. ш. № 36).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Васильев К. (Тула, с. ш. № 45),
Костин А. (Омск, с. ш. № 92),
Рощин И. (Челябинск, с. ш. № 138),
Соковых В. (Елец, с. ш. № 24);

по 9 классам —
Арапов А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Барахнин В. (Новосибирск, с. ш. № 83),
Русаков Г. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Фокеев О. (Казань, с. ш. № 79);

по 10 классам —
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Куцак С. (Липецк, с. ш. № 44),
Назин С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Сапегина О. (Пенза, с. ш. № 6).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Ананичев Д. (Свердловск, с. ш. № 5),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Пигарев А. (Улан-Удэ, с. ш. № 9),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Боровиков Е. (Новосибирск, с. ш. № 30),
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Никитин И. (Горький, с. ш. № 172),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 10 классам —
Акулов А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Костачев А. (Устинов, с. ш. № 58),
Кусков В. (п. Красный Октябрь Владимирской обл., Краснооктябрьская с. ш.),
Лунц Д. (Саратов, с. ш. № 13).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Комов В. (Гуково, с. ш. № 23),
Мельников Д. (Тула, с. ш. № 36),
Петров К. (Чебоксары, с. ш. № 27);

по 9 классам —
Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Дектярев А. (Ленинский р-н Курской обл., с. ш. № 6),
Лукьянов П. (Чита, с. ш. № 49),
Трусов А. (Псков, с. ш. № 8);

по 10 классам —
Климович Г. (п. Болшево Московской обл., с. ш. № 3),
Литвиненко Ю. (Воронеж, с. ш. № 5),
Ржевский А. (Новосибирск, с. ш. № 149),
Яманаев Р. (Альметьевск, с. ш. № 16).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., с. ш. № 1),
Карстен В. (Новокузнецк, с. ш. № 72),
Пичугин А. (Курская обл., с. ш. № 29);

по 9 классам —
Орехов Д. (Новгород, с. ш. № 10),
Писарев В. (Братск, с. ш. № 18),
Рахамов С. (Казань, с. ш. № 131),
Шебзухов Ю. (Нальчик, с. ш. № 5);

по 10 классам —
Мазур А. (Иркутск, с. ш. № 18),
Рубцов В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Савченко М. (Белгород, с. ш. № 3),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17).

Векторы в геометрических задачах
(см. с. 21)

2. **Указание.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$.

3. 3:2, считая от сторон основания.

4. 1/72.

5. $\arccos\dfrac{17\sqrt{10}}{60}$.

6. **Решение.** Пусть $\vec{e}, \vec{f}$ — единичные векторы, лежащие на прямых a и b. Пусть $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA}=(\vec{m}\vec{e})\cdot\vec{e},\ \overrightarrow{OB}=(\vec{m}\vec{f})\cdot\vec{f},$$

$$\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{f})\cdot\vec{f}=(\vec{m}\vec{e})\cdot(\vec{e}\vec{f})\cdot\vec{f},$$

$$\overrightarrow{OB_1}=(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e}=(\vec{m}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{e})\cdot\vec{e}.$$

Так как $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{m}=(\overrightarrow{OB_1}\cdot\vec{m}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{m}=(\vec{m}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{e})\cdot(\vec{e}\vec{m})-(\vec{m}\vec{e})\times\times(\vec{e}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{m})=0$, откуда и следует перпендикулярность прямых A_1B_1 и OM.

7. **Указание.** Предположив, что для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $x\vec{m}+y\vec{n}+z\vec{p}=\vec{0}$, докажите, что $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, откуда $x=y=z=0$.

Избранные школьные задачи

1. $n=13k-4$, где k — натуральное число. **Решение.** Заметим, что

$$\frac{8n+71}{5n+46}=1+\frac{3n+25}{5n+46},$$

поэтому исходная дробь сократима в том и только в том случае, когда сократима дробь $\dfrac{3n+25}{5n+46}$, а следовательно, и дробь $\dfrac{5n+46}{3n+25}$. Далее последовательно получаем, что сократимость исходной дроби эквивалентна сократимости дробей $\dfrac{3n+25}{2n+21}$ (так как $\dfrac{5n+46}{3n+25}=1+\dfrac{2n+21}{3n+25}$), $\dfrac{2n+21}{n+4}$ (так как $\dfrac{3n+25}{2n+21}=1+\dfrac{n+4}{2n+21}$) и $\dfrac{13}{n+4}$ (так как $\dfrac{2n+21}{n+4}=2+\dfrac{13}{n+4}$). Последняя из полученных дробей сократима тогда и только тогда, когда ее знаменатель делится на 13.

2. $1\pm\sqrt{7}$. **Решение.**

$$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^4+6x^3+18x^2}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{x^4}{(x+3)^2}+\frac{6x^2}{x+3}.$$

Обозначив $x^2/(x+3)$ через y, получим уравнение $y^2+6y-16=0$, корни которого $y_1=-8$ и $y_2=2$. Осталось решить уравнения замены $x^2/(x+3)=2$ и $x^2/(x+3)=-8$, второе из которых не имеет решений.

3. $R\sin\alpha$. **Решение.** Угол M_1MM_2 равен либо α (рис. 1, *а*), либо $180°-\alpha$ (рис. 1, *б*), так как его стороны перпендикулярны данным диаметрам. Далее, точка M_1 лежит на окружности диаметра MO: если M_1 совпадает с O, то это очевидно, а если M_1 не совпадает с O, то это следует из того, что угол MM_1O прямой. Аналогично показывается, что M_2 лежит на окружности диаметра MO. Итак, угол M_1MM_2 вписан в окружность радиуса $R_1=\dfrac{MO}{2}=\dfrac{R}{2}$ и равен либо α, либо $180°-\alpha$, поэтому длина хорды M_1M_2 равна $2R_1\sin\alpha=R\sin\alpha$ (см. «Геометрия 6—10», § 11, с. 147).

4. Заметим, что $n^2+8n+16=(n-4)^2+13n$. Это число заведомо должно делиться на 13, поэтому $(n-4)$ должно делиться на 13, тогда $(n-4)^2$ делится на 169, а второе слагаемое $13n$ не делится на 169 (так как n не делится на 13).

5. **Указание.** Пусть точки P, Q, R, S лежат на прямых AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 2). Отложим от точки Q отрезок QT, равный по длине и перпендикулярный отрезку PR (из двух направлений на прямой QT выбирается такое, что точка T лежит в правой полуплоскости с границей BC). Тогда точка T лежит на прямой DA, и для её построения достаточно соединить точки S и T. Если T и S совпадают, то в качестве DA можно взять любую прямую, проходящую через S.

6. $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^{n+1})$. **Решение.** Предположим, что $x\neq1$ и воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии: $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{1-x^{(n+1)}}{1-x}$. Получаем, что рассматриваемое выражение равно

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

(при $x\neq1$). Случай $x=1$ очевиден.

7. 45° или 135°. **Решение.** Обозначим основания высот, проведенных к сторонам AB, BC, CA, через C_1, A_1 и B_1 соответственно (рис. 3). Если угол C острый, то из равенства прямоугольных треугольников ABB_1 и CHB_1

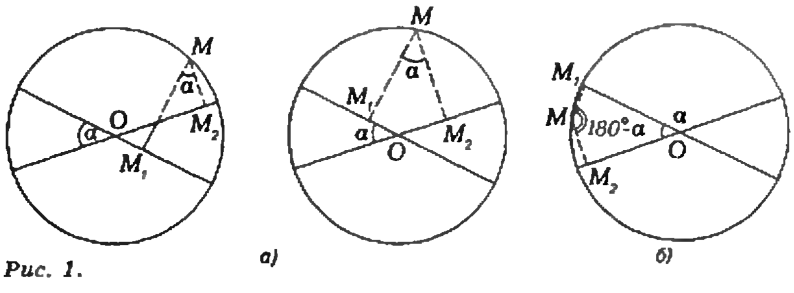


Рис. 1. а) б)

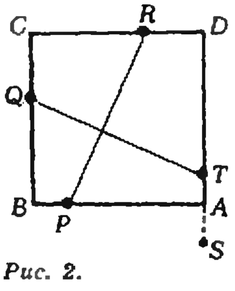


Рис. 2.

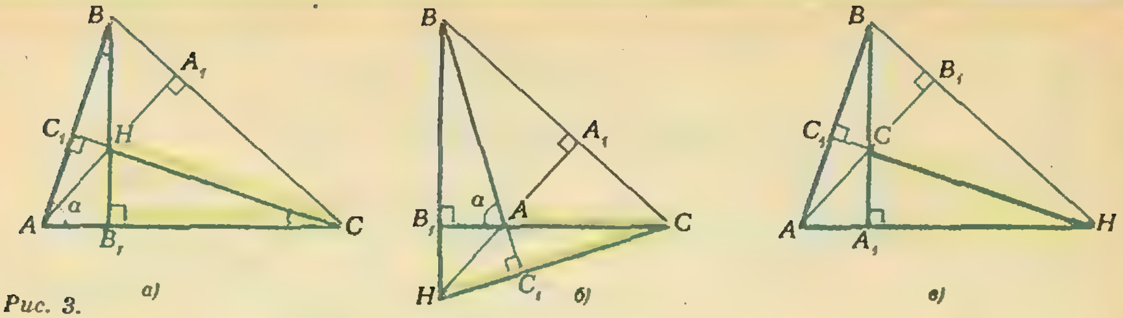


Рис. 3.

а) б) в)

(у них равны гипотенузы AB и CH по условию и острые углы ABB_1 и HCB_1 — каждый из них равен $90°-\alpha$, см. рис. 3, *а*, *б*) получаем $BB_1=B_1C$. В прямоугольном треугольнике BB_1C катеты BB_1 и B_1C равны, поэтому каждый из углов CBB_1 и B_1CB равен 45°. Если угол C тупой (см. рис. 3, *в*), то равны треугольники ABA_1 и CHA_1, поэтому $BA_1=A_1H$ и $\angle BHA_1=45°$, а $\angle ACB=\angle A_1CB_1=135°$ (в четырехугольнике A_1CB_1H: $\angle H=45°$, $\angle A_1=\angle B_1=90°$).

8. Указание. Прежде всего отметим, что существует, притом только одна, пара (параллельных) плоскостей α и β, такая, что a лежит в α, b лежит в β и $b \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$. Любая прямая, пересекающая a и проходящая через M (параллельная l), лежит в некоторой плоскости π (в п. а) — это плоскость, проходящая через a и M, в п. б) — это плоскость, проходящая через a и параллельная l). Если π не совпадает с α, то прямая b пересекается с π в некоторой точке N. Искомая прямая должна совпадать с прямой MN. Прямая MN всегда пересекается с b (в точке N) и лежит с a в одной плоскости (плоскости π), поэтому MN и a либо параллельны, либо пересекаются. Легко понять, что $MN \parallel a$ только в том случае, когда MN принадлежит β (в п. а)); соответственно, l параллельна β (в п. б)). Следовательно, решение задачи существует, если M не лежит ни в α, ни в β в п. а), и если l не параллельна α и β в п. б).

9. а) $k_1k_2=-1$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. а) Угловой коэффициент прямой $y=kx+b$ — это тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс. б) Проведем к параболе $f(x)=x^2-8x+16$ касательную, параллельную прямой $y=-2x+1$ (рис. 4). Для этого найдем абсциссу точки касания: $f'(x)=2x-8$; $2x-8=-2$ при $x=3$, уравнение касательной $y=-2x+7$. Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке (3,5; 0). Парабола лежит по одну сторону от этой касательной, поэтому кратчайшее расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки касания (точки (3; 1)) на прямую $y=-2x+1$. Это расстояние равно расстоянию между прямыми $y=-2x+1$ и $y=-2x+7$. Его проще всего найти из прямоугольного треугольника ABC: пусть $AB=z$, тогда $BC=0{,}5z$, поскольку $\operatorname{tg}\angle BCA=2$; поэтому $z^2+\dfrac{1}{4}z^2=9$, откуда $z=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

10. Окружность диаметра $\sqrt{d^2-h^2}$, где h — длина общего перпендикуляра PQ к прямым a и b, центр окружности — середина этого перпендикуляра, плоскость окружности перпендикулярна PQ. Указание. Множество середин отрезков AB, где A принадлежит a, B принадлежит b, — плоскость, проходящая через середину общего перпендикуляра к прямым a и b и перпендикулярная ему. Поэтому искомое множество лежит в этой плоскости. Спроектируем ортогонально на эту плоскость один из данных отрезков — отрезок AB (рис. 5); получим отрезок A_1B_1. AA_1BB_1 — параллелограмм, так как отрезки AA_1 и BB_1 параллельны и равны (длина каждого из них равна h). Из прямоугольного треугольника AA_1M, где M — середина AB, найдем, что $MA_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$. Далее, в прямоугольном треугольнике A_1OB_1 точка M — середина гипотенузы, поэтому $OM=A_1M=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, откуда следует, что точка M принадлежит окружности с центром O радиуса $\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, расположенной в плоскости A_1OB_1. Осталось проверить, что любая точка этой окружности — середина одного из отрезков, фигурирующих в условии задачи.

11. $\dfrac{a^2}{2}$; плоскость проекции должна быть параллельна любым двум противоположным ребрам тетраэдра. Указание. Проекцией тетраэдра будет либо треугольник, либо четырехугольник. В первом случае площадь проекции будет совпадать с проекцией одной из граней; при этом площадь проекции будет равна $S\cos\varphi$, где $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь грани правильного тетраэдра, φ — угол между плоскостью этой грани и плоскостью проекции. В этом случае наибольшее значение площади проекции равно $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, когда $\cos\varphi=1$. Во втором случае диагонали четырехугольника — проекции противоположных ребер тетраэдра (ребер AD и BC на рисунке 6). По известной формуле площадь этого четырехугольника равна $0{,}5bc\sin\psi$, где b и c — диагонали четырехугольника, ψ — угол между ними. Диагонали четырехугольника — проекции ребер тетраэдра, и их длины равны $a\cos\theta_1$ и $a\cos\theta_2$, где θ_1 и θ_2 — углы между этими ребрами и плоскостью проекции, поэтому $b\leqslant a$, $c\leqslant a$ и $S\leqslant 0{,}5a^2\sin\psi\leqslant 0{,}5a^2$; при этом равенства достигаются в случае, когда $\cos\theta_1=\cos\theta_2=\sin\psi=1$.

12. $x=y=1$. Решение. Запишем уравнение в виде

$$\log_2^2(xy)+(\log_2(x+y)-1)^2=0.$$

Это равенство возможно только в том случае, когда имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(xy)=0, \\ \log_2(x+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1, \\ x+y=2, \end{cases}$$

откуда $x=y=1$.

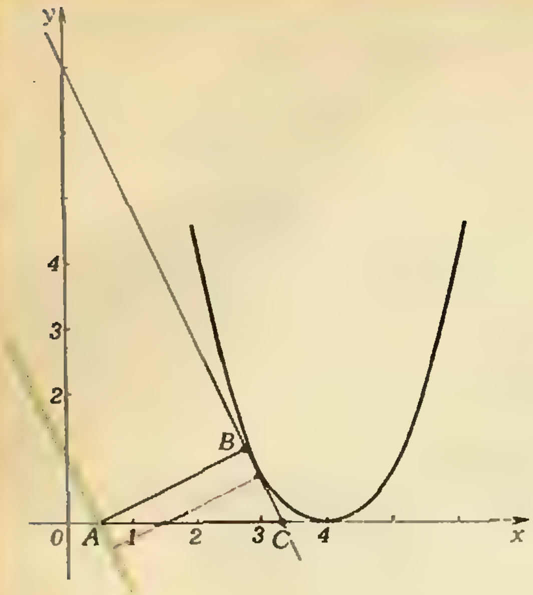


Рис. 4.

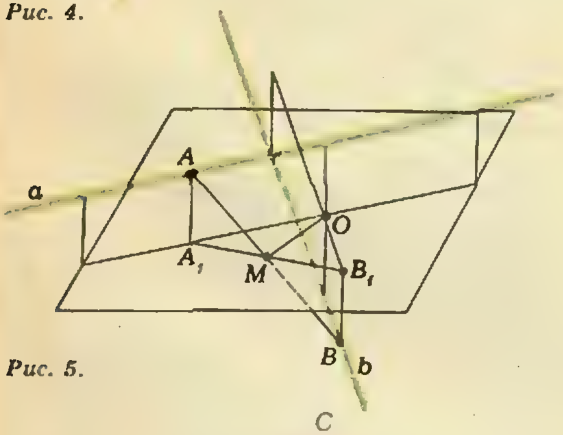


Рис. 5.

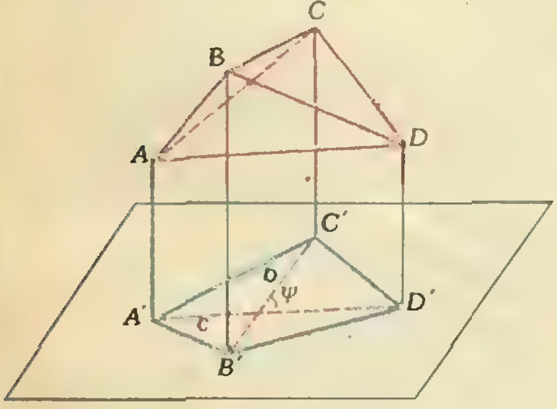


Рис. 6.

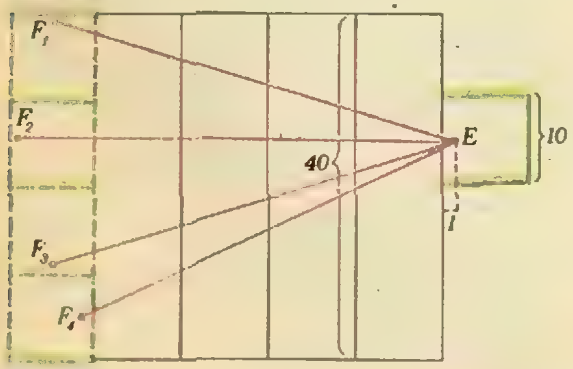


Рис. 7.

13. **Указание.** $\int\limits_a^b (C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)dx=$

$=C_1\int\limits_a^b dx+C_2\int\limits_a^b x\,dx+C_3\int\limits_a^b x^2dx+C_3\int\limits_a^b x^3dx$, поэтому достаточно проверить справедливость формулы Симпсона для функций 1, x, x^2 и x^3.

14. $\sqrt{2164}\approx 46{,}52$. **Указание.** Рассмотрим путь, соединяющий E с F на развертке параллелепипеда. Достаточно сравнить пути $|EF_1|$, $|EF_2|$, $|EF_3|$, $|EF_4|$ (рис. 7; можно считать, что развертка боковых граней и квадрата, содержащего E, зафиксированы, и рассмотреть четыре варианта развертки оставшегося квадрата). По теореме Пифагора легко подсчитать, что $|EF_1|=|EF_3|=\sqrt{46^2+14^2}=\sqrt{2312}$; $|EF_4|=$ $=\sqrt{42^2+20^2}=\sqrt{2164}$. Кроме того, очевидно, что $|EF_2|=50$.

15. $x=c$, где c — это меньшее из чисел a и b. **Решение.** Обозначим $a-x$ через y^4, $b-x$ через z^4, тогда $a+b-2x=y^4+z^4$. После этого уравнение запишется в виде $y+z=\sqrt[4]{y^4+z^4}$. Возведем обе части этого уравнения в четвертую степень; после преобразований получим уравнение $yz(2y^2+3yz+2z^2)=0$, откуда либо $z=0$, либо $y=0$, либо $2y^2+3yz+2z^2=0$. При $z\neq 0$ уравнение $2y^2+3yz+2z^2=0$ можно записать в виде $2\left(\frac{y}{z}\right)^2+3\left(\frac{y}{z}\right)+2=0$. Получившееся квадратное уравнение (относительно переменной $\frac{y}{z}$) не имеет решений. Итак, либо $y=0$, откуда $x=a$, либо $z=0$, откуда $x=b$. Проверка показывает, что из двух полученных значений годится только меньшее.

Кроссворд
(см. с. 41)

По горизонтали: 7. Прохоров. 8. Барометр. 10. Альфа. 11. Длина. 13. Смесь. 17. Сферометр. 18. Антарес. 19. Реостат. 21. Терешкова. 23. Квант. 24. Волна. 26. Микро. 28. Ордината. 29. Постулат.

По вертикали: 1. Триод. 2. Косинус. 3. Вода. 4. База. 5. Полимер. 6. Сталь. 9. Ньютон. 12. Ломоносов. 14. Стерадиан. 15. Серебро. 16. Телефон. 20. Ошибка. 21. Тангенс. 22. Авометр. 23. Кварц. 25. Алмаз. 26. Метр. 27. Озон.

Повторим колебания
Задачи

1. $x_1=m\sqrt{\frac{2gh}{k(M+m)}}\sin\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,t$.

4. Весь брусок окажется на шероховатом участке стола через 1/12 «периода». Полное время торможения

$$\tau=\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right).$$

Упражнения

1. $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\varrho Sg}}\approx 0{,}7$ с.

2. $n=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{R}{r}\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 35$ об/с ≈ 2000 об/мин.

3. См. рис. 8.

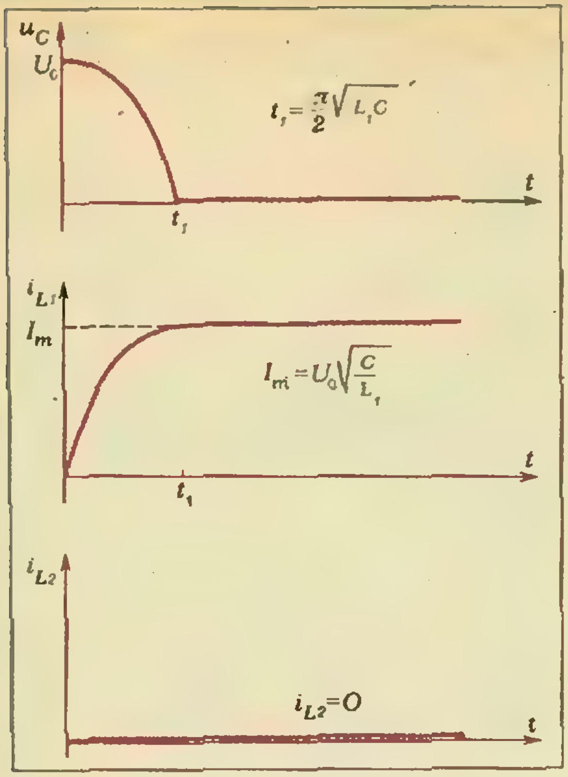


Рис. 8.

XI Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(x^2-y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^2y^2}>0.$$

2. См. решение задачи М947 в «Кванте» № 2, 1986 г.

3. **Ответ:** искомое множество есть объединение интервала CB, луча, сонаправленного с лучом BA, с началом в точке A и окружности с центром A радиуса $\sqrt{AB\cdot AC}$. **Указание:** точка M, не лежащая на прямой AB, удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда треугольники AMB и ACM подобны, то есть когда $AB:AM=$ $=AM:AC$.

4. См. решение задачи М948 в «Кванте» № 2, 1986 г.

5. $x^{1985}+x+1=(x^2+x+1)(x^{1983}-x^{1982}+x^{1980}-$ $-x^{1979}+\ldots+x^6-x^5+x^3-x^2+1)$.

9 класс

1. *Необходимость* данного условия очевидна. Для доказательства *достаточности* предположим, не ограничивая общности, что $a\leqslant b\leqslant c$, и докажем, что в таком случае либо $a>0$ (то есть числа a, b, c положительны), либо $c<0$ (то есть числа a, b, c отрицательны). Пусть $a<0$ и $c>0$. Возможны два случая: $a\leqslant b<0<c$ или $a<0<b\leqslant c$. Второй случай сводится к первому изменением знаков у чисел a, b, c. В первом случае $ca<0$, $bc<0$, поэтому $ab>-bc-ca>-bc$, $\frac{1}{ab}<-\frac{1}{bc}$, то есть $\frac{1}{ab}+$ $+\frac{1}{bc}<0$. Но тогда и $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}<0$. Получили противоречие.

2. а) **Ответ:** точка K должна лежать на прямой, проведенной через основание M высоты AM треугольника ABC параллельно стороне AC.

б) См. решение задачи М908 в «Кванте» № 6, 1985 г.

3. См. решение задачи М949 в «Кванте» № 2, 1986 г.

4. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, O_1C и O_2D — их радиусы, проведенные в точки касания с общей внутренней касательной (рис. 9). Легко видеть, что точки A и B лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Продолжим отрезок O_1C до пересечения с ней в точке E. Тогда O_2ECD — прямоугольник, следовательно, $|CE|=|O_2D|$ и из подобия треугольников ACO_1 и ECB вытекает, что

$$|AC|\cdot|BC|=|O_1C|\cdot|CE|=|O_1C|\cdot|O_2D|=Rr.$$

5. Покажем, что $x_n<100m$ при всех n. (Поскольку числа x_n натуральные, отсюда следует, что среди них найдутся одинаковые.) Доказательство проведем индукцией по n. При $n=1$ $x_1=1<100m$. Пусть $x_n<100m$, и пусть $10^p\leqslant mx_n<10^{p+1}$, то есть число mx_n записывается $(p+1)$-й цифрой. Тогда сумма x_{n+1} его цифр не превосходит

$$9(p+1)<10(p+1)\leqslant 10\cdot 10^{p/2}\leqslant 10\sqrt{mx_n}<$$
$$<10\sqrt{m\cdot 100m}=100m,$$

так как, очевидно, $p+1\leqslant 10^{p/2}$ при $p=0, 1, 2,\ldots$

10 класс

1. Левая часть данного уравнения преобразуется к виду $3(x-y)(y-z)(z-x)$, поэтому оно эквивалентно такому: $(x-y)(y-z)(z-x)=10$. Перебирая делители числа 10, легко убедиться, что это уравнение решений не имеет.

2. См. решение задачи М946 в «Кванте» № 2, 1986 г.

3. Обозначим через $2a$ и b длины сторон соответственно треугольника ABC и квадрата $DEHK$. Тогда $b<a$. Действительно, предположим, что $b\geqslant a$. Возьмем на стороне BC точку M так, чтобы отрезки EM и AC были параллельны (рис. 10). Тогда, очевидно, $EM>EH$, и так как $|EH|=b$, то $|EM|>b\geqslant a$. С другой стороны, при $b\geqslant a$ угол AED не превосходит 60°, поэтому угол ADE не меньше 60°, то есть угол ADE не меньше угла AED. Значит, $|AE|\geqslant a$, и поэтому $|EM|=|EB|=|AB|-|AE|\leqslant a$. Получили противоречие.

При $b<a$ угол AED больше 60°. Следовательно, угол BEH меньше 30°, поэтому угол EHB больше 90°. Значит, угол EHM острый. Так как угол EHK прямой, отсюда следует, что точка K лежит вне треугольника ABC.

4. Найдем объем тетраэдра $ABCA_1$. Пусть α — угол между прямой l_1 и плоскостью ABC, $\beta=$ $=90°-\alpha$ — угол между плоскостью ABC и плоскостью P, перпендикулярной к l_1. Тогда высота тетраэдра, опущенная из точки A_1, равна $|AA_1|\sin\alpha$, а площадь проекции треугольника ABC на плоскость P равна $S_{ABC}\cos\beta=S$. Следовательно,

$$V_{ABCA_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot|AA_1|\cdot\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\cos\beta\cdot|AA_1|=-\frac{1}{3}|AA_1|\cdot S.$$

Аналогично, $V_{A_1BCB_1}=|BB_1|\cdot S/3$, $V_{A_1B_1CC_1}=$ $=|CC_1|\cdot S/3$. В то же время $V=V_{ABCA_1}+$ $+V_{A_1BCB_1}+V_{A_1B_1CC_1}$.

5. См. решение задачи М950 в «Кванте» № 2, 1986 г.

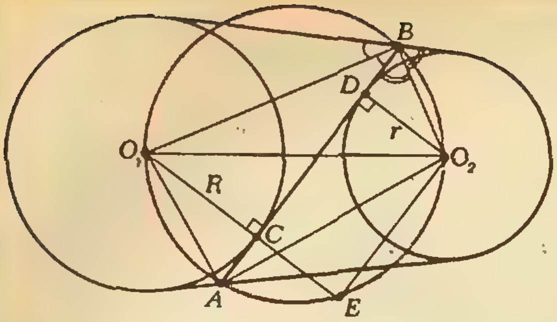


Рис. 9.

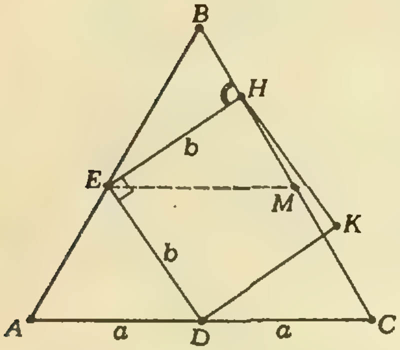


Рис. 10.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Из условия задачи ясно, что напряжение батарейки $U_б = U_1 = 3$ В. Для того чтобы батарейка не разряжалась, ток в цепи должен обеспечивать только источник. Поэтому

$$U_2 = U_1 + I_1 R \approx 6{,}3 \text{ В}$$

(здесь $I_1 \approx 0{,}55$ А — ток в лампочке при напряжении U_1 на ней).

2. Балку нужно расположить так, чтобы она находилась в равновесии при силе реакции со стороны упора A, равной нулю. Тогда наибольшая масса груза будет равна

$$M = \frac{F_0}{g} - m,$$

а расстояние от упора $Б$ до правого конца балки будет равно

$$x = \frac{L}{2}\frac{m}{M+m} = \frac{L}{2}\frac{mg}{F_0}.$$

Ограничения на l не существенны.

3. Камень движется по окружности (рис. 11) радиусом

$$R = 2l\cos\alpha = l\sqrt{\frac{m^2}{2\gamma^2 l^2}\left(\sqrt{1+\frac{16\gamma^2 l^2}{m^2}}-1\right)}.$$

Указание. Угол α определяется из уравнения движения камня, записанного для проекций на направления радиуса и касательной к окружности:

$$F\cos\alpha = m\omega^2 R,\ F\sin\alpha - \gamma^2\omega^2 R^2 = 0,$$

где F — сила натяжения веревки.

4. Куб оторвется от присоски на глубине (отсчитываемой от верхней грани куба)

$$h = \left(\frac{\varrho_т}{\varrho_в} - 1\right)a - \frac{p_{атм}}{\varrho_в g} = 2 \text{ м}.$$

9 класс

1. Начальная влажность воздуха $\varphi = 50\%$. Указание. Из условия задачи ясно, что уже после первого сжатия водяной пар, содержащийся в воздухе, стал насыщенным.

2. Количество перекачиваемой нефти увеличится в $(d_2/d_1)^4 = 16$ раз.

3. Цилиндр сделает

$$N = \frac{(1+\mu^2)\omega_0^2 R}{4\pi\sqrt{2}\,\mu g}$$

оборотов. Указание. Начальная кинетическая энергия цилиндра равна работе против сил трения F_1 и F_2 (рис. 12). Значения F_1 и F_2 можно найти из условия неподвижности оси цилиндра:

$$F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}mg - N_2 = 0,\ F_2 + N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}mg = 0,$$

где силы реакции опоры N_1 и N_2 связаны с силами трения соотношениями $F_1 = \mu N_1$ и $F_2 = \mu N_2$.

4. Предохранитель перегорит при мощности нагрузки

$$P_2 = P_1\sqrt{\frac{t_{пл} - t}{t_1 - t}\,\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_{пл}}} \approx 1{,}4 \text{ кВт}.$$

Указание. Для оценки можно считать, что мощность нагрузки равна мощности, потребляемой от электросети.

10 класс

1. Будем считать, что затухание колебаний происходит только за счет потерь энергии на нагревание резистора, то есть $Q = W_1 - W_2$. В тот момент, когда ток в данном контуре максимален, а значит, ЭДС индукции равна нулю, напряжение на конденсаторе нулю не равно:

$$U_C + IR = 0,\ и\ |U_C| = IR.$$

Поэтому энергия контура

$$W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}I^2(L + CR),$$

а ее уменьшение

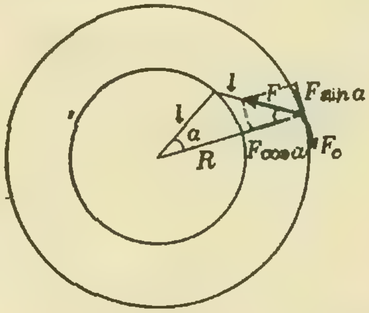


Рис. 11.

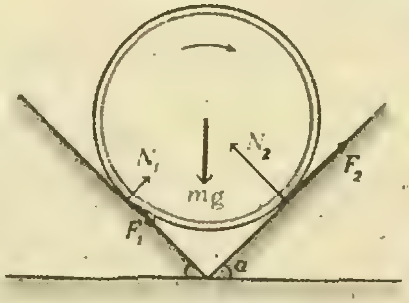


Рис. 12.

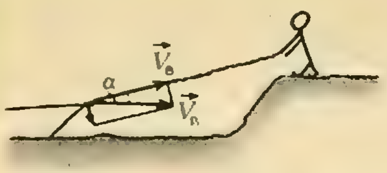


Рис. 13.

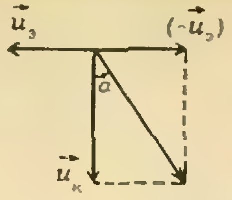


Рис. 14.

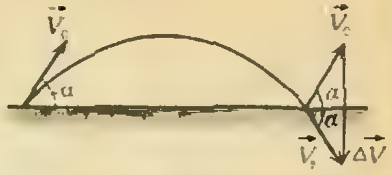


Рис. 15.

$$W_1-W_2=Q=\frac{1}{2}(L+CR)(I_1^2-I_2^2).$$

2. При малых колебаниях данного маятника каждый грузик описывает небольшую дугу окружности радиусом $r=R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. В момент прохождения положения равновесия скорость грузика максимальна и равна $v_m=(2\pi/T)r\varphi_m$, где φ_m — угловая амплитуда колебаний. В момент наибольшего отклонения от равновесия центр тяжести маятника поднимается на высоту $h_m=R(1-\cos\alpha)(1-\cos\varphi_m)$. Воспользовавшись законом сохранения энергии, найдем, что период малых колебаний нашего маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Значит, искомый график зависимости $T=T(\alpha)$ представляет собой горизонтальный отрезок. Такой же период колебаний будет иметь математический маятник длиной $l=2R$.

3. Температура внутри цилиндра равна

$$T=\frac{1{,}5v_1MgM\lambda}{N_1R}\approx 370\ \text{К}.$$

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии

$$N\,\Delta t=\lambda\,\Delta m+q\,\Delta t,$$

где $\Delta m=\frac{pM}{RT}\Delta V=\frac{Mg}{S}\,\frac{M}{RT}v\,\Delta tS$ — масса испарившейся за время Δt воды, q — количество теплоты, теряемое в единицу времени.

4. Индукция магнитного поля кратна величине

$$B=\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Указание. Каждый электрон движется по винтовой линии.

Калейдоскоп «Кванта»

1. За одно и то же время первое тело прошло бо́льший путь, чем второе, следовательно, у первого тела и бо́льшая средняя скорость.

2. $v_л=v_в/\cos\alpha$ (рис. 13).

3. Скорость точки a направлена вниз, точки b — вверх, точки d — вниз, скорость точки c равна нулю.

4. В случае а) горизонтальные начальные скорости у обоих тел одинаковы, а начальная вертикальная скорость больше у первого, следовательно, у первого время полета больше — оно улетит дальше.

В случае б) начальные вертикальные скорости у обоих тел одинаковы, следовательно, одинаковы времена полета, но горизонтальная скорость больше у первого — оно улетит дальше.

5. Сила нормального давления на выпуклой поверхности меньше, чем на вогнутой. Следовательно, и сила трения в среднем на ACB меньше, чем на ADB. Поэтому скорость тела в точке B больше в том случае, если оно скользит по кривой ACB.

6. Может, если, например, тень образуется на стене, параллельно которой бежит человек, а источник света движется быстрее человека в том же направлении.

7. Пусть скорость электрички $u_э$, а угол наклона следа капель к вертикали — α. Из рисунка 14 видно, что скорость падения капель

$$u_к=\frac{u_э}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

8. $|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}_1-\vec{v}_0|=2v_0\sin\alpha$ (рис. 15).

9. В наивысшей точке траектории, где вертикальная составляющая скорости равна нулю.

Микроопыт

Сравните время падения слегка смятой в ком газеты с определенной высоты со временем падения с той же высоты газеты, сжатой в плотный комок.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 9)

1. Петя ехал в вагоне № 2 на месте № 1.

2. Нетрудно заметить, что сумма красной и желтых частей квадрата (рис. 16) составляют половину его площади, а также сумма синих и желтых частей составляют половину площади квадрата. Из этого следует равенство площадей красной и синей частей квадрата.

3. Под тяжестью сосулек ветка время от времени прогибается и сосульки начинают расти на новом месте.

4. См. рисунок 17.

5. Возьмем среди этих чисел то, которое делится на 18 (такое существует, докажите это). Поскольку оно делится и на 9, сумма его цифр равна либо 9, либо 18 (единственное трехзначное число с суммой цифр 27 —

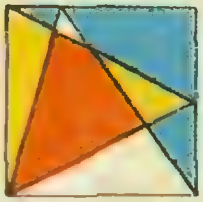


Рис. 16.

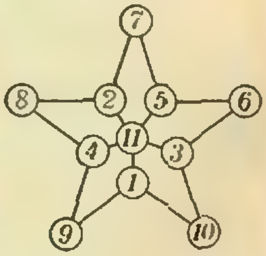


Рис. 17.

это число 999, которое на 18 не делится). Таким образом, это число делится на сумму своих цифр.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 9)

Головоломки

От Олимпа до Парнаса. 175 верст.

Одинаковые числа при умножении. Нет, так как четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр, делится на простое число 101, на которое не может делится ни один из сомножителей.

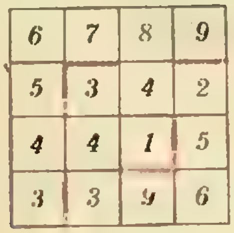
Одинаковые числа при сложении. Нет. Заметим, что при сложении в каждом разряде сумма цифр равна 9 и не может равняться 19. Следовательно, сумма цифр у числа 99...9 вдвое больше, чем у числа A, но 1985 · 9 — нечетное число.

Арифметические ребусы

$$\begin{array}{r} 9\,321 \\ +\,93\,247 \\ \hline 102\,568 \end{array};\qquad \begin{array}{r} 37\,148 \\ +\;7\,148 \\ 148 \\ \hline 44\,444 \end{array}$$

Кросснамбер

См. рисунок 18.



6	7	8	9
5	3	4	2
4	4	1	5
3	3	9	6

Рис. 18.

Поросенок и перец

(см. «Квант» № 8)

Задачи

1. Рыцарь не может заявить, что кто-то выше его по рангу. Следовательно, Лягушонок — не рыцарь. Если вы внимательно читали текст сказки, вы должны были заметить, что по крайней мере один раз Лягушонок сказал правду. Поэтому он нормален.
2. Герцогиня нормальна (см. текст).
3. Чеширский кот — не рыцарь (см. задачу 1). Поэтому он или лжец или нормальный. Если он лжец, то и кухарка лгунья. Но в таком случае кухарка сказала бы правду. Итак, Чеширский кот — нормален. Кухарка не может быть лгуньей. Поэтому она либо рыцарь, либо нормальная особа, но быть рыцарем тоже не может (тогда сказанное ею было бы ложью).
Итак, и кухарка и кот — нормальны (и оба лгут).
4. А — не рыцарь. Если В — рыцарь, то А — нормальный, а С — лжец, что невозможно. Поэтому и В — не рыцарь. Следовательно, С — рыцарь. Теперь уже легко установить, что А — лжец, а В — нормальный (но лжет).
5. Лягушонок, как мы уже знаем, нормальный. Если Лещ — рыцарь, то он сказал правду, и Кролик — лжец, и Лягушонок солгал. В этом случае Кролик скажет: «Лягушонок». Если же Лещ — лжец, то Кролик — рыцарь и поэтому и в этом случае его ответ будет: «Лягушонок».

Вопросы

1. Скорее не скорее, но уж не быстрее — это точно.
2. Как известно, чтобы смеяться хорошо, нужно смеяться последним, а вообще лучше не делать много шума из ничего.
3. В воздухе больше перцу тогда, когда его больше в супе.
4. Правда, потому что тарелка и сама может летать.
5. Конечно, при полете вверх, потому что при полете вниз уже не так страшно.
6. И поэтому тоже.
7. Если Пес в своем уме, то правда, а если нет, то тогда вообще не о чем говорить...
8. По этому поводу мнения читателей и редакции разделились.

Синяя гусеница дает совет

(см. «Квант» № 7)

Задачи

1. Если считать, что гусенице достаточно добраться до начала ветви, то ей понадобится 17 дней. Если потребовать, чтобы гусеница полностью влезла на ветку — то 18 дней.
2. Например, если Л — лев, а В — волк, то лев, сделав два — три прыжка схватит волка, находящегося в 20 метрах от него. Если же лев будет убегать от волка по равнине, то в конце концов волк догонит льва.
3. Этот человек — карлик. Он просто не может дотянуться до кнопки своего этажа.
4. 10 метров. **Решение.** Прежде всего отметим, что улитка может ползти неравномерно. В условии задачи сказано, что за улиткой велось постоянное наблюдение, то есть она ни на мгновение не оставалась без надзора. Поэтому первую и последнюю минуту улитка проползла ровно по 1 метру. Докажем, что за каждую из оставшихся 4 минут она проползала не более чем по 2 метра. Изобразим, например, вторую минуту в виде отрезка на числовой оси. Из всех наблюдателей, которые следили за улиткой при $t=1$ выберем того, который наблюдал за улиткой до этого момента меньше всех, а из наблюдателей в момент времени $t=2$ того, который наблюдал за улиткой до этого дольше всех. Пусть t_1 время, когда ушел первый из выбранных нами наблюдателей, а t_2 — время, когда начал наблюдать второй из выбранных нами наблюдателей. Ясно, что $t_2 < t_1$ (иначе нашелся бы момент времени, когда улитка была бы без надзора). За каждый промежуток времени от 1 до t_1 и от t_2 до 2 улитка проползет не больше, чем по 1 метру. Поэтому за всю вторую минуту она проползет не более 2 метров.

Представляем читателям самостоятельно построить график движения улитки и способ организации наблюдения за ней (вам понадобится 10 наблюдателей), при котором улитка проползет в точности 10 метров. Для облегчения задачи покажем, как улитка может проползти 3 метра за первые две минуты. За первые 5 секунд она проползает 1 метр, потом останавливается и стоит на месте до конца первой минуты, потом за 5 секунд она проползает еще 1 метр, за следующие 5 секунд — тоже 1 метр и останавливается до конца второй минуты. Наблюдение организуем так: первый наблюдатель следит за улиткой всю первую минуту, второй начинает наблюдать, когда улитка остановилась в первый раз, третий — в момент ухода второго наблюдателя, четвертый — в момент, когда улитка остановилась во второй раз. Подумайте теперь, как надо действовать дальше.

5. 986
345
4930
3944
2958
340170

Вопросы

1. Может. Начало у него «в», а конец — «е».
2. Как известно, словом делу не поможешь, а поэтому лучше в тупик не попадать.
3. Хорошо известно, что последняя капля может переполнить чашу любого сколь угодно большого размера.
4. Рост — это и длина, и высота, и ширина.
5. Встаньте на весы, резко поднимитесь на цыпочки, и вы увидите ответ.
6. Сила удара зависит от относительного движения подбородка и ног, а поэтому все равно больно.
7. Хотя змеи и ползут с неба, но живут-то они на земле...

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Д. Хэйн, 1889 г.). **1. Сb5!** (тихий вступительный ход, который нелегко найти) 1...Крf7 2.Крg5 Кре7 (2...Крg8 3.Сс4×) 3.Фf6×, 1...Крd8 2.Фd6+Крс8 3.Са6×.

Задание 14 (А. Мандлер, 1928 г.). **1.Крf2** Крс8 2.Сh2 Крd8 3.Фd1×. 1...Кра8 2.Сd2 Крh8 3.Фh1×.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 6, с. 19)

1. Если некоторые натуральные x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1}, \qquad (1)$$

то они должны удовлетворять эквивалентному уравнению

$$(x^{p-1}-1)+(y^{p-1}-1)=(z^{p-1}-2). \qquad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на p:

$$\frac{(x^{p-1}-1)}{p}+\frac{(y^{p-1}-1)}{p}=\frac{(z^{p-1}-2)}{p}. \qquad (3)$$

Согласно Малой теореме Ферма, левая часть (3) при всех натуральных x и y, таких, что $(x, p)=(y, p)=1$, будет суммой двух целых чисел, то есть числом целым. Правая же часть (3) ни при каком натуральном z целым числом не будет, так как если $(z, p)=1$, то $(z^{p-1}-2)$ делится на p с остатком $(p-1)$, а если $(z, p)\neq 1$, — то с остатком $(p-2)$. Это значит, что эквивалентные уравнения (3), (2) и (1) в натуральных числах неразрешимы.

2. Понятно, что при $p=3$ уравнение (3) (см. предыдущую задачу) не имеет решения в натуральных числах, таких, что $(x, 3)=(y, 3)=(z, 3)=1$. Однако известны натуральные x, y, z, такие, что $x^2+y^2=z^2$. Это так называемые *пифагоровы тройки*, такие, как (3, 4, 5). Значит любая пифагорова тройка содержит число, кратное 3.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, В. В. Губин, Т. Н. Кольченко, В. Ф. Лактионов, П. П. Лахтунов, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. В. Юдин, Н. А. Ящук

Фото представили
Е. А. Артемов, А. М. Орехов, В. И. Савела, Э. А. Смирнов, А. Н. Сухоруков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.08.85. Подписано к печати 20.09.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. л. 7,37. Т-18870
Тираж 173213 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2244

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

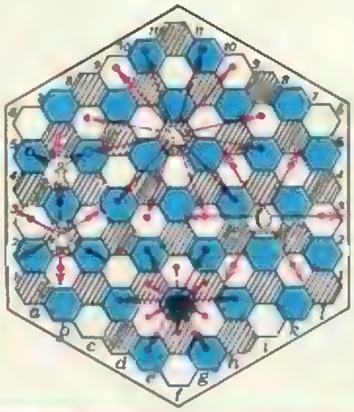
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ ШАХМАТЫ

Известны десятки разновидностей шахмат, в которых используются необычные доски, фигуры или правила игры. Мы уже рассказывали о цилиндрических шахматах и о шахматах на параллельных досках. Нестандартные доски редко применяются для серьезной игры.

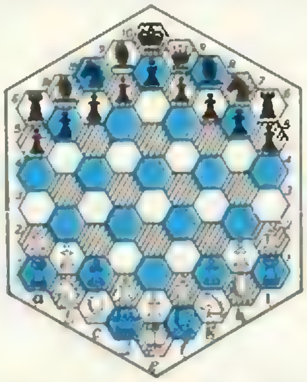
Но есть и одно исключение — гексагональные, или, иначе, шестигранные шахматы. Доска для гексагональных шахмат имеет вид шестиугольника. Изобретены два варианта игры, один — советским геологом И. Шафраном, другой — польским инженером В. Глинским. Польские шахматы получили широкое распространение в мире, расскажем сначала о них.

Гексагональная доска состоит из 91 поля трех цветов (см. 1-ю с. обложки); на ней 11 вертикалей от «a» до «l» (кроме «j»), поля каждой нумеруются от нижнего к верхнему. Роль горизонталей выполняют диагонали, слева от линии «f» параллельные a1 — f1, а справа параллельные f1 — l1. В дополнение к обычному комплекту фигур каждая сторона получает по одному слону и одной пешке. Начальное расположение показано на обложке, ходы фигур — на следующем рисунке.



Король ходит на все соседние поля, не только непосредственно примыкающие к данному, но и ближайшие к нему того же цвета. Направления движения ладьи и слона указаны стрелками, они ходят на любое число полей в одном из шести направлений (разных для ладьи и слона). Ферзь, объединяющий ходы ладьи и слона, движется в 12 направлениях. Пешки ходят на одно поле по вертикали (в начальном положении — на два), бьют наискосок: с b5 на a5 и c6. Сохраняется и взятие на проходе — в ответ на c2 — c4 черная пешка d3 может побить белую: d3:c3. Достигая последнего поля вертикали, пешка превращается в любую фигуру. Рокировок нет, поскольку короли находятся в достаточной безопасности, а ладья за два хода подключается к атаке или защите. Все остальные правила и цель игры — поставить мат неприятельскому королю — не меняются.

Доска для шахмат Шафрана чуть меньше. Начальная расстановка напоминает обычные шахматы. Фигуры ходят, как в польском варианте, лишь пешка бьет под углом 60°: с b5 на a6 и c7.



Пешки трех центральных вертикалей могут сделать первый ход сразу и на три поля вперед, остальные только на два. Возможны рокировки — короткая, если ладья приближается к королю, и он переступает через нее, и длинная, если король подходит к ладье, и она перепрыгивает через него.

В польских шахматах доска представляет собой правильный шестиугольник, и, возможно, такая геометрическая четкость помогла Глинскому «обыграть» Шафрана в популярности.

Теория шестигранных шахмат почти не разработана, к тому же разнообразие ходов и вариантов существенно больше, чем в обычных шахматах, и предугадать ответ противника труднее.

Геометрия шестигранной доски весьма своеобразна. Так, вертикаль «f» является ее осью симметрии, а поле f6 — центральным полем (на обычной доске центр состоит из четырех полей — d4, d5, e4, e5). Хотя доска больше, но путь коня между любыми полями занимает не более четырех ходов (на обычной доске с a1 до h8 конь добирается за 6 ходов). Любопытно, что любая фигура может сделать ход, сохраняя контроль над прежними полями. Особенно интересно проявляется это свойство у коня. Например, с g9 он атакует e7, и продолжает контролировать его, перейдя на d9 или h6. Конь может и пройти по треугольнику, выигрывая темп у партнера.

Немного хроники. В 1953 г. польские шахматы демонстрировались на Всемирной выставке в Париже. В 1980 г. в Лондоне состоялся первый чемпионат Европы. Тогда же был организован и всесоюзный клуб «6 граней», который с 1982 г. проводит соревнования*). В 1984 г. в Венгрии прошел второй чемпионат Европы, в котором участвовали 26 игроков из 7 стран. Победителям первого первенства поляку М. Мацковяку и второго — венгру Л. Рудольфу — было присвоено звание международного гроссмейстера по гексагональным шахматам. В следующем номере мы вернемся к этой теме.

Конкурсные задания

Оба предлагаемых этюда — на обычной доске, но число 6 обыгрывается и в них: в позициях по шесть фигур.

19. Белые: Крh7, Фe1, Кb7. Черные: Крf7, Фf3, п.f5. Белые начинают и выигрывают.

20. Белые: Крg5, Фc1, Лc5. Черные: Крe7, Фb8, Лd8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

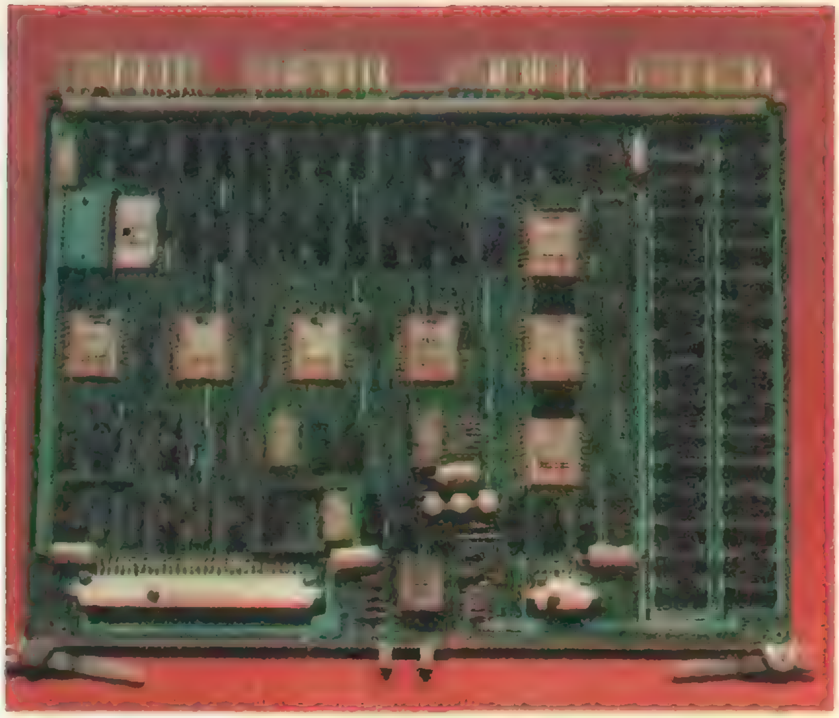
---

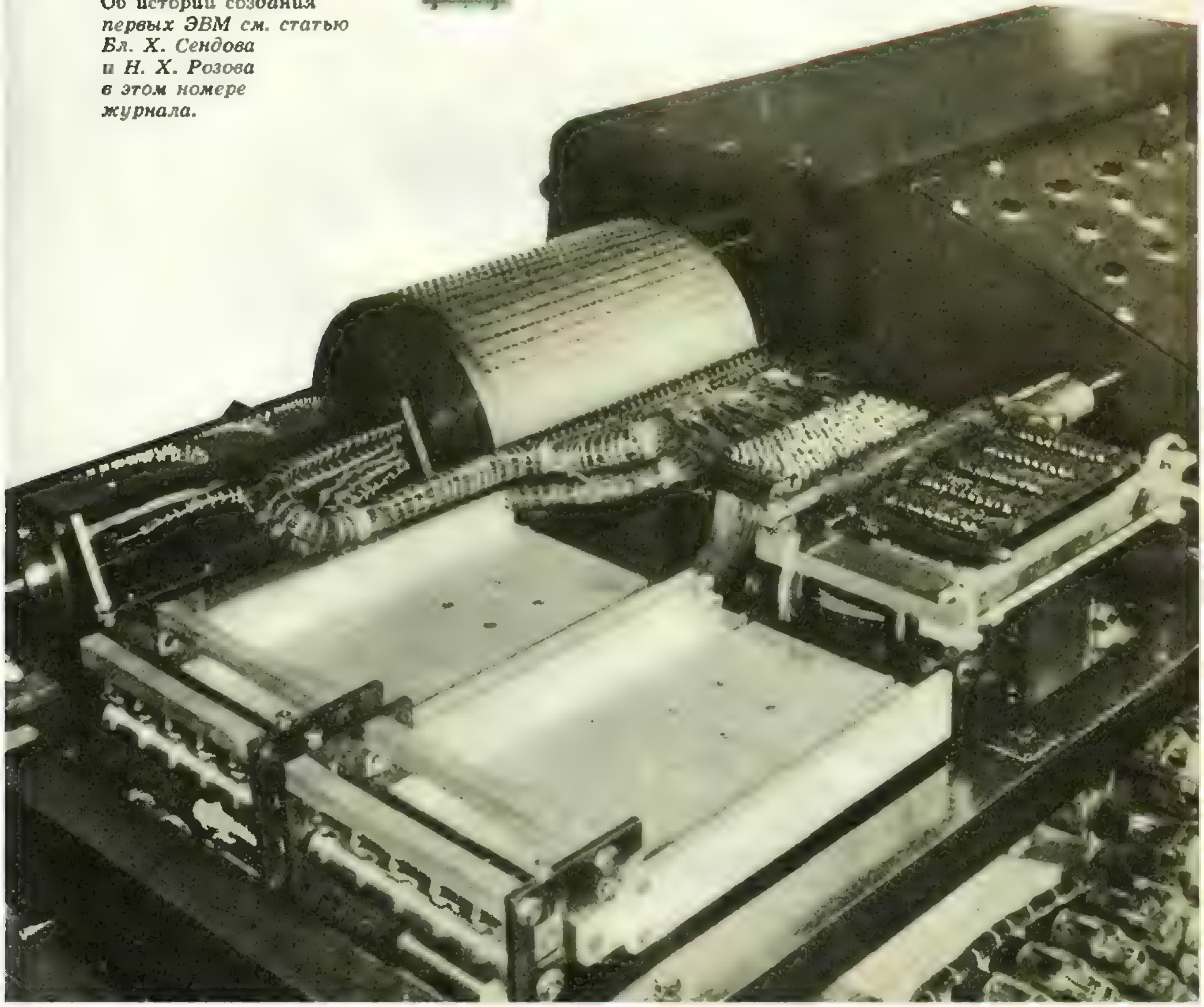
*) Адрес клуба: 109004, Москва, Б. Коммунистическая ул., д. 9, Ждановский дом работников просвещения, клуб «6 граней».

На черно-белой фотографии внизу показана часть первой в мире электронной вычислительной машины, сконструированной в 1942 году и названной «АВС» ее создателем Дж. Атанасовым. Вверху на цветном отпечатке показана «Электроника МС 1201.2», современная советская одноплатная встраиваемая микро-ЭВМ, а ниже — совсем крохотная однокристальная микро-ЭВМ «Электроника С5—31».

Интересно, что последняя машина, размером в почтовую марку, по объему памяти и быстродействию на много порядков превосходит своего неуклюжего прародителя, компьютер «АВС».

Об истории создания первых ЭВМ см. статью Бл. Х. Сендова и Н. Х. Розова в этом номере журнала.





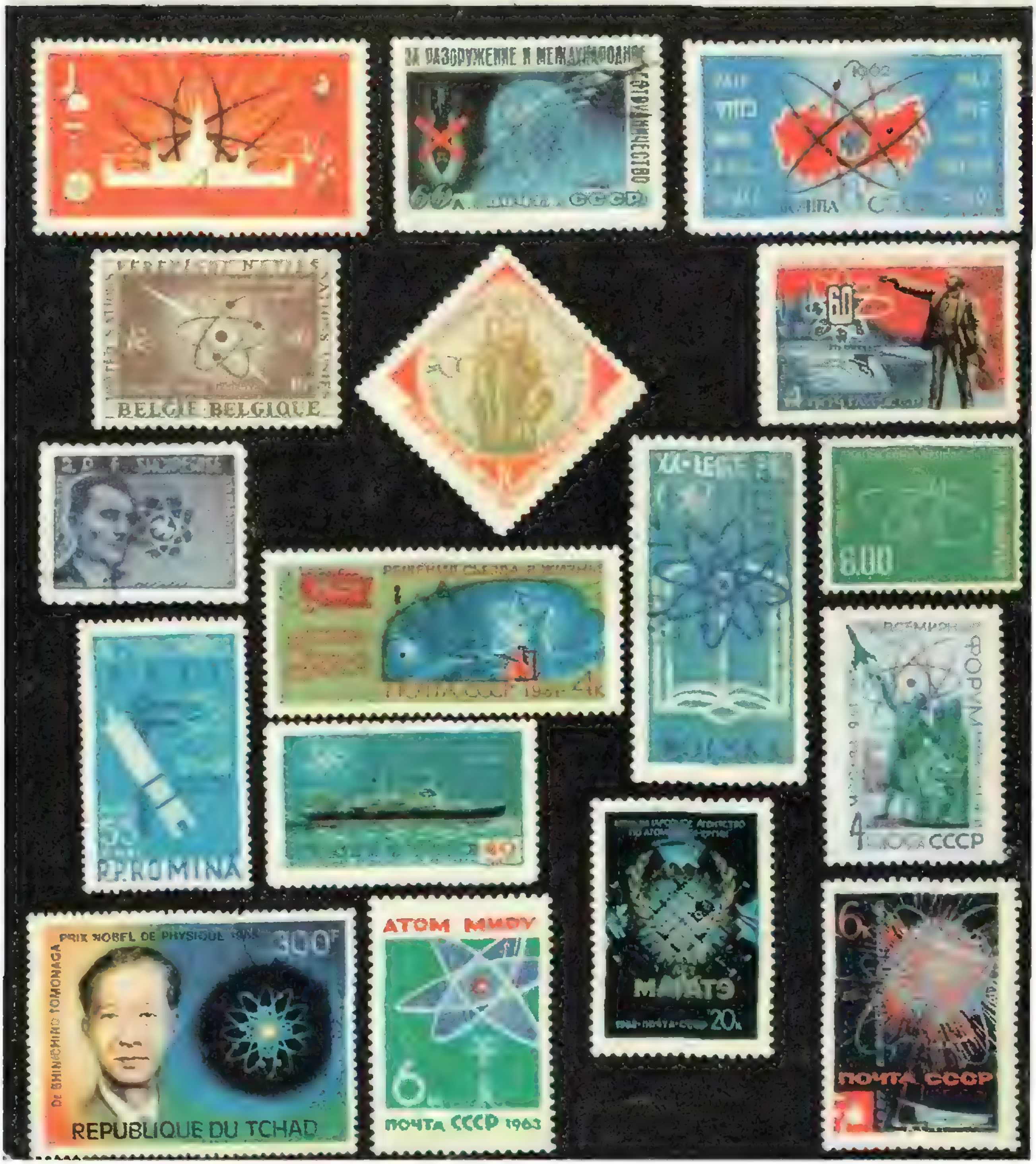
Цена 40 коп. Индекс 70465

Уголок коллекционера

АТОМ В ФИЛАТЕЛИИ

Воспроизведенные здесь марки на первый взгляд подобраны совершенно случайным образом, у них нет никакого тематического единства. Тут и портреты выдающихся физиков лауреатов Нобелевской премии Фредерика Жолио-Кюри и Синьитиро Томонаги, и советские марки, посвященные борьбе за мир, ленинскому плану ГОЭЛРО и XXVI съезду КПСС, Всемирной выставке 1967 года в Монреале и Выставке достижений народного хозяйства. Есть здесь и марки, связанные с научными конференциями и Международным агентством по атомной энергии. Но присмотритесь внимательно, и вы увидите, что на каждой марке изображена планетарная модель атома, теория которой создана великим датским физиком Нильсом Бором. В этом месяце ему исполнилось бы сто лет. Боровская модель атома стала своеобразным символом нашего атомного века.

В. Рудов


ЗА РАЗОРУЖЕНИЕ И МЕЖДУНАРОДНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО
СССР
BELGIE BELGIQUE
XX LEHTE
6.00
ВСЕМИРН
ФОРУМ
4 ПОЧТА СССР
P.R.ROMINA
PRIX NOBEL DE PHYSIQUE
300F
Dr SHINICHIRO TOMONAGA
REPUBLIQUE DU TCHAD
АТОМ МИРУ
6
ПОЧТА СССР 1963
МАГАТЭ
20к
6к
ПОЧТА СССР

НОМЕР
11

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 11 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет Московской математической олимпиады

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*В. В. Авилов.* Физика+Математика+ЭВМ	*V. V. Avilov.* Physics+mathematics+ +computers
9	*В. В. Вавилов.* Об одной формуле Христиана Гюйгенса	*V. V. Vavilov.* On a formula of Christian Huygens
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
15	*А. А. Боровой.* Осмос	*A. A. Borovoy.* Osmosis
	Школа в «Кванте»	**Kvant's School**
20	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
25	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	Наш календарь	**Our calendar**
26	Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна	Three famous papers by Albert Einstein
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	*В. Г. Болтянский.* Отгадать день рождения	*V. G. Boltyanski.* Guessing birthday dates
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
31	Задачи М951—М955; Ф963—Ф967	Problems M951—M955; P963—P967
36	Решения задач М931—М935; Ф943—Ф947	Solutions M931—M935; P943—P947
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Искусство программирования	**The art of programming**
44	*С. А. Абрамов.* Самый знаменитый алгоритм	*S. A. Abramov.* The most famous algorithm
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
48	III. Биполярные транзисторы	III. Bipolar transistors
	Олимпиады	**Olympiads**
51	*В. В. Вавилов, С. В. Резниченко.* XIX Всесоюзная олимпиада по математике	*V. V. Vavilov, S. V. Reznichenko.* The 19th All-Union mathematics olympiad
54	*А. А. Бирюков, А. Р. Зильберман.* XIX Всесоюзная олимпиада по физике	*A. A. Biryukov, A. R. Zilberman.* The 19th All-Union physics olympiad
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Информация (*25, 50*)	**Information (*25, 50*)**
	«Квант» улыбается (*47*)	**Kvant smiles (*47*)**
	Смесь (*8, 19*)	**Miscellaneous (*8, 19*)**
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Задачи на гексагональной доске (*3-я с. обложки*)	Problems on the hexagonal board (*3rd cover page*)

«Сталагмиты» и «сталактиты», сфотографированные на первой странице обложки, выросли в растворе жидкого стекла из мелких кристалликов хлористого кобальта в течение буквально нескольких минут. О том, как это происходит, можно прочитать в статье «Осмос» в этом номере журнала.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985

Расчет методом Монте-Карло свойств бинарного сплава по модели Изинга. ЭВМ случайным образом разбросала атомы сорта А (светлые квадраты на экране) по плоской решетке 16×16, предоставив оставшиеся места атомам сорта Б (темные квадраты), и сейчас подсчитывает, сколько раз соприкасаются атомы разных сортов.

Физика + Математика + ЭВМ

Кандидат физико-математических наук
В. В. АВИЛОВ

В этой статье речь пойдет о вычислительной физике — новой науке, родившейся на стыке физики и прикладной математики. Как только появились быстродействующие ЭВМ, они стали использоваться во всех областях физики. Здесь мы оставим в стороне роль ЭВМ в современном физическом эксперименте, который теперь без использования компьютеров зачастую просто невозможен, и обратимся к их применению в теоретических исследованиях.

В настоящее время существуют два главных направления в использовании ЭВМ в теоретической физике. В рамках первого подхода физик старается как можно дальше продвинуться в решении задачи до обращения к ЭВМ. Машина используется только для вычисления интегралов, сумм, для нахождения решений сложных уравнений, которые не могут быть получены аналитически (в виде формул). Другой подход — это так называемое машинное моделирование. Сторонники этого направления исходят в расчетах только из основных физических законов и, исследуя результаты счета, пытаются сделать новые физические выводы. Во многом такая деятельность близка к физическому эксперименту, иногда даже используется название «численный эксперимент». Обратимся сначала к первому подходу.

Если требуется помощь ЭВМ

Первоначально физиков не допускали к ЭВМ. Расчеты выполняли программисты. Это было связано с тем, что на ЭВМ первого поколения программы составлялись в так называемых машинных кодах, которые были различными для каждого типа ЭВМ. Не специалисту в программировании было очень трудно написать и отладить программу. Существовало четкое разделение труда: физик писал формулы, математик-программист считал по ним. Таким способом было решено большое количество задач, но одновременно выяснились и недостатки этого метода. Для многих задач при таком подходе не удалось получить правильных решений. Прежде всего это было связано с тем, что ЭВМ проводит расчеты с конечной точностью, выполнение каждого действия приводит к погрешности округления. Для большинства ЭВМ относительная погрешность расчетов каждого действия лежит в интервале 10^{-8}—10^{-16}. Казалось бы, это очень большая точность. Но из-за того, что в секунду ЭВМ выполняет до 10^6 операций, ошибка вычислений может быстро накапливаться.

Если одна и та же величина может быть вычислена различными способами, то говорят о различных числовых процессах. Эти числовые процессы могут быть устойчивыми или неустойчивыми по отношению к накоплению ошибок округления. Существуют даже такие процессы, где накопление погрешности округления делает неприменимым метод расчета уже через несколько шагов. Это означает, что физик, желающий провести численный счет по своим формулам, должен разбираться в числовых процессах и представлять себе, какие методы прикладной математики он может использовать в своей работе. Стало ясно, что физики и математики должны взаимодействовать между собой на всех этапах — начиная от постановки задачи и кончая численным расчетом. Это обстоятельство и способствовало появлению новой специальности — вычислительная физика.

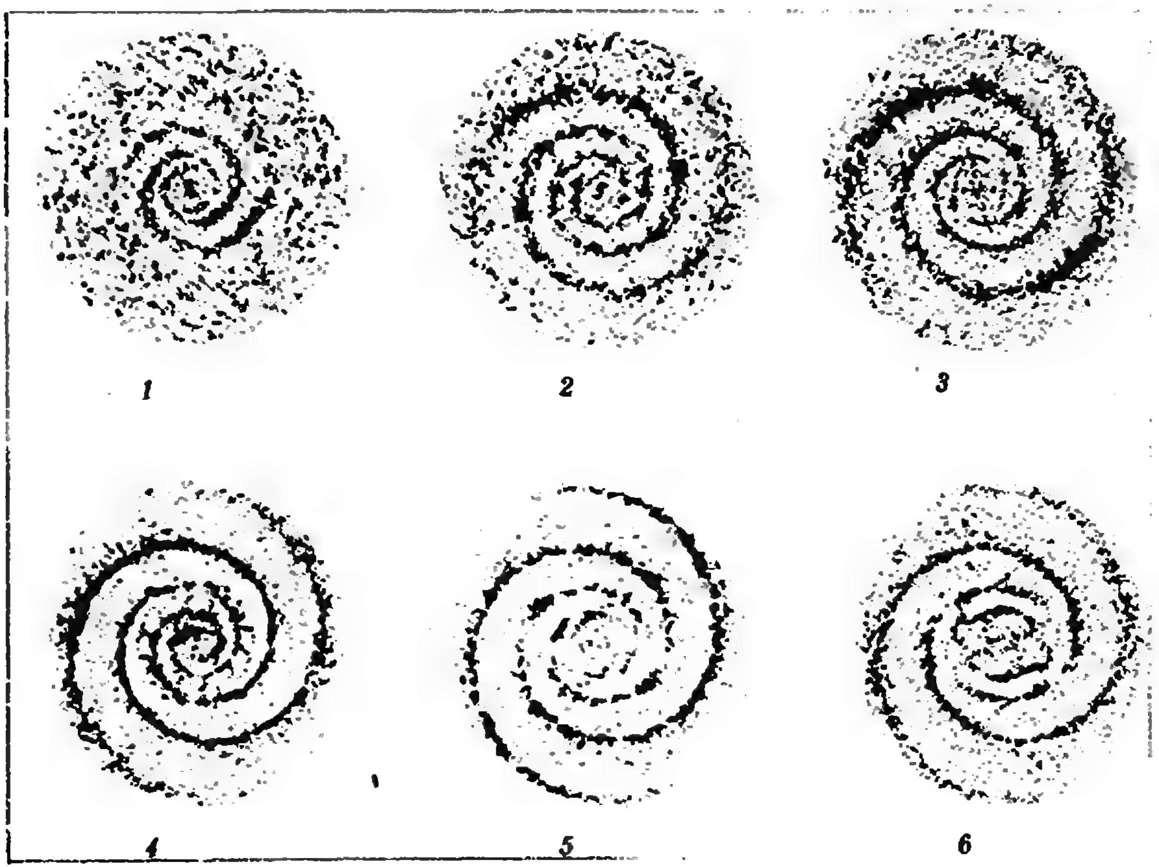
Отметим также, что возможность такого объединения специальностей связана и с разработкой языков программирования, существенно облегчивших «общение» с машиной. Удобные дисплеи*) упростили контакт пользователя с ЭВМ. Были созданы библиотеки программ; теперь нет уже необходимости каждый раз заново составлять программу для решения стандартной задачи, гораздо проще воспользоваться библиотекой стандартных программ. Появились и специальные журналы, публикующие работы по вычислительной физике. На первых этапах журналы просто печатали тексты программ. Скоро, однако, стало ясно, что так можно поступать лишь с самыми простыми программами. Дело в том, что при наборе в типографии, а затем при «переносе» программы из журнала в ЭВМ неизбежно появляются ошибки. Поэтому сейчас публикуется только описание метода расчета, сама программа хранится в специальной библиотеке и высылается пользователю по заказу.

В начале 70-х годов на одной из конференций по методам расчета электронно-оптических систем сотрудники вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР демонстрировали работу созданного ими комплекса программ. Нескольких докладчиков за полдня до доклада они попросили сформулировать задачи, которые решаются в их работе. На вечернем заседании вместе с докладчиками сотрудники ВЦ ознакомили всех со своими решениями этих задач, полученными на ЭВМ с помощью комплекса программ. Стало ясно, что задачи, решение которых ранее требовало нескольких месяцев, можно решить в течение нескольких часов. Столь яркая демонстрация возможностей ЭВМ заставила многих пересмотреть свое отношение к ним.

Сегодня появилось множество подобных комплексов, ориентированных

---

*) Так называют комплекс экрана и клавиатуры в современной ЭВМ, с помощью которого ведется диалог ученого и машины. На дисплее воспроизводится и редактируется вводимая в ЭВМ программа, на него же выводятся результаты вычислений.



Кадры фильма, созданного ЭВМ при моделировании образования галактики из газового облака. Видно, как под действием гравитационных сил постепенно возникает спиральная галактика с двумя рукавами.

на определенный круг задач. Физику, который собирается работать с таким комплексом, нет необходимости программировать исследовать численные процессы на устойчивость. Машина сама сделает это, достаточно лишь написать основные уравнения и задать начальные условия. На выходе пользователь получает искомое решение в виде таблиц и графиков. При необходимости комплекс даже сделает по результатам счета цветной фильм. Физик, сидя у дисплея, может контролировать решение, изменять значения параметров, пробовать различные начальные условия. Разумеется, созданию каждого такого комплекса программ предшествует кропотливая работа специалистов по физике и прикладной математике.

Численный эксперимент

До сих пор мы говорили о таких расчетах, когда физика исследуемого явления понята еще до обращения к ЭВМ. Результаты этих расчетов нужны для практических целей. Сейчас мы поговорим о другом направлении вычислительной физики — о машинном моделировании. Как уже упоминалось, метод машинного моделирования характеризуется тем, что задаются только основные закономерности, описывающие систему.

Например, если этим методом исследуются свойства газа, жидкости, плазмы, галактики или другой системы, состоящей из многих частиц, то задают закон их взаимодействия и начальные координаты и скорости частиц. Далее составляют уравнения движения*), а решают их с помощью ЭВМ.

Наблюдая эволюцию системы и сравнивая поведение системы, получаемое в результате такого численного эксперимента, с имеющимися экспериментальными данными или с тем, что предсказывают приближенные аналитические методы, ученые пытаются выявить закономерности ее развития.

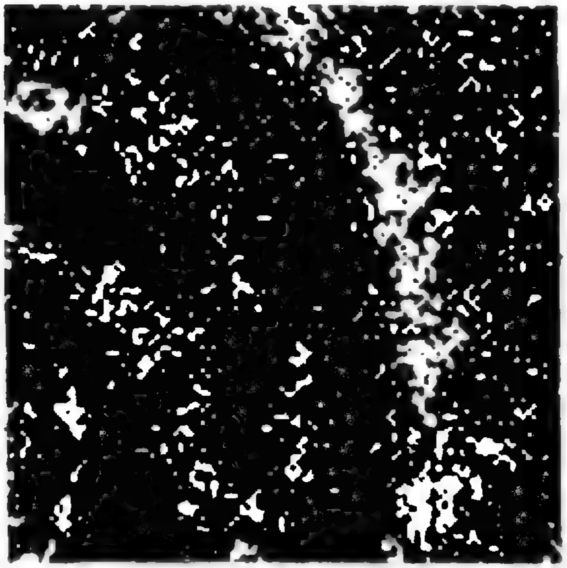
---

*) В классической механике нахождение уравнений движения для каждой частицы сводится к записи второго закона Ньютона. Если же скорости частиц нельзя предполагать малыми по сравнению со скоростью света, то в качестве уравнений движения уже следует пользоваться соответствующими уравнениями теории относительности. Для частиц малой массы (например, электронов) моделирование с самого начала должно основываться на уравнениях квантовой механики.

Во многих отношениях метод машинного моделирования сходен с физическим экспериментом, этим методом стараются воспроизвести, «скопировать» природу. Преимущество моделирования в том, что оно позволяет рассмотреть такие системы, для которых пока еще нельзя получить экспериментальные данные (процессы при сверхвысоких давлениях, температурах, энергиях частиц).

Возможности этого метода, разумеется, не беспредельны. Для того чтобы описать поведение молекул в 1 см^3 реальной жидкости, требуется следить за движением порядка 10^{22} молекул. Даже для современной большой ЭВМ это число слишком велико. Пока что для расчетов доступны системы, состоящие не более чем из 10^6 частиц. Однако уже и при рассмотрении такого «ограниченного» числа частиц во многих случаях выявляются закономерности, характерные для той или иной системы большого числа частиц.

Методы машинного моделирования работают тем лучше, чем мощнее ЭВМ, на которой реализуется программа. В последние годы стали создаваться специализированные ЭВМ, каждая из которых пригодна для решения только одной серии задач, возможно, с некоторыми модификациями, но зато уж эту серию такая ЭВМ умеет решать хорошо.



Один из рукавов галактики изображен в более крупном масштабе. Видны остатки газового облака (размытые участки); маленькие белые точки означают звезды.

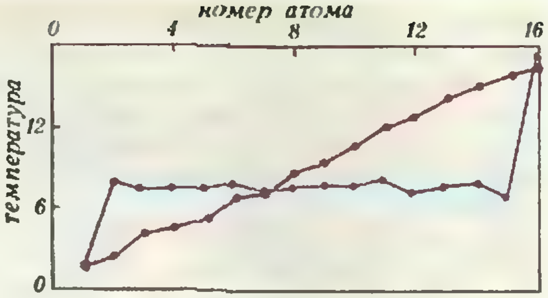
Можно привести много примеров, когда моделирование на ЭВМ привело к открытиям, которые существенным образом повлияли на наши взгляды на физический мир.

Так, в 1954 году Энрико Ферми с сотрудниками моделировали на ЭВМ распространение колебаний в одномерной цепочке взаимодействующих атомов. Таким образом они хотели понять, как устанавливается тепловое равновесие в твердых телах. Для того чтобы промоделировать взаимодействие, считалось, что соседние атомы связаны пружинками. Из предварительного теоретического рассмотрения было известно, что в случае, когда сила натяжения F пружины, соединяющей атомы, связана с изменением ее длины Δx обычным линейным законом $F=-k\cdot\Delta x$, тепловое равновесие в системе не устанавливается никогда. В то же время полагалось, что достаточно ввести любую нелинейность в закон взаимодействия атомов (то есть считать $F(\Delta x)$ нелинейной функцией) — и тепловое равновесие будет устанавливаться в такой системе за конечное время.

В своей работе Ферми с сотрудниками ввели простейшую нелинейность, добавив в выражение для силы F слагаемое, пропорциональное $(\Delta x)^2$. Численный счет показал, что в этом случае тепловое равновесие в системе действительно устанавливается, однако чрезвычайно медленно. Характерное время этого процесса во много раз превышало оценки, которые давала существовавшая в то время теория. Этот удивительный результат стимулировал дальнейшие численные и аналитические исследования. Было доказано, что для некоторых типов нелинейной зависимости силы натяжения пружины от растяжения Δx тепловое равновесие в системе не установится никогда.

В настоящее время опубликованы сотни, если не тысячи статей, в которых численно и аналитически исследованы такие системы. Результаты этих исследований находят не посредственное применение в широком круге задач физики плазмы, гидродинамики, оптики и т. п.

Начиная свою работу, Ферми и его сотрудники понимали, что выбранная ими модель цепочки далека от реального твердого тела. Реальные кристаллы обладают сложной трехмерной решеткой, в них взаимодействуют не только ближайшие соседи, а закон взаимодействия атомов гораздо сложнее, чем было принято в этой работе. Тем не менее простая модель одномерной цепочки позволила понять возможные следствия существования нелинейного закона взаимодействия атомов.



Моделирование на ЭВМ теплопереноса в одномерной цепочке взаимодействующих атомов. По горизонтальной оси отложены номера атомов, по вертикальной — их температура (в условных единицах). Для подавляющего большинства реальных систем справедливы результаты расчета, представленные красным цветом, — температура плавно возрастает от левого конца к правому. Синим же цветом показаны результаты моделирования для цепочки, подобной той, о которой рассказано в статье: температура скачкообразно изменяется вблизи крайних атомов и почти не меняется вдоль цепочки (бесконечная теплоемкость).

Модель Изинга и генератор случайных чисел

Не все задачи, однако, сводятся к численному решению уравнений движения. Для ряда задач используется такой важный метод моделирования на ЭВМ, как метод Монте-Карло. Познакомимся с ним на примере исследования фазовых переходов. Но сначала скажем несколько слов о самой проблеме фазового перехода, с которой на протяжении многих лет, ввиду ее сложности, физики никак не могли до конца разобраться.

К фазовым переходам относятся такие хорошо знакомые вам явления, как плавление и кипение, а также многие менее знакомые — переход металла в сверхпроводящее, а гелия — в сверхтекучее состояние, упорядочение сплавов и т. д. Все эти, на первый взгляд непохожие между собой, явления, имеют одно общее свойство — по мере приближения системы к переходу существенным становится взаимодействие все большего числа ее частиц, что затрудняет применение обычных методов теоретической физики. Тут-то и приходит на помощь компьютер, позволяя рассчитать поведение системы вблизи фазового перехода. Однако сначала следует придумать подходящую модель,— простую, и в то же время отражающую основные свойства системы.

Вот как, например, можно описать фазовый переход из газообразного в жидкое состояние. Рассмотрим плоскую решетку, содержащую N узлов, в которых располагается m $(m<N)$ атомов. Известно, что взаимодействие между атомами быстро спадает с увеличением расстояния между ними, поэтому грубо можно предположить, что атомы в решетке взаимодействуют только в том случае, если они оказываются в соседних узлах решетки. Такая модель называется моделью Изинга решеточного газа со взаимодействием ближайших соседей.

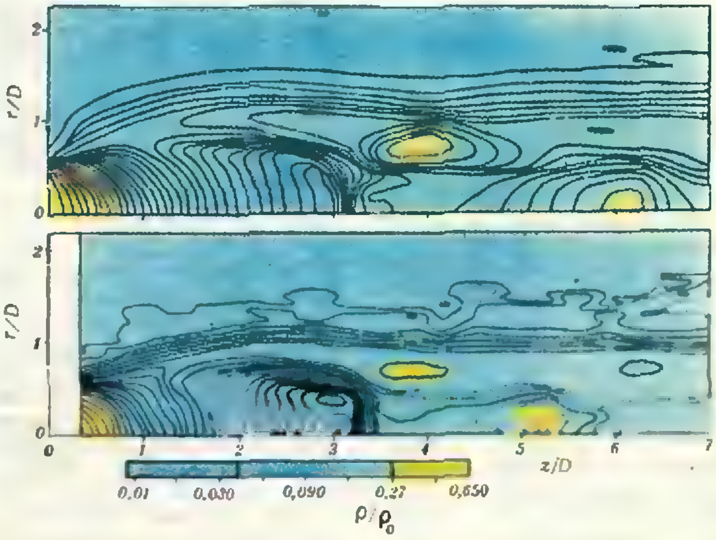
При высоких температурах атомы распределяются по решетке в среднем равномерно. Однако при достаточно низких температурах, благодаря притяжению между атомами, они соберутся вместе, заполнив некоторую область решетки. Так водяной пар с понижением температуры сначала становится насыщенным, а затем конденсируется в капельки жидкости.

Для того чтобы узнать температуру, при которой происходит «конденсация» решеточного газа (фазовый переход), или, например, выяснить, как ведет себя теплоемкость вблизи фазового перехода, необходимо уметь вычислять энергию системы взаимодействующих атомов для каждого способа их расположения по решетке (конфигурации). Главная сложность заключается в том, что число способов размещения атомов по узлам решетки очень быстро возрастает с увеличением числа узлов N. Если, например, число атомов в решетке (m) порядка $N/2$, то уже при $N=30$ существует более 10^8 различных конфигураций. Тем не менее, подобные расчеты были проделаны, в частности на специализированных ЭВМ, сконструированных именно для решения такого рода задач.

Чтобы получаемые в рассмотренной модели результаты позволяли делать выводы о физических свойствах реальных систем, необходимо рассматривать решетки с сотнями и тысячами узлов. Поскольку добавление одного узла увеличивает время расчета примерно в два раза, то просуммировать по всем возможным состояниям системы становится просто невозможным. Поэтому для вычисления подобных сумм и используется метод Монте-Карло, в котором сумма вычисляется не по всем возможным конфигурациям, а только по некоторой их части, а затем результат умножается на соответствующий множитель. Название метода связано с тем, что конфигурации, по которым производится суммирование, определяет так называемый генератор случайных чисел, «разбрасывающий» атомы по решетке подобно тому, как это делает рулетка с шариком в игорных домах Монте-Карло.

Почему таким способом можно решить задачу — тема для отдельной статьи. Здесь мы только отметим, что численные эксперименты с моделью Изинга, а также с более сложными моделями, позволили существенно продвинуться в понимании физики фазовых переходов.

Основой метода Монте-Карло является датчик случайных чисел. В ЭВМ можно встретить датчик, основанный на физическом случайном процессе, например, на подсчете числа электронов, вылетающих за некоторый интервал времени с горячего катода. Ясно, однако, что трудно добиться устойчивой работы таких устройств. Изменение внешних условий, старение прибора приводит к систематическим ошибкам. Наибольшее распространение получили поэтому последовательности генерируемых машиной чисел, в которых каждое последующее число является некоторой заданной функцией предыдущего. Такие числа, конечно, нельзя считать случайными, но эта последовательность может быть близка по своим свойствам к последовательности случайных чисел (псевдослучайные числа). В частности, если генерируется последовательность чисел, распределенных на отрезке [0; 1[, то требуется взять большое количество этих чисел и посмотреть, насколько равномерно они ложатся на отрезке. Затем следует разбить эти числа на пары. Таким образом можно задать координаты x и y — последовательности точек на плоскости. Эти точки должны равномерно ложиться внутри единичного квадрата $x \in [0; 1[$, $y \in [0; 1[$. Если в этом квадрате есть область, где точки ложатся гуще, чем в других, и эта тенденция сохраняется с увеличением числа точек, то такой датчик не годится. В этом случае говорят, что существует корреляция между парами чисел. Такую же проверку надо сделать для троек, четверок и т. д.



Еще один способ наглядно представить результаты расчета на ЭВМ. Показано рассчитанное (вверху) и измеренное в эксперименте (внизу) распределение плотности (по отношению к плотности в сопле) в потоке газа, вытекающего из цилиндрического сопла диаметром D (левый нижний угол рисунков). Различные цвета означают различные значения плотности, шкала плотность — цвет изображена под рисунком. Ось Z направлена вдоль оси сопла. Наибольшая плотность, а следовательно и максимум давления, вблизи сопла (желтый цвет). Результаты расчета прекрасно согласуются с экспериментальными данными.

Когда американская фирма IBM начала выпускать свою серию ЭВМ «IBM 360», то в пакете стандартных программ для нее была программа RANDU, генерирующая последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Инженеры фирмы проверили программу и, не обнаружив корреляций для пар чисел, сочли дальнейшую проверку излишней. В течение нескольких лет эта программа использовалась для расчета методом Монте-Карло, прежде чем было обнаружено, что в выдаваемой последовательности чисел имеется сильная корреляция между тройками чисел. Оказалось, что если разбить числа на тройки, которые задают x, y, z — координаты последовательности точек, то вместо того, чтобы распределяться равномерно по единичному кубу, точки расположатся в нем на некоторой поверхности. (Разумеется, если при моделировании задачи Изинга разбрасывать атомы по трехмерной решетке с помощью такого датчика, то распределение атомов будет сильно отличаться от случайного.) Поэтому те расчеты методом Монте-Карло, которые в течение нескольких лет были выполнены на машинах серии «IBM 360», потребовалось переделать.

* * *

Коротко упомянем об иных возможностях современных вычислительных машин. Например, они способны выполнять и аналитические преобразования. Уже создано несколько языков, пользуясь которыми можно заставить ЭВМ выполнять алгебраические и тригонометрические преобразования, вычислять производные, находить интегралы и выполнять другие операции с формулами. Если нам требуется произвести в работе большое число аналитических преобразований, то, поручив их ЭВМ, так же, как и при численном счете, мы сэкономим время работы, избежим ошибок.

Приведем характерный пример. В прошлом веке французский астроном Делоне исследовал отклонение от законов Кеплера для движения Луны вокруг Земли вследствие притяжения Солнца. Итогом работы Делоне был многотомный труд, содержащий около 40 000 формул. На всю работу Делоне потратил 20 лет. В 1970 году группа из трех человек в течение года проверила все формулы, заново получив их на ЭВМ. Оказалось, что только одна из них содержит ошибку.

Аналитические преобразования на ЭВМ успешно используются во многих физических задачах.

Курьезное совпадение

Во втором издании книги известного итальянского ученого, профессора Орацио Звелто, одного из пионеров квантовой электроники, — «Принципы лазеров» — перед предисловием автора помещен любопытный материал. Он начинается с цитаты из «Естественной истории» Плиния Старшего, римского ученого и писателя, жившего в первом веке нашей эры (этот единственно сохранившийся до наших дней труд Плиния Старшего представляет собой энциклопедию естественно-научных знаний античности; он содержит также сведения по истории искусства, истории и быта Рима):

«Лазер — один из чудеснейших даров природы, имеющий множество применений».

Далее идет пояснение к цитате (мы приводим его в несколько сокращенном виде):

«В период греко-римской цивилизации (начиная с 6 в. до н. э. и кончая 2 в. н. э.) лазер был широко известен и весьма прославлялся. Так в действительности называлось растение, которое в диком виде встречалось на большой территории около Кирены. [Это древний город в Северной Африке, основанный около 630 г. до н. э. греками; один из культурных и торговых центров античности; в настоящее время принадлежит Ливии. *Примеч. ред.*] Оно применялось для лечения множества болезней — от простуды до различных эпидемических заболеваний. Его использовали как противоядие при укусе змеи, скорпиона или при попадании в тело отравленной стрелы. Благодаря своим прекрасным вкусовым качествам это растение употребляли как изысканную приправу в самой лучшей кухне. В период римского господства это была единственная дань, которую жители Кирены платили римлянам, хранившим лазер в своих сундуках вместе с золотыми слитками. Впоследствии лазер встречался все реже и реже и около 2 в. н. э. исчез, по-видимому, навсегда».

Об одной формуле Христиана Гюйгенса

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ

Длина окружности радиуса 1/2 может быть определена как предел последовательности длин периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность при неограниченном увеличении числа его сторон. Определенное таким образом число обозначается символом π. Аналогично можно определить число π и как предел периметров правильных описанных около этой окружности многоугольников (рис. 1). Точнее, если через p_n обозначить периметр вписанного, а через q_n периметр описанного правильного n-угольника, то имеют место неравенства

$$p_n < \pi < q_n, \quad n \geqslant 3.$$

Когда n возрастает, обе последовательности p_n и q_n монотонно приближаются к числу π (рис. 2); при переходе от n к $n+1$ мы получаем меньшую ошибку в приближениях, которую числа p_n и q_n дают для числа π.

В своем знаменитом сочинении «Измерение круга» Архимед (287—212 гг. до н. э.) дал следующее приближение для числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

то есть

$$3{,}14084507 < \pi < 3{,}14285714.$$

Этот результат Архимед получил при помощи вычисления периметра правильного вписанного 96-угольника.

Многовековая история числа π связана с многими именами известных математиков. Один из последователей Архимеда в этом вопросе Христиан Гюйгенс (1629—1695) в 25-летнем возрасте получил совершенно неожиданный результат: приближение, указанное Архимедом для числа π, можно получить из рассмотрения периметров правильных 12-угольников. Этот результат Гюйгенс опубликовал в своей работе «О квадратуре круга». Не нужно, однако, думать, что Х. Гюйгенс добился этого только за счет уточнения самой техники вычисления периметров правильных многоугольников. В основе его работы лежали новые идеи, получившие в наше время дальнейшее развитие. Основую идею Гюйгенса можно сформулировать следующим образом. Так как $p_n < \pi < q_n$, при каждом $n \geqslant 3$ число π находится внутри интервала $]p_n, q_n[$, причем $q_n - p_n \to 0$, когда $n \to \infty$. Разделим этот интервал при каждом $n \geqslant 3$ на три равные части (рис. 3). Будет ли число π находиться в какой-то одной из этих трех частей? Оказывается (это и есть один из основных результатов работы), что число π всегда находится в левом интервале, то есть при любом $n \geqslant 3$ имеем

$$\boxed{p_n < \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n.} \qquad (1)$$

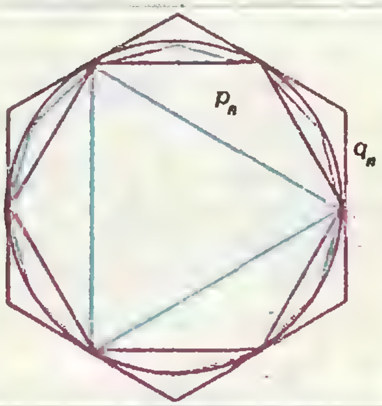


Рис. 1.

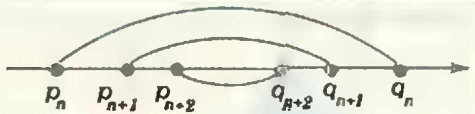
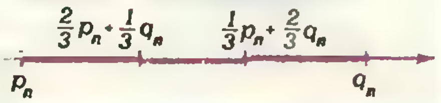


Рис. 2.



$\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$
$\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n$
p_n
q_n

Рис. 3.

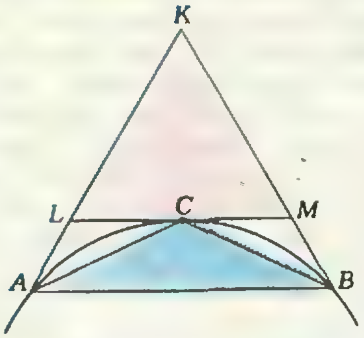


Рис. 4.

Именно это основное неравенство и позволило Гюйгенсу пойти дальше Архимеда.

Ниже мы докажем приведенные результаты Архимеда и Х. Гюйгенса и рассмотрим некоторые смежные вопросы.

Доказательство основного неравенства

Доказательство неравенства (1) мы разобьем на несколько шагов. Левую часть этого неравенства будем считать известной и поэтому докажем только справедливость второго неравенства.

1°. Если в некоторый сегмент круга ACB вписан равнобедренный треугольник ABC и в точках A, B и C проведены касательные к окружности так, как показано на рисунке 4, то

$$\boxed{S_{ABC} < 2S_{KLM}.} \qquad (2)$$

Действительно, из соотношений $|KL| > |LC|$ и $|LC| = |AL|$ следует $|AK| < 2|KL|$. Так как треугольники KLM и KAB подобны, их площади относятся как квадраты соответствующих сторон и, следовательно,

$$S_{KAB}/S_{KLM} = |KA|^2/|KL|^2 < 4,$$

откуда $S_{KAB} < 4S_{KLM}$.

С другой стороны, равнобедренные треугольники KAB и ABC имеют общее основание AB, и поэтому их площади относятся так же, как их высоты, или (по теореме Фалеса) как длины соответствующих сторон. Следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KAB}} = \frac{|AL|}{|AK|},$$

и, так как $|AL| < (1/2)|AK|$, получаем $S_{ABC} < (1/2)S_{KAB}$.

Отсюда и из предыдущего неравенства для площадей получаем (2).

2°. Если обозначить через $S_{\text{сегм}}$ площадь сегмента ACB (см. рис. 4), то

$$\boxed{S_{\text{сегм}} \leqslant \frac{2}{3} S_{ABK}.} \qquad (3)$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся следующим соображением. Обозначим (см. рис. 5) через S_0 и A_0 площади треугольников ABC и KLM соответственно. Рассмотрим теперь дугу AC, разделим ее точкой C_1 пополам и построим два треугольника, имеющих площади S_1 и A_1 соответственно и лежащих внутри и вне сегмента AC_1C (рис. 5).

Рассмотрев теперь дугу AC_1, точкой C_2 разделим ее пополам и построим точно таким же образом треугольники площадей S_2 и A_2. Точка C_3 — середина дуги AC_2 — порождает аналогичным образом треугольники площадей S_3 и A_3. Продолжая этот процесс, мы получим две последовательности $\{S_n\}$ и $\{A_n\}$ положительных чисел — площадей соответствующих треугольников. По доказанному в 1° — см. (2), — имеем следующую цепочку неравенств:

$$S_0 < 2A_0,\ S_1 < 2A_1,\ S_2 < 2A_2,\ S_3 < 2A_3,\ \ldots,\ S_n < 2A_n.$$

Ясно, что (рис. 6)

$$S_0 + 2S_1 + 2^2S_2 + 2^3S_3 + \ldots + 2^nS_n + \ldots = S_{\text{сегм}}$$

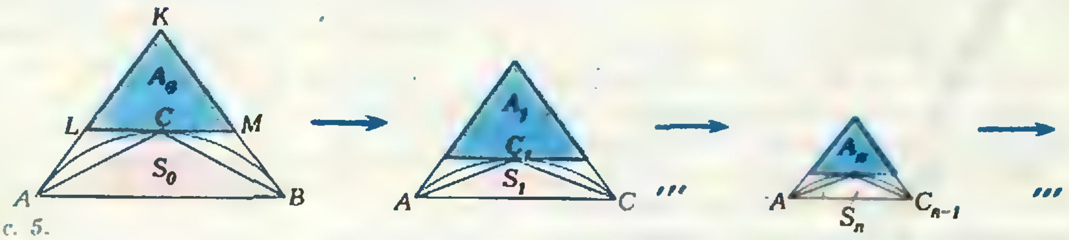


Рис. 5.

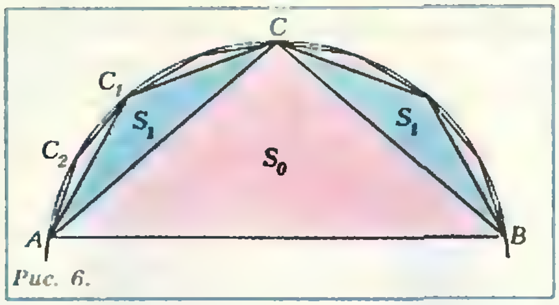


Рис. 6.

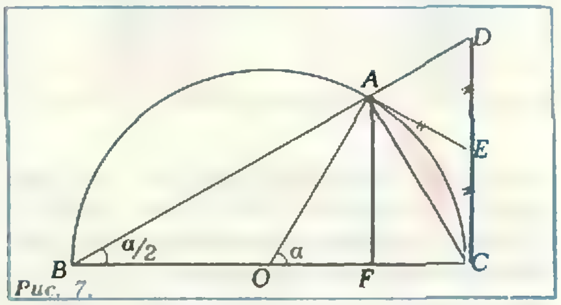


Рис. 7.

и

$$A_0+2A_1+2^2A_2+2^3A_3+\ldots+2^nA_n+\ldots= \\ =S_{ABK}-S_{\text{сегм}}.$$

Из приведенной цепочки неравенств и двух последних соотношений следует, что *)

$$S_{\text{сегм}} \leqslant 2(S_{ABK}-S_{\text{сегм}}),$$

то есть утверждение (3).

3°. Следующая геометрическая лемма Х. Гюйгенса представляет и самостоятельный интерес.

Лемма. На рисунке 7: O — центр круга, прямые AE и CD — касательные к окружности, AB — произвольная секущая, пересекающая прямую CD, l_{AC} — длина дуги AC. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\boxed{l_{AC} \leqslant \frac{2}{3}|CD|+\frac{1}{3}|AF|.} \qquad (4)$$

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $|AE|=|EC|$; следовательно, треугольник ACE равнобедренный и углы EAC и ECA равны. Отсюда следует, что треугольник AED также равнобедренный (так как $\widehat{CAD}=90^\circ$, $\widehat{DAE}=90^\circ-\widehat{EAC}$, $\widehat{ADE}=90^\circ-\widehat{ECA}$) и тем самым $|AE|=|ED|=|CE|$. Из (3) следует, что $S_{\text{сегм}} \leqslant (2/3)S_{AEC}$, где $S_{\text{сегм}}$ — площадь сегмента круга, закрашенного на рисунке 7. Прибавив к обеим частям этого неравенства площадь S_{AOC} треугольника OAC, мы получим

$$S_{\text{сект}} \leqslant \frac{2}{3} S_{AEC}+S_{OAC},$$

где $S_{\text{сект}}$ — площадь сектора OAC, откуда

$$S_{\text{сект}} \leqslant \frac{2}{3} S_{OAEC}+\frac{1}{3} S_{OAC},$$

где S_{OAEC} — площадь четырехугольника $OAEC$. Так как

$$S_{OAEC}=2\cdot S_{OEC}=2\cdot\frac{1}{2}|OC|\cdot\frac{1}{2}|CD|= \\ =\frac{1}{2}|OC|\cdot|DC|,$$

$$S_{OAC}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|AF|,$$

$$S_{\text{сект}}=\frac{1}{2}|OC|\cdot l_{AC},$$

из последнего неравенства следует нужное соотношение (4).

4°. Для завершения доказательства неравенства (1) сделаем следующее построение (рис. 8): пусть AA_1 — сторона правильного вписанного n-угольника, а LL_1 — сторона правильного описанного многоугольника с таким же числом сторон; проведем прямую AB и из точки A опустим перпендикуляр AK на касательную LL_1.

Так как $\widehat{AOC}=2\widehat{ABC}$ (одни из углов центральный, а второй опирается на эту же дугу), мы видим, что AD — биссектриса в треугольнике LAK, и по теореме о биссектрисе имеем $|AL|/|LD|=|AK|/|KD|$.

Но $(AK)\perp(KL)$, поэтому $|AK|<|AL|$ и из предыдущей пропорции получаем $|KD|<|LD|$. Так как $|AF|=|KC|$, получаем $|KD|=|CD|-$

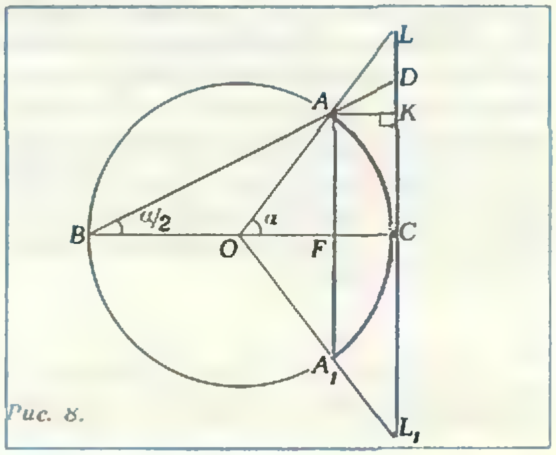


Рис. 8.

---

*) Нетрудно доказать, что если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы и $a_n \leqslant b_n$, $n=1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Таблица 1

n	p_n	q_n
3	2,59807621	5,19615242
6	3,00000000	3,46410161
12	3,10582854	3,21539030
24	3,13262861	3,15965994
48	3,13935020	3,14608621
96	3,14103195	3,14271459
192	3,14145247	3,14187304
384	3,14155760	3,14166274
768	3,14158389	3,14161017
1536	3,14159046	3,14159703
3072	3,14159210	3,14159374

Таблица 2

n	$(q_n-\pi)/(\pi-p_n)$
3	3,78012440
6	2,27772383
12	2,06345553
24	2,01552959
48	2,00386204
96	2,00096424
192	2,00024098
384	2,0006024
768	2,0000150
1536	2,00000376
3072	2,00000094

$-|AF|$. Кроме того, $|LD|=|CL|-|CD|$ и, следовательно,

$$|CD|-|AF|<|CL|-|CD|,$$
$$2|CD|<|AF|+|CL|,$$
$$2|CD|+|AF|<2|AF|+|CL|.$$

Используя теперь (4), получаем

$$l_{AC}<\frac{2}{3}|AF|+\frac{1}{3}|CL|.$$

Аналогично можно написать, что

$$l_{A_1C}<\frac{2}{3}|A_1F|+\frac{1}{3}|CL_1|$$

или, наконец,

$$l_{AC}+l_{A_1C}<\frac{2}{3}|AA_1|+\frac{1}{3}|LL_1|.$$

Умножив полученное неравенство на n, мы и получим неравенство (1).

Дальнейшее исследование основного неравенства

Нами установлено, что число π лежит в первой трети интервала $]p_n, q_n[$ при всех $n\geqslant 3$. Для того чтобы уточнить расположение числа π в этом новом интервале, рассмотрим отношение длин интервалов $]p_n, \pi[$ и $]p, q_n[$. Вычисления показывают *) (см. таблицы 1, 2), что это отношение длин, то есть значения дробей

$$(q_n-\pi)/(\pi-p_n),\ n=3,\ 6,\ 12,\ 24,$$

достаточно близки к 2. На основании этих вычислений мы с большой степенью уверенности можем предположить, что в действительности имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=2. \qquad (5)$$

Для доказательства соотношения (5) заметим, что (рис. 9)

$$p_n=n\cdot\sin\frac{\pi}{n},\quad q_n=n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},\quad n\geqslant 3,$$

и, следовательно,

$$\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{n\sin\frac{\pi}{n}-\pi\cos\frac{\pi}{n}}{\pi-n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Для анализа полученного выражения нам понадобятся неравенства *)

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\quad x>0. \qquad (6)$$

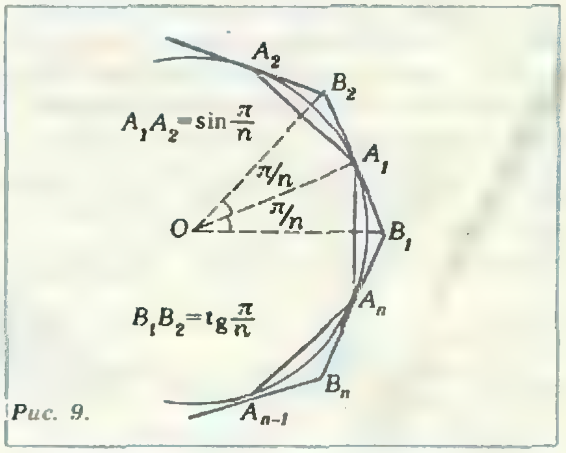
Чтобы доказать левое неравенство в (6), положим

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}.$$

Тогда имеем

$$g_1(x)=f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$

$$g_2(x)=g_1'(x)=-\sin x+x.$$



A_2
B_2
$A_1A_2=\sin\frac{\pi}{n}$
A_1
π/n
π/n
O
B_1
A_n
$B_1B_2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$
B_n
A_{n-1}

Рис. 9.

---

*) Для желающих провести вычисления на калькуляторе приведем приближенное равенство: $\pi\approx 3{,}14159265$.

*) Неравенство (6) значительно улучшает известное неравенство $\sin x<x$ при $x>0$; см. по этому поводу: «Квант», № 5, 1979, с. 5.

Таблица 3

n	$\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$
3	3,464101615137
6	3,154700538379
12	3,142349130544
24	3,141639056219
48	3,141595540408
96	3,141592833380
192	3,141592664850
384	3,141592654293
768	3,141592653633
1536	3,141592653592
3072	3,141592653589

Так как $\sin x<x$ при $x>0$, получим $g_2(x)>0$ при $x>0$. Тем самым функция $g_1(x)$ возрастает при $x>0$. Но $g_1(0)=0$ и, следовательно, $g_1(x)>0$ при $x>0$. Функция $g_1(x)$ является производной для функции $f(x)$, для которой также $f(0)=0$. Но при $x>0$ имеем $g_1(x)>0$, поэтому функция $f(x)$ также возрастает и, следовательно, принимает только положительные значения, то есть $f(x)>0$ при $x>0$, что и утверждалось.

Аналогично устанавливается правая часть неравенства (6), а также неравенства (докажите их самостоятельно!)

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24},\quad x>0. \qquad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) вытекают следующие приближенные формулы:

$$\sin\frac{\pi}{n}\approx\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{6n^3},$$

$$\cos\frac{\pi}{n}\approx 1-\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}\approx 2\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}\right)^{-1},$$

что и завершает доказательство соотношения (5), так как $\frac{\pi^2}{2n^2}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Равенство (5) позволяет сделать следующий качественный вывод: *число π, находясь при любом $n\geqslant 3$ в интервале $]p_n,\ \frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n[$, при всех достаточно больших значениях n ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.*

Формула Гюйгенса и ее эффективность

Архимед использовал для вычисления числа π приближенную формулу

$$\pi\approx p_n,\quad n\geqslant 3.$$

Гюйгенс в своей работе, в частности, получил другую приближенную формулу

$$\pi\approx\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n,\quad n\geqslant 3,$$

то есть взял в качестве приближения для числа π правую часть неравенства (1).

Бóльшую эффективность формулы Гюйгенса по сравнению с формулой Архимеда можно обнаружить непосредственными вычислениями на микрокалькуляторе, сравнив результаты таких вычислений, сведенных в таблицах 1, 2 и 3 (цветом на этих таблицах выделены точные цифры числа π). Отметим, что провести такие вычисления — увлекательная и непростая задача.

Можно сравнить эффективность формул Архимеда и Гюйгенса другим методом, не производя конкретных вычислений для p_n и q_n. Можно использовать так называемые *априорные оценки* для точности этих формул, то есть такие неравенства, которые позволяют оценить разности $\pi-p_n$ и $\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n-\pi$ для всех $n\geqslant 3$ заранее, без вычислений периметров. Ценность таких априорных оценок состоит также и в том, что они *позволяют, в частности, спланировать вычисления.* Задаваясь какой-то точностью вычислений для нужной величины (в нашем случае для числа π), мы можем из этих оценок найти те значения числа n, для которых нужная точность будет достигнута. Используя неравенства (6) и (7) и производя простейшие арифметические вычисления, нетрудно получить (мы оставляем это читателю в качестве упражнения!) следующие априорные оценки:

$$\frac{5}{n^2}<\pi-p_n<\frac{6}{n^2},\quad n\geqslant 3, \qquad (8)$$

и

$$\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n-\pi<\frac{64}{n^4},\quad n\geqslant 3. \qquad (9)$$

Непосредственно из этих неравенств

замечаем, что «скорость», с которой разность $\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n-\pi$ стремится к нулю, больше «скорости», с которой стремится к нулю разность $\pi-p_n$ при $n\to\infty$.

Для сравнения этих «скоростей» найдем те значения n, которые нам наверняка обеспечат точность вычисления числа π, например, равную 10^{-2}. Так как $\pi-p_n<\frac{6}{n^2}$, для вычисления по формуле Архимеда с этой точностью достаточно взять n таким, чтобы $6/n^2<10^{-2}$, то есть $n\geqslant 25$. Используя же формулу Гюйгенса, нам достаточно выбрать n таким, чтобы $64/n^4<10^{-2}$, то есть $n\geqslant 9$.

Как видно из разобранного примера, а также из неравенств (8) и (9), формула Гюйгенса быстрее приводит к заданной точности.

Две задачи

Мы помещаем здесь материал, который может стать началом небольшого математического исследования.

Задача 1. Пусть AC — хорда, $|BB_1|=2R$ — диаметр окружности, O — центр круга, $(BB_1)\perp(AC)$, B — середина дуги AC, E и F — середины дуг AB и BC соответственно (рис. 10). Докажите, что

а) $|AB|^2=|BD|\cdot|BB_1|$, $|BE|^2=|BG|\times|BB_1|$,

б) $|BD|<4\cdot|BG|$;

в) $|AC|<2\cdot|EF|$;

г) $S_{ABC}<4(S_{ABE}+S_{BFC})$;

д) площадь сегмента ABC больше $(4/3)S_{ABC}$;

е) $\pi R^2>\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n$,

где S_n — площадь правильного вписанного в окружность n-угольника (S_{2n} — соответственно $2n$-угольника);

ж) $2\pi R>\frac{4}{3}p_{2n}-\frac{1}{3}p_n$,

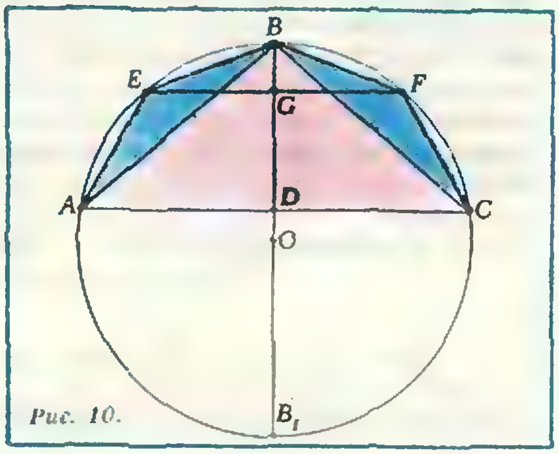


Рис. 10.

где p_n — периметр правильного вписанного в окружность n-угольника (p_{2n} — соответственно $2n$-угольника);

з) если $R=1/2$, то

$$\pi-\frac{1}{3}(4p_{2n}-p_n)<\frac{C}{n^4},$$

где C — некоторая постоянная, причем $3/5<C<3$.

Задача 2. Докажите, что все нижеперечисленные пределы существуют и найдите их:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\pi-p_n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n-\pi\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n^2-p_{n-1}p_{n+1}}{2p_n-p_{n-1}-p_{n+1}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\pi-\frac{4}{3}p_{2n}+\frac{1}{3}p_n\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi R^2-S_i(n)}{S_o(n)-\pi R^2}$,

где R — радиус круга; $S_i(n)$, $S_o(n)$ — площади *правильных вписанных и описанных* многоугольников.

В заключение отметим, что наблюдение Х. Гюйгенса о том, что число π, равное длине окружности радиуса 1/2, находится в два раза ближе к периметру вписанного в эту окружность правильного n-угольника, чем к периметру описанного вокруг этой окружности правильного n-угольника, было не так давно обобщено на случай произвольных выпуклых фигур, ограниченных гладкими (без изломов) кривыми. Именно, имеет место следующее утверждение.

Пусть L обозначает длину выпуклой замкнутой кривой без изломов, P_n — периметр n-угольника с максимальным периметром, вписанного в данную кривую и Q_n — периметр описанного вокруг данной кривой n-угольника с минимальным периметром (такие существуют!). Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n-L}{L-P_n}=2.$$

Доказательство этого утверждения и многие другие интересные результаты, связанные с ним, можно найти в книге [4].

Литература

1. Рудио Ф. *О квадратуре круга (Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт).* Матезис, 1911.
2. Веселовский И. Н. *Христиан Гюйгенс.* — М.: Учпедгиз, 1959.
3. Кымпан Ф. *История числа* π. — М.: Наука, 1971.
4. Тот Л. Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве.* — М.: Физматгиз, 1958.

Осмос

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Срезанная ветка растения начала вянуть. Но вот вы опускаете ее в воду, и по прошествии сравнительно небольшого времени листья расправляются, вновь становятся упругими, наливаются влагой.

Почему оживает ветка? Какие силы заставляют влагу проникать в растение и двигаться внутри него? Что удерживает воду в клетках и не дает ей выходить наружу? Каким образом клетка растения оказывается проницаемой для воды только в одном направлении: снаружи — вовнутрь?

Ученые очень давно пытались ответить на эти вопросы, но определенной ясности удалось добиться только в конце XIX века. Прошло еще некоторое время, и в лабораториях сумели смоделировать (хотя и очень грубо) эти природные явления. А уже в наши дни их с успехом заставили работать в самых разных областях науки и техники.

Кто и как обнаружил явление космоса

В 1748 году французский физик-экспериментатор Ж. А. Нолле, занимаясь изучением кипения жидкостей, столкнулся с неизвестным до тех пор явлением. В одном из своих опытов он герметично закрыл стакан со спиртом пленкой бычьего пузыря и погрузил его на дно большого сосуда с водой. Через несколько часов пузырь сильно раздулся — вода проникла в стакан и увеличила давление в нем. Нолле не прошел мимо этого удивительного факта и объяснил его следующим образом: «Животный пузырь может быть более проницаем для воды, чем для спирта; в таком случае скорость прохождения воды окажется больше скорости прохождения спирта».

Повторим опыт Нолле, но используем менее дефицитные материалы — бычий пузырь заменим листком целлофана, а спирт — водным раствором сахара.

На рисунке 1 изображен прибор, который изготовить несложно. В банку с чистой водой опущена широкая стеклянная трубка, затянутая снизу целлофаном. Целлофан закреплен так, чтобы вода не затекала внутрь трубки (герметизацию можно осуществить с помощью липкой ленты, резинового колечка, пластилина и т. п.). Сверху в толстую трубку через резиновую пробку входит тонкая стеклянная трубка.

В начале опыта в трубки наливают раствор сахара до тех пор, пока уровни жидкостей в трубках и в банке не совпадут (этот момент и показан на рисунке 1 штриховой линией). Через некоторое время можно заметить, что высота столба раствора увеличится — так же, как и в опыте Нолле, вода начнет свое движение через пленку, в нашем случае целлофановую.

Явление, при котором наблюдается одностороннее проникновение растворителя через полупроницаемую перегородку, отделяющую раствор от чистого растворителя, называется осмосом. Слово это имеет греческое происхождение и означает толчок, давление.

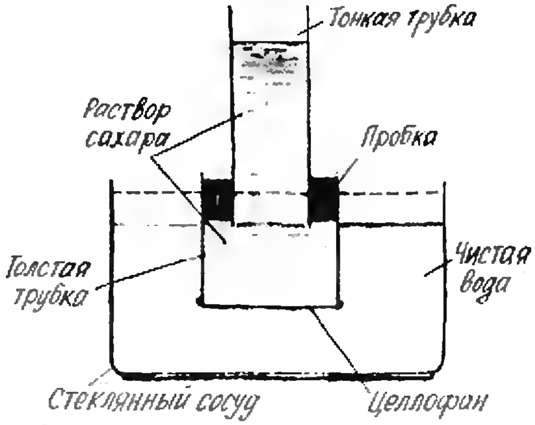


Рис. 1.

Повторив опыт французского физика, впервые обнаружившего осмос, попробуем разобраться в этом явлении.

Осмос и односторонняя диффузия

Вспомним, что́ происходит при растворении какого-нибудь вещества в растворителе. Молекулы вещества проникают в растворитель, а молекулы растворителя — в область, занятую раствором. Такая взаимная диффузия (проникновение) и приводит к выравниванию концентраций растворенного вещества и растворителя по всему объему.

Теперь представим себе ситуацию, при которой раствор и чистый растворитель разделены полупроницаемой перегородкой — она пропускает молекулы растворителя, но не пропускает молекулы растворенного вещества. Очевидно, что в этом случае выравнивание концентраций может происходить только за счет односторонней диффузии растворителя.

Именно так и происходит в поставленном нами опыте. Целлофан «непрозрачен» для молекул сахара, но «прозрачен» для молекул воды, поэтому при одинаковой высоте жидкостей (одинаковом давлении на перегородку) в банке и трубках в начальный момент через целлофан проходит больше молекул воды снизу вверх, чем сверху вниз. В результате уровень жидкости в банке начинает понижаться, а в трубках — повышаться. Другими словами можно сказать, что вода проникает в раствор под действием сил так называемого осмотического давления. Как только гидростатическое давление столба раствора уравновесит осмотическое давление, процесс прекратится. Высота этого столба и служит количественной мерой осмотического давления.

Полупроницаемые перегородки и «искусственная клетка»

После работы Нолле многие ученые — ботаники, химики, физики — стали ставить опыты и изучать явление осмоса. Для полупроницаемых перегородок они использовали самые различные природные материалы: кожицу от яйца, бычьи и свиные пузыри, перепонки и т. п.

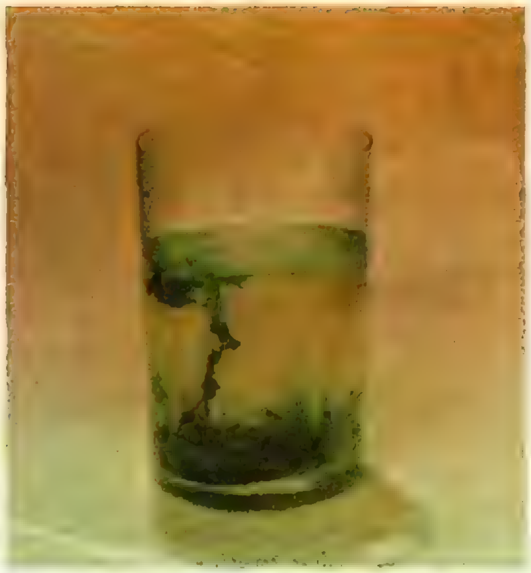


Рис. 2.

В середине XIX века (в 1866 г.) немецкий ученый М. Траубе изобрел способ получения искусственных полупроницаемых пленок из железисто-синеродистой меди ($Cu_2Fe(CN)_6$). Они были хорошо проницаемы для воды, но не пропускали большинство других веществ.

Мы можем убедиться в этом с помощью красивого эксперимента, который получил название «искусственная клетка». Не следует пугаться громоздкой химической формулы пленки. В домашних условиях ее можно получить, используя в качестве исходных веществ медный купорос ($CuSO_4$) и желтую кровяную соль ($K_4Fe(CN)_6$) — реактивы, продающиеся в магазинах фотоматериалов.

Нальем в пробирку слабый (приблизительно трехпроцентный) раствор медного купороса и бросим на дно кристаллик желтой кровяной соли. Кристаллик должен быть чистым — лучше всего его отколоть от большого кристалла перед самым опытом. В результате реакции

$$2CuSO_4 + K_4Fe(CN)_6 \rightarrow Cu_2Fe(CN)_6 + 2K_2SO_4$$

поверхность кристаллика покрывается полупроницаемой пленкой. Вода проникает через нее и вызывает рост «клетки». Оболочка «клетки» расширяется, а в тех местах, где пленка лопается под действием внутреннего давления и раствор частью выливается наружу, сразу же снова образуется полупроницаемая оболочка. Таким образом «клетка» постепенно принимает ветвистую форму. Можно сказать, что «искусственная клетка» ведет себя подобно живому организму.*)

Этот классический опыт требует терпения и аккуратности, красивые «растения» с первой попытки могут и не получиться.

В наши дни можно поставить более эффектный и доступный эксперимент, в котором искусственные «растения» выращиваются в водном растворе жидкого стекла (кремнекислый натрий Na_2SiO_3 — силикатный канцелярский клей). Удается вырастить целый «сад», если бросить в этот раствор кристаллы хлористого кобальта, сернокислого железа, хлористого никеля, сернокислого марганца и многих других веществ (которые читатель может подобрать самостоятельно).**)

Опыты с осмометром и создание теории осмоса

Прошло десять лет с тех пор, как Траубе получил первую искусственную полупроницаемую пленку, и в 1877 году немецкий ботаник В. Пфеффер создал прибор для измерения осмотического давления — осмометр. Конструкция, которой мы воспользовались, воспроизводя опыт Нолле (см. рис. 1), во многом повторяет идею Пфеффера.

С помощью осмометра ученый показал, что осмотическое давление зависит только от концентрации, но не от природы растворенного вещества (для слабых растворов), и увеличивается с повышением температуры. Его измерения показали также, что осмотическое давление может быть очень большим — достигать нескольких атмосфер (1 атм $\approx 10^5$ Па).

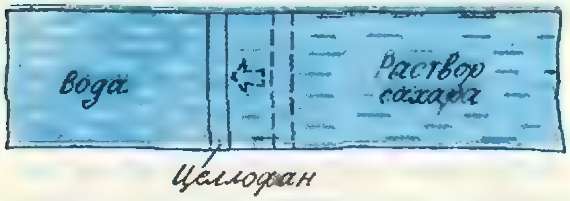


Рис. 3.

Так впервые были получены количественные данные об осмосе, которые помогли выдающемуся голландскому химику Я. Х. Вант-Гоффу создать теорию этого явления. В 1887 году ученый опубликовал работу, в которой показал, что молекулы растворенного вещества ведут себя в растворе так же, как молекулы идеального газа в сосуде. А растворитель в этом случае играет роль... пустоты!

Чтобы понять ход рассуждений Вант-Гоффа, поставим мысленный эксперимент. Пусть горизонтальный цилиндр, наполненный водой, разделен на две равные части целлофановой перегородкой, которая может смещаться без нарушения герметичности (рис. 3). Если в одной части цилиндра растворить сахар, то за счет диффузии чистой воды сквозь целлофан в область раствора давление там повысится и перегородка начнет смещаться. Объем раствора будет увеличиваться, объем чистой воды — соответственно уменьшаться. Но по результатам это эквивалентно предположению, что молекулы сахара в растворе оказывают дополнительное давление на перегородку. Растворенное вещество стремится расшириться и сдвинуть целлофан — точно так же, как газ стремится расшириться и сдвинуть поршень, отделяющий его от вакуума.

С помощью такого предположения Вант-Гоффу удалось объяснить все особенности осмоса, обнаруженные Пфеффером. Ученый вывел уравнение, полностью аналогичное уравнению состояния идеального газа:

$$\pi V = nRT,$$

где π — осмотическое давление, V — объем раствора, n — число молей растворенного вещества, R — универсальная газовая постоянная, T — температура. Было показано, что сходство между поведением растворенного вещества и газа существует только для очень разбавленного раствора, такого, в котором взаимодействием молекул растворенного вещества между собой можно пренебречь.

Теория Вант-Гоффа подтвердилась многими опытами. Ее автор стал первым лауреатом Нобелевской премии по химии (в 1901 году) за «открытие законов химической динамики и осмотического давления».

---

*) Описанный опыт требует от экспериментатора осторожности в обращении с реактивами. Нельзя, чтобы они попадали на руки, стол и т. п. Если все же это произойдет, надо их сразу же смыть большим количеством воды.

**) См. фотографии, воспроизведенные здесь на рисунке 2 и на первой странице обложки журнала.

Ответы на поставленные раньше вопросы

Мы начали эту статью с вопроса о том, какие силы заставляют влагу проникать в клетки растения и двигаться внутри него. Теперь можно на него ответить — в основном это силы, связанные с осмосом. Внешний слой цитоплазмы клетки представляет собой полупроницаемую оболочку, которая и позволяет клетке регулировать водный обмен с окружающей средой. Если, например, она потеряла влагу и концентрация солей в клеточном соке повышена, увеличивается проникновение воды внутрь клетки, пока сила осмотического давления не уравновесится силами упругости растянутой оболочки.

Чтобы убедиться в полупроницаемости естественных клеток, можно сконструировать осмометр, в котором роль перегородки играет ...морковь (рис. 4). Правда, такой прибор не будет очень точным, поскольку клетки моркови все же частично проницаемы для сахара.

Через огромную площадь листьев растений идет испарение влаги. Концентрация солей в древесном соке увеличивается, и осмотическое давление (наряду с другими причинами) заставляет воду подниматься вверх на десятки метров. При этом поднимается далеко не малое количество воды — литры в сутки для лиственных деревьев. Недаром «плачут» надрезанные стволы и ветки деревьев или стебли трав.

Осмос в наши дни

Уникальные свойства живых организмов, которые позволяют их клеткам избирательно поглощать и переносить различные вещества, стали предметом исследования многих ученых. Им удалось создать синтетические пленки — так называемые мембраны,— непроницаемые для одних веществ и «прозрачные» для других. После этого «совершенные фильтры» (или даже «волшебные фильтры», как все чаще называют их в популярной литературе) начали завоевывать самые разные области науки и техники.

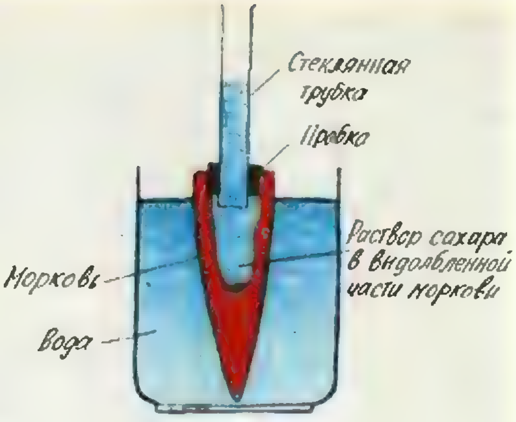


Рис. 4.

С их помощью очищают газы и нефтепродукты, опресняют морскую воду, обрабатывают молоко и фруктовые соки, производят лекарства и витамины и делают еще многое-многое другое. Приведем лишь несколько примеров.

Пожалуй, шире всего мембранная техника используется для получения пресной воды из морской. Здесь применяется способ «обратного осмоса» — под действием внешнего давления (большего, чем осмотическое) через полупроницаемую перегородку переносится чистая вода, освобождаясь от молекул растворенных в ней солей. Размеры и производительность таких установок колеблются в самых широких пределах — от переносного прибора, очищающего несколько десятков литров воды в сутки, до стационарных опреснителей, снабжающих водой столицу Саудовской Аравии (их производительность порядка 120 000 м^3 в сутки). При этом расходуется в десятки раз меньше энергии по сравнению с теми установками, в которых опреснение происходит за счет перегонки, то есть дистилляции воды.

Одно из самых первых и, возможно, самых важных применений мембран связано с медициной — полупроницаемая перегородка служит для очистки крови у больных в аппарате «искусственная почка». Сейчас мембрана «овладела» и другими весьма разнообразными медицинскими специальностями. Так, можно сказать, что наступает время накожных капсул-наклеек. Это мембранные системы, которые вводят лекарственные вещества в строго контролируемых количествах в кровеносные сосуды прямо через кожу, куда их приклеивают. Уже появились капсулы-наклейки с нитроглицерином для сердечных больных.

Многие крупные научно-производственные объединения занимаются совершенствованием мембранной технологии. Рождаются все новые и новые методы получения полупроницаемых пленок. Так, несколько лет назад их начали делать с помощью ... ускорителей тяжелых ядер. Под пучком таких ядер синтетические пленки превращаются в ... сито с аккуратными отверстиями диаметром в тысячные доли миллиметра.

Задача ближайшего будущего — создание полной количественной теории процессов, происходящих в «волшебных фильтрах», и, на ее основе, разработка мембран с заранее заданными свойствами.

Литература

1. Бергельсон Л. Д. *Мембраны, молекулы, клетки.*— М.: Наука, 1982.

2. Смирнов Н. Н. *Волшебные фильтры.*— Л.: Знание, 1984.

3. Фиалков Ю. Я. *Необычные свойства обычных растворов.* — М.: Педагогика, 1978.

Задача для исследования

Черно-белые области

Число черных и белых полей на шахматной доске одинаково. Если на плоскости расположено несколько прямых, то все части, на которые они делят плоскость, тоже можно раскрасить в два цвета — черный и белый — так, что части, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Однако при этом число черных и число белых областей не обязательно будет одинаковым.

Во сколько раз число черных областей может превосходить число белых? Такую задачу поставил в прошлом году на семинаре в МГУ член-корреспондент АН СССР И. В. Арнольд. (Эта задача связана с такой: на сколько число максимумов многочлена n-й степени от двух переменных может превосходить число его минимумов?)

Точнее, предполагается, что n прямых на плоскости находятся в общем положении (никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку), и требуется найти максимальное значение, которое принимает отношение числа черных и белых областей при этих условиях.

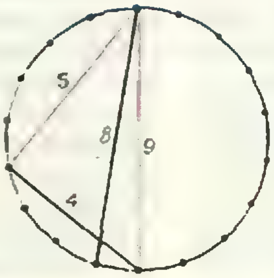
В задаче № 4 для 10 класса на последней Всесоюзной олимпиаде (см. с. 53) предлагалось доказать, что число черных областей не превышает удвоенного числа белых. На самом деле, как доказал молодой московский математик Ю. В. Чеканов, при возрастании числа прямых n максимальное отношение числа черных областей к числу белых стремится к 2; его доказательство опирается на некоторые соображения теории чисел и теории эллиптических кривых (линии уровня энергии системы с кубическим потенциалом), о которых рассказано в статье «Как сажать деревья» из книги «Математический цветник» (М., 1982, с. 117—129). Попробуйте найти точные значения максимального отношения числа черных и белых областей хотя бы для некоторых значений n ($n=4, 5, 6,\ldots$) и построить серию примеров, для которых при возрастании n это отношение остается больше некоторого числа, большего 1. (Точное значение максимального отношения для $n=2^k$ прямых нашел ленинградский математик П. Ю. Суворов; интересно отметить, что и Павел Суворов, и Юра Чеканов, как впрочем и Владимир Игоревич Арнольд, в прошлом — победители математических олимпиад.)

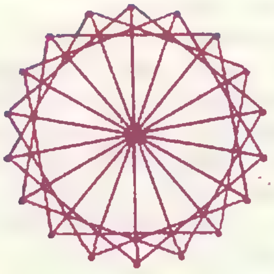
Близкий к задаче о черно-белых областях вопрос: какую наибольшую долю среди областей, на которые n прямых делят плоскость, могут составлять треугольники?

Интересны и аналогичные вопросы для черно-белой раскраски областей, на которые n плоскостей разбивают пространство.

Поправка

Мы публикуем здесь два рисунка, которые были отпечатаны с ошибками на с. 35 «Кванта» № 10 по вине типографии. Рисунок, помещенный здесь слева, должен был быть третьим сверху в левой колонке на с. 35 номера 10, а рисунок справа — последним (нижним) в этой же колонке. Отметим также, что ссылки на рисунки 3 и 4 в тексте следует поменять местами.





D (9,5)

→

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Инерция и инертность» предназначена восьмиклассникам, «Электрический диполь и его электрический момент» — девятиклассникам, «Лучи и волны» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Инерция и инертность

Эти два слова, близкие по звучанию, употребляются и в физике, и в обыденной жизни. Многие считают, что «инертность» и «инерция» как физические понятия равнозначны друг другу, что они — синонимы. Действительно ли это так?

Слова-синонимы можно заменять одно другим (например, «спешить» и «торопиться»), если не говорить о некоторых стилистических оттенках. Но как раз этим свойством взаимозаменяемости слова и понятия «инерция» и «инертность» не обладают. Первый закон Ньютона называют законом инерции, но никто не назовет его законом инертности. Существует термин «инерциальная система отсчета», но никто не скажет «инертная система отсчета». Можно сказать «движение по инерции», но нельзя — «движение по инертности». Число таких примеров можно и увеличить.

Но если слова неравнозначны, то это значит, что за ними кроются разные понятия. Попытка толковать слова «инерция» и «инертность» как выражающие два разных физических понятия сделана в учебнике «Физика 8» (глава 4).

Что такое инерция? В 1632 году вышла в свет книга Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой». В ней наряду с другими важными идеями, относящимися к механике, сформулировано и положение, получившее потом название закона инерции и ставшее основой динамики. Галилей пришел к нему с помощью очень простого рассуждения, основанного на опытах и наблюдениях.

Скатываясь по наклонной плоскости вниз, шарик непрерывно увеличивает свою скорость. Тот же шарик, двигаясь по наклонной плоскости вверх, скорость свою уменьшает. «А... что произошло бы с тем же движущимся телом на поверхности, которая не поднимается и не опускается?» — спрашивает Галилей. Ответ на этот вопрос и есть закон инерции в его первоначальной галилеевской формулировке: «Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то... движение его является равномерным и продолжалось бы постоянно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца». На ряде других примеров Галилей показывает, что движение по инерции должно быть не только равномерным, но еще и прямолинейным.

В 1687 году Ньютон обобщил это утверждение и дал ему такую формулировку: «Всякое тело продолжает сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, поскольку оно не принуждается приложенными силами изменять это состояние». Силу Ньютон определяет как «действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

Латинское слово «inertia» переводится на русский язык как «бездеятельность» и даже... «лень»! Тело, к которому не приложены силы, само по себе свою скорость не изменяет — ему как бы лень это делать. Поэтому закон Галилея—Ньютона (первый закон Ньютона) и получил название закона инерции.

Механическое движение — это явление природы. Значит, и частный случай движения — движение, при котором тело сохраняет свою скорость,— тоже явление, *явление инерции*. Именно такое толкование слову «инерция» и дается в учебнике «Физика 8». Этому соответствует и обиходное выражение «движение по инерции».

Известно, что всякое движение тела рассматривается относительно определенных систем отсчета. Системы отсчета, относительно которых может наблюдаться явление инерции, называются инерциальными. Утверждение о том, что такие системы отсчета существуют, по существу и составляет содержание закона инерции.

Что такое инертность? Что касается этого понятия, то о нем достаточно подробно говорится в § 22 «Физики 8». Когда два тела взаимодействуют между собой, то оба они получают ускорения, но ускорения, вообще говоря, различные: у одного меньше, чем у другого. О том теле, у которого ускорение меньше, можно сказать, что его движение больше похоже на движение по инерции (при котором ускорение равно нулю). Поэтому о таком теле говорят, что у него инертность больше, чем у его партнера по взаимодействию. Времени взаимодействия (оно одинаково для обоих тел) ему «не хватило», чтобы изменить свою скорость на столько же, на сколько это «сделало» другое тело. Более инертному телу требуется большее время на то, чтобы изменить скорость на заданную величину, чем телу менее инертному. Таким образом, *инертность — это свойство* тел. Количественно оно выражается массой — величиной, впервые введенной в механику Ньютоном.

Электрический диполь и его электрический момент

В большинстве своем нас окружают электрически нейтральные тела. Однако утверждать, что они не принимают никакого участия в электрических взаимодействиях, было бы неправильно. Достаточно вспомнить, например, что два заряда, помещенные в какой-нибудь диэлектрик, взаимодействуют слабее, чем в вакууме. Причиной тому — молекулы диэлектрика. Хотя диэлектрик состоит из нейтральных молекул, они способны создать собственное электрическое поле, которое и ослабляет электрическое взаимодействие зарядов.

Рассмотрим простейший пример электрически нейтральной системы — электрический диполь. Так называют совокупность двух равных по модулю, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов $\pm q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга (рис. 1).

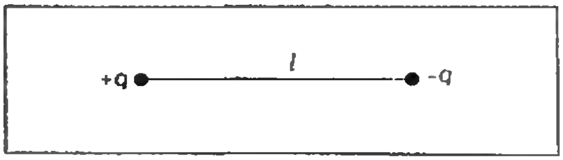


Рис. 1.

Поле диполя. Электрическое поле диполя можно найти в любой интересующей нас точке, опираясь на принцип суперпозиции («Физика 9», § 42). Сделаем это, например, для точки A (рис. 2). Напряженность поля в этой точке равна векторной сумме напряженностей, создаваемых точечными зарядами $+q$ и $-q$:

$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-},$$

или

$$E=E_{+}-E_{-}=\frac{kq}{(r-l/2)^2}-\frac{kq}{(r+l/2)^2}=\frac{2kqlr}{(r^2-l^2/4)^2},$$

где r — расстояние от середины диполя до точки A.

На больших расстояниях, когда $r \gg l$, получаем

$$E=\frac{2kql}{r^3}=p\cdot\frac{2k}{r^3},$$

где $p=ql$ называется электрическим моментом диполя. Говоря точнее, ql — это модуль дипольного электрического момента $\vec{p}$, а направлен этот вектор от отрицательного заряда к положительному. Электрический момент — основная характеристика диполя. В данном случае он определяет электрическое поле диполя на больших расстояниях от него.

Как видно из последнего выражения, вдали от диполя напряженность поля убывает с расстоянием как $1/r^3$, то есть быстрее, чем поле то-

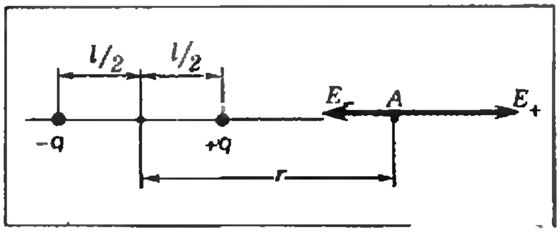


Рис. 2.

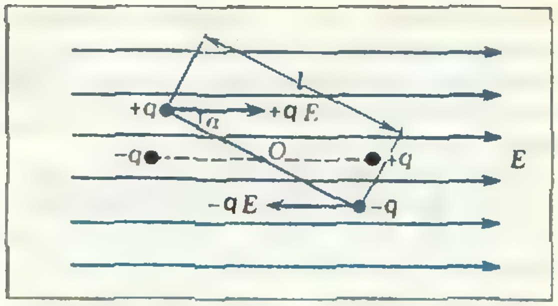


Рис. 3.

чечного заряда (пропорциональное $1/r^3$). Это справедливо не только для точек, которые лежат на линии, проходящей через заряды $+q$ и $-q$, но и для любых других точек, достаточно удаленных от диполя.

Диполь в электрическом поле. Посмотрим, как ведет себя диполь, попав во внешнее электрическое поле. Сначала — в однородное поле с напряженностью $\vec{E}$ (рис. 3). На заряды диполя действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы $+q\vec{E}$ и $-q\vec{E}$, которые стремятся развернуть диполь. Относительно оси, проходящей через центр диполя (точку O) и перпендикулярной плоскости чертежа, каждая сила создает вращающий момент, равный произведению модуля силы на соответствующее плечо (см. рис. 3): $qE \cdot l/2 \sin\alpha$.

Суммарный вращающий момент будет равен

$$M = 2qE\frac{l}{2}\sin\alpha = qlE\sin\alpha = p \cdot E\sin\alpha.$$

Таким образом, при заданных значениях E и α вращающий момент M определяется величиной дипольного момента p.

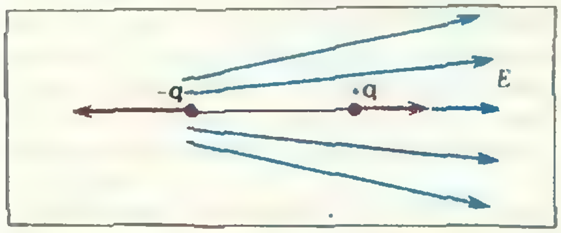


Рис. 4.

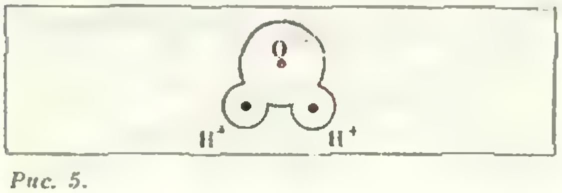


Рис. 5.

Под действием вращающего момента диполь будет поворачиваться, пока не займет положение, изображенное на рисунке 3 штриховой линией. В этом положении равны нулю как сумма сил, так и сумма моментов сил, действующих на диполь. Это означает, что диполь находится в равновесии. При этом вектор электрического момента диполя сонаправлен с вектором напряженности поля.

Следовательно, в однородном внешнем электрическом поле диполь поворачивается и располагается так, чтобы его дипольный момент был ориентирован по полю. Заметим, что такое положение является положением его устойчивого равновесия.

Пусть теперь диполь находится в неоднородном внешнем поле. Разумеется, и здесь возникает вращающий момент, разворачивающий диполь вдоль поля (рис. 4). Но в этом случае на заряды действуют неодинаковые по модулю силы, равнодействующая которых отлична от нуля. Поэтому диполь будет еще и перемещаться поступательно, втягиваясь в область более сильного поля (убедитесь в этом самостоятельно).

Диполи в природе. Молекулы многих веществ похожи на электрические диполи — равные по модулю положительные и отрицательные заряды в них разделены в пространстве. Примерами таких дипольных молекул могут служить, скажем, молекулы соляной кислоты HCl, состоящие из положительных ионов водорода (H^+) и отрицательных ионов хлора (Cl^-). Молекулы самого распространенного на земле вещества — воды H_2O состоят из двух положительных ионов водорода и одного отрицательного иона кислорода (рис. 5). Хотя это системы *не двух, а трех* зарядов, но ведут себя они как электрические диполи — центр положительного заряда находится на некотором расстоянии от центра отрицательного заряда, а суммарный положительный заряд равен по модулю суммарному отрицательному заряду.

Есть также вещества, у которых молекулы в обычных условиях диполями *не являются*, поскольку центры положительных и отрицательных зарядов в них совпадают. Но во внешнем электрическом поле заряды противоположных знаков несколько смещаются относительно друг друга и молекулы становятся электрическими диполями.

Заметим, что именно благодаря существованию диполей происходит такое важное физическое явление, как поляризация диэлектриков («Физика 9», § 47). Интересно, что весь поляризованный диэлектрик ведет себя подобно диполю. Движение такого «диполя» в неоднородном электрическом поле было исторически первым замеченным людьми электрическим явлением (вспомните притяжение наэлектризованным телом легких предметов).

Лучи и волны

В начале XIX века, благодаря работам по интерференции и дифракции света, окончательно утвердилось представление о том, что распространение света в пространстве представляет собой волновой процесс. Однако задолго до этого возникла, сформировалась и продолжает существовать и в наши дни так называемая геометрическая оптика. В этом разделе физики изучаются законы распространения света на основе представлений о световых лучах. Говорится о падающих, отраженных и преломленных лучах, о расходящихся, сходящихся и параллельных пучках лучей и т. п.

«Лучевая» картина света позволяет описать многое из того, что происходит, когда свет падает на зеркала, призмы или линзы («Физика 10», глава 6). При этом говорится *о ходе лучей*, например в призме, линзе или какой-то более сложной оптической системе.

Значит ли это, что через призмы и линзы проходят не световые волны, а лучи, что от зеркал отражаются не волны, а лучи? Что́ представляют собой световые лучи? Какова их физическая сущность?

Оказывается, за лучами не кроется никакой физической реальности. Световые лучи — это линии, вдоль которых распространяется световая волна. Все законы геометрической оптики могут быть получены из волновой теории как предельный случай, когда размеры препятствий на пути света много больше длины световой волны. Таким образом, использование понятия светового луча вовсе не обязательно для понимания того, что происходит при распространении света. Оно просто облегчает рассмотрение.

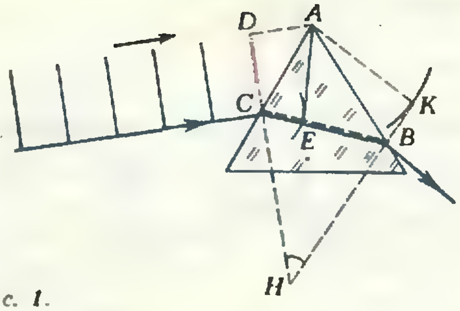


Рис. 1.

Убедимся в этом на нескольких конкретных примерах.

Призма. Пусть на стеклянную призму треугольного сечения, находящуюся в воздухе (рис. 1), падает плоская световая волна. В какой-то момент времени волновая поверхность (волновой фронт) достигнет в точке C поверхности призмы.

Начиная с этого момента, нижний край выбранного нами участка DC волновой поверхности (точнее, участка линии пересечения волновой поверхности с плоскостью чертежа) распространяется в стекле, в то время как верхний продолжает еще распространяться в воздухе. Когда верхний конец (точка D) достигнет призмы в точке A, сферическая волна, распространяющая от нижнего конца (точка C), дойдет до точки E, причем расстояние CE будет примерно в полтора раза меньше, чем DA, так как скорость света в стекле приблизительно в полтора раза меньше, чем в воздухе. Далее сферическая волна, центром которой является точка C, достигнет второй грани призмы в точке B. В свою очередь из точки A тоже будет распространяться сферическая волна. К тому моменту, когда волна в стекле распространится на расстояние EB, волна из A пройдет больший путь (скорость света в воздухе больше, чем в стекле!). Таким образом, новым фронтом волны по другую сторону призмы (вернее, участком линии его пересечения с плоскостью чертежа) станет отрезок BK. Значит, роль призмы состоит в том, что фронт CD све-

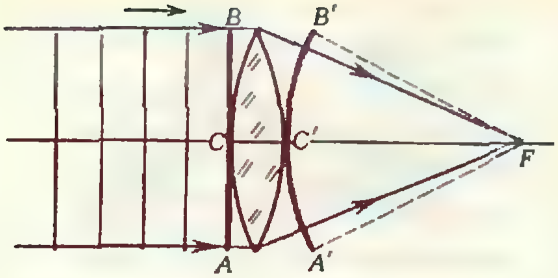


Рис. 2.

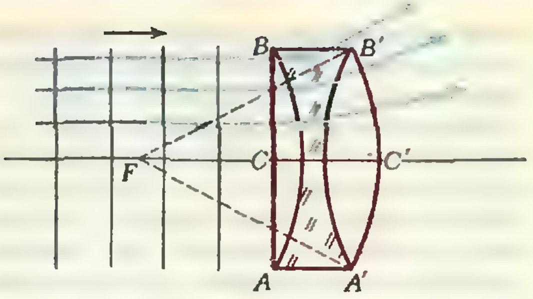


Рис. 3.

товой волны преобразовался в BK. И произошло это потому, что скорость света в стекле меньше, чем в воздухе.

Такова волновая картина прохождения света через призму. Для сравнения на этом же рисунке синим цветом показана также и обычно приводимая картина хода луча в призме (см., например, § 56 «Физики 10»). Из рисунка 1 видно, что лучи — это просто прямые, перпендикулярные волновым поверхностям (волновым фронтам). «Преломление лучей света» в действительности означает поворот фронта волны. Угол поворота волнового фронта — это $\widehat{CHB}$. Таков же, очевидно, и угол преломления лучей.

Как видно, «лучевая» картина проще, чем «волновая», поэтому обычно ею и пользуются.

Собирающая линза. Пусть на двояковыпуклую стеклянную линзу, находящуюся в воздухе, падает плоская световая волна (рис. 2). С того момента, когда волновая поверхность (точнее, выбранная ее часть) коснется своей серединой первой поверхности линзы в точке C, путь всех ее точек (кроме середины) проходит частью в воздухе, а частью в стекле. По мере удаления от середины волнового фронта к его краям доля «стеклянной» части пути уменьшается, поэтому, когда середина волны достигнет в точке C' второй поверхности линзы, все остальные участки волнового фронта продвинутся на большее расстояние (самое большое расстояние пройдут крайние точки). В результате получается, что по выходе из линзы плоский волновой фронт ACB превратится в сферический $A'C'B'$. Центр этой сферической волны — точка F — называется, как известно, фокусом линзы. Понятно, что если, наоборот, сферическая волна выходит из точечного источника, расположенного в фокусе линзы, то после линзы она преобразуется в плоскую волну.

Синим цветом на рисунке 2 показан ход лучей в собирающей линзе.

Рассеивающая линза. Рисунок 3 иллюстрирует случай, когда плоская волна падает на двояковогнутую стеклянную линзу, находящуюся в воздухе. После того как волновая поверхность коснется в точках A и B линзы, крайние участки будут отставать от других частей волнового фронта (так как проходят в стекле, где скорость света меньше, чем в воздухе). В результате плоская волна ACB превратится в сферическую $A'C'B'$. Но центр этой сферической волны (точка F) находится по ту же сторону от линзы, откуда пришла плоская волна. Точку F тоже называют фокусом линзы, но фокусом мнимым, так как преломленный свет сюда реально не попадает. Синим цветом и здесь показан соответствующий ход лучей.

* * *

Читатель без труда сумеет сам построить волновые картины прохождения света через линзы, когда на них падают не плоские, а сферические волны. После прохождения линзы они преобразуются в сферические же волны, но с другими радиусами. Из таких картин можно получить и формулу линзы, такую же, разумеется, как и из геометрической оптики.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Вычислите сумму

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1985,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1986,$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=1987.$$

3. В описанном четырехугольнике диагонали пересекаются в центре круга. Докажите, что это ромб.

4. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов утра к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошел навстречу автомобилю. Встретив машину, он сел в нее и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Определите показания часов в момент встречи инженера с автомобилем.

5. Известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Девятый класс

6. Докажите, что

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102}<\frac{1}{17}.$$

7. a, b — иррациональные числа, r — рациональное число. Какие из следующих чисел могут оказаться рациональными: $a+b$, $a+r$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{r}$, ab, ar, $\sqrt{a+r}$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{a+\sqrt{r}}$, $\sqrt{r+\sqrt{a}}$?

8. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab}$ при положительных a, b.

9. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

10. Точки A_1, A_2, ..., A_8 разбивают окружность диаметра 1 на 8 конгруэнтных дуг; B — точка на той же окружности. Найдите длину вектора $\vec{BA}_1+\vec{BA}_2+\ldots+\vec{BA}_8$.

Десятый класс

11. x — действительное число. Докажите, что

$$2^{\sin x}+2^{\cos x}>2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

12. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sqrt[3]{3})^x=x?$$

13. В пирамиде $ABCD$ ребра AD и BC взаимно перпендикулярны. Докажите, что $|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $|AB|=12$, $|AD|=12$, $|AA_1|=30$ точка M лежит на грани $ABCD$, причем $|MA|=|MB|=\sqrt{37}$. Точка N, лежащая на противоположной грани $A_1B_1C_1D_1$, симметрична M относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда. Найдите длину кратчайшего пути, проходящего по поверхности параллелепипеда и соединяющего точки M и N.

Публикацию подготовил *Л. Д. Курляндчик*

Информация

Турнир имени М. В. Ломоносова

В воскресенье 13 октября в девяти вузах столицы (МАИ, МАТИ, МГПИ, МИНХиГП, МИСИ, МИСиС, МИХМ, МИЭМ, МЭИ) состоялся традиционный Турнир имени М. В. Ломоносова. Это своеобразное соревнование, проводившееся уже в восьмой раз, в основном силами студентов-энтузиастов из перечисленных вузов, собрало в этом году полторы тысячи участников. Особенности Турнира Ломоносова — массовость и разнообразие конкурсов. В турнире могли участвовать все школьники 6—9 классов и учащиеся I курсов ПТУ (впрочем, в этом году пришло много пятиклассников — они тоже были допущены). Участникам предлагалось, на выбор, попробовать свои силы в нескольких соревнованиях — по математике, лингвистике, биологии, психологии, химии, физике (теоретической и экспериментальной), математическим играм и разным техническим конкурсам (отвечающим специфике вуза-хозяина).

Получив на инструктаже свой «путевой листок», каждый участник дальше сам определял свой маршрут: с какого конкурса начать, к какому перейти (или просто пойти домой?), долго ли оставаться и т. д. В этом году на турнире преобладали всеядные «многоборцы», успевшие за 4—5 часов поучаствовать в трех или даже четырех совсем разных конкурсах, хотя было и много «специалистов» (физики, математики), пытавшихся отличиться на соревнованиях по любимому предмету.

Результаты турнира централизованно обрабатывались на ЭВМ. Победители в многоборье и особо отличившиеся в отдельных конкурсах были награждены дипломами. Всем же активным участникам были разосланы приглашения в различные кружки.

Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна

(к 80-летию со времени их опубликования)

В 1905 году в немецком физическом журнале "Annalen der Physik" были напечатаны три статьи, которые, без преувеличения можно сказать, сыграли определяющую роль во всем последующем развитии физической науки. Автором этих статей был молодой (ему тогда было двадцать шесть лет) и мало кому известный Альберт Эйнштейн, занимавший скромную должность эксперта Швейцарского Бюро Патентов в городе Берне.

Мы здесь очень кратко расскажем об этих работах в том порядке, в каком они были опубликованы.

Первая из них поступила в редакцию журнала 18 марта 1905 года и была озаглавлена «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Заметим, что слово «эвристический», имеющее древнегреческое происхождение, означает приблизительно следующее: «облегчающий поиски, помогающий постигнуть истину» (вспомните восклицание «эврика!» — нашел! — в легенде об Архимеде). В этой работе было развито новое, квантовое представление о природе света.

Во второй половине прошлого века английский физик Дж. К. Максвелл создал теорию электрических и магнитных явлений, в которой, в частности, показал, что свет представляет собой электромагнитные волны. Согласно этой теории, поле электромагнитной волны с заданной частотой существует во всем пространстве, энергия поля распределена по всему пространству непрерывно и может изменяться также непрерывным образом.

Волновая теория света получила многочисленные подтверждения на опыте и считалась твердо установленной. Однако она не могла объяснить некоторые физические явления и в первую очередь равновесное тепловое излучение. В 1900 году немецкий физик М. Планк вывел формулу, которая прекрасно описывала спектр свечения нагретого тела. Для обоснования формулы Планк предположил, что энергия излучения атомов меняется не непрерывно, а скачками, каждый раз убывая или возрастая на величину, пропорциональную частоте волны. Так в физику вошло дискретное (то есть скачкообразное, не непрерывное) изменение энергии.

А. Эйнштейн в своей работе утверждал, что закономерность, найденная Планком, является всеобщей, далеко выходящей за рамки проблемы теплового излучения. Он указал на целый класс явлений (тепловое излучение, фотолюминесценция, фотоэффект), которые «лучше объясняются предположением, что энергия света распределяется по пространству дискретно. Согласно этому сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком».

Эйнштейн привел также возможные физические опыты, которые могли бы послужить для проверки высказанной им точки зрения. Одним из них был опыт по выбиванию светом электронов с поверхности металла (фотоэффект). Эйнштейн на основе высказанных им представлений сформулировал закон, который теперь называют законом Эйнштейна для фотоэффекта.

Шестнадцать лет спустя, в 1921 году, А. Эйнштейну была присуждена Нобелевская премия «за важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта». Но значение работы 1905 года далеко выходит за рамки теоретического объяснения фотоэффекта, выдвигая совершенно новое понимание природы света и вообще электромагнитного поля. Эта работа была важнейшим шагом в развитии квантовой физики.

Следующая статья А. Эйнштейна носила название «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты». Она поступила в редакцию журнала 11 мая 1905 года, меньше чем через два месяца после работы о квантах света. В ней по существу была построена теория броуновского движения (хотя сам Эйнштейн в этой работе заметил, что доступные ему данные относительно этого явления не настолько точны, чтобы составить о нем определенное мнение).

В 1827 году английский ботаник Р. Броун обнаружил, что мелкие частицы, взвешенные в жидкости, находятся в постоянном и беспорядочном непрекращающемся движении. Дальнейшие многочисленные экспериментальные исследования показали, что это движение не связано с какими-либо внешними влияниями и что оживленность его повышается с ростом температуры и зависит от размера частиц и от вязкости жидкости.

Эйнштейн рассмотрел этот вопрос теоретически.

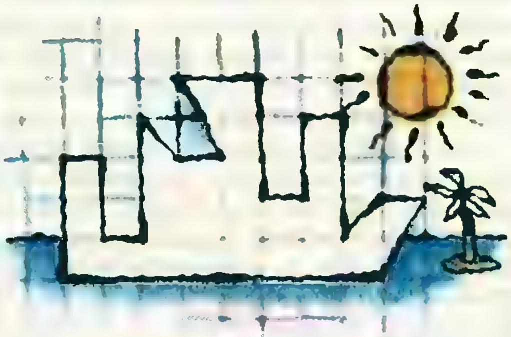
Молекулы жидкости находятся в тепловом движении, и поэтому частица, взвешенная в жидкости, все время с ними соударяется. В силу случайных причин число молекул, ударяющих частицу с одной стороны, может оказаться больше, чем число

(Окончание см. на с. 30)

Задачи

1. К человеку, стоящему на тротуаре, подъехал милиционер. «Вы не обратили внимания на номер только что проехавшего синего самосвала?» «Конечно, обратил. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а если из первого вычесть второе, то получится сумма цифр одного из них.» «Спасибо», — сказал милиционер, — и записал номер в блокнот. Какой номер он записал?

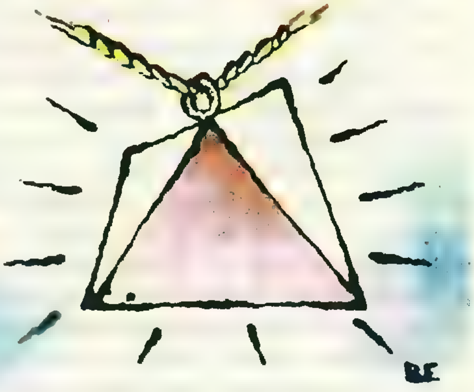
2. Разрежьте «кораблик» (см. рисунок) на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



3. На столе лежала стопка одинаковых книг. Я осторожно потянул одну из книг в середине стопки. Вместе с ней «поехали» и лежащие на ней книги. Книги же, лежащие ниже, остались на месте. Почему?

4. В выражении 19 * 83 вместо звездочки поставьте цифру так, чтобы полученное число стало точным кубом.

5. Концы одной стороны четырехугольника соединили с серединой его противоположной стороны (см. рисунок). Докажите, что если площадь получившегося треугольника равна половине площади четырехугольника, то этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.



Эти задачи нам предложили: *А. А. Кордюк, ученик 4 класса из Киева Руслан Вьюн, А. П. Савин, Н. И. Бовсуновский, В. В. Произволов.*

Отгадать день рождения

Член-корреспондент
Академии педагогических наук СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Небольшая заметка с таким названием: «Отгадать день рождения», — есть в книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра». В этой заметке описывается некий числовой фокус. Вот в чем он состоит.

Представьте себе, что к вам пришел папин знакомый, дату рождения которого вы не знаете. Предложите ему умножить число его рождения на 12, номер месяца, в котором он родился, умножить на 31, а затем сложить полученные произведения. Пусть он скажет вам, что у него получилось. Оказывается, зная сумму этих двух произведений, можно узнать оба нужных числа (число и месяц рождения). Как выполняется этот фокус, вы можете посмотреть в книге Я. И. Перельмана. Сейчас мы расскажем вам другой способ выполнения того же фокуса; этот способ предложил Педро дель Риско Падрон — кубинский читатель книги Я. И. Перельмана.

Обозначим через x число рождения пришедшего знакомого, а через y — номер месяца его рождения. Знакомый сообщает вам сумму $12x+31y$. Рассмотрим два случая: а) y четно; б) y нечетно.

а) y четно, то есть $y=2k$. Тогда

$$12x+31y=12x+62k=$$
$$=12(x+5k)+2k=12(x+5k)+y.$$

Отсюда видно, что число $12x+31y$ имеет такой же остаток от деления на 12 (обозначим его через r), как число y. Число y вообще принимает значения от 1 до 12, а в нашем случае (y четно) y может быть равно 2, 4, 6, 8, 10 или 12. Понятно, что $y=12$, когда $r=0$. В случае же, если $r\neq 0$ и r четно, мы имеем $y=r$.

б) y нечетно, то есть $y=2k+1$. Тогда

$$12x+31y=12x+31(2k+1)=$$
$$=12(x+5k+2)+2k+7=$$
$$=12(x+5k+2)+y+6,$$

откуда видно, что число $12x+31y$ имеет такой же остаток r от деления на 12, как число $y+6$, то есть y либо совпадает с числом $r-6$, либо отличается от него на 12. Значит, если r нечетно и $r>6$, то $y=r-6$; если же r нечетно и $r<6$, то $r-6$ отрицательно, и потому $y=(r-6)+12=r+6$.

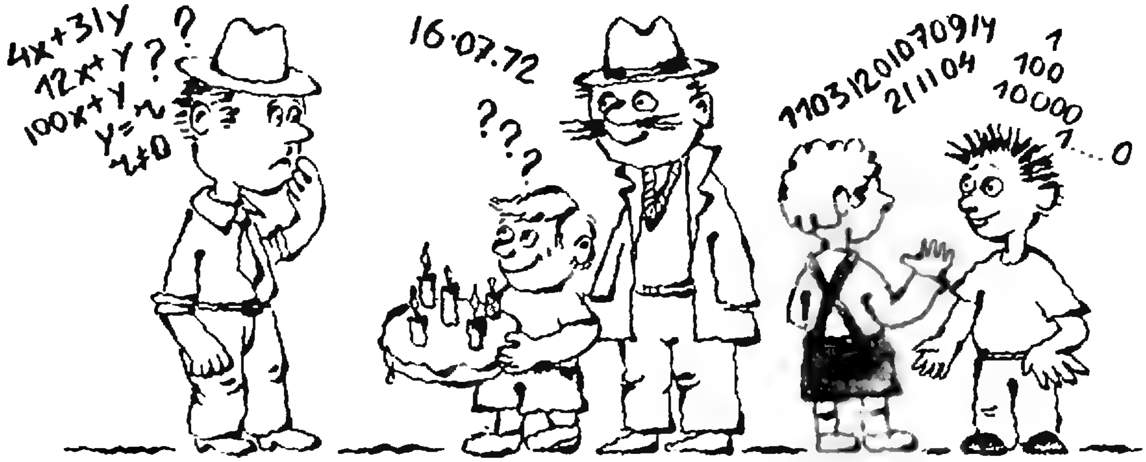
Отсюда и получается тот способ выполнения фокуса, который предлагает Педро дель Риско Падрон:

1) если r четно, но $r\neq 0$, то $y=r$;
2) если $r=0$, то $y=12$;
3) если r нечетно и $r>6$, то $y=r-6$;
4) если r нечетно и $r<6$, то $y=r+6$.

Узнав y и вычислив произведение $31y$, вы вычитаете это произведение из сообщенного вам числа $12x+31y$, находите число $12x$, после чего, разделив результат на 12, находите x. Дата рождения определена.

Теперь взглянем на этот фокус с другой точки зрения. Год содержит 365 или 366 дней, и любой из них мог оказаться днем рождения папиного знакомого. Таким образом, «объем» возможной сообщаемой информации равен 366. Если бы вместо выражения $12x+31y$ было взято другое выражение, причем такое, что для двух *различных* дней года выражение получало бы *одинаковые* значения, то такое выражение было бы для выполнения фокуса непригодно. Получив это значение, вы не смогли бы определить, на какой из двух дней, соответствующих этому значению выражения, приходится день рождения. Выражение $12x+31y$ было взято потому, что для всех 366 дней года (високосного) оно принимает различные числовые значения.

Но $12x+31y$ — не единственное выражение, обладающее таким свойством. Этим же свойством обладают выражения $12x+35y$, $12x+37y$, $2x+31y$, $3x+31y$, $4x+31y$, $12x+7y$, $12x+5y$, $12x+y$ и другие. Например, взяв выражение $12x+y$, можно предложить упрощенный вариант этого фокуса: умножить число рождения на 12, прибавить номер месяца рождения и сообщить результат. А «алгоритм» выполнения фокуса в таком



упрощенном варианте будет совсем несложен: надо определить остаток r от деления сообщенного числа $12x+y$ на 12, и тогда при $r \neq 0$ имеем $y=r$, а при $r=0$ будет $y=12$. Правда, такой упрощенный вариант фокуса легче разгадать.

Наконец, можно взять выражение $100x+y$, и тогда дата рождения определяется совсем просто и неинтересно («тривиально», как говорят математики): число сотен равно числу рождения, а последние две цифры дают месяц рождения. Например, для даты 16 июля (то есть $x=16$, $y=7$) имеем $100x+y=1607$; теперь достаточно поставить точку, то есть написать 16.07, и получается способ записи даты, часто используемый на документах (только там добавляют еще год: 16.07.72).

Задачи

1. Проделайте сами с собой описанный фокус и «отгадайте» день своего рождения, используя выражения: а) $100x+y$; б) $12x+y$; в) $12x+31y$.

2. Докажите, что если натуральные числа a, b удовлетворяют неравенству $31a+12b \leqslant 366$, то выражение $ax+by$ не позволяет проводить описанный фокус.

3. Докажите, что если натуральные числа a, b удовлетворяют неравенствам $a<12$ и $b<31$, то выражение $ax+by$ не позволяет проводить указанный фокус.

4. Докажите, что каждое из выражений а) $x+31y$, б) $16x+31y$; в) $12x+7y$ пригодно для проведения описанного фокуса.

От редакции. В связи с этой заметкой уместно вспомнить еще один интересный «фокус». Это — изящная задача, придуманная много лет назад Д. Б. Фуксом. Правда, в этой задаче не идет речь о днях рождения и вообще о датах, но тоже требуется угадать несколько чисел.

Двое приятелей играют в угадывание чисел. Первый задумывает 10 натуральных чисел (мы обозначим их через $x_1, \ldots, x_{10}$). Второй пытается угадать их, задавая вопросы. В качестве вопроса он предлагает первому свои 10 натуральных чисел — обозначим их через $a_1, \ldots, a_{10}$. Первый в ответ сообщает ему, чему равно выражение $a_1x_1+\ldots+a_{10}x_{10}$. Услышав ответ, второй участник игры задает следующий вопрос — аналогичный первому, но с другими $a_1, \ldots, a_{10}$. И так далее. За какое наименьшее число вопросов можно угадать все числа $x_1, \ldots, x_{10}$?

Эта задача в свое время была придумана для Московской математической олимпиады, но на нее не попала: члены Оргкомитета олимпиады не смогли удержаться от того, чтобы предлагать ее сначала друг другу, потом — своим знакомым, — и задача стала широко известной. Ответ в ней гораздо меньше, чем это может показаться с первого взгляда: оказывается, что вопросов требуется всего два (!).

Для первого вопроса возьмем $a_1=\ldots=a_{10}=1$. В ответ на этот вопрос мы получаем сумму $x_1+\ldots+x_{10}$, которая заведомо *больше* каждого из $x_1, \ldots, x_{10}$ (только это и важно). Возьмем теперь такое m, что число, записываемое как единица с m нулями, не меньше ответа на первый вопрос, и зададим следующий вопрос:

$$a_1=1,\ a_2=1\underbrace{0\ldots0}_{m},\ a_3=1\underbrace{0\ldots0}_{2m},\ a_4=1\underbrace{0\ldots0}_{3m},\ \ldots,\ a_{10}=1\underbrace{0\ldots0}_{9m}.$$

В ответ мы получим длинное число, у которого в последних m разрядах будет записано первое задуманное число (к которому в начале приписано, быть может, несколько нулей), в следующих с конца

m разрядах — второе число, затем — третье и т. д.

Пример: $x_1=4$, $x_2=11$, $x_3=21$, $x_4=14$, $x_5=9$, $x_6=7$, $x_7=1$, $x_8=12$, $x_9=3$, $x_{10}=11$. Ответ на первый вопрос: 90. Второй вопрос: $a_1=1$, $a_2=100$, $a_3=10\,000, \ldots, a_{10}=\underbrace{10\ldots0}_{18}$.

Ответ на второй вопрос: 110312010709142111 04. Беря с конца по две цифры, получаем задуманные числа: 04, 11, 21, ...

Замечание. Задавая первый вопрос, вы можете удивить слушателей, сказав, что если они плохо считают, то пусть считают с ошибкой, лишь бы ошибка была не больше чем вдвое (или не больше чем в 10 раз). Только не забудьте учесть возможную ошибку при определении m. Еще вы можете сказать, что вам все равно, сколько чисел угадывать — 10, 100 или 1000, потребуются те же два вопроса, но слушателям придется дольше считать.

Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна

(Начало см. на с. 26)

молекул, ударяющих ее с противоположной стороны, и тогда на частицу действует некоторая сила, вызывающая ее перемещение. Направление этой силы меняется случайным образом, поэтому случайным образом изменяется и направление перемещения частицы. Эйнштейн разработал простой, но очень мощный метод, позволивший «проследить» за частицей, совершающей такого рода движение.

Эта работа Эйнштейна явилась одним из наиболее убедительных подтверждений молекулярно-кинетической теории.

Третья по порядку, но не по важности, работа Эйнштейна, опубликованная в том же журнале "Annalen der Physik" и в том же 1905 году, называется «К электродинамике движущихся тел». Статья поступила в редакцию 30 июня 1905 года. В этой работе дано практически законченное изложение специальной теории относительности. (Впрочем, в том же году и в том же журнале была напечатана еще одна короткая и важная работа Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?», посвященная выводу знаменитого соотношения между массой тела и его энергией.)

О теории относительности трудно рассказать кратко, а подробный рассказ невозможен из-за ограниченного объема этой статьи. Скажем лишь, что с появлением этой теории связан коренной пересмотр основных понятий, которыми пользуется физика, таких, как время, пространство, длина, длительность, энергия, количество движения, масса и т. д. По своему значению для естествознания появление теории относительности можно сравнить с появлением на два столетия ранее ньютоновской механики.

Кажется невероятным, что один человек смог за год сделать три столь значительные по своим последствиям работы в трех различных областях физики (квантовая теория излучения, молекулярно-кинетическая теория, теория относительности).

Следует сказать о том, что хотя мы теперь даем высочайшую оценку работам Эйнштейна 1905 года, тогда не все и не сразу поняли их значение. В частности, основоположник квантовой физики Макс Планк долго не соглашался с теми представлениями о природе света, которые были высказаны Эйнштейном в первой из трех знаменитых работ 1905 года. Однако некоторые крупнейшие физики того времени признали их сразу же. Среди них была и Мария Кюри:

«Я искренне восхищалась работами, которые были опубликованы господином Эйнштейном по вопросам современной теоретической физики. Думаю, впрочем, что физико-математики признают, что это работы самого высокого класса. В Брюсселе на научном конгрессе, в котором участвовал и господин Эйнштейн, я могла оценить ясность его ума, осведомленность и глубину знаний! Нам известно, что господин Эйнштейн еще очень молод, но это и дает нам право возлагать на него самые большие надежды, видеть в нем одного из крупнейших теоретиков будущего».

Эти надежды оправдались в полной мере.

Б. М. Болотовский

задачник кванта

Задачи

М951—М955; Ф963—Ф967

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М951, М952» или «Ф963». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М951. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1. Докажите, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.

Е. Хорват (Венгрия)

М952. Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x: $\{x\}=x-[x]$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

а) Приведите пример числа a такого, что

$$\{a\}+\{1/a\}=1.$$

б) Докажите, что такое число a не может быть рациональным.

И. Варга (Румыния)

М953. На плоскости даны 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проводятся все 15 прямых, соединяющих попарно эти точки. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются три из этих 15 прямых?

В. В. Прасолов

М954. а) В треугольник вписан прямоугольник со сторонами a и b так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника. Пусть a_1 и b_1 — длины проекций треугольника на прямые, параллельные сторонам a и b прямоугольника. Докажите равенство

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=1.$$

б) В произвольный тетраэдр вписан прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c так, что все его вершины лежат на поверхности тетраэдра. Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины проекций тетраэдра на прямые, параллельные ребрам a, b и c. Докажите равенство

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=1.$$

В. Н. Дубровский

М955.* За круглым столом сидят n участников «безумного чаепития»*). Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наимень-

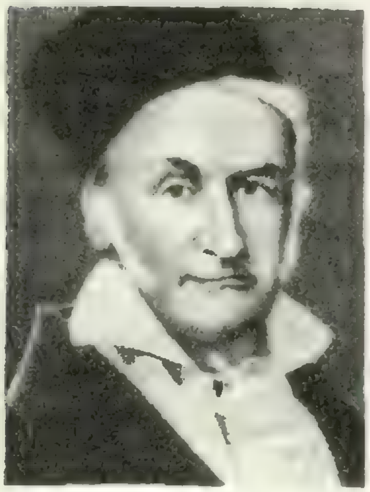
(Окончание см. на с. 34)

---

*) Из сказки Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес»

«Не считать ничего сделанным, если кое-что осталось сделать»

Карл Фридрих Гаусс



Великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777—1855) современники называли «королем математики». Его математический талант пробудился очень рано. Уже девятнадцатилетним студентом он решил проблему, которая стояла 2000 лет, со времен древнегреческих геометров. Он указал все такие числа n, для которых можно построить правильный n-угольник (с помощью циркуля и линейки). В частности, он указал способ построения правильного семнадцатиугольника. А в 22 года он доказал теорему, получившую название «Основной теоремы алгебры» (о существовании комплексного корня у любого многочлена).

Гаусс внес огромный вклад во многие области математики. Кроме того, он много и успешно занимался геодезией и физикой.

Подробнее о К. Гауссе и его работах читайте в нашем журнале (№ 1, 1972; № 1, 1973; № 8, 1977).

О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Треугольник — простейшая плоская фигура. Три вершины и три стороны. Но изучение треугольника породило целую науку — тригонометрию, в которой метрические свойства треугольника выражаются через функции его углов. Эта наука возникла из практических потребностей при измерениях земельных участков, составлении карт местности, конструировании машин и механизмов.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах мы находим в египетских папирусах более чем 4000-летней давности. В частности, там упоминается способ нахождения площади равнобедренного треугольника, дающий хорошее приближение при малых углах при вершине, противоположной основанию. Эта площадь находится как произведение половины основания на боковую сторону.

Через 2000 лет в Древней Греции изучение свойств треугольника достигает высокого уровня — достаточно вспомнить теорему Пифагора и формулу Герона.

После длительного периода упадка культуры и, в частности, математики, с XV—XVI веков началось Возрождение. Вновь появилось огромное количество исследований свойств треугольника, особенно в XVIII веке. Эти исследования составили большой раздел планиметрии, получивший название «Новая геометрия треугольника».

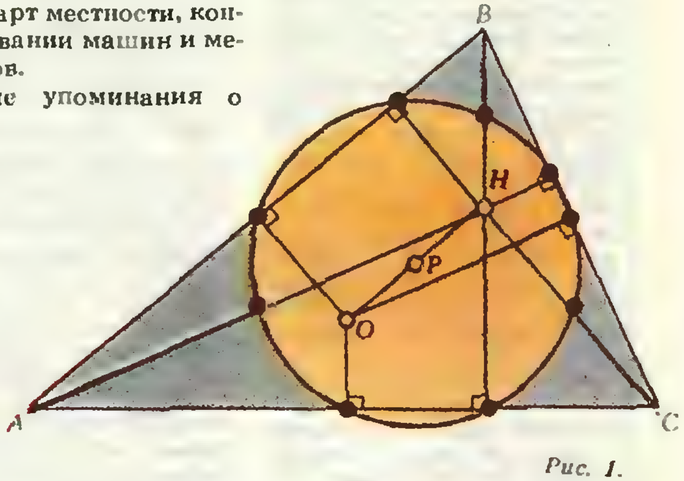


Рис. 1.

Вот одна из замечательных теорем того времени, принадлежащая Л. Эйлеру. *«Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков высот от вершины до точки их пересечения лежат на одной окружности»*. Эта окружность изображена на рисунке 1. Она обычно называется «окружностью девяти точек» (по коли-

Полезные формулы

Пусть, как принято обычно, a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр, m_a, m_b, m_c — длины медиан, h_a, h_b, h_c — длины высот, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника. Тогда

$$S=\frac{ah_a}{2};\quad S=pr;$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S=\sqrt{\frac{Rh_ah_bh_c}{2}};$$

$$abc=4SR;$$

$$ab+bc+ac=p^2+r^2+4Rr;$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c};$$

$$m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2};$$

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=$$
$$=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

честву замечательных точек, через которые она проходит). Ее называют также «окружностью Эйлера», а некоторые — «окружностью Фейербаха» в честь немецкого математика XIX века К. Фейербаха (брата известного немецкого философа), доказавшего, что эта окружность касается окружности, вписанной в треугольник, и всех его вневписанных окружностей (то есть окружностей, касающихся одной из сторон и продолжений двух других сторон, рис. 2). Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности, а центр окружности девяти точек лежит на середине отрезка, соединяющего центр описанной окружности с точкой пересечения высот треугольника. Прямая, которой принадлежит этот отрезок, называется *прямой Эйлера*. Этой прямой принадлежит и точка пересечения медиан треугольника. (Подробнее об окружности девяти точек можно прочесть в «Кванте», 1981, № 8.)

Известно, что Наполеон часть своего свободного времени посвящал занятиям математикой. Ему приписывают такую красивую теорему: «*Если на сторонах треугольника во внешнюю сторону построить равносторонние треугольники, то их центры будут вершинами равностороннего треугольника*». Этот треугольник называют «внешним треугольником Наполеона». Аналогично строится «внутренний треугольник Наполеона». Находки в геометрии треугольника есть и в нашем веке. Так, в 1904 году американский математик Ф. Морли доказал, что если из каждой вершины треугольника провести лучи, делящие соответствующий угол на три равные части (трисектрисы угла), то точки пересечения смежных трисектрис углов являются вершинами равностороннего треугольника (рис. 3). Доказательство этого утверждения было бы вполне под силу и древнегреческим математикам. Они прошли мимо этого факта, видимо, потому, что тогда было принято рассматривать лишь построения при помощи циркуля и линейки, а с помощью этих инструментов такое деление в общем случае сделать невозможно (это позднее было доказано).

А. П.

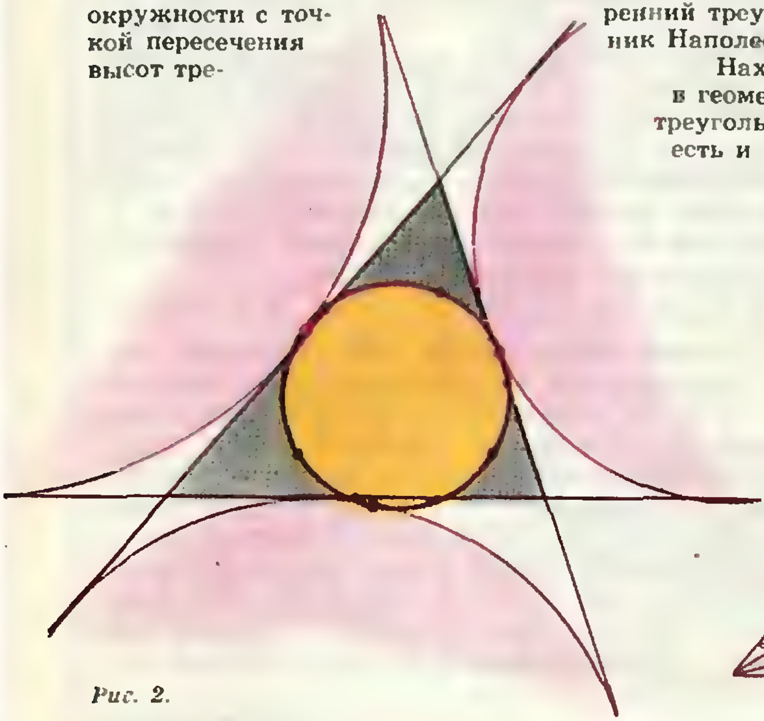


Рис. 2.

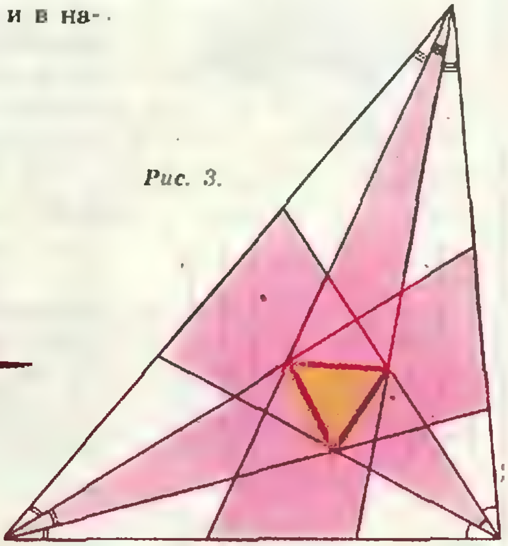


Рис. 3.

(Начало см. на с. 31)

шее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в противоположном порядке (так что левые соседи у всех станут правыми и наоборот)? Решите эту задачу: а) для $n=4$, 5 и 6; б) для любого $n \geqslant 3$.

В. Б. Алексеев

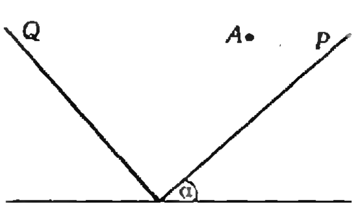


Рис. 1.

Ф963. Плоскости P и Q пересекаются под прямым углом и плоскость P составляет угол α с горизонтом (рис. 1). Из некоторой точки A пространства на плоскость P свободно падает маленький шарик. Соударения шарика с плоскостями абсолютно упругие. При каком условии шарик вновь окажется в точке A? Изобразите одну из возможных траекторий возвращения.

Г. С. Лапидус

Ф964. Материальные точки образуют замкнутую систему. Между любыми двумя точками системы действует сила притяжения, равная $\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}$, где m_i, m_j — массы точек, $|\vec{F}_{ij}|$ — сила, действующая на точку i со стороны точки j, $|\vec{r}_{ij}|$ — расстояние между точками (рис. 2), k — постоянный коэффициент. В начальный момент все частицы покоятся. Докажите, что через некоторое время все точки столкнутся. Определите это время, если известны масса всей системы $M=\sum\limits_i m_i$ и коэффициент k.

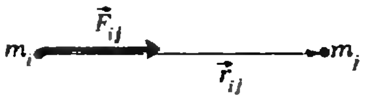


Рис. 2.

А. Г. Самосват

Ф965. Длинный цилиндрический сосуд наполнен идеальным газом до давления p_0. Сначала температура цилиндра поддерживается постоянной и равной T_0. Затем температуру одной из торцевых стенок сосуда повышают на ΔT, а температура противоположной стенки остается прежней. Найти установившееся давление в сосуде и положение центра масс газа. Считать, что $\Delta T \ll T_0$.

В. И. Комов

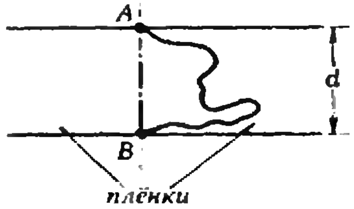


Рис. 3.

Ф966. Для иллюстрации поверхностного натяжения одну из мыльных пленок, натянутых на параллельные «направляющие» и разделенных ниткой AB (см. рис. 3), прокалывают; при этом нить AB натягивается. Определите силу натяжения нити. Расстояние между «направляющими» равно d, длина нити l ($l > \pi d/2$), коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.

Л. Г. Маркович

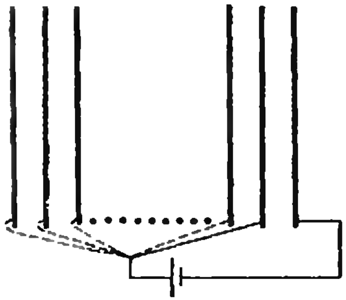


Рис. 4.

Ф967. Стопку очень тонких металлических пластин, находящихся на одинаковых расстояниях друг от друга, заряжают от батареи следующим образом. Отрицательную клемму батареи соединяют с самой правой пластиной, а положительную клемму присоединяют по очереди к самой левой пластине, затем ко второй слева, к третьей и т. д. до предпоследней (второй справа; рис. 4). Найдите отношение заряда на самой правой пластине к заряду на третьей справа пластине. Считать, что толщина стопки много меньше, чем линейные размеры пластин.

Е. П. Соколов

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M951 — M955; P963 — P967

M951. All the sides of a convex hexagon $ABCDEF$ are of length 1. Prove that the circumcircle radius of one of the triangles ACE and BDF is no less than 1.

E. Horvath (Hungary)

M952. Denote by $\{x\}$ the fractional part of the number x: $\{x\}=x-[x]$, where $[x]$ is the largest integer not exceeding x.
a) Find an example of a number a such that

$$\{a\}+\{1/a\}=1.$$

b) Prove that such a number a cannot be rational.

I. Varga (Rumania)

M953. Six points, no three of which are collinear, are given in the plane. All the 15 lines joining these points are drawn. What is the maximal number of intersection points (not counting the given ones) of three of these lines?

V. V. Prasolov

M954. a) A rectangle of sides a and b is inscribed in a triangle so that all the vertices lie on the sides of the triangle. Let a_1 and b_1 be the projections of the triangle on lines parallel to sides a and b of the rectangle. Prove the relation

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=1.$$

b) A cuboid with sides a, b and c is inscribed in an arbitrary tetrahedron so that all the vertices lie on the tetrahedron's surface. Let a_1, b_1 and c_1 be the lengths of the projections of the tetrahedron on lines parallel to sides a, b and c. Prove that

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=1.$$

V. N. Dubrovski

M955.* n participants of the «mad tea party» sit around a circular table. Every minute one pair of neighbours exchanges places. In what minimal time can all the participants be seated in opposite order (so that the left-hand neighbours become right-hand ones and vice versa)? Solve the problem for a) $n=4$, 5 and 6; b) arbitrary $n\geqslant 3$.

V. B. Alekseev

P963. The planes P and Q intersect at right angles, the plane P forming the angle α with the horizon (Fig. 1). A small ball falls freely from some point A in space on the plane P. The collisions of the ball with the planes are absolutely elastic. Under what conditions will the ball return to the point A? Draw one of the possible return trajectories.

G. S. Lapidus

P964. Several mass points constitute a closed system. There is a force of attraction between any two points of the system equal to $\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}$, where m_i, m_j are the masses of the points, $|\vec{F}_{ij}|$ is the force exerted by the point j on the point i, $|\vec{r}_{ij}|$ is the distance between the points (Fig. 2), k is a constant. At the initial moment all the points are at rest. Prove that after a certain time all the points will collide. Determine this time, if the total mass of the system is known $M=\sum\limits_i m_i$ as well as the coefficient k.

A. G. Samosvat

P965. A long cylindrical vessel if filled with ideal gas at pressure p_0. At first the temperature of the cylinder is kept constant and equal to T_0. Then the temperature of one of the sides of the cylinder is increased by ΔT, the temperature of the opposite side remaining the same. Find the established pressure in the vessel and the position of the gas' center of mass. Assume that $\Delta T \ll T_0$.

V. I. Komov

P966. As an illustration of surface tension, one of the «halves» of a soap film spanned by two parallel «directrices» joined by

a thread AB (Fig. 3, p. 34) is punctured; the thread, which had been floating freely on the film, streches into a definite shape. Find the tension in the thread. The distance between the «directrices» is d, the length of the thread is l ($l>\pi d/2$), the coefficient of surface tension of the soap solution is σ.

L. G. Markovich

P967. A pile of very thin metal plates, located at the same distance from each other, is charged from a battery in the following way. The negative contact of the battery is connected to the plate furthest to the right, while the positive contact is connected in sequence first to the first plate from the left, then to the second one, the third and so on until the next to last plate (the second one from the right, see Fig. 4). Find the ratio of the charge of the far right plate to that of the third from the right. Assume that the thickness of the pile is much less than its linear measurements.

E. P. Sokolov

Решения задач

M931 — M935; Ф943 — Ф947

M931. *В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Известно, что длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.*

Рассмотрим треугольники AA_1B_1 и BB_1A_1 (рис. 1). Они имеют общую сторону A_1B_1 и равные по условию стороны AA_1 и BB_1. Кроме того, равны их углы AB_1A_1 и BA_1B_1, поскольку смежные с ними углы — это углы при основании равнобедренного треугольника A_1B_1C (отрезки CA_1 и CB_1 равны, как касательные, проведенные к окружности из одной точки); по той же причине углы AB_1A_1 и BA_1B_1 тупые, следовательно, остальные углы рассматриваемых треугольников острые. По теореме синусов

$$\sin\angle A_1AB_1=\frac{A_1B_1}{A_1A}\sin\angle AB_1A_1=$$

$$=\frac{A_1B_1}{B_1B}\sin\angle BA_1B_1=\sin\angle B_1BA_1,$$

поэтому $\angle A_1AB_1=\angle B_1BA_1$ (эти углы острые), значит, и $\angle AA_1B_1=\angle BB_1A_1$. Таким образом, треугольники AA_1B_1 и BB_1A_1 равны (по двум сторонам и углу между ними). В частности, $AB_1=BA_1$ и $AC=AB_1+B_1C=BA_1+A_1C=BC$. Аналогично доказывается, что $AC=AB$.

Отметим, что, вообще говоря, признак равенства треугольников «по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них» не верен (см. рис. 2).

В. Н. Дубровский

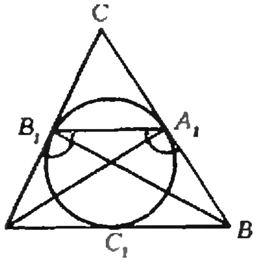


Рис. 1.

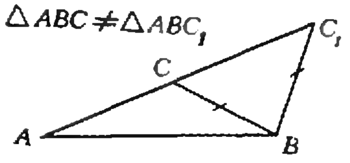
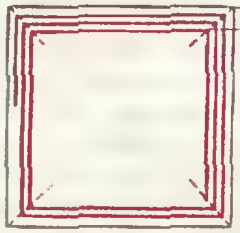


Рис. 2.

◆

M932. *В квадратной клетке со стороной 1 м находится анаконда длиной 10 м. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он в любой момент может одним выстрелом прострелить анаконду сразу в 6 местах. Не преувеличивает ли барон? (Анаконду можно считать произвольной ломаной длины 10, расположенной внутри квадрата 1×1.)*

Очевидно, что длина любого отрезка не превосходит суммы длин его проекций на любые две перпендикулярные прямые (гипотенуза прямоугольного треугольника меньше суммы катетов), причем равенство достигается, только если отрезок параллелен одной из прямых. Отсюда следует, что сумма проекций всех звеньев ломаной на две перпендикулярные стороны квадрата больше 10, значит, сумма их проекций на одну из сторон больше 5. Поэтому хотя бы одна из точек этой стороны должна лежать внутри проекций не менее чем 6 звеньев



ломаной. Барону достаточно выстрелить из этой точки перпендикулярно стороне. Из рисунка на полях видно, что анаконда может так расположиться в клетке, что даже Мюнхгаузен не сумеет прострелить ее сразу в 7 местах.

С. Б. Гашков

◆

М933. *13 рыцарей из k разных кланов $(1<k<13)$ сидят за круглым столом. Каждый держит золотой или серебряный кубок, причем золотых кубков ровно k. Король Артур приказал рыцарям одновременно передать кубки своим соседям справа, потом сделать то же самое еще раз и т. д. Докажите, что в некоторый момент найдутся два рыцаря из одного клана, в руках у которых золотые кубки.*

Будем рассуждать от противного. Если утверждение задачи не верно, то в любой момент времени ровно один рыцарь в каждом клане держит золотой кубок, так как число кланов равно числу кубков. Допустим, что каждая следующая передача кубков происходит через минуту. Тогда за 13 минут — время полного оборота кубков вокруг стола — каждому рыцарю доведется держать каждый из золотых кубков ровно по одному разу, то есть в течение k минут, а всем рыцарям одного клана вместе взятым — nk минут, где n — число рыцарей в этом клане. Таким образом, $nk=13$, что невозможно при $1<k<13$, поскольку число 13 простое.

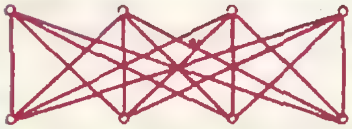
Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Если бы общее число рыцарей r делилось на k: $r=kn$, то было бы нетрудно построить пример, когда в любой момент лишь у одного рыцаря из каждого клана золотой кубок: достаточно рассадить рыцарей каждого клана в вершинах правильного n-угольника, а k золотых кубков дать k сидящим подряд рыцарям (из разных кланов).

С. Б. Гашков

◆

М934. *В пространстве расположено $2n (n\geqslant 2)$ точек (так что никакие 4 не лежат в одной плоскости) и проведено n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведенные отрезки образуют а) хотя бы один треугольник; б)* не менее n треугольников.*



$n=4$

а) Выберем точку, из которой выходит наибольшее число отрезков. Обозначим ее через A_1, концы выходящих из нее отрезков — через $B_1, \ldots, B_k$, остальные точки — через $A_2, \ldots, A_{2n-k}$. Если треугольников нет, то между точками $B_1, \ldots, B_k$ нет отрезков, поэтому из каждой из них выходит не более $2n-k$ отрезков. А поскольку из каждой точки A_i, $i=1, \ldots, 2n-k$, выходит не более k отрезков, общее число отрезков не превосходит

$$\frac{1}{2}(k(2n-k)+(2n-k)k)=k(2n-k)\leqslant n^2.$$

Но число данных отрезков равно n^2+1, поэтому они образуют хотя бы один треугольник.

Для n^2 отрезков утверждение задачи, как видно из рисунка, не верно.

б) Проведем доказательство индукцией по n. При $n=2$ (для 4 точек и 5 отрезков) утверждение проверяется непосредственно. Докажем его для $2(n+1)$ точек, считая его верным для $2n$ точек.

Согласно а) проведенные отрезки образуют хотя бы один треугольник ABC. Нужно еще по крайней мере n треугольников. Обозначим количества отрезков, выходящих из вершин треугольника ABC (не считая его сторон), через k_A, k_B, k_C соответственно.

Если $k=k_A+k_B+k_C\leqslant 3n-2$, то для каких-то двух вершин треугольника, например A и B, общее число таких отрезков k_A+k_B не больше $2n-2$. Выбросим эти точки и все выходящие из них отрезки (вместе со сторонами треугольника ABC). Мы получим набор из точек, соединенных не менее чем $(n+1)^2+1-(2n-2)-3=n^2+1$ отрезками, которые, по предположению индукции, образуют не менее n треугольников.

Если же $k\geqslant 3n-1$ и k рассматриваемых нами отрезков образуют со сторонами AB, BC и CA t треугольников, то $t\geqslant n$. В самом деле, пусть среди $2n+2-3=2n-1$ точек, отличных от A, B, C, имеется n_j таких, из которых идет j отрезков к вершинам A, B, C ($j=0, 1, 2, 3$). Тогда

$$n_1+n_2+n_3\leqslant n_0+n_1+n_2+n_3=2n-1,$$
$$n_1+2n_2+3n_3=k\geqslant 3n-1,$$

следовательно, $t=n_2+3n_3\geqslant n_2+2n_3\geqslant(3n-1)-(2n-1)\geqslant n$.

С. Б. Гашков

◆

М935. *(Задача о гайке.) Если внутри правильного 2n-угольника со стороной a и центром O (произвольным образом поместить правильный 2n-угольник со стороной a/2, то он накроет точку O. Докажите это утверждение: а) для n=2; б)* для n=3; в)* для любого натурального n.*

Будем рассуждать от противного и сразу в общем случае. Обозначим меньший $2n$-угольник через M_1, больший — через M_2. Если многоугольник M_1 не содержит центра O многоугольника M_2, то, поскольку он выпуклый, у него найдется такая сторона AB, что точка O и сам многоугольник M_1 лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 1). Пусть CD — противоположная к AB сторона многоугольника M_1. Расстояние между параллельными прямыми AB и CD равно радиусу вписанной окружности многоугольника M_2, поэтому прямая CD лежит вне этой окружности. Проведем касательную MN к этой окружности (см. рис. 1), параллельную CD; тогда, как следует из сказанного,

$$CD\leqslant C'D'<MN,$$

где $C'D'$ — отрезок, по которому прямая CD пересекается с M_2, причем концы отрезков $C'D'$ и MN лежат на двух соседних сторонах многоугольника M_2.

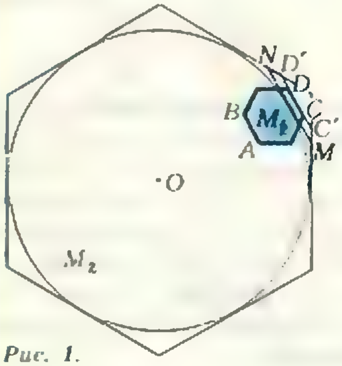


Рис. 1.

Теперь достаточно доказать, что $MN<a/2$ (тогда окажется, что $CD<a/2$, что противоречит условию). Пусть точки M и N лежат на сторонах M_2, выходящих из вершины P; Q, R и T — точки касания этих сторон и отрезка MN с вписанной окружностью M_2 (рис. 2). Тогда

$$2MN=MT+MN+TN=$$
$$=QM+MN+NR<QP+PR=a,$$

что и требовалось.

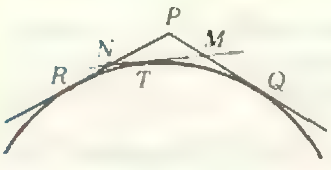


Рис. 2.

Заметим, что для $(2n+1)$-угольников аналогичное утверждение неверно.

С. Б. Гашков

◆

Ф943. *Небольшое тело падает с огромной высоты на землю. Считая удар тела о землю абсолютно упругим, опреде-*

Во время падения на тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, направленная противо-

лить ускорение тела сразу же после того, как оно отскочит от земли.

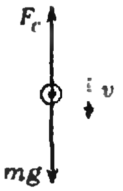


Рис. 1.

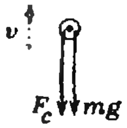


Рис. 2.

Ф944. *На твердое тело, движущееся поступательно по шероховатой горизонтальной поверхности, в момент времени $t_0=0$, когда скорость тела равна v_0, начинает действовать сила $F(t)$, направленная все время вдоль вектора $\vec{v}_0$ и возрастающая со временем. Через время t скорость тела оказывается равной v_t, причем $v_t=5$ м/с, если $v_0=1$ м/с, и $v_t=13$ м/с, если $v_0=10$ м/с. Определить зависимость $v_t=f(v_0)$ при всех возможных v_0.*

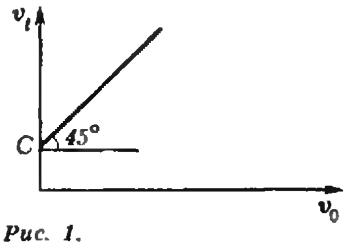


Рис. 1.

положно скорости тела, то есть вверх. Поскольку сила сопротивления растет с увеличением скорости, найдется такая высота (по условию тело падает с огромной высоты), на которой сила сопротивления окажется равной по модулю силе тяжести (рис. 1):

$$mg-F_c=0,\ m\vec{g}+\vec{F}_c=0.$$

Начиная с этого момента, тело будет падать с некоторой постоянной скоростью $\vec{v}$.

С такой же по модулю, но противоположно направленной скоростью тело отскочит от земли сразу же после абсолютно упругого удара о нее. В этот момент на тело действуют две одинаково направленные и равные по модулю силы (рис. 2), поэтому его ускорение будет равно

$$a=\frac{mg+F_c}{m}=\frac{2mg}{m}=2g\approx 20 \text{ м/с}^2.$$

А. Г. Шихкеримов

◆

Начиная с момента времени $t=0$, на тело действуют две силы — данная сила $F(t)$, возрастающая со временем, и сила трения, которая здесь может принимать значения от 0 до максимальной силы трения покоя, равной силе трения скольжения $F_{\text{тр}}=\mu mg$ (μ — коэффициент трения, m — масса тела). Эти силы направлены противоположно друг другу, поэтому понятно, что характер движения тела будет определяться соотношением между модулями действующих на тело сил, и прежде всего — в начальный момент. Рассмотрим возможные варианты.

Если $F(0)>\mu mg$, то тело с самого начала движется так, что ни ускорение, ни изменение скорости за данный промежуток времени t не зависят от скорости: $v_t=v_0+C$ (где C — некоторая постоянная). Соответствующий график изображен на рисунке 1. Нетрудно увидеть, что данные задачи не «ложатся» на этот график. Значит, $F(0)<\mu mg$.

Поскольку сила $F(t)$ с течением времени возрастает, в какой-то момент, назовем его «критическим», она окажется равной максимальной силе трения покоя: $F(t_{\text{кр}})=\mu mg$. Это может произойти либо до указанного момента времени t, либо после него (конечно, не исключено, что этого не случится никогда, но об этом — несколько позже).

Пусть $t_{\text{кр}}<t$. Тогда тело сначала, до момента $t_{\text{кр}}$, движется замедленно, а потом ускоренно. Но здесь тоже возможны два случая: в момент $t_{\text{кр}}$ скорость тела либо равна нулю, либо больше нуля. Ясно, что первый случай может быть реализован лишь при достаточно малых начальных скоростях. При этом скорость v_t не зависит от скорости v_0 (тело движется замедленно, останавливается и снова начинает двигаться, «забыв» о начальной скорости v_0): $v_t=A$. Постепенно увеличивая начальную скорость, мы придем к такому ее значению, назовем его «критическим», что при

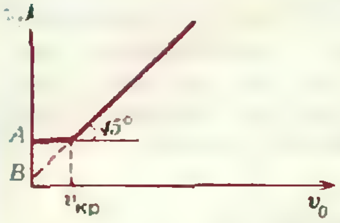


Рис. 2.

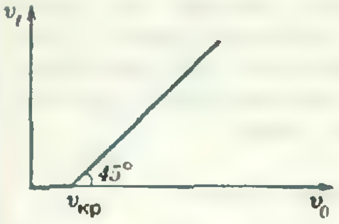


Рис. 3.

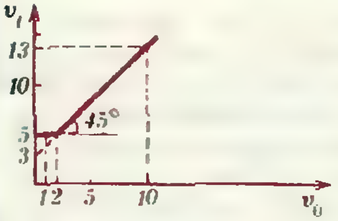


Рис. 4.

$v_0 > v_{кр}$ тело будет двигаться, не останавливаясь. В этом случае, начиная с момента $t_{кр}$, на тело будет действовать сила $F(t) - \mu mg$, не зависящая от скорости, поэтому $v_f = v_0 + B$. Таким образом, при $t_{кр} < t$ график зависимости $v_f = f(v_0)$ имеет вид, приведенный на рисунке 2.

Пусть теперь $t_{кр} > t$. Проведя аналогичные рассуждения, мы придем к графику, изображенному на рисунке 3. Очевидно, что этот график подходит и для последнего возможного случая, когда сила $F(t)$ всегда меньше μmg (тело либо остановится до момента t, либо будет двигаться с ускорением, не зависящим от скорости).

Итак, мы получили три графика зависимости конечной скорости движения тела от его начальной скорости. При этом точки, заданные в условии задачи ($v_f = 5$ м/с при $v_0 = 1$ м/с и $v_f = 13$ м/с при $v_0 = 10$ м/с), «ложатся» лишь на график, изображенный на рисунке 2. Таким образом,

$$v_f = \begin{cases} A & \text{при } v_0 \leqslant v_{кр}, \\ B + v_0 & \text{при } v_0 > v_{кр}. \end{cases}$$

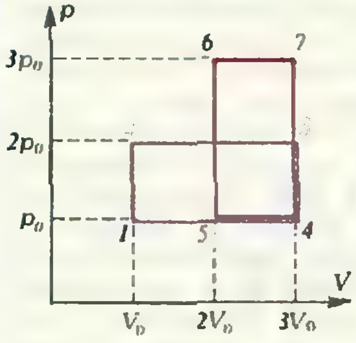
«Сшивая» эти два условия с учетом конкретных данных, получим окончательно (рис. 4):

$$v_f = \begin{cases} 5 \text{ м/с} & \text{при} v_0 \leqslant 2 \text{ м/с}, \\ 3 \text{ м/с} + v_0 & \text{при } v_0 > 2 \text{ м/с}. \end{cases}$$

Р. Л. Мкртчян,
О. М. Худавердян

◆

Ф945. *Определите отношение η_1/η_2 коэффициентов полезного действия двух циклических процессов, проведенных с идеальным газом (см. рисунок): первый процесс 1-2-3-4-1, второй процесс 5-6-7-4-5.*



Коэффициент полезного действия циклического процесса определяется как $\eta = A/Q$, где A — работа, совершенная системой за цикл, Q — количество теплоты, полученное системой от нагревателя.

Работе газа за цикл на $p-V$-диаграмме соответствует площадь, заключенная «внутри» цикла. Из условия задачи следует, что работа газа в первом и во втором процессах одна и та же. Следовательно, $\eta_1/\eta_2 = Q_2/Q_1$, где Q_1 и Q_2 — количества теплоты, полученные системой соответственно при первом и при втором циклах. Найдем Q_1 и Q_2.

Пусть температура газа в точке *1* была T_1. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, нетрудно показать, что

$$T_2 = T_5 = 2T_1,\ T_3 = T_6 = 6T_1,\ T_4 = 3T_1,\ T_7 = 9T_1.$$

Очевидно, что в процессе *1-2-3-4-1* газ получил тепло Q_1 на участках *1-2* и *2-3*, причем $Q_1 = A_1 + \Delta U_1$, где $A_1 = 4p_0V_0 = 4\nu RT_1$ — работа, совершенная на этих участках газом, $\Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) = \frac{15}{2}\nu RT_1$ — изменение его внутренней энергии. Так что

$$Q_1 = 4\nu RT_1 + \frac{15}{2}\nu RT_1 = \frac{23}{2}\nu RT_1.$$

В процессе *5-6-7-4-5* газ получил тепло Q_2 на участках *5-6* и *6-7*, причем

$$Q_2 = A_2 + \Delta U_2 = 3p_0V_0 + \frac{3}{2}\nu R(T_7 - T_5)\frac{27}{2}\nu RT_1.$$

Таким образом,

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{27}{23}.$$

С. С. Кротов

◆

Ф946. *Два одинаковых точечных заряда $q>0$ находятся на расстоянии l друг от друга. На какое минимальное расстояние «подойдет» к плоскости симметрии П (рис. 1) силовая линия, выходящая из левого заряда под углом α к прямой, соединяющей заряды? Под каким углом к плоскости симметрии будет расположена эта линия при удалении на большое расстояние от зарядов?*

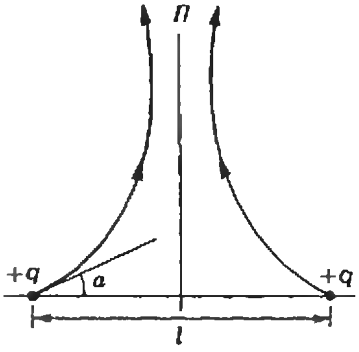


Рис. 1.

Прежде чем решать задачу, выскажем некоторые предварительные соображения.

1) Согласно принципу суперпозиции полей напряженность электрического поля системы точечных зарядов в каждой точке равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

2) Картина силовых линий поля, созданного двумя одинаковыми точечными зарядами, симметрична относительно плоскости симметрии П (см. рис. 1) и одинакова в любой плоскости, проходящей через соединяющую заряды прямую.

3) Вблизи каждого заряда влиянием другого заряда можно пренебречь и считать, что силовые линии выходят из заряда «равномерно», то есть с одинаковой густотой, по всем направлениям, как если бы он был одиночным (лишь потом эти линии искривляются).

4) При удалении на большое расстояние система двух одинаковых точечных зарядов ведет себя как один заряд $2q$, находящийся посередине. Это означает, что вдали от зарядов все силовые линии поля системы асимптотически приближаются к радиальным силовым линиям поля точечного заряда $2q$.

Теперь приступим непосредственно к решению.*) Рассмотрим точку C данной силовой линии, которая находится на минимальном расстоянии x от плоскости П (рис. 2). Напряженность $\vec{E}_C$ поля в точке C, равная сумме напряженностей $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_B$, направлена параллельно плоскости П; следовательно, проекции векторов $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_B$ на ось, проходящую через точки A и B, равны по модулю (см. рис. 2):

$$\frac{kq}{r_1^2}\cos\beta=\frac{kq}{r_2^2}\cos\gamma.$$

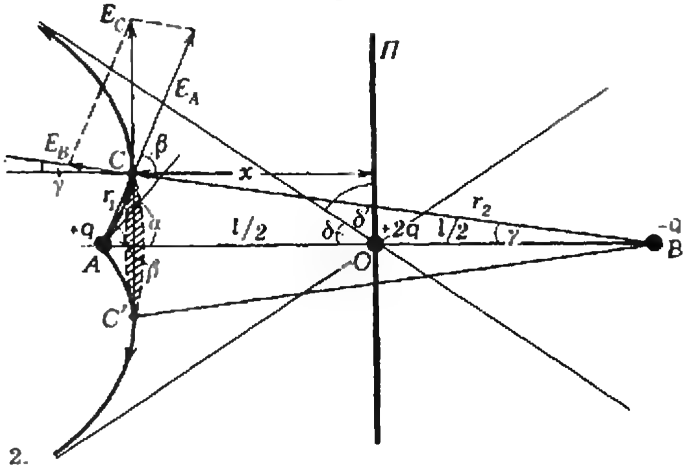


Рис. 2.

---

*) Если угол α — тупой, то искомое расстояние $x=l/2$, поэтому рассмотрим $\alpha<90^\circ$.

Выразив расстояния r_1 и r_2 через l из треугольника ABC с помощью теоремы синусов, придем к уравнению

$$(\cos\beta-\cos\gamma)(\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos\beta\cos\gamma-1)=0.$$

Если приравнять к нулю первый сомножитель, то получим тривиальный случай: $\beta=\gamma$ (оба угла острые*)), то есть точка C принадлежит самой плоскости Π. Этот случай нас не интересует.

Приравняем к нулю второй сомножитель:

$$\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos\beta\cos\gamma-1=0. \qquad (1)$$

В этом уравнении два неизвестных, так что решений в принципе может быть бесконечно много. Однако тут нам пригодятся высказанные ранее соображения 1)—3). Рассмотрим силовые линии, выходящие из левого заряда и попадающие внутрь конуса с углом α между образующей и осью конуса (линией AB). Понятно, что условное число N этих линий пропорционально величине телесного угла $\Omega=2\pi(1-\cos\alpha)$ (эту формулу нетрудно вывести самостоятельно):

$$N=K\cdot\Omega=K\cdot 2\pi(1-\cos\alpha).$$

С другой стороны, поскольку силовые линии результирующего поля не пересекаются, это же число силовых линий можно найти, если рассмотреть силовые линии полей, созданных каждым из двух зарядов в отдельности, пересекающие круг с диаметром CC' (рис. 3):

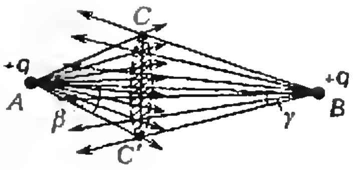


Рис. 3.

$$N=K\cdot 2\pi(1-\cos\beta)-K\cdot 2\pi(1-\cos\gamma)$$

(разность, а не сумма взята здесь потому, что силовые линии поля левого заряда пересекают выбранный круг слева направо, а линии поля правого заряда — наоборот). Итак, получаем

$$K\cdot 2\pi(1-\cos\alpha)=K\cdot 2\pi(1-\cos\beta)-K\cdot 2\pi(1-\cos\gamma),$$

или

$$1-\cos\alpha=\cos\gamma-\cos\beta. \qquad (2)$$

Объединим уравнения (1) и (2) в систему:

$$\begin{cases} 1-\cos\alpha=\cos\gamma-\cos\beta, \\ \cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos\beta\cos\gamma=1. \end{cases}$$

Эта система, учитывая, опять-таки, что углы β и γ острые, имеет единственное решение:

$$\cos\beta=\frac{\cos\alpha-1+\sqrt{(3-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)/3}}{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{1-\cos\alpha+\sqrt{(3-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)/3}}{2}.$$

Найдем теперь искомое расстояние x (см. рис. 2):

$$x=\frac{l}{2}-r_1\cos\beta=\frac{l}{2}\left(1-2\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right),$$

где углы β и γ можно выразить из предыдущих равенств ($\beta=\arccos\beta$ и $\gamma=\arccos\gamma$). Нетрудно «проверить» полученный ответ для двух очевидных частных случаев: а) если $\alpha=90^\circ$, то $x=l/2$, то есть данная силовая линия сразу же «заворачивает» влево; б) если $\alpha=0^\circ$, то $x=0$, то есть силовая линия сначала идет по отрезку l, до точки O, где она терпит «разрыв» (в этой точке поле отсутствует), а затем идет по вертикальной прямой (в плоскости Π).

---

*) $\gamma<90^\circ$, так как данная силовая линия не заходит вправо за плоскость Π; $\beta<90^\circ$, так как до точки C силовая линия приближается к плоскости Π.

Нам осталось выяснить, к какой прямой будет асимптотически приближаться данная силовая линия на большом расстоянии от зарядов.*) Другими словами, нам нужно найти угол δ, а в конечном счете и δ' (см. рис. 2). В этом помогут соображения 1), 2) и 4).

С одной стороны, все силовые линии, которые не выходят за пределы конуса с углом δ между образующей и осью, идут от левого заряда в пределах телесного угла, равного $2\pi(1-\cos(\pi-\alpha))=$ $=2\pi(1+\cos\alpha)$. Значит, их число

$$N=K\cdot 2\pi(1+\cos\alpha).$$

С другой стороны, мы получим то же число линий, если будем рассматривать систему как один точечный заряд $2q$, находящийся в точке O:

$$N=2K\cdot 2\pi(1-\cos\delta).$$

Таким образом, получаем

$$K\cdot 2\pi(1+\cos\alpha)=2K\cdot 2\pi(1-\cos\delta),$$

откуда

$$\cos\delta=\frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \delta=\arccos\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Угол δ' дополняет угол δ до 90°, поэтому

$$\delta'=\arcsin\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Например: если $\alpha=90^\circ$, то $\delta'=30^\circ$, если $\alpha=0^\circ$, то $\delta'=0^\circ$, если $\alpha=180^\circ$, то $\delta'=90^\circ$, то есть эти тривиальные частные случаи хорошо «сочетаются» с интуицией и здравым смыслом.

В. А. Нахшин

◆

Ф947. *Оболочка космической станции представляет собой зачерненную сферу, температура которой за счет работы аппаратуры внутри станции равна $T=500$ К. Какой будет температура оболочки, если станцию окружить тонким черным сферическим экраном почти такого же радиуса, как оболочка? Количество теплоты, излучаемое с единицы площади поверхности, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры.*

Полное количество теплоты Q, излучаемое в пространство в единицу времени, зависит лишь от выделения энергии при работе аппаратуры станции, поэтому присутствие экрана его не изменит. Но теперь излучать тепло в пространство будет внешняя поверхность экрана; следовательно, температура экрана должна быть равна начальной температуре станции $T=500$ К.

Экран, однако, излучает не только наружу, но и вовнутрь, причем то же самое количество теплоты Q. Это излучение попадает на оболочку станции и поглощается ею. Таким образом, количество теплоты, подводимое к оболочке станции в единицу времени, складывается из тепла выделяемого приборами и излучаемого внутренней поверхностью экрана, то есть оно равно $2Q$. Точно такое же количество теплоты должно и излучаться; значит,

$$\frac{2Q}{Q}=\frac{T_c^4}{T^4},$$

откуда находим искомую температуру оболочки станции:

$$T_c=\sqrt[4]{2}\,T\approx 600\text{ К}.$$

А. И. Буздин

---

*) Здесь угол α уже не обязательно острый.

Самый знаменитый алгоритм

В предыдущих статьях этого раздела приводились многочисленные примеры алгоритмов и рассказывалось об общих принципах их записи на алгоритмическом языке. Здесь же автор подробно останавливается на одном единственном алгоритме — это один из самых древних и наверное самый известный математический алгоритм.

Доктор физико-математических наук
С. А. АБРАМОВ

В «Началах» Евклида приведен алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) неотрицательных целых чисел, основанный на следующих свойствах этой величины. Пусть f и g — одновременно не равные нулю целые неотрицательные числа, и пусть $f \geqslant g$. Тогда, если $g=0$, то НОД $(f,g)=f$, а если $g \neq 0$, то для чисел f, g и r, где r — остаток от деления f на g, выполнено равенство НОД $(f,g)=$ НОД (g,r): при любом целом a числа f и g имеют те же общие делители, что и числа g, $f-ag$, а остаток r есть число вида $f-ag$.

Применение алгоритма Евклида к числам f и g состоит в выполнении друг за другом серии однотипных шагов, каждый из которых начинается с проверки, равно ли второе число нулю. Если не равно, то вычисляется остаток от деления первого числа на второе, затем первое число заменяется вторым, а второе — вычисленным остатком, и происходит переход к следующему шагу. Если же второе число равно нулю, то все вычисления прекращаются, а значением НОД объявляется первое число.

Так при вычислении НОД (39, 15) переходим от одной пары чисел к другой в следующей последовательности: (39, 15), (15, 9), (9, 6), (6, 3), (3, 0). Получаем, что НОД (39, 15) = 3.

Остаток всегда меньше делителя, а убывающая последовательность неотрицательных целых чисел не может быть бесконечной. Поэтому применение алгоритма Евклида на некотором шаге закончится из-за обращения в нуль очередного остатка.

Задача 1. Найдите НОД (21042, 18921).

Задача 2. Полностью сократите дробь, запись числителя которой есть $\underbrace{3\ldots3}_{n}$, а запись знаменателя — $\underbrace{3\ldots3}_{m}$, $m > n$.

***

Большинство древних алгоритмов со временем вытеснялось из вычисли-

$a = q_1a_1 + a_2$
$a_1 = q_2a_2 + a_3$
a=q
a=q

тельной практики более новыми алгоритмами. Алгоритм Евклида избежал этой участи прежде всего благодаря своей экономности. Значение НОД(f,g) можно вычислить многими способами, например с помощью следующего тривиального алгоритма: если $g=0$, то взять в качестве НОД(f,g) значение f, иначе выбрать из чисел $g, g-1, \ldots, 1$ первое, при делении на которое f и g дают нулевые остатки. Но, как и другие подобные алгоритмы, последний алгоритм слишком разорителен. Например, в случае взаимно простых f и g он требует $2g$ делений. Исследуем теперь число делений, требуемых алгоритмом Евклида, и покажем, что оно при больших значениях g существенно меньше $2g$. Будем рассматривать последовательность всех остатков, которые вычисляются в процессе выполнения алгоритма Евклида. Полезно обозначить исходные числа не через f, g, а через f_0, f_1 (считаем, что $f_0 > f_1$). Получаемые ненулевые остатки обозначим через $f_2, \ldots, f_n$, частные от деления f_0 на f_1, f_1 на $f_2, \ldots, f_{n-1}$ на f_n — через $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{gathered} f_0 = a_1 f_1 + f_2, \\ f_1 = a_2 f_2 + f_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n-2} = a_{n-1} f_{n-1} + f_n, \\ f_{n-1} = a_n f_n; \end{gathered} \qquad (1)$$

здесь НОД $(f_0, f_1) = f_n$. Остаток всегда меньше делителя, поэтому $f_0 > f_1 > f_2 > \ldots > f_n > 0$. Вследствие этого каждое из частных $a_1, \ldots, a_n$ больше или равно единице.

Лемма 1. *При $i = 1, 2, \ldots, n-2$ выполняется неравенство $f_i > 2f_{i+2}$.*

Доказательство. $f_i = a_{i+1} f_{i+1} + f_{i+2} \geqslant f_{i+1} + f_{i+2} > 2f_{i+2}$.

Лемма 2. *Пусть k — такое натуральное число, что применение алгоритма Евклида к f_0, f_1 не заканчивается после $2k$ делений (то есть $f_{2k+1} \geqslant 1$). Тогда $f_1 > 2^k$.*

Доказательство. Используя лемму 1, получаем

$$f_1 > 2f_3 > 4f_5 > \ldots > 2^k f_{2k+1} \geqslant 2^k.$$

Теорема. *Число делений, требуемых алгоритмом Евклида, не превосходит* $2[\log_2 f_1]+2$*).

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что если k — натуральное число, для которого $f_1 \leqslant 2^k$, то число делений, требуемых алгоритмом Евклида, не превосходит $2k$. Но $f_1 < 2^{[\log_2 f_1]+1}$, следовательно, число делений не превосходит $2[\log_2 f_1]+2$.

Уже сравнение графиков функций $y=2x$ и $y=2\log_2 x+2$ не оставляет сомнения в преимуществе алгоритма Евклида перед тривиальным алгоритмом.

Задача 3. Докажите, что если f_0 и f_1 не взаимно просты, то разность между числом делений, требуемых тривиальным алгоритмом и числом делений, требуемых алгоритмом Евклида, больше или равна такой же разности, вычисленной для взаимно простых чисел f_0/d, f_1/d, где $d=$НОД(f_0, f_1).

***

Алгоритм Евклида допускает многочисленные обобщения. Прежде всего, как мы покажем ниже, вместе с НОД(f, g) можно вычислять целые u и v такие, что

$$fu + gv = \text{НОД}\,(f, g). \qquad (2)$$

Это дает возможность находить некоторое целочисленное решение произвольного уравнения вида

$$kx + ly = m, \qquad (3)$$

где k, l, m — целые числа такие, что k и l одновременно не равны 0, а m делится на $d = \text{НОД}\,(|k|, |l|)$. Пусть $|k|u + |l|v = d$, тогда

$$|k|um/d + |l|vm/d = m$$

и, как следствие этого,

$$k(c_1 um/d) + l(c_2 vm/d) = m,$$

где $c_j = \pm 1$, $j = 1, 2$.

Займемся алгоритмом нахождения целых чисел u и v, удовлетворяющих (2). Обозначим временно f через f_0, а g через f_1 и обратимся к (1). Пусть для некоторого $i \leqslant n-2$ вместе с числами f_i, f_{i+1} известны соответствующие им множители p, q, s, t такие, что

$$f_0 p + f_1 q = f_i, \quad f_0 s + f_1 t = f_{i+1}. \qquad (4)$$

Тогда, разделив f_i на f_{i+1} и получив частное a_{i+1} и остаток f_{i+2}, мы можем вычислить множители, соответствующие f_{i+2}: так как $f_i - a_{i+1} f_{i+1} = f_{i+2}$, используя для f_i, f_{i+1} выражения (4), мы получаем

$$f_0(p - a_{i+1}s) + f_1(q - a_{i+1}t) = f_{i+2}.$$

Таким образом, для решения задачи (2) надо применять к f и g алгоритм Евклида, рассматривая на каждом шаге его применения, кроме тех двух чисел, которые рассматривались и прежде, еще и соответствующие этим числам множители p, q и s, t. На первом шаге в качестве множителей, соответствующих исходным числам f и g, берутся 1,0 и 0,1. Выполнив деление и получив частное a и некоторый остаток, надо, если остаток не равен 0, перед переходом к следующему шагу вычислить по формулам $p-as$, $q-at$ множители, соответствующие полученному остатку. Последний ненулевой остаток и соответствующие ему множители u и v будут удовлетворять (2).

---

*) Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x.

В процессе применения этого алгоритма к $f=39$, $g=15$ последовательно вычисляются остатки 9; 6; 3; 0 и соответствующие первым трем из них множители 1, —2; —1,3; 2, —5. Таким образом, $39\cdot 2+15\cdot(-5)=3=$ $=$НОД (39, 15).

Теперь заметим, что алгоритм можно изменить так, что число требуемых им операций сократится почти в полтора раза: из двух чисел u и v достаточно вычислить вместе с НОД (f, g) только v, а затем определить u по формуле $u=($НОД$(f, g)-gv)/f$. Для $f=39$, $g=15$ мы могли бы положить $u=(3-15\times$ $\times(-5))/39=2$.

Задача 4. Докажите, что если числа $\bar{x}$, $\bar{y}$ дают некоторое решение уравнения (3), то все решения описываются формулой $x=$ $=x+l't$, $y=y-k't$, где $k'=k/$НОД(k, l), $l'=l/$НОД(k, l), $t=0, \pm 1, \pm 2$.

Задача 5. Пользуясь формулами, выписанными в задаче 4, опишите алгоритм, который позволяет проверить, обладает ли уравнение (3) решением в неотрицательных целых числах и если обладает, то позволяет и построить какое-то одно такое решение.

***

Последовательные деления с остатком, соответствующие схеме (1), лежат в основе алгоритма цепных дробей, который позволяет получить очень интересные приближения числа f_1/f_0. *Цепной дробью* (конечной) называется выражение вида

$$\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cdots+\cfrac{1}{b_k}}}, \qquad (5)$$

где $b_1, \ldots, b_k$ — натуральные числа. Цепную дробь (5) кратко записывают в виде $[b_1, b_2, \ldots, b_k]$. Так как $f_0=$ $=a_1f_1+f_2$, имеем

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{1}{\frac{f_0}{f_1}}=\frac{1}{a_1+\frac{f_2}{f_1}}.$$

Далее этим же способом преобразуем f_2 и т. д. В конце концов получим $f_1/f_0=[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Дополнительно рассмотрим цепные дроби $[a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_1, \ldots, a_{n-1}]$, значения которых называются *подходящими дробями* числа f_1/f_2. Обозначим несократимые формы подходящих дробей через $p_1/q_1, \ldots, p_{n-1}/q_{n-1}$. Следующие свойства приближений числа f_1/f_0 подходящими дробями, мы приводим без доказательства:

а) $\left|\frac{f_1}{f_0}-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{1}{q_i^2}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$;

б) Если для некоторой дроби u/v и подходящей дроби p_i/q_i, $i\leqslant i\leqslant n-1$, выполнено

$$\left|\frac{f_1}{f_0}-\frac{u}{v}\right|<\left|\frac{f_1}{f_0}-\frac{p_i}{q_i}\right|,$$

то $v>q_i$.

Нетрудно убедиться, что подходящие дроби числа 15/39 (несократимая форма которого есть 5/13) — это 1/2, 1/3, 2/5. Разности между исходным числом и этими дробями соответственно равны —3/26, 2/39, —1/65.

Свойства а), б) используются в решении разнообразных практических задач, требующих подбора для данного нецелого числа хорошего приближения в виде дроби со сравнительно небольшим знаменателем. Примером может служить задача расчета зубчатой передачи, состоящей из двух шестерен. Передаточное число должно быть близко к заданному значению, и при этом число зубьев каждой из шестерен не может превышать некоторой указанной границы.

Задача 6. Земной год продолжается 365, 242199 суток. Найдите подходящие дроби числа $\frac{242\,199}{1\,000\,000}$. Какая именно из этих дробей определяет закон чередования простых и високосных годов в современном календаре?

Задача 7. Запишите в виде программы на алгоритмическом языке из вашего учебника (см. также статью А. П. Ершова в предыдущем номере) следующие алгоритмы:

а) тривиальный алгоритм для вычисления НОД;

б) алгоритм Евклида для вычисления НОД;

в) алгоритм решения целочисленных уравнений вида $kx+ly=m$;

г) алгоритм для представления отношения f_0/f_1 в виде цепной дроби.

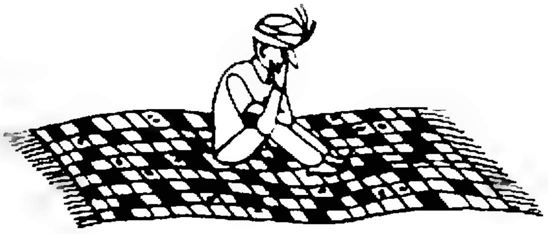
***

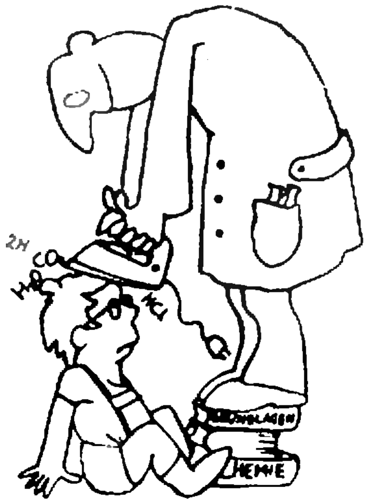
Алгоритм Евклида допускает и другие обобщения, которые, в частности, используются в приближении иррациональных чисел, в вычислении НОД многочленов. Поэтому и в современной вычислительной практике, основанной на привлечении электронных вычислительных машин, находится применение этому алгоритму, возраст которого 2300 лет.

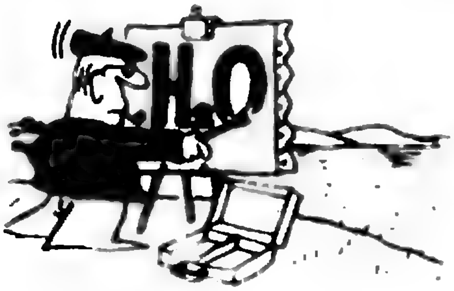
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

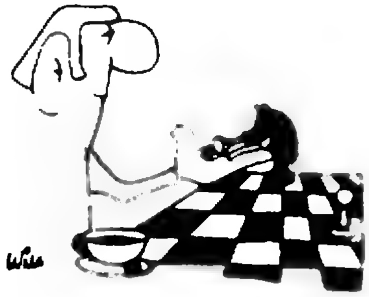
По страницам журнала «Альфа»

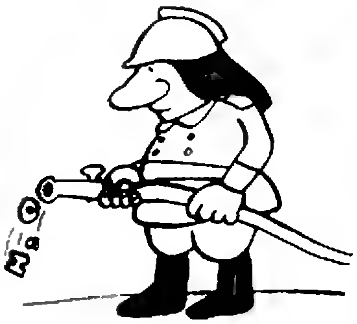
«Альфа» („Alpha“) — это математический журнал для школьников, который издается в ГДР и в будущем году будет праздновать свое 20-летие. Статьи в журнале доступны ученикам 5—6 классов. Нередко они сопровождаются карикатурами. Некоторые из них мы здесь и помещаем.

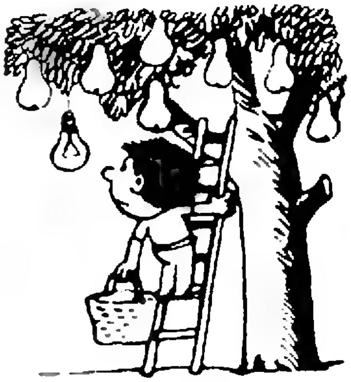


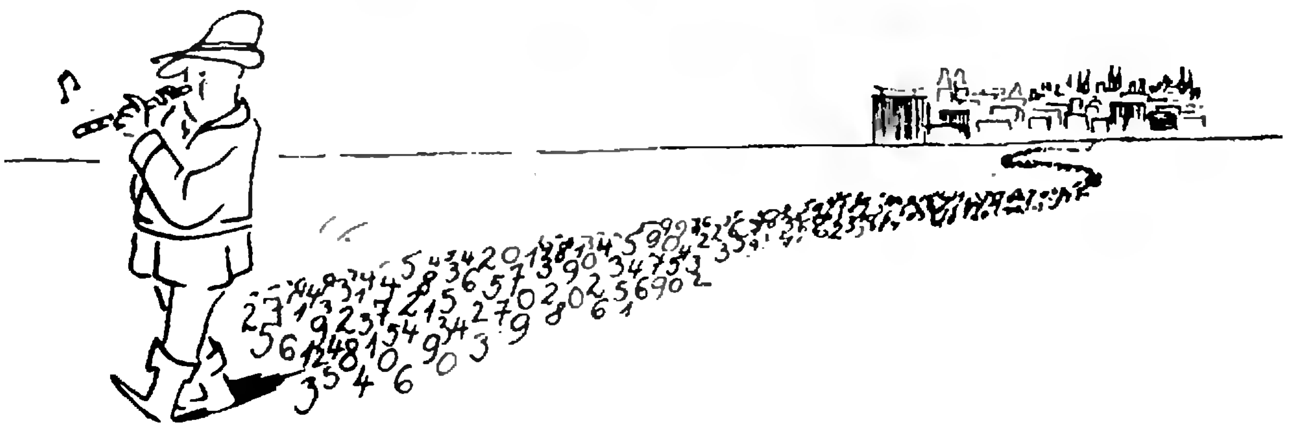












III. Биполярные транзисторы

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН, кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Принцип работы биполярного транзистора (БТ) довольно подробно рассмотрен в школьном курсе физики («Физика 9», § 81). Поэтому здесь мы ограничимся только кратким описанием основных особенностей работы БТ.

Транзистор состоит из трех слоев полупроводника с чередующимися типами проводимости, то есть представляет собой *p—n—p*- или *n—p—n*-структуру.

В *p—n—p*-структуре в две крайние области транзистора, называемые эмиттером и коллектором, добавлены акцепторные примеси, и ток в этих областях переносится положительно заряженными дырками. В среднюю часть такой структуры, называемой базой, добавлены донорные примеси, что обогащает полупроводник отрицательными электронами проводимости.*)

В *n—p—n*-структуре соответственно в эмиттер и коллектор добавлена донорная, а в базу — акцепторная примеси.

Широкое распространение получили оба типа транзисторных структур. В дальнейшем мы будем для определенности говорить только о БТ типа *n—p—n*, тем более что в ЭВМ чаще используются именно такие транзисторы.

Рисунок 1 поясняет принцип работы БТ. Внешний источник напряжения, включенный между эмиттером и базой, смещает *p—n*-переход эмиттер — база в прямом (пропускном) направлении. Второй источник смещает *p—n*-переход коллектор — база в обратном (запирающем) направлении. При таком включении небольшой ток, протекающий в базе, вызывает появление в цепи коллектора тока, гораздо большего по величине.

Отношение тока коллектора к току базы — коэффициент усиления транзистора по току β — определяется подвижностью носителей тока в материале μ и толщиной базы W. Чем меньше W и больше μ, тем больше коэффициент усиления. Величина β в БТ лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких тысяч.

В схемах ЭВМ БТ часто питаются не от двух, как показано на рисунке 1, а от одного источника питания (рис. 2) и работают в так называемом ключевом режиме.

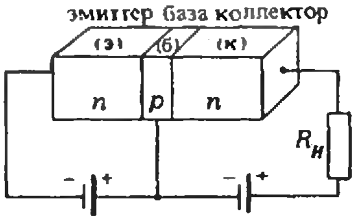


Рис. 1. Схематическое изображение биполярного транзистора.

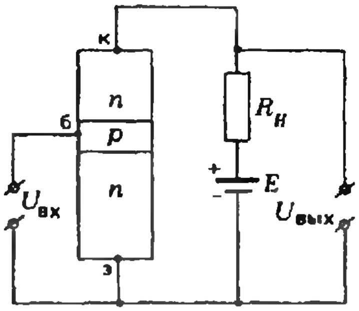
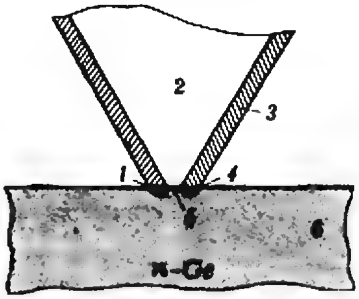


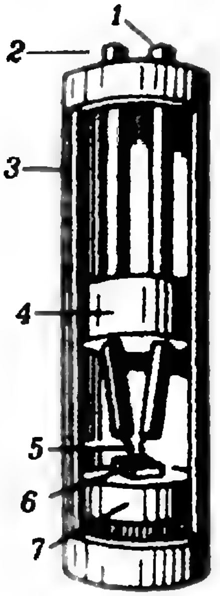
Рис. 2. Работа БТ в ключевом режиме.



Так был устроен первый биполярный транзистор (1947 г.). В пластинку монокристаллического германия (6) с силой вдавливается пластмассовый треугольник (2), обернутый золотой фольгой (3). На вершине треугольника, вдавленной в пластинку, фольга разрезана бритвой. В месте соприкосновения фольги с поверхностью монокристалла образуются области p-типа: эмиттер (1) и коллектор (4); между ними — база (5).

---

*) Поскольку в транзисторах такого типа одинаково важную роль играют носители обоих знаков — отрицательно заряженные электроны и положительные дырки, — то такие транзисторы называются *биполярными*. В полевых транзисторах (см. предыдущий номер журнала) используется движение носителей только какого-либо одного знака — или электронов, или дырок. Поэтому иногда полевые транзисторы называют еще и *униполярными*.



Первый промышленный биполярный транзистор (1948 г.). Эмиттерный и коллекторный переходы изготавливаются вплавлением в германиевый кристалл тонких проволочек. Коэффициент усиления $\beta \approx 2$, время переключения $t_0 \cong 30$ мкс, диаметр корпуса 1 см, высота 4 см.

1 — контакт к эмиттеру; 2 — контакт к коллектору; 3 — корпус; 4 — изолирующая прокладка; 5 — две контактные проволочки; 6 — кристалл германия; 7 — контакт к базе.

При работе в таком режиме БТ может находиться в одном из двух возможных состояний — открытом или закрытом.

Пусть на вход транзистора, показанного на рисунке 2, сигнал не подан. Напряжение источника питания E смещает переход коллектор — база в обратном (запирающем) направлении, а p—n-переход эмиттер — база — в прямом. Так как сопротивление p—n-перехода в запирающем направлении очень велико, то практически все напряжение падает на коллекторном переходе БТ. Напряжение между базой и эмиттером близко к нулю. Ток через транзистор практически отсутствует. В таком состоянии транзистор «закрыт». Все напряжение источника E падает на транзисторе. Выходное напряжение $U_{вых} \approx E$ велико.

Небольшой сигнал между базой и эмиттером, смещающий переход эмиттер — база в прямом (пропускном) направлении, обусловливает появление большого тока в цепи коллектор-эмиттер. При этом напряжение источника питания падает на нагрузочном сопротивлении $R_н$. Напряжение на транзисторе становится малым — транзистор «открыт».

Эти два легко различимых состояния соответствуют состояниям «0» и «1» в логических схемах на основе БТ.

Скорость переключения БТ из открытого состояния в закрытое и обратно определяется как параметрами самого прибора, так и схемой его включения. Самое малое время переключения, которое в принципе может быть получено, определяется временем, в течение которого носители (электроны в n—p—n- или дырки в p—n—p-транзисторах) проходят через базу транзистора благодаря процессу диффузии.

При диффузии (случайном блуждании) носители за время t удаляются от начального положения на расстояние $x=\sqrt{Dt}$, где D — коэффициент диффузии носителей в данном материале*). Отсюда минимально возможное время переключения t_0 в БТ с толщиной базы W определяется как $t_0 \approx W^2/D$.

Следует отметить, что коэффициент диффузии связан с подвижностью носителей μ зависимостью, установленной Альбертом Эйнштейном. В соответствии с соотношением Эйнштейна значение D прямо пропорционально величине μ.

Таким образом, предельно возможное быстродействие биполярных транзисторов, так же как и полевых, тем выше, чем меньше длина пути, проходимого носителями тока (толщина базы W), и чем выше подвижность носителей μ в материале, из которого изготовлен транзистор.

В настоящее время подавляющая часть БТ изготавливается из кремния (Si). Подвижность электронов в Si примерно 0,1 м^2/(В · с). Наиболее перспективный материал для изготовления БТ ближайшего будущего — арсенид галлия (GaAs). Подвижность электронов в нем — около 1 м^2/(В · с).

Практическая скорость срабатывания современных серийных логических ячеек на БТ составляет 1— 10 нс. Рекордно малое время переключения БТ, полученное в 1984 году, равняется 30 пс ($30 \cdot 10^{-12}$ с).

Современный сверхвысокочастотный транзистор (увеличение 5). Коэффициент усиления $\beta \approx 30$, время переключения $\cong 200$ пс, диаметр корпуса 3 мм, толщина 1,5 мм.

---

*) Об этом более подробно можно прочитать, например, в книге М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками», Библиотечка «Квант», вып. 33. (*Примеч. ред.*)

Шестой турнир городов

«Я не прошел на Всесоюзную математическую олимпиаду, но прошу допустить меня решать задачи вне конкурса» — с подобными заявлениями часто обращаются в жюри школьники из городов, проводящих Всесоюзную олимпиаду, а иногда даже и из других городов, выражая готовность специально для этого приехать. Что если бы вход на эти олимпиады был свободным для всех? Мы, конечно знаем, что это нереально — ограничены средства, помещения, возможности жюри и т. д. А все-таки...

Желание пробовать свои силы свойственно молодым. Человека, который идет на соревнование, не остановит возможность поражения — оно, может быть, даже необходимо ему, чтобы получить правильные ориентиры в выборе своего пути. Что если всё-таки попробовать найти такую форму организации соревнований, которая позволила бы «скрестить шпаги» более широкому кругу учащихся, чем это позволяют финальные туры олимпиады, сохранив при этом ориентацию на задачи, находящиеся по своему содержанию и уровню в преддверии настоящей науки?

В течение ряда лет такая форма нащупывалась, и теперь можно сказать, что она в какой-то степени найдена. Это — Турнир городов. Создан Центральный оргкомитет Турнира во главе с академиком Пугачевым В. С., а в некоторых городах — местные оргкомитеты. Скорее всего, эта форма будет еще изменяться. Чтобы дать представление об этом соревновании, мы расскажем о прошедших турнирах.

Инициатива проведения первого турнира принадлежит Совету молодых ученых и специалистов при ЦК ЛКСМ Латвии. В турнире приняли участие школьники из Риги, Москвы и Киева. Затем круг городов-участников постепенно расширился. В 1984/85 учебном году в шестом турнире участвовали 28 городов с общим населением 31 млн. чел. Турнир проводился по математике, а в трех городах — еще и по информатике. В дальнейшем предполагается тематическое расширение турнира. Специальная комиссия отобрала задачи и разослала их по городам. Добрая традиция турниров — хорошие задачи. Правда, некоторые из них трудноваты, но за них дается много очков (баллы за полное решение каждой задачи сообщались вместе с условиями). Это вполне естественно для соревнований общесоюзного уровня, школьники нашей страны на международных математических олимпиадах занимали первые места примерно столько же раз, сколько все остальные страны, вместе взятые. При этом трудность задач вполне реалистическая — каждая задача кем-либо из участников была решена, а некоторые участники решили почти все задачи.

И вот в одно воскресенье учащиеся в своих городах одновременно в течение пяти часов решали задачи. Затем все работы были проверены местными жюри. Часть работ направлялась на контрольную проверку в Центральный оргкомитет для выработки единых требований к работам.

Кроме содержательной стороны — интересных задач — турнир имеет и спортивную сторону — он проводится как личное и командное первенство. Организация личного первенства в пределах города — дело местного жюри. Командное же первенство организовано так, что размеры города мало влияют на итог. Показатель командного выступления города определяется как средний балл N лучших работ этого города. Это N для городов с числом жителей свыше 450 тысяч равно округленному до целого числу сотен тысяч жителей города; $N=5$ для городов с числом жителей от 100 тысяч до 450 тысяч, причем средний балл пяти лучших работ для таких городов умножается еще на некоторый поправочный коэффициент k, зависящий от населения города как убывающая функция и не превышающий для этих городов 1,6. Для городов с населением до 100 тысяч жителей показатель не определяется, так как сопоставлять такие города с крупными городами всё же, видимо, не стоит.

В 1984/85 учебном году было проведено два тура турнира — осенний и весенний — на правах двух попыток. Тем учащимся, которые приняли участие в обоих турах, был засчитан лучший из их результатов. В некоторых городах-участниках проводился только один тур. По итоговому показателю на первом месте оказалась Рига — 42 очка. А вот еще несколько городов, имеющих высокие показатели: Белорецк (39), Ленинград (36), Одесса (29), Москва, Севастополь (по 28,5), Свердловск (25,5), Тарту, Петрозаводск (по 24,5). Хорошо выступил гость турнира — болгарский город Ямбол — 26,4 очка.

В 1985/86 учебном году турнир проводится также в два тура, причем весенний тур намечен на 16 марта 1986 г. Заявки на участие в нем высылаются местным оргкомитетом или инициативной группой, связанной с органами просвещения, вузами и научными учреждениями (эта группа берет на себя функции местного оргкомитета) по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, редакция журнала «Квант», «Турнир городов. Математика». Просим всех учащихся и преподавателей, заинтересовавшихся Турниром городов, присылать свои идеи, предложения, а также задачи для турнира. Задачи прошлых турниров частично опубликованы в «Кванте» (в некоторых случаях — в усиленном варианте) — это М711—М715 («Квант», 1981 г.), М756, М757 (1982 г.), М807, М808, М816, М818—М820 (1983 г.), М851, М863, М864, М866—М870, М883—М886 (1984 г.), М914, М923, М927, М936—М939 (1985 г.).

Н. Н. Константинов,
зам. председателя оргкомитета

XIX Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО

Заключительный этап XIX Всесоюзной олимпиады школьников по математике состоялся на гостеприимной белорусской земле в г. Могилеве с 6 по 13 апреля. В соревнованиях участвовало 162 школьника, представлявшие команды союзных республик, Москвы, Ленинграда и некоторых спецшкол, — победители предыдущего, республиканского, этапа олимпиады и обладатели дипломов I и II степени Всесоюзной олимпиады прошлого года. В олимпиаде по традиции участвовала также команда хозяев — три школьника из г. Могилева.

В этом году олимпиада была посвящена 40-летию Победы в Великой Отечественной войне, и глубоко символично, что она проходила именно в Белоруссии, так много выстрадавшей в кровавой битве с врагом, и где свято чтут память героев войны.

На торжественном открытии заключительного этапа олимпиады, состоявшемся в прекрасном Дворце пионеров и школьников, председатель оргкомитета олимпиады заместитель министра просвещения БССР М. М. Круглей тепло поздравил участников с началом соревнований.

Заключительный этап соревнований проходил, как обычно, в два тура. В каждом из них школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов. Условия задач и список победителей мы помещаем в конце статьи.

Как участники соревнований справились с решением задач, видно из таблицы 1, где результаты даны в процентах.

Таблица 1

Класс	№ задачи / Результат	1	2	3	4	5	6	7	8
VIII	справились	84	18	68	32	48	68	16	27
	справились частично	0	5	14	16	16	11	9	7
	не справились	16	77	18	52	36	21	75	66
IX	справились	32	20	25	15	27	37	31	12
	справились частично	39	27	14	10	15	8	17	2
	не справились	29	53	61	75	58	55	53	86
X	справились	66	46	56	19	84	44	39	6
	справились частично	14	3	8	6	2	14	8	3
	не справились	20	51	36	75	14	42	53	91

При подведении итогов, после проверки работ, жюри произвело распределение задач по их трудности и присудило каждой из них определенное число баллов (см. таблицу 2).

Таблица 2

Класс / № задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
VIII	6	10	6	8	7	6	9	8	60
IX	5	8	7	10	7	6	7	10	60
X	5	8	7	10	5	7	8	10	60

Участники олимпиады, набравшие не менее 30 баллов, получили дипломы; распределение призеров по классам дано в таблице 3.

Таблица 3

	Дипломы			Набрали более 30 баллов
	I	II	III	
VIII класс (из 44) Количество баллов	6 56—60	7 41—60	10 30—38	48 %
IX класс (из 59) Количество баллов	6 50—60	9 36—44	12 25—35	31 %
X класс (из 59) Количество баллов	2 56—57	8 47—52	20 30—42	49 %
В целом из 162	14	24	42	42 %

24 участника олимпиады были награждены призами, учрежденными организациями и предприятиями г. Могилева.

Несколько слов о работе и составе жюри. Возглавляли работу академик АН БССР В. П. Платонов и академик АН УССР Б. В. Гнеденко, им помогали профессор Могилевского пединститута А. А. Столяр, профессор Московского физико-технического института Г. Н. Яковлев, старший научный сотрудник института математики АН БССР В. И. Берник и доцент Московского государственного университета Ю. В. Нестеренко. Жюри олимпиады, как и всегда, было сформировано из представителей многих наших республик. В состав жюри от БССР были включены 28 человек; в основном это сотрудники института математики АН БССР, Белорусского государственного и Гродненского университетов, Могилевского пединститута. В каждом классе было по два куратора (один — член методической комиссии Центрального оргкомитета, другой — из Белоруссии). Перед разбором задач руководители команд и школьники получили книжечки с полными решениями задач олимпиады. Желающим школьникам в специально отведенное время были показаны их работы после проверки. На встрече с руководителями команд и участниками члены жюри ответили на многочисленные вопросы. На традиционном математическом бое между командой участников и командой жюри, который прошел очень увлекательно, на этот раз победила команда жюри. Интересно прошла встреча с представителями редколлегии журнала «Квант».

Могилевцы отнеслись к юным математикам с большой теплотой. В программе олимпиады — встречи с учащимися школ г. Могилева, вечера дружбы народов СССР, посещение мемориального комплекса советско-польского боевого содружества в п. Ленино, экскурсии по местам боевой славы, экскурсии по городу и многое-многое другое. Много заботы и теплоты в дело организации и проведения олимпиады вложили члены коллектива средней общеобразовательной школы-интерната спортивного профиля г. Могилева (директор Мартынов В. П.). Подготовка и проведение Всесоюзной олимпиады широко освещались в республиканской и областной печати.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 13 апреля в актовом зале Дворца пионеров и школьников, где были вручены дипломы и призы победителям. В заключение могилевцы передали эстафету проведения олимпиады г. Ленинграду.

Задачи

Первый день

8 класс

1. В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, равна половине площади треугольника.

2. Существует ли натуральное число n, обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n (в десятичной записи) равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000^2?

3. Какое наибольшее число дамок можно расставить на шашечной доске 8×8 клеток так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой?

4. В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были окрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

9 класс

1. На плоскости дана прямая l, точка O, не лежащая на этой прямой, и произвольная точка A. Докажите, что точку O можно перевести в точку A, используя только симметрии относительно прямой l и повороты с центром в точке O.

2. В каком наибольшем числе различных целых точек квадратный трехчлен ax^2+bx+c, у которого $a>100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

3. Различные натуральные числа $a, b, \ldots, k$ записаны в виде таблицы (рис. 1). Известно, что каждое число, к которому на рисунке ведут две стрелочки, равно сумме чисел, стоящих у начала этих стрелочек. При каком наименьшем d возможно такое расположение?

4. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Докажите:

а) что существует номер k_0 такой, что для всех $k>k_0$ справедливо неравенство

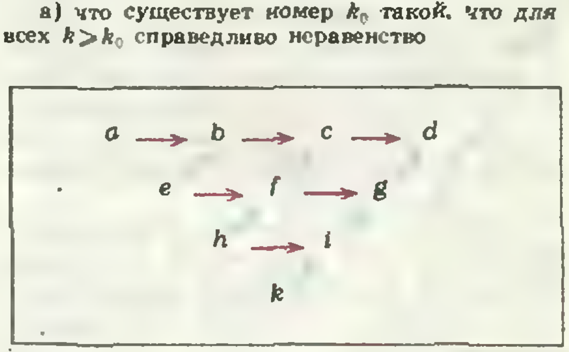


Рис. 1.

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1;$$

б) что для всех достаточно больших номеров справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985.$$

10 класс

1. Решите неравенство

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\cdot\sin y\leqslant 0.$$

2. На плоскости нарисован выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно точки B, точку B_1, симметричную точке B относительно C, ..., точку E_1, симметричную точке E относительно точки A, и после этого сотрем пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что при помощи циркуля и линейки, зная расположение точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 можно восстановить пятиугольник $ABCDE$.

3. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задается правилами: $a_{2n}=a_n$ при $n\geqslant 1$ и $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ при $n\geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

4. На плоскости проведено n прямых ($n>2$), делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из этих областей окрашены, причем никакие две окрашенные области не могут соприкасаться по границе. Докажите, что число окрашенных областей не превосходит $(n^2+n)/3$.

Второй день

8 класс

5. Имеется куб, кубическая коробка с крышкой тех же размеров и шесть красок. Каждой краской окрашивается одна грань куба и одна из граней коробки. Докажите, что куб можно таким образом положить в коробку, чтобы каждая грань куба прилегала к грани коробки, окрашенной другим цветом.

6. Диаметр A_0A_5 делит окружность с центром в точке O на две полуокружности. Одна из них разделена на пять равных дуг A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Прямая A_1A_4 пересекает OA_2 и OA_3 в точках M и N. Докажите, что сумма длин отрезков A_2A_3 и MN равна радиусу окружности.

7. Ученики школьного математического кружка смастерили вычислительную машину, которая четверку чисел (a, b, c, d) нажатием кнопки превращает в четверку $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Докажите, что если в исходной четверке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки получится четверка, хотя бы одно из чисел которой больше 1985.

8. Числа $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1>b_2>\ldots>b_n$ — числа второй группы в убывающем порядке. Докажите, что

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2.$$

9 класс

5. Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. У скольких кубиков имеются окрашенные грани?

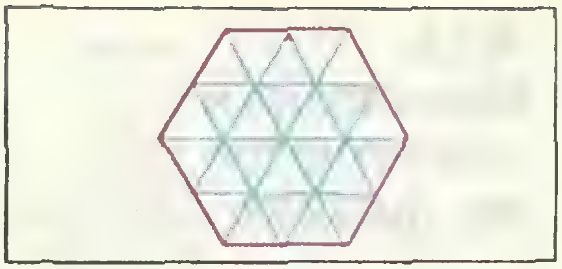


Рис. 2.

6. См. задачу 8 из восьмого класса.

7. Одна из двух окружностей радиуса R проходит через вершины A и B, а другая — через вершины B и C параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если M — вторая точка пересечения этих окружностей, то радиус окружности, описанной около треугольника AMD, равен R.

8. Правильный шестиугольник разбит на 24 треугольника. Во всех 19 узлах фигуры, показанной на рисунке 2, записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 треугольников, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания, если мы будем считать против часовой стрелки.

10 класс

5. Решите уравнение

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ddots\,\cfrac{}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$

(в записи выражения, стоящего слева, фигурирует 1985 двоек).

6. Из правильного пятиугольника со стороной 1 см удалены все точки, отстоящие от всех вершин пятиугольника на расстояние, меньшее 1 см. Найдите площадь оставшейся части.

7. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m>12$ можно вырезать прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m.

8. Длины ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 1 см. Найдите наименьшее расстояние между точками окружностей, одна из которых вписана в основание куба $ABCD$, а вторая проходит через вершины A, C и B_1.

XIX Всесоюзная олимпиада по физике

Кандидат физико-математических наук
А. А. БИРЮКОВ,
А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Заключительный этап XIX Всесоюзной физической олимпиады школьников проходил в этом году с 17 по 24 апреля в Куйбышеве.

18 апреля состоялось торжественное открытие олимпиады. Собравшихся приветствовали члены Оргкомитета олимпиады, члены жюри, победители прошлых олимпиад. В тот же день участники возложили венки к памятнику В. И. Ленину и к Монументу Славы.

Утром 19 апреля прошел теоретический тур. Как обычно, Методическая комиссия подготовила различные варианты для учащихся 8, 9 и 10 классов. Восьмиклассникам предлагалось решить 4 задачи (на их решение отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (в течение 5 часов). Вот эти задачи (часть из них напечатала в Задачнике «Кванта» в 9 и 10 номерах журнала за этот год):

Задачи теоретического тура

8 класс

1. Для точной подстройки частоты вращения диска электропроигрывателя ($33^1/_3$ оборота в минуту) на его боковую поверхность наносят метки, которые освещают неоновой лампочкой с частотой 100 вспышек в секунду. Каким должно быть число меток, чтобы при номинальной скорости они казались неподвижными?

После отключения двигателя силы сухого трения начинают тормозить диск, и метки «бегут». За первые 4 с мимо точки наблюдения «пробегают» 10 меток. Через какое время диск остановится? Через какой промежуток времени метки «побегут» в другую сторону?

2. Декоративная квадратная штора размерами 1,5×1,5 м висит на карнизе вдоль вертикальной стены. Нижний край шторы поднимают вровень с верхним, так что штора оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Найдите зависимость силы, действующей на карниз, от времени. Штора, тонкая и гладкая, имеет массу 3 кг.

3. Для поддержания постоянной температуры воды в проточном аквариуме используют два одинаковых спиральных нагревателя (рис. 1). В обычном режиме включают один из них, а если подключают параллельно второй нагреватель, то расход холодной воды приходится увеличить в три раза. Как нужно изменить расход холодной воды, если мы включим нагреватели в сеть последовательно? Каков должен быть расход холодной воды, если включена одна спираль мощности $P = 100$ Вт? Температура холодной воды $t_1 = 10$ °С, температура воды в аквариуме $t_2 = 27$ °С. Вода быстро перемешивается.

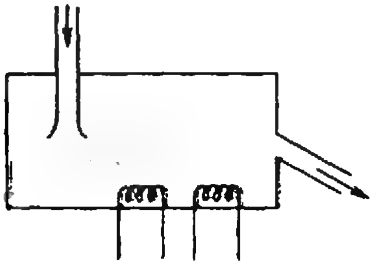


Рис. 1.

4. Для лабораторной работы в качестве источника тока используется мощный аккумулятор с последовательно присоединенным к нему токоограничивающим резистором. Вначале к этому источнику присоединили последовательно включенные вольтметр и миллиамперметр; их показания оказались равными $U_1 = 4{,}1$ В, $I_1 = 8$ мА. Затем эти приборы соединили параллельно и подключили к источнику (хорошо, что мы догадались ввести в схему резистор!); их показания в этом случае были равны $U_2 = 1{,}1$ В, $I_2 = 22$ мА. Рассчитайте по этим данным сопротивление токоограничивающего резистора.

9 класс

1. Мяч подбросили вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_1$; на землю он упал со скоростью $\vec{v}_2$. Рассчитайте время полета мяча, считая, что сила сопротивления воздуха при движении мяча прямо пропорциональна его скорости.

2. При относительной влажности воздуха $\varphi_1 = 50$ % вода, налитая в блюдце, испарилась на открытом воздухе за время $t_1 = 40$ мин. За какое время это произошло бы при относительной влажности $\varphi_2 = 80$ %?

3. Смесь газов, состоящую из $m_1 = 100$ г азота и неизвестного количества кислорода, подвергают изотермическому сжатию при температуре $T = 77{,}4$ К. График зависимости давления смеси газов от ее объема (в условных единицах) приведен на рисунке 2. Определите массу кислорода. Рассчитайте давление насыщенных паров кислорода при этой температуре.

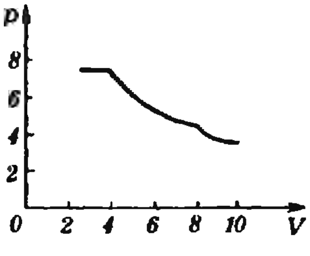


Рис. 2.

Примечание. $T=77{,}4$ К — это температура кипения жидкого азота при нормальном давлении, кислород кипит при более высокой температуре.

4. Для зарядки аккумулятора от источника с напряжением $U_0=27$ В и внутренним сопротивлением $r_1=10$ Ом был использован конденсатор емкости $C=1000$ мкФ, поочередно подключаемый к источнику и аккумулятору на одинаковые промежутки времени $\tau=0{,}1$ с. За какое время аккумулятор будет полностью заряжен? Известно, что при силе тока $I_0=1$ А аккумулятор заряжается за $t_1=6$ ч. ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}=12$ В; последовательно с ним включен резистор с сопротивлением $r_2=20$ Ом. Во сколько раз аккумулятор зарядится быстрее при уменьшении времени τ в 1000 раз?

Примечание. Считать, что за время $\tau=0{,}1$ с конденсатор успевает полностью заряжаться и разряжаться. Внутренним сопротивлением аккумулятора можно пренебречь.

5. Для того чтобы получить две совершенно одинаковые катушки, их наматывают на немагнитный сердечник одновременно, используя сложенные вместе провода (рис. 3). Одну из катушек подключают через ключ K к батарейке $Б$ с напряжением U, вторую — к резистору с сопротивлением R. Ключ замыкают. Рассчитайте мощность тока на резисторе. Нарисуйте график зависимости силы тока через батарейку от времени.

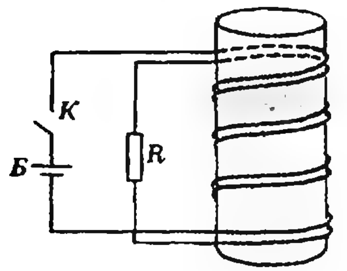


Рис. 3.

Через время τ ключ размыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе, начиная с этого момента?

Индуктивность каждой из катушек L. Батарейку считать идеальной. Сопротивлением проводов пренебречь.

10 класс

1. Футболист забивает гол с одиннадцатиметрового штрафного удара точно под перекладину ворот. Какую минимальную энергию нужно было для этого сообщить мячу? Высота ворот $h=2{,}5$ м, масса мяча $m=0{,}5$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Космическая станция массой M и состыкованный с ней спутник массой m движутся вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в 1,25 раза превышает радиус Земли R. В некоторый момент времени спутник катапультируется со станции в направлении ее движения и переходит на эллиптическую орбиту с апогеем, удаленным от центра Земли на расстояние $10\ R$. При таком отношении масс m и M спутник встретится со станцией, совершив один оборот вокруг Земли?

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. В одном из вариантов классического опыта, поставленного академиком И. К. Кикоиным, однослойная короткозамкнутая катушка индуктивности $L=3\cdot10^{-5}$ Гн, сделанная из тонкой сверхпроводящей проволоки, подвешивалась на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вверх вдоль оси катушки (рис. 4). Нить подвеса в исходном состоянии не закручена, сила тока в катушке равна нулю. Индукция B магнитного поля медленно увеличивалась от нулевого значения до значения $B_0=0{,}1$ Тл, при котором сверхпроводимость скачком исчезала и проволока переходила в нормальное состояние. Катушка при этом закручивалась. Определите максимальный угол закручивания катушки, считая, что упругий момент нити пропорционален углу закручивания (коэффициент пропорциональности $G=10^{-7}$ Н · м). Число витков катушки $n=100$, радиус витков $R=1$ см, масса катушки $M=10$ г. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

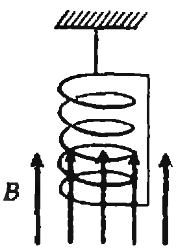


Рис. 4.

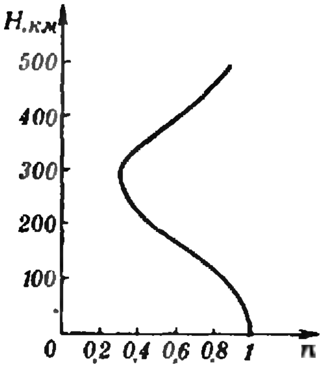


Рис. 5.

5. Распространение коротких радиоволн в верхних слоях атмосферы Земли (ионосферы) можно описывать законами геометрической оптики, если принять, что показатель преломления n для радиоволн меньше единицы и изменяется с высотой H от поверхности Земли так, как показано на рисунке 5. На спутнике, летящем на высоте 200 км, установлен радиопередатчик, излучающий радиоволны равномерно по всем направлениям (изотропно). Пренебрегая поглощением радиоволн в ионосфере, оцените долю излучаемой передатчиком мощности, которая уносится радиоволнами за пределы земной атмосферы. При оценках поверхность Земли считать плоской, а отражение радиоволн от нее — зеркальным (без потерь).

Примечание. Телесный угол конуса с углом при вершине β равен: $\Omega=2\pi(1-\cos(\beta/2))$.

В тот же день жюри олимпиады (в его составе были представители Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Еревана, Вильнюса и Куйбышева) проверило и оценило все работы.

Отметим, что окончательные критерии оценок — сколько баллов за что ставить — вырабатываются и утверждаются в процессе работы жюри. И еще одна особенность — перед проверкой с работы снимают обложку (единственное место, где указаны данные участника) и восстанавливают ее только после окончания работы жюри. После оглашения результатов проводится подробный разбор задач, где и

Призеры олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. В первом ряду слева направо: Д. Глущенков, А. Гольдин, Д. Карасев, Д. Будько, С. Бобылев; во втором ряду: О. Волков, С. Мягчилов, П. Кларк, А. Матыцин, А. Гущин; в третьем ряду: Т. Иваненко, Г. Григорьев, А. Лобода, А. Севастьянов, Г. Климович.

сообщаются выработанные жюри критерии оценок. Тот, кто посчитает свои баллы заниженными, может прийти на апелляцию и еще раз обсудить свою работу. Такой порядок позволяет практически исключить серьезные ошибки при проверке.

19 апреля все ребята приняли участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике.

20 апреля состоялся экспериментальный тур. Каждому из участников предлагались 2 задачи, на выполнение которых отводилось 4 часа.

Первая задача для 8 класса была очень похожа на знаменитую задачу о короне царя Гиерона (определение наличия примесей в золоте), только с более доступными материалами — пластилином и железом (кусок железа находился внутри пластилина).

Во второй задаче для восьмиклассников требовалось определить полярность батарейки. Для этого нужно было догадаться соорудить подобие гальванометра из иголки, ниток и катушки, намотанной из проволоки (еще была дана батарейка с обозначенной полярностью).

В 9 классе тоже были предложены механическая и электрическая задачи. В первой задаче нужно было определить массу бруска пластилина, пользуясь только нитками, гирькой заданной массы, штативом с лапкой и миллиметровой бумагой. Возможное (до начала работы жюри считало, что единственно возможное) решение — подвесить брусок и гирьку на нитях, осуществить неупругий удар между ними и по соотношению углов отклонения нитей оценить отношение масс. Многие так и делали. Отметим, что жюри обычно старается задать такой комплект оборудования, чтобы исключить «лобовое» решение,— в комплекте оборудования к этой задаче не было ни весов, ни даже линейки (из нее можно сделать рычаг). Однако один из участников развинтил штатив и использовал его штангу как рычаг, при этом точность результатов получилась ничуть не хуже, чем при «официальном» способе. Еще один хитроумный девятиклассник использовал в качестве рычага сам брусок пластилина. Хотя точность при этом и получилась несколько хуже, жюри все же сочло такой способ вполне разумным.

Во второй задаче для девятиклассников нужно было определить полярность и величину ЭДС батарейки при помощи известной батарейки, двух одинаковых реостатов, катушки из проволоки, ниток, иголки, соединительных проводов и листа бумаги. Эта задача — усложненный вариант второй задачи для 8 класса, в ней тоже нужно было воспользоваться самодельным гальванометром. Кроме выбора оптимального метода, в этой задаче требовалось немалое умение и аккуратность при измерениях.

Первая задача для 10 класса относилась к электростатике. При помощи школьного электрометра нужно было определить емкость конденсатора, сделанного из куска фольгированного диэлектрика — стеклотекстолита. Заряжать электрометр можно было наэлектризованной эбонитовой палочкой. Еще в комплект приборов входила линейка. Идея эксперимента заключалась в том, чтобы вначале найти емкость самого электрометра, а затем уже неизвестную емкость конденсатора — по уменьшению показаний заряженного электрометра при подключении к нему конденсатора. Емкость же электрометра можно было найти, заряжая его без полой сферы, а затем ставя сферу на место. Емкость сферы легко рассчитать, измерив ее радиус. (Кстати, измерение радиуса сферы при помощи линейки — это не такая уж простая экспериментальная задача.)

Во второй задаче для десятиклассников нужно было определить у неизвестного транзистора тип проводимости, найти вывод базы, а затем собрать схему усилительного каскада и измерить его коэффициент усиления.

Если в теоретическом туре ошибки участников были разнообразными и «индивидуальными», то в экспериментальных задачах можно отметить несколько ошибок, типичных для многих. Перечислим их.

1) *Выбранный метод измерений никак не обосновывается* (хотя обычно тут нужно всего несколько слов). Например, в электростатической задаче для 10 класса достаточно было написать, что емкость конденсатора можно найти только сравнением с известной величиной (так как нечем измерять заряды и потенциалы), а единственное тело, емкость которого можно вычислить в этом опыте,— сфера электрометра.

2) *Из приведенного описания не всегда ясен способ измерения* (это очень плохо!). Конечно, в условиях нехватки времени очень не просто идеально оформить работу, но все же часть описания совершенно необходима. Обычно здесь достаточно рисунка с короткими пояснениями. Следует помнить, что чем легче понять, как была проделана работа, тем лучше для самого экспериментатора (если, конечно, эксперимент был проделан правильно).

3) *Во многих работах даже не сделано попытки оценить погрешность измерений.* Результат измерений, погрешность которых неизвестна, не имеет ровно никакой ценности. Обычно достаточно воспользоваться любым простым способом оценки погрешностей приборов, а при косвенных измерениях — методом границ. Важно также уметь объяснять, нужно ли проводить эксперимент несколько раз и усреднять полученные результаты. В данной статье нет возможности написать о погрешностях измерений сколь-нибудь подробно. Желающие могут прочитать про это, например, в превосходной книге Дж. Тейлора «Введение в теорию ошибок» (М.: Мир, 1985).

4) *Не всегда данные непосредственных измерений и условия измерений приведены в работе* (часто они беспорядочно рассеяны в черновике). Эти данные обязательно должны быть занесены в таблицу (можно применить и другой удобный способ, если вы его придумаете).

Участники олимпиады не только решали задачи, но и активно отдыхали. Культурная программа олимпиады была очень насыщенной — спектакли, большой концерт на открытии олимпиады, цирковое представление, экскурсии, встреча с молодыми артистами Куйбышева, спортивные игры, вечера отдыха в школах. Хозяева олимпиады много сделали для того, чтобы гостям было интересно. Немало разнообразили эту программу и студенты Московского физико-технического института — бывшие участники (и победители) олимпиад, приехавшие в Куйбышев. Они вывешивали стенгазеты — частью серьезные, больше шуточные, отвечали на вопросы ребят, рассказывали о студенческой жизни в МФТИ. (Услышав эти рассказы, один из авторов статьи захотел было все бросить и снова поступать в Физтех. Правда, потом передумал.)

Перед закрытием олимпиады была устроена встреча участников с членами жюри и членами Редакционной коллегии журнала «Квант». Встреча прошла живо и интересно, ребята высказали свои мнения и пожелания, касающиеся журнала (одно из них нам особенно понравилось — увеличить в два раза объем журнала!).

23 апреля состоялось награждение победителей и торжественное закрытие олимпиады. Кроме премий, победителям олимпиады было присуждено много специальных призов — за лучшую работу в теоретическом, а также в экспериментальном туре, самому молодому и самому удаленному (географически) ученику и много других, среди которых был даже приз за лучший результат на апелляции (этот приз вызвал радостное оживление в аудитории).

Мы желаем больших успехов всем участникам XIX Всесоюзной физической олимпиады школьников.

Призеры XIX Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Борисов Л. (Минск, с. ш. 19),
Гульчук П. (Киев, с. ш. № 145),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 10),
Озолс Д. (Рига, с. ш. № 1),
Смирнов С. (Ленинград, с. ш. № 99),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 9 классам—
Гиль А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Глущенко Г. (Запорожье, с. ш. № 91),
Калинин Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Кокте Г. (Рига, с. ш. № 1),
Кярас С. (Молетай, с. ш. № 2),
Лунин А. (Москва, с. ш. № 57);

по 10 классам —
Бондаренко О. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Малеванец А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Баран А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Борисов А. (Минск, с. ш. № 19),
Наумов П. (Москва, с. ш. № 679),
Осолоткин А. (Петрозаводск, с. ш. 29),
Тульбович А. (Харьков, с. ш. № 27),
Уусталу Т. (Таллин, с. ш. № 44),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40);

по 9 классам —
Бендорфа К. (Рига, с. ш. № 1),
Крикис М. (Рига, с. ш. № 1),
Мурадов Б. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Петрунин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Порошин В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рачинский Д. (Харьков, с. ш. № 27),
Редько Т. (Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4),
Роганов В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Хапочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 10 классам —
Вертгейм Л. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Иванов Л. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Канепс Д. (Лиелварде, с. ш. № 1),
Коротков А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Леонтьева О. (Ленинград, с. ш. № 239),
Маслов А. (Москва, с. ш. № 109),
Пентус М. (Таллин, с. ш. № 1),
Скуиньш А. (Рига, с. ш. № 1).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Азамов Н. (Андижан, с. ш. № 14),
Васильев К. (Тула, с. ш. № 45),
Енукидзе Н. (Тбилиси, ФМШ № 42),
Журавлев В. (Гайворон, с. ш. № 2),
Зудилин В. (Бельцы, с. ш. № 16),
Когон Л. (Кемерово, с. ш. № 89),
Прауст В. (п. Кехра ЭССР, Кехровская с. ш.),
Рощин И. (Челябинск, с. ш. № 138),
Сушинскас Ж. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Татаринов А. (Сморгонь, с. ш. № 4);

по 9 классам —
Арапов А. (Воронеж, с. ш. № 8),
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Борисенко А. (Харьков, с. ш. № 27),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Газарян Т. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ),
Гольдштейн Л. (Киев, с. ш. № 145),
Игнатьев М. (Саратов, с. ш. № 13),
Померанцев М. (Черкассы, с. ш. № 4),
Судаков В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Фролкин М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шаповал А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Шейнин С. (Молодечно, с. ш. № 7);

по 10 классам —
Алексеев Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Барабаш А. (Киев, с. ш. № 105),
Бибин Д. (Витебск, с. ш. № 31),
Гончаренко Ю. (Кишинев, с. ш. № 37),
Дондошанский И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Кирилин П. (Дубна, с. ш. № 10),
Клигис С. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Куцак С. (Липецк, с. ш. № 44),
Липай А. (Минск, с. ш. № 50),
Михайлов В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мухин С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Нажмитдинов А. (Наманган, с. ш. № 7),
Раджюнас М. (Вильнюс, с. ш. № 23),
Святодух И. (Красноармейск Донецкой обл. с. ш. № 3),
Сийнер М. (Таллин, Таллинская музыкальная школа),
Скворцов В. (Москва, с. ш. № 57),
Тейтель М. (Киев, с. ш. № 145),
Фоглер М. (Калинин, с. ш. № 17).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Глущенков Д. (Ленинград, с. ш. № 261),
Гольдин А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам —
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Гущин А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 58),
Матыцин А. (Москва, с. ш. № 91),
Мягчилов С. (Одесса, с. ш. № 16);

по 10 классам —
Григорьев Г. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),

Иваненко Т. (Киев, с. ш. № 145),
Климович Г. (п. Болшево Московской обл., с. ш. № 3),
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Вихлинин А. (Рязань, с. ш. № 20),
Пигарев А. (Улан-Удэ, с. ш. № 9),
Фурс А. (Минская обл., Дричинская с. ш.),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10),
Юсухно О. (Киев, с. ш. № 145);

по 9 классам —
Бакарян Т. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ),
Белопольский А. (Киев, с. ш. № 145),
Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Гегжиа Г. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Николаишвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Свердлов М. (Минск, с. ш. № 50),
Сенаторов П. (Москва, с. ш. № 52);

по 10 классам —
Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Жестков Ю. (Алма-Ата, РФМШ),
Мороз О. (Алма-Ата, РФМШ),
Савченко М. (Белгород, с. ш. № 3),
Сегаль И. (Сумы, с. ш. № 10),
Солдатов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черп О. (Минск, с. ш. № 50),
Ян Д. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Ефремов Д. (Ереван, с. ш. № 147),
Кару К. (Пылтсамаа, с. ш. № 1),
Комов В. (Гуково, с. ш. № 23),
Костин И. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Пудгородский Ю. (Чернигов, с. ш. № 3);

по 9 классам —
Гайворонский М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),

Никитин И. (Горький, с. ш. № 172),
Посудневский О. (Береза, с. ш. № 1),
Рося С. (Минск, с. ш. № 76),
Санников А. (Ленинград, с. ш. № 344),
Эрд Ю. (Таллин, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Климачев А. (Минск, с. ш. № 116),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Петров В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ржевский О. (Рига, с. ш. № 63),
Степанов В. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ),
Фельдман Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Фурман В. (Ташкент, с. ш. № 19).

Ответы, указания, решения

Отгадать день рождения

2. Из $x\leqslant 31$ и $y\leqslant 12$, следует $ax+by\leqslant 31a+12b$. Таким образом, выражение $ax+by$ принимает значения между $a+b\geqslant 2$ и $31a+12b\leqslant 366$, то есть оно принимает не более 365 различных значений и не может принимать различные значения для всех 366 дней года (високосного).

3. Выражение $ax+by$ одинаково (равно $ab+a+b$) для 1-го дня $(a+1)$-го месяца и $(b+1)$-го дня 1-го месяца.

4. а) Если r — остаток от деления числа $x+31y$ на 31, то $x=r$ при $r\neq 0$ и $x=31$ при $r=0$.
б) Умножим число $16x+31y$ на 2: $2(16x+31y)=32x+62y=31(x+2y)+x$. Если r — остаток от деления числа $2(16x+31y)$ на 31, то $x=r$ при $r\neq 0$ и $x=31$ при $r=0$.
в) Если r — остаток от деления числа $7(12x+7y)=12(7x+4y)+y$ на 12, то $y=r$ при $r\neq 0$ и $y=12$ при $r=0$.

XIX Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

2. **Ответ:** существует. Покажем, что *для любого* натурального числа m существует такое натуральное число n, записываемое единицами и нулями, что сумма $S(n)$ его цифр равна m, а сумма $S(n^2)$ цифр числа n^2 равна m^2.
Доказательство проведем индукцией по m. Для $m=1$ искомое число равно 1. Пусть для некоторого натурального числа m имеется натуральное число n из единиц и нулей такое, что $S(n)=m$ и $S(n^2)=m^2$. Если n имеет k знаков, положим $n_1=10^{k+1}n+1$. Тогда $S(n_1)=m+1$, а

$$n_1^2=10^{2(k+1)}n^2+2n\cdot 10^{k+1}+1.$$

Число $10^{2(k+1)}n^2$ оканчивается не менее, чем $2k+2$ нулями, а число $2n\cdot 10^{k+1}$ имеет $2k+1$ знаков, причем $S(2n)=2S(n)$. Поэтому

$$S(n_1^2)=S(n^2)+2S(n)+1=m^2+2m+1=(m+1)^2,$$

что и требовалось доказать для обоснования индуктивного перехода.

3. **Ответ:** 16. Ясно, что ни одна дамка не может располагаться на краю доски. Кроме того, в двух квадратах доски, обведенных на рисунке 1, все пять черных клеток не могут быть заняты (центральная дамка не бьется). Таким образом, занятыми могут оказаться не более 16 клеток. В то же время 16 дамок с соблюдением условий задачи расставить можно (см. рис. 1).

4. **Ответ:** n красок. Заметим, что угол между произвольной фиксированной стороной AB правильного n-угольника и любой другой его стороной или диагональю (отсчитываемый, скажем, против часовой стрелки) кратен $180°/n$, так как величины дуг, заключенных между

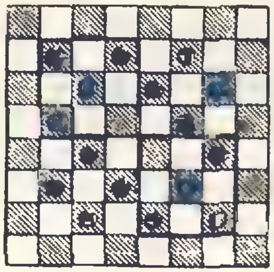


Рис. 1.

концами этих двух отрезков, кратны $360^\circ/n$. Если покрасить одной краской все стороны и диагонали, составляющие с AB один и тот же угол $180^\circ \cdot k/n$ при $k=0, 1, \ldots, n-1$ (все они параллельны друг другу), то условие задачи, очевидно, будет выполнено. При этом понадобится не более, чем n красок. В то же время можно указать n отрезков, каждые два из которых имеют общую точку — это две стороны AB, AC и $n-3$ диагонали, выходящие из вершины A, а также диагональ BC. Следовательно, меньшим чем n числом красок обойтись нельзя.

5. Пусть A и B — цвета дна и крышки коробки. Из трех пар противоположных граней куба хотя бы одна имеет другие цвета — обозначим их C и D, а оставшиеся два цвета (из данных шести) — E и F. Вложим куб в коробку гранью цвета C вниз так, чтобы его боковая грань цвета E прилегала к боковой грани коробки цвета F. Легко видеть, что при этом цвета любой пары прилегающих граней куба и коробки будут различны.

7. Обозначим через (a_n, b_n, c_n, d_n) четверку, получающуюся из (a, b, c, d) за n нажатий кнопки. Заметим, что во всех четверках чисел, кроме исходной, сумма всех чисел четверки равна нулю. Пусть (a, b, c, d) — произвольная четверка с нулевой суммой. Тогда

$$0=(a+b+c+d)^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+$$
$$+2bd+2cd.$$

Рассмотрим теперь четверку (a_1, b_1, c_1, d_1), получающуюся из нее нажатием кнопки. Для нее

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=$$
$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2ab-2bc-2cd-2ad=$$
$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2ac-2bd$$

и, так как $2ac \leqslant a^2+c^2$ и $2bd \leqslant b^2+d^2$,

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

В исходной четверке (x, y, z, t) не все числа равны, поэтому $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2>0$. В силу доказанного выше

$$x_n^2+y_n^2+z_n^2+t_n^2 \geqslant 2^{n-1}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2).$$

Отсюда следует наличие такой четверки с достаточно большим номером n, в которой одно из чисел по модулю больше чем $3 \cdot 1985$. Если это число отрицательно, то в этой же четверке найдется и положительное число, большее 1985, так как сумма всех чисел в ней равна нулю.

9 класс

1. Выполняя последовательно симметрию S_l относительно прямой l, поворот на некоторый угол вокруг точки O и снова S_l, мы можем перевести O в любую точку P окружности ω_1 с центром $O_1=S_l(O)$ и радиусом $r=OO_1$, а значит и в любую точку каждой из окружностей ω_n, $n \geqslant 1$, где ω_n при $n>1$ получается из ω_{n-1} центральной симметрией относительно точки O и последующей осевой симметрией S_l. Легко видеть, что центр O_n окружности ω_n лежит на луче OO_1 и $OO_n=nr$ (рис. 2). При вращении вокруг точки O цепочка окружностей $\omega_1, \ldots, \omega_n$ описывает круг с центром O радиуса $(n+1)r$. Таким образом, можно перевести O в любую точку этого круга и, в частности, при $(n+1)r \geqslant OA$ — в точку A.

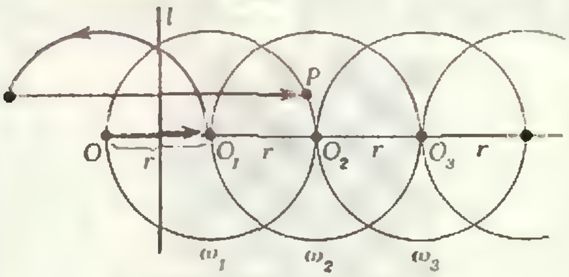


Рис. 2.

2. Ответ: *в двух точках. Если имеются три* точки, удовлетворяющие условию задачи, то какие-то две из них лежат по одну сторону от оси $x=-b/2a$ параболы $y=ax^2+bx+c$. Не уменьшая общности, можно считать, что эти точки x_1 и x_2 $(x_2>x_1)$ лежат правее оси, то есть выполняются неравенства: $x_1+\frac{b}{2a} \geqslant 0$ и $x_2+\frac{b}{2a} \geqslant 1$. Тогда имеем:

$$100 \geqslant |y(x_2)-y(x_1)|=$$
$$=a(x_2-x_1)\left(x_2+x_1+\frac{b}{a}\right)>$$
$$>100\left(x_2+x_1+\frac{b}{a}\right) \geqslant 100.$$

Полученное противоречие показывает, что найдется не более двух целых точек, в которых данный квадратный трехчлен принимает значения, по модулю не превосходящие 50.

Многочлен $101x^2-100$ принимает в двух точках $x_1=-1$, $x_2=1$ значение 1.

3. Ответ: 20. Примеры таблиц с $d=20$ показаны на рисунке 3. Докажем, что это значение d — наименьшее возможное. Предположим, что существует таблица, в которой $d<20$. Легко видеть, что $d=a+3(e+h)+k$. Из этого равенства следует, что

$$20>d=2(e+h)+a+e+h+k \geqslant$$
$$\geqslant 2(e+h)+1+2+3+4,$$

то есть $e+h \leqslant 4$. Можно считать, что $e<h$ (иначе отразим таблицу относительно прямой fd); при этом возможны два случая $e=1$, $h=3$ и $e=1$, $h=2$.

В первом случае $f=4$ и $a+k \leqslant 7$. Все числа в таблице различны, поэтому или $a=2$, $k=5$ или $a=5$, $k=2$.

Во втором случае $f=3$ и, следовательно, должны выполняться неравенства $a \geqslant 4$, $k \geqslant 4$, $a+k \leqslant 10$. Существуют только четыре возможности для пары чисел $(a; k)$: $(4; 5)$, $(4; 6)$, $(5; 4)$, $(6; 4)$. Все эти возможности, как легко проверить, приводят к таблицам с повторяющимися элементами, что противоречит условию.

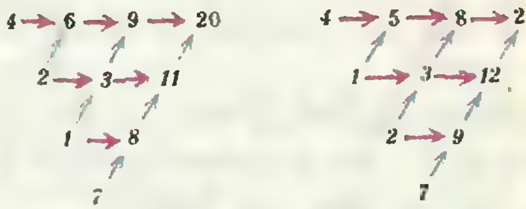


Рис. 3.

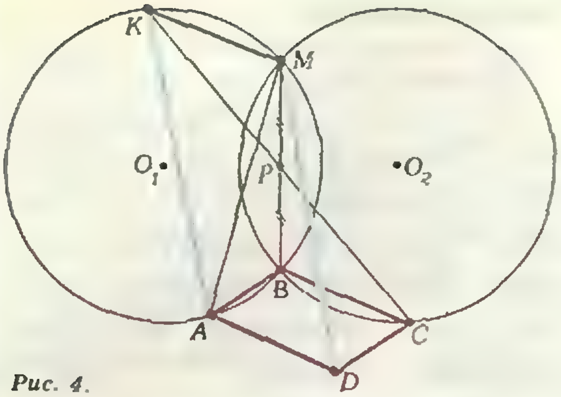


Рис. 4.

5. Пусть параллелепипед имеет размеры $m\times n\times k$ и $k\leqslant n\leqslant m$, тогда число неокрашенных кубиков $S=(m-1)(n-1)(k-1)$. По условию

$$mnk=2(m-1)(n-1)(k-1). \qquad (1)$$

Очевидно, что $k>2$, а при $k\geqslant 5$ равенство (1) противоречиво, так как тогда

$$2(m-1)(n-1)(k-1)=$$
$$=2mnk\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2mnk\left(\frac{4}{5}\right)^3>mnk.$$

Пусть $k=3$. Тогда (1) принимает вид $mn-4m-4n+4=0$ или

$$(m-4)(n-4)=12=12\cdot 1=6\cdot 2=4\cdot 3. \qquad (2)$$

Уравнение (2) с условием $5\leqslant n\leqslant m$ имеет три пары решений $(m;\ n)=(16;\ 5),\ (10;\ 6),\ (8;\ 7)$. Аналогично, при $k=4$ приходим к уравнению $(m-3)(n-3)=6=6\cdot 1=3\cdot 2$, имеющему решения $(9;\ 4)$ и $(6;\ 5)$.

Таким образом, S может принимать одно из пяти значений: 60, 72, 84, 90, 120.

7. Пусть K — точка, симметричная C относительно середины P общей хорды BM данных окружностей (рис. 4). Очевидно, она лежит на окружности, проходящей через A, причем $AKMD$ — параллелограмм. Треугольник AMD конгруэнтен треугольнику AMK, вписанному в эту окружность. Следовательно, радиус его описанной окружности тоже равен R.

10 класс

1. **Ответ:** $\{(\pi n;\ \pi m)\mid m,\ n\in\mathbf{Z}\}$. Из данного неравенства следует, что

$$|\sin x|\cdot|\sin y|\geqslant|\sin x|+|\sin y|,$$

то есть

$$(1-|\sin x|)(1-|\sin y|)\geqslant 1.$$

Следовательно, $\sin x=\sin y=0$.

2. Пусть O — произвольная точка плоскости. Для любой точки X плоскости положим $\vec{OX}=\vec{X}$. По условию задачи $\vec{E}+\vec{E}_1=2\vec{A}$, $\vec{A}+\vec{A}_1=2\vec{B}$, $\vec{B}+\vec{B}_1=2\vec{C}$, $\vec{C}+\vec{C}_1=2\vec{D}$, $\vec{D}+\vec{D}_1=2\vec{E}$. Эта система уравнений легко решается и полученное решение дает возможность построить точки $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ при помощи циркуля и линейки.

4. Если все прямые параллельны друг другу, то они делят плоскость на $n+1$ область. Поэтому, число окрашенных областей не превосходит $n\leqslant n(n+1)/3$.

Пусть теперь не все прямые параллельны друг другу. Граница каждой области состоит из нескольких отрезков и лучей, принадлежащих разным прямым. Эти отрезки и лучи назовем *сторонами области. Каждая область* имеет не менее двух сторон. Через m_2, обозначим число окрашенных областей, имеющих две стороны, через m_3 — число окрашенных областей, имеющих три стороны и т. д. Наконец, через m_k — число окрашенных областей с максимальным числом сторон.

Покажем, что $m_2\leqslant n$. Граница любой области с двумя сторонами состоит из двух лучей, причем каждый луч может лежать на границе только одной из окрашенных областей. Число всех *таких* лучей не превосходит $2n$ (не более двух на каждой прямой). Следовательно, общее число сторон окрашенных областей с двумя сторонами не превосходит $2n$ или $m_2\leqslant n$. Каждая из n прямых разбивается остальными не более, чем на n частей (отрезков и лучей). Поэтому общее число всех частей не превосходит n^2. Каждая из частей является стороной не более чем одной из окрашенных областей. Следовательно, общее число сторон таких областей не превосходит n^2, то есть

$$2m_2+3m_3+\ldots+km_k\leqslant n^2.$$

Число окрашенных областей равно $m_2+m_3+\ldots$ $\ldots+m_k$.

Используя доказанные выше неравенства, находим, что

$$m_2+m_3+\ldots+m_k\leqslant\frac{m_2}{3}+\frac{2m_2+3m_3+\ldots+km_k}{3}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{n}{3}+\frac{n^2}{3}=\frac{1}{3}(n^2+n).$$

5. **Ответ:** $x=3$. Так как $\sqrt{x+1}-1=$ $=x/(\sqrt{x+1}+1)$, при $x\geqslant -1$ многоэтажная дробь тождественно равна $\sqrt{x+1}-1$.

6. **Ответ:** $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}$. Оставшаяся часть пятиугольника разбивается дугами окружностей радиусов 1 см с центрами в его вершинах на 5 конгруэнтных криволинейных треуголь-

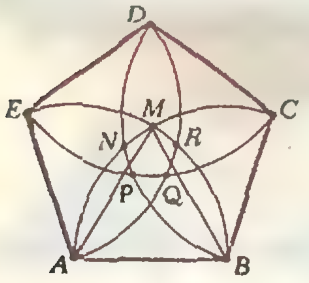


Рис. 5.

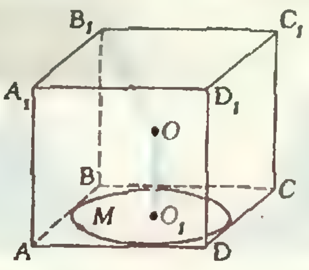


Рис. 6.

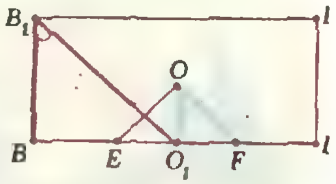


Рис. 7.

ников (на рисунке 5 — BMC, CND, ..., ARB). Сумма площадей криволинейного треугольника BMC и сектора AMB с центральным углом $\widehat{BAM}=\pi/3$ равна сумме площадей правильного треугольника ABM, и сектора BMC с центральным углом $\widehat{CBM}=3\pi/5-\pi/3=4\pi/15$, следовательно, искомая площадь равна

$$5S_{BMC}=5S_{\triangle ABM}+S_{\text{сект}\,BMC}-S_{\text{сект}\,AMB}=$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{2}\left(\frac{4\pi}{15}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}.$$

7. Пусть натуральные числа x и y — длины сторон прямоугольника, $x\leqslant y$. Ясно, что этот прямоугольник удовлетворяет условиям задачи, если выполнены неравенства $xy>m$ и $x(y-1)<m$ (а значит, и $(x-1)y<m$). Таким образом, достаточно доказать, что при любом $m>12$ система неравенств

$$xy>m,\ x(y-1)<m;\ x\leqslant y$$

имеет решение в целых числах. Укажем эти решения. Если k — натуральное число, удовлетворяющее условиям $k^2\leqslant m<(k+1)^2$, то положим: $x=k-1$, $y=k+2$ при $m=k^2$; $x=k$, $y=k+1$ при $k^2<m<k(k+1)$; $x=k-1$, $y=k+3$ при $m=k(k+1)$ и $x=y=k+1$ при $k(k+1)<m<(k+1)^2$.

8. **Ответ:** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$. Рассматриваемые окружности (рис. 6) лежат на двух концентрических сферах — описанной сфере куба (радиуса $\sqrt{3}/2$) и сфере, касающейся всех его ребер (радиуса $\sqrt{2}/2$). Поэтому расстояние между точками окружностей не может быть меньше разности радиусов сфер $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$ и равно ей, если точки лежат на одном луче с началом в центре O сфер (центре куба). Покажем, что такие точки существуют. Достаточно найти на малой окружности такую точку M, которая при гомотетии с центром O и коэффициентом $\sqrt{3}/2$ переходит в точку N большой окружности. Образ малой окружности при этой гомотетии, очевидно, лежит на большой сфере, причем образы точек E и F, в которых малая окружность пересекает отрезок BD (рис. 7), лежат по разные стороны от плоскости AB_1C (луч OF не пересекает эту плоскость, так как $\widehat{O_1OF}=45^\circ>\widehat{BB_1O_1}$). Следовательно, окружности на большой сфере пересекаются и в качестве N и M можно взять точку их пересечения и ее прообраз.

Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника

(см. «Квант», № 10)

1. Решим одновременно упражнения 1 и 3. Воспользуемся формулой Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, a, b, c — стороны треугольника. Применяя неравенство

$$\sqrt{xyzt}\leqslant\frac{x+y}{2}\cdot\frac{z+t}{2}\leqslant\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2,$$

получаем неравенство

$$S=\sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant\left(\frac{p}{3}\right)^2,$$

из которого и следует утверждение упражнения 3. Применяя формулу $S=p\cdot r$, где r — радиус вписанного круга, получаем неравенство $3\sqrt{3}r\leqslant p$ и неравенство $3\sqrt{3}r^2\leqslant pr=S$, из которых следует утверждение упражнения 1.

2. Если треугольник, вписанный в круг, не является правильным, то его площадь (и периметр) можно увеличить. Поэтому среди таких треугольников экстремальным может быть только правильный. Существование экстремума мы при этом не доказываем.

4. Достаточно доказать неравенство $S\geqslant\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$, где h — наименьшая высота, и установить, что в равенство оно обращается, лишь когда треугольник прааильный.

Из упражнения 3 следует, что $p^2\geqslant12\sqrt{3}S=2\sqrt{3}(ah_a+bh_b+ch_c)\geqslant2\sqrt{3}(a+b+c)h=2\sqrt{3}Ph$, откуда $P\geqslant2\sqrt{3}h$, $S=\dfrac{ah_a+bh_b+ch_c}{6}\geqslant\dfrac{Ph}{6}\geqslant\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$. Равенство возможно, лишь когда $h_a=h_b=h_c$, то есть для правильного треугольника.

5. Пусть $\alpha\leqslant60^\circ$, тогда $S=\dfrac{bc\sin\alpha}{2}\leqslant\dfrac{D^2\sin\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}D^2$, где $D=\max(a,b,c)$. Неравенство $P\leqslant3D$ очевидно.

6. Так как многоугольник лежит по одну сторону от своей стороны, то он лежит в соответствующей касательной полуплоскости, и поэтому в их пересечении. С другой стороны, каждая точка пересечения принадлежит многоугольнику.

7. Если две точки выпуклого многоугольника лежат по разные стороны от прямой, то она делит его на два выпуклых многоугольника.

8. Пусть прямая l не пересекает многоугольник. Выберем среди его вершин самую близкую к прямой l и самую далекую и через них проведем прямые, параллельные l. В полосе между ними и лежит наш многоугольник.

9. Утверждение непосредственно следует из упражнений 6 и 8.

10. Нужно (несколько раз) применить преобразование, изображенное на рисунке 8. Получившийся выпуклый многоугольник называется выпуклой оболочкой исходного многоугольника.

11. б) Достаточно рассмотреть отрезок, соединяющий граничные (то есть лежащие на сторонах) точки многоугольника. Если хотя бы один из концов не является вершиной многоугольника, то применяем (один или два раза) следующий частный случай утверждения а):

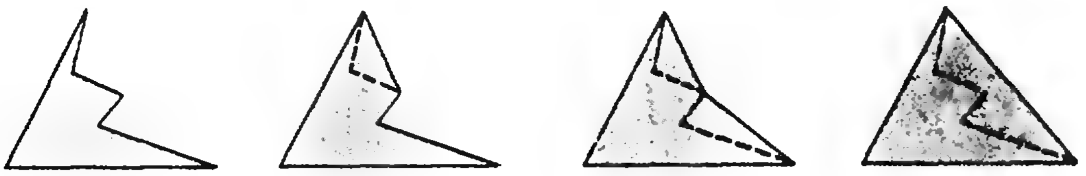


Рис. 8.

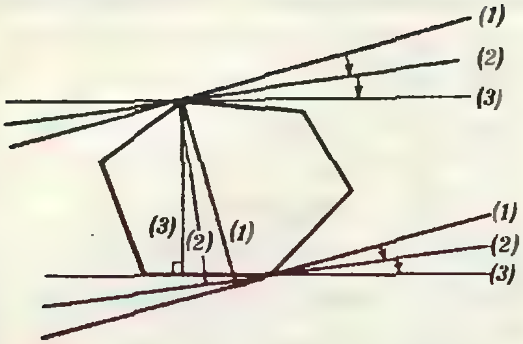


Рис. 9.

расстояние от вершины треугольника до одной из точек противоположной стороны не больше одной или двух других сторон.

12. Если поворачивать граничные прямые опорной полосы вокруг лежащих на них вершин так, чтобы они оставались параллельными и расстояние между ними уменьшалось, то в конце концов получим одну из касательных полос (рис. 9).

13. Диаметрами правильного n-угольника являются его «длинные» диагонали. Ширина его равна расстоянию от вершины до противоположной стороны (если n нечетно) или расстоянию между параллельными сторонами (если n четно). Остается применить формулы, связывающие радиус описанного круга, сторону и апофему правильного многоугольника в соответствии с рисунком в статье.

14. Указание. Длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего его концы.

15. а) Все углы многоугольника равны, как вписанные, опирающиеся на равные дуги.

б) Все стороны многоугольника равны, так как равны (по катету и углу) все треугольники, образованные радиусами вписанного круга, проведенными в точки касания, отрезками сторон n-угольника и отрезками, соединяющими центр круга с вершинами n-угольника.

16. Первое утверждение следует из того, что наиболее удаленная от хорды точка дуги — это ее середина. Второе утверждение будет доказано в тексте решения упражнения 17.

17. Докажем пункт б) (пункт а) доказывается аналогично).

Опираясь на рисунок 10, проверяем, что периметр $\triangle ABC$ равен $2|AP|$ и зависит лишь от угла $\widehat{CAB}=\alpha$ и радиуса R вневписанной окружности, и любой треугольник $AB'C'$ с углом $\widehat{C'AB'}=\widehat{CAB}$ и периметром, равным периметру $\triangle ABC$, имеет тот же радиус вневписанной окружности, что и треугольник ABC. Применяя к треугольнику OCB доказанную часть упражнения 16, получаем, что $\dfrac{|CB|\cdot R}{2}=S_{OCB}\leqslant\left(\dfrac{|CB|}{2}\right)^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}$, откуда $|CB|\geqslant 2R\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}$, причем равенство будет лишь при $|AC|=|AB|$.

Утверждение б) доказано. Из него методом от противного можно получить второе утверждение упражнения 16 (рис. 11), а также то, что среди треугольников с данными периметром и основанием наибольший угол при вершине имеет равнобедренный треугольник (рис. 12).

18. Воспользуйтесь последним утверждением из решения упражнения 17.

19. а) следует из б); б) следует из свойства средней линии трапеции; в) следует из а); г) следует из свойства средней линии треугольника; д) пусть O_1 и O_2 — центры кругов радиусов K_1, K_2, A и B — их произвольные точки, O_3 — середина $[O_1O_2]$, C — середина $[AB]$. Докажите, что $\overrightarrow{O_3C}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_2B})$, откуда следует, что $|O_3C|\leqslant\frac{1}{2}(|O_1A|+|O_2B|)\leqslant\frac{R_1+R_2}{2}$, поэтому смешением кругов с центрами O_1 и O_2 будет круг с центром O_3 и радиусом $\frac{R_1+R_2}{2}$.

20. Примените упражнение 8 и упражнение 19 а), б), в).

Задача 2. Из упражнения 20 следует, что любая касательная полоса к смешению многоугольников параллельна хотя бы одной из сторон этих многоугольников и обратно. Из этого утверждения следует то, что смешение многоугольников является многоугольником. Применяя упражнение 19 б), получаем, что его периметр равен полусумме периметров этих многоугольников.

Задача 3. Указание. При центральной симметрии отрезок переходит в равный и параллельный ему отрезок, а середина первого отрезка — в середину второго. Утверждение о диаметре следует из упражнений 11 и 19 б), утверждение о ширине — из упражнений 12 и 20, а утверждение о периметре и числе вершин — из задачи 2.

21. В качестве центра обоих кругов можно взять центр симметрии n-угольника.

22. Достаточно вычислить производные этих функций, заметить, что $\left(x\sin\frac{\pi}{x}\right)'>0$, а $\left(x\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}\right)'<0$ при $x>2$, и применить соответствующую теорему дифференциального исчисления (при доказательстве неравенств полезно знать, что $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

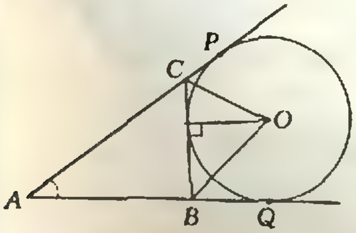


Рис. 10.

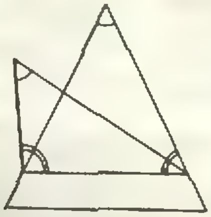


Рис. 11.

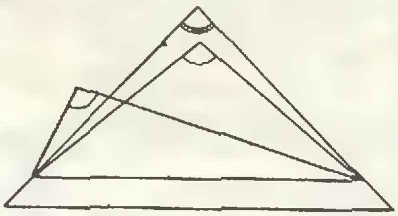


Рис. 12.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Например, так: X=VII+III.

2. В выражении использовано ровно десять различных букв. Значит, одна из букв соответствует цифре 0. Поскольку на нуль делить нельзя, нулю равен один из сомножителей числителя. Отсюда все выражение равно нулю.

3. При ходьбе грязь с одной штанины переходит на другую, притом на более высокое место, поскольку нога поднимается.

4. Пусть цифры числа: a, b, x и y. Тогда числа $a+b-x-y$ и $a+x-b-y$ оба оканчиваются нулем. Значит, и их сумма $2(a-y)$, и их разность $2(x-b)$ тоже оканчиваются нулем. Следовательно, любые две цифры числа либо равны, либо отличаются на 5. Нетрудно заметить, что либо все четыре цифры должны быть равны, либо имеются две пары равных цифр, причем неравные цифры отличаются на 5. Пар цифр, отличающихся на 5, всего пять: 0 и 5, 1 и 6, 2 и 7, 3 и 8, 4 и 9. Из каждой пары, кроме первой, можно составить шесть различных четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи (например, из пары 1 и 6 — такие: 1166, 1616, 1661, 6116, 6161, 6611). В паре 0 и 5 нуль не может стоять на первом месте, поэтому из этой пары можно составить только три нужных четырехзначных числа: 5005, 5050, 5500. В результате мы получаем девять чисел из одинаковых цифр и $4 \cdot 6+3=27$ чисел, у которых по две равные цифры. Всего 36 чисел.

5. Предположим, что мы сумели так расставить числа, как сказано в условии. Найдем сумму всех чисел. Просуммировав каждое число в квадратике с числами в соседних с ним квадратиках, мы получим число $24 \cdot 13=312$ (всего квадратиков 24, а каждая такая сумма равна по условию 13). При этом каждое число суммируется 5 раз. Значит, сумма чисел в квадратиках равна 312 : 5. Но это — не целое число. Отсюда вытекает, что указанную расстановку сделать невозможно.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (А. Книст, Г. Йенш, 1967 г.). 1. Лh8(1)! h3(2) 2. h4(1)×, 1...К (любой ход) 2. Лh5(1)×. Не проходит 1. h4(1)+ из-за взятия в пространстве на проходе h4(2):h3(1)!

Задание 16 (С. Лойд, 1857 г.). 1. Лf4! Крg3 (1... Кр:h1 2. Крf2 Крh2 3. Лh4×) 2. 0—0! Крh3 3. Л1f3×.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. А. Артемов, Е. В. Винодарова, Ю. П. Мартыненко, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин, Н. А. Ящук

Фото представили:
М. М. Рабинович

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.09.85. Подписано к печати 18.10.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,29. Т-20168
Тираж 173290 экз. Цена 40 коп. Заказ 2499

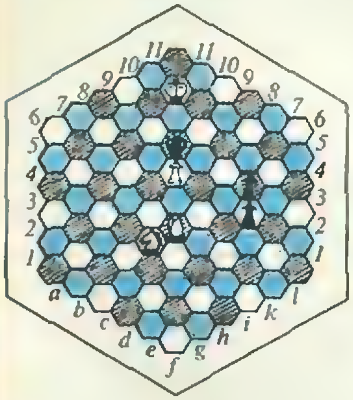
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЗАДАЧИ НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ДОСКЕ

В прошлый раз мы рассказали, как играют в польские гексагональные шахматы, отметили их геометрические особенности. Обратим внимание еще на некоторые нюансы, отличающие польские шахматы от обычных. Один король на гексагональной доске в состоянии запатовать неприятельского короля, если тот находится в углу. Например, белый король f3 полностью сковывает черного короля f1. Из этого следует, что король и любая фигура могут объявить мат без помощи других фигур. С другой стороны, короля загнать в угол нелегко, и поэтому его не заматуешь даже двумя легкими фигурами, нужна третья. Зато ферзь без всякой поддержки может поставить мат, скажем, с того же поля f3 королю f1.

Некоторые из предлагаемых задач взяты из коллекции С. Соколова и С. Цыганкова, больших любителей гексагональных шахмат.



А. Гришин. Белые начинают и дают мат в 4 хода.

В обычных шахматах конь, совершающий ход, теряет контроль над всеми полями, которые только что были в его распоряжении. Иное дело в гексагональных. В данной позиции черный король запатован: поля e6, g6, d7 и h7 держит белый слон, e7 и g7 — пешка, e8, e9, f9, g8, g9 — король, сама пешка f7 находится под защитой коня.

1. Ke4—c5! Конь сдвинулся с места, но не выпустил из-под контроля пешку f7. **1...i4—i3 2. Kc5—d8!** Вновь пешка под защитой коня. Не годится 2. Ke4? из-за 2...i4! и мата нет, но не 2...i2 3. Kh4 и 4. Ki6×. **2...i3—i2 3. Kd8—g9 i2—i1Ф 4. Kg9—i6×!** Конь сделал четыре хода подряд, но всякий раз продолжал защищать свою пешку. Геометрический мотив, который невозможен в классической игре.

Л. Йецу. Белые: Kpd6, Cb3, Cc3, п. п. a1, a2, a4, c4; черные: Kpa3, п. п. a5, c5, d7. Белые начинают и дают мат в 5 ходов.

На сей раз в путешествие отправляется белый король, но он будет неустанно следить за важным пунктом c4. **1. Kpd6—e5 d7—d6.** После 1...d5 мат ставится быстрее. **2. Kpe5—d3! d6—d5 3. Kpd3—d4! d5:c4+ 4. Kpd4:c5 c4:b3 5. a2:b3×!** Неожиданный мат, вынужденный рейд пешки привел черных к гибели.

Л. Йецу. Белые: Kpb6, Фg1, Cf11, Kd4, Kf8, п. п. e5, i3; черные: Kpe6, п. п. e7, i4. Белые начинают и дают мат в 2 хода.

На первый взгляд, у черного короля достаточная свобода, и за два хода его не пленить. **1. Cf11—l1!** Длинное перемещение слона из угла в угол шестиугольной доски решает дело. Черные в цугцванге. Любой ход их короля ведет к красивому мату ферзем в центре доски. **1...Kpe6:d4 2. Фg1—c2×.** Пригодился слон, который взял под прицел поле c2. **1...Kpe6:f8 2. Фg1—g9×.** И поле g9 контролируется слоном, притаившимся вдали от места основных событий. **1...Kpe6—f5 2. Фg1—g3×.** Поле g3 тоже находится в зоне действия слона. **1...Kpe6—d6 2. Фg1—c6×.** В последнем варианте белого ферзя поддерживает король.

Д. Бойер, Белые: Kpb1, Cg2, Kh3, Kh6, п. п. b3, g4; черные: Kpd3, Лg9, Cl4, п. d4. Белые начинают и дают мат в 2 хода.

Эта задача иллюстрирует геометрический мотив «перекрытие фигур» (тема Новотного), распространенный в обычной шахматной композиции. Разница лишь в иных линиях действия фигур.

1. g4—g6! Пешка занимает исходное положение и поэтому движется сразу на два поля вперед. Попутно возникает еще один задачный элемент — освобождение поля для другой фигуры. Теперь пешка оказалась в точке пересечения линий g1—g10 и a4—l4, которые находятся, соответственно, в распоряжении ладьи и слона. **1...Cl4:g6.** Траектория ладьи перекрыта и **2. Kh6—g4×. 1...Лg9:g6.** Траектория слона перекрыта (линия a4—l4 не принадлежит компетенции ладьи) и **2. Kh6—e6×.**

Гексагональная доска открывает неограниченные возможности для любителей математических задач и головоломок. Известные шахматно-математические задачи о расстановках фигур, их силе, о маршрутах и т. д. можно поставить и для шестиугольной доски. Попробуйте, например, решить такую задачу: какое наибольшее число ферзей можно расставить на гексагональной шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? Напомним, что на обычной доске указанным образом можно расставить 8 ферзей (и не больше), причем существуют 92 расстановки.

Минимальное число ферзей, защищающих все свободные поля обычной доски, равно 5, причем доказано, что число расстановок — 4860, вот одна из них: c6, d3, e5, f7, g4. Гексагональная доска содержит почти на 30 полей больше, но и ее могут охранять всего пять ферзей! Их достаточно поставить на поля c5, d3, g5, h8, k7.

Конкурсные задания

Заканчивая рассказ о шестигранных шахматах, вновь предлагаем вам два этюда с шестью фигурами на обычной доске.

21. Белые: Kpb4, Ca2, п. c4. Черные: Kpd4, п. п. d7, h5, Белые начинают и выигрывают.

22. Белые: Kpd5, п. п. d4, f4. Черные: Kpg4, п. п. a5, f5. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 января 1986 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

XIX Всесоюзная олимпиада школьников по физике (Куйбышев, апрель 1985 г.).

Идет эксперимент...

Цена 40 коп.

Индекс 70465

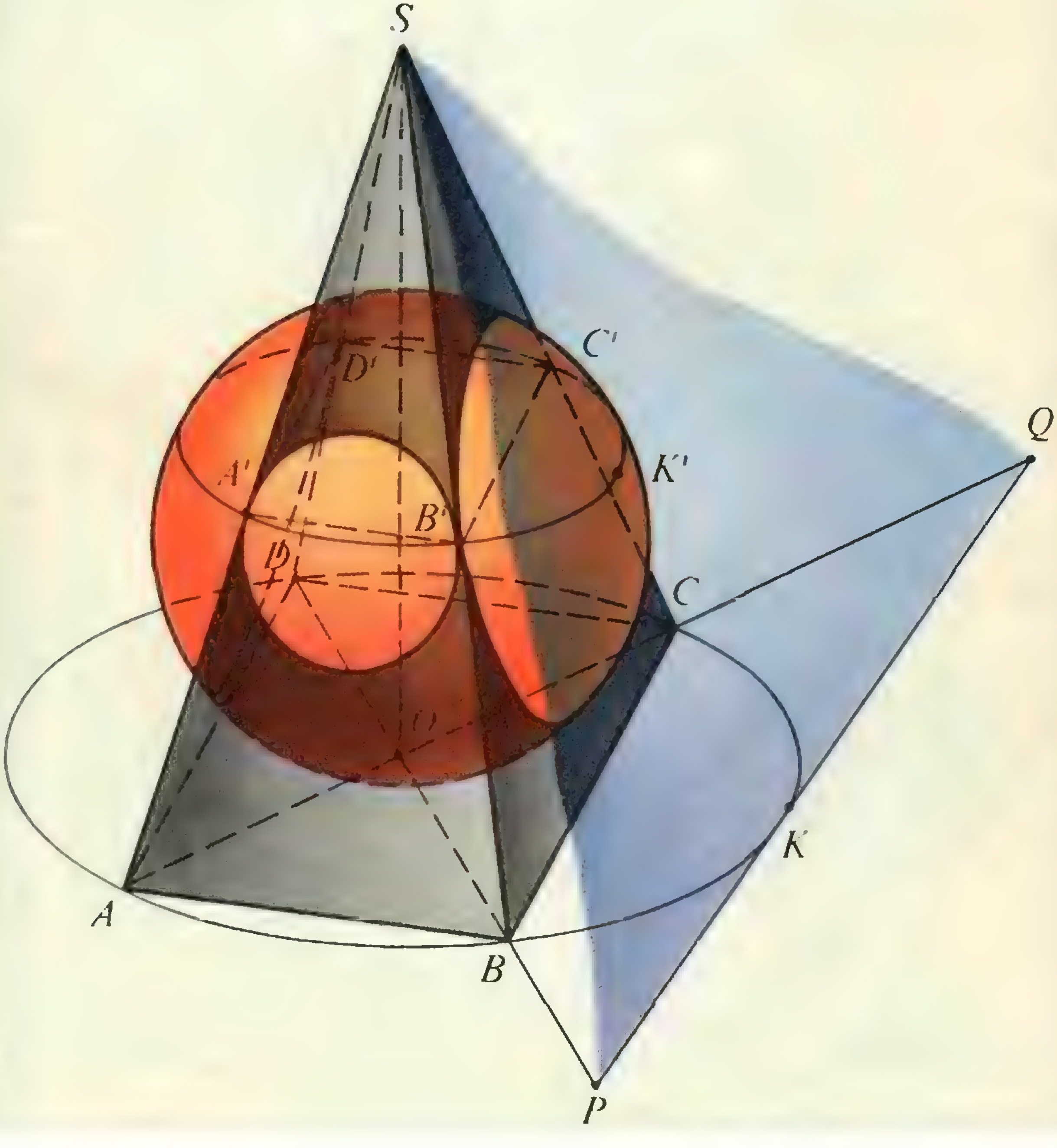
Мы продолжаем публикацию «многофигурных» стереометрических задач с чертежами, начатую в «Кванте» № 2 за этот год (см. также обложки 3, 5 и 6 номеров). Здесь мы помещаем задачу, которая предлагалась на приемных экзаменах в Московский физико-технический институт в 1984 году и вызвала немалые трудности у абитуриентов. С ее решением можно будет познакомиться в следующем номере «Кванта».

Задача. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $|AC|=2|AB|$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Сфера касается плоскости $ABCD$ и всех боковых ребер пирамиды. Найти объем пирамиды, если радиус сферы равен R, а угол SCD равен α.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые BD и AC соответственно в точках P и Q ($|DP|>|BP|$, $|AQ|>|CQ|$). Найти отношение $|BP|:|BD|$, если

а) $|BP|=|CQ|$,

б) $|CQ|=3|AC|$.



НОМЕР
12

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ 12 1985

Основан в 1970 году

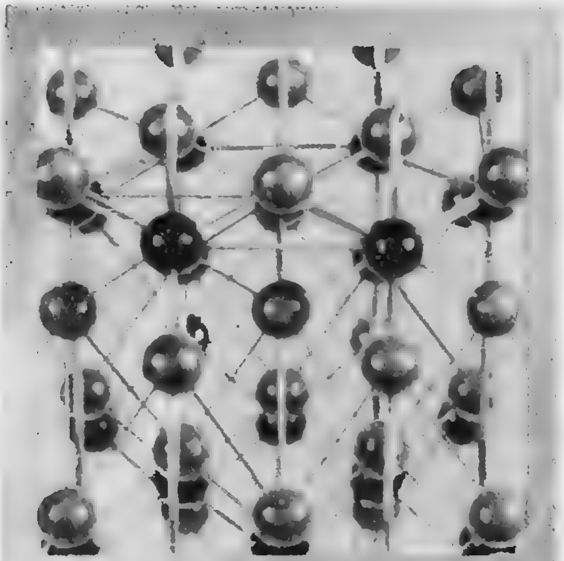
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*А. Л. Петелин, А. И. Федосеев.* Как живут кристаллы в металле	*A. L. Petelin, A. I. Fedoseev.* How crystalls live in metals
8	*А. Б. Гончаров.* Арифметика гауссовых чисел	*A. B. Goncharov.* The arithmetic of Gaussian numbers
	Математический кружок	**Mathematics circle**
14	*Л. Пинтер, И. Хегедыш.* Упорядоченные наборы чисел и неравенства	*L. Pinter, Y. Hegedüs.* Ordered sequences of numbers and inequalities
	Наш календарь	**Our calendar**
16	Формула Бальмера	Balmer's formula
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
18	Математика 9—10	Mathematics 9—10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
21	Задачи	Problems
22	*Л. Кэрролл.* Безумное чаепитие	*L. Carroll.* The mad tea party
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
26	Задачи М956—М960; Ф968—Ф972	Problems M956—M960; P968—P972
28	Решения задач М936—М940; Ф948—Ф952	Solutions M936—M940; P948—P952
36	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
38	IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах	IV. How the transistors in a chip are made
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
40	*Е. И. Бутиков.* Интерференция света	*E. I. Butikov.* Interference of light
	Олимпиады	**Olympiads**
46	*Т. А. Сарычева, А. А. Фомин.* XXVI Международная математическая олимпиада	*T. A. Sarycheva, A. A. Fomin.* The 26th International mathematics olympiad
48	*О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.* XVI Международная физическая олимпиада	*O. F. Kabardin, V. A. Orlov.* The 16th International physics olympiad
	Информация	**Information**
52	Заочная физико-техническая школа при МФТИ	Moscow physico-technical institute's correspondence school
55	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
62	**Напечатано в 1985 году**	**Printed in 1985**
	Смесь (*37, 45*)	**Miscellaneous (*37, 45*)**
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Шахматные квартеты (*3-я с. обложки*)	**Chess quartets (*3rd cover page*)**
	Наша анкета (*4-я с. обложки*)	**Our questionnaire (*4th cover page*)**

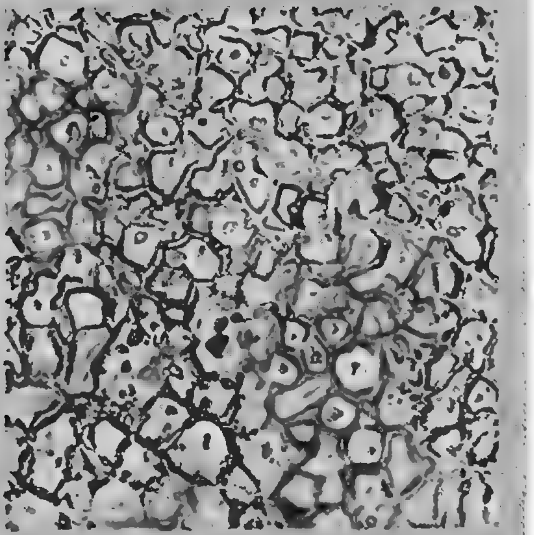
На нашей новогодней обложке можно увидеть и математические, и физические мотивы: замощение плоскости симметричными фигурами и отражение плоского узора в сферическом зеркале.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1985



Как живут кристаллы в металле

Кандидат физико-математических наук
А. Л. ПЕТЕЛИН,
А. И. ФЕДОСЕЕВ



Когда речь заходит о кристаллах, то обычно представляют себе красивые многогранники, сверкающие в лучах света. Однако встречающиеся в природе кристаллические материалы чаще всего не обладают столь совершенными формами. Как правило, это поликристаллы — вещества, состоящие из множества плотно упакованных мельчайших кристалликов, по-разному ориентированных в пространстве.

Такую структуру обычно имеют и металлы. Она формируется уже в процессе кристаллизации, когда зародыши кристалликов возникают в различных точках жидкого металла, зерна-кристаллики растут, встречаются и теснят друг друга. Постепенно расплавленный металл превращается в поликристалл.

Многие важные свойства металла зависят не только от устройства отдельных зерен, но и от того, как они упакованы в поликристалле, каковы границы между зернами. Физические процессы, происходящие на этих границах, порой оказывают определяющее влияние на свойства металла.

Лазейки для примесей

Чтобы придать стали нужные свойства, ее подвергают термической обработке — закалке (резкому охлаждению от высокой температуры) и отпуску (повторному нагреву до менее высокой температуры). Закалка делает сталь упругой и твердой; отпуск смягчает сталь, придает ей пластичность. Меняя химический состав стали, температуры закалки и отпуска, люди на протяжении тысячелетий научились добиваться нужного сочетания прочности, пластичности, твердости и т. д.

За последние полвека условия эксплуатации стальных деталей сильно ужесточились, и инженеры все чаще стали замечать, что и после отпуска, проведенного по всем правилам, некоторые виды стали все равно

Так выглядит под микроскопом (увеличение 500) плоский срез куска меди. (При протравливании поверхности среза кислотой на границах между отдельными кристалликами травление идет быстрее — там образуются углубления). Не напоминает ли вам это кукурузные зернышки в початке? Может быть, именно поэтому говорят, что металл имеет зеренную структуру?

остаются хрупкими. В результате неожиданно выходили из строя детали, возникали аварии. Сравнительно недавно выяснилось, что за это явление, получившее название отпускной хрупкости, ответственны именно границы зерен. При определенных температурах отпуска на границах собираются вредные примеси — фосфор и сера; концентрация их в этих местах возрастает в десятки и сотни раз. Границы становятся хрупкими, и под нагрузкой по ним развиваются трещины. (На второй странице обложки приведена фотография излома металла на границе зерен, полученная с помощью электронного микроскопа.)

Другой пример. Медь, благодаря своей высокой электропроводности,— один из самых распространенных металлов в электротехнике. Чистая медь легко окисляется. Для того чтобы предохранить ее от окисления, было предложено на поверхность медного провода наносить тончайший слой серебра. По оценкам при температуре до 200 °С, когда почти не происходит ни испарение серебра, ни его проникновение (диффузия) внутрь меди, такой слой должен был бы сохраняться сотни лет. Однако на практике не прошло и месяца, как серебро с поверхности медного провода исчезло. Выяснилось, что за это чудесное исчезновение также несут ответственность границы зерен. Дело в том, что они служат каналами ускоренной диффузии.*) Зерна в медном проводе очень мелкие, и на поверхность выходит большое число границ между ними. Их оказывается достаточно, чтобы даже при сравнительно низкой температуре (около 200 °С) все атомы серебра за короткий промежуток времени просочились по ним внутрь провода и «растворились» в меди.

Как устроена граница?

Можно с полной определенностью сказать, что истоком всех свойств межзеренных границ является их строение, структура. Поэтому и знакомство с границами мы начнем с их структуры, со способа укладки атомов между отдельными зернами.

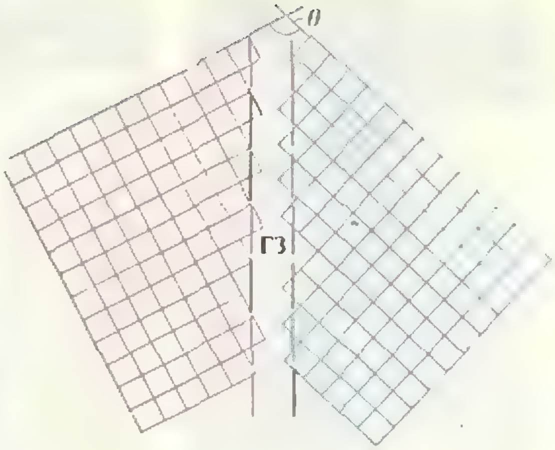


Рис. 1. Зона контакта двух зерен. θ — угол разворота зерен друг относительно друга.

Рассмотрим два зерна металла, находящихся в контакте друг с другом. Для простоты будем считать, что атомы каждого зерна расположены в узлах плоской квадратной решетки; зерна лежат в одной плоскости, но развернуты друг относительно друга на некоторый угол (рис. 1). Область между зернами и есть, собственно, граница зерен. В дальнейшем мы будем обозначать ее ГЗ.

Итак, слева от границы — четкая структура, порядок, справа — порядок. А что же в самой ГЗ? Проще и, казалось бы, естественнее всего предположить, что на границе вообще нет никакого порядка, атомы располагаются как им вздумается, хаотично, кристаллическая структура отсутствует; металл в области ГЗ — твердое аморфное вещество. От порядка к порядку через беспорядок — так можно кратко сформулировать это предположение.

Первая теория межзеренных границ, появившаяся в начале нашего века, так и называлась — теория аморфного цемента. Она смогла объяснить некоторые свойства металлов, например, зернограничное проскальзывание. При определенной температуре (своей для каждого металла и сплава) зерна под действием незначительных нагрузок могут почти беспрепятственно скользить друг относительно друга, как будто их разделяют жидкие прослойки. Согласно теории аморфного цемента этими «прослойками» являются аморфные ГЗ: при нагревании они размягчают-

---

*) О диффузии в твердых телах вы можете прочитать в статье Б. С. Бокштейна «Атомы блуждают по кристаллу» в «Кванте» № 11 за 1982 год.

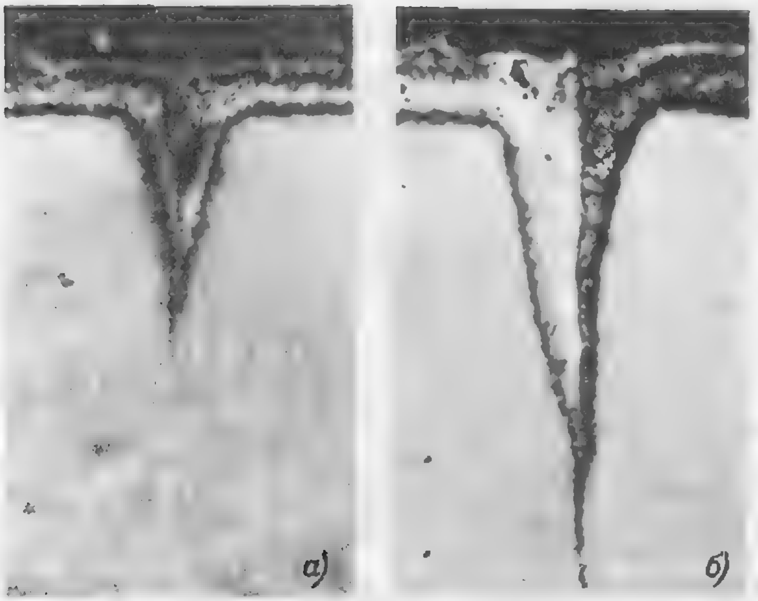


Рис. 2. Диффузионное проникновение цинка (он на фотографиях более темный) в алюминий по ГЗ (увеличение 400). На фото а) угол разворота между зернами 37°, а на фото б) — 38,5°. Время, за которое выросли эти диффузионные клинья, около 100 часов. (Фотографии сделаны на кафедре физической химии Московского института стали и сплавов.)

ся, как воск, становятся прекрасной «смазкой», и взаимное смещение зерен происходит даже при незначительных нагрузках.

Однако большинство зернограничных эффектов теория аморфного цемента объяснить не смогла.

Сравнительно недавно (около сорока лет назад) английский физик Н. Мотт предложил модель межзеренных границ, согласно которой в ГЗ могут образовываться кристаллические области — в аморфной речке могут существовать кристаллические островки. В рамках этой модели, названной «островковой», хорошо описывались многие свойства ГЗ, и в частности — миграция границ, их способность перемещаться по образцу.

Согласно теории Мотта перемещение границ происходит за счет расплавления или растворения группы атомов с одной стороны границы (из одного зерна) и выделения такой же группы атомов по другую сторону границы (на втором зерне).

Для того чтобы этот процесс стал более наглядным, представим себе ручей, текущий по поверхности ледника в горах. Дневное солнце подтопило снег в верховьях ледника, и вода, стекая вниз, проложила на своем пути ложбинку во льду — русло. Один берег ручья находится на солнце, температура там плюсовая, вода подмывает берег, кусочки льда обрушиваются в воду и тают. Другой берег ручья в тени, от солнца его загораживает близкая вершина. В тени мороз — такие контрасты часто бывают в горах,— и вода постепенно намерзает на берег. В результате того, что солнечный берег все время подтаивает, а теневой намерзает, русло ручья перемещается в сторону солнечного берега, ручей старается целиком выйти из тени горы. «Движущая сила» такого перемещения — разность температур между солнечным и теневым берегами.

Миграция границы зерен по Мотту напоминает смещение ледникового ручья. (Кстати, одной из движущих сил миграции ГЗ в металле также может быть разность температур.) Теоретический анализ показал, что при таком механизме миграции «плавится» и переходит из зерна в зерно не один атом, а сразу целая группа атомов — кристаллический «островок».

Одним из основных выводов островковой теории является плавная, без скачков, зависимость физических свойств ГЗ от угла разворота зерен — чем больше угол разворота, тем меньше «хороших» островков, так что с увеличением угла структура ГЗ все время ухудшается.

А теперь обратим внимание на рисунок 2. На нем представлены две фотографии цинка, проникшего в алюминий по границе зерен. Скорость диффузии по ГЗ много больше, чем во всем объеме, это мы уже отмечали. Поэтому цинк проник вдоль границ значительно дальше, чем по зернам,— возникли диффузионные клинья. Две фотографии — две границы с очень близкими углами разворота зерен. Но как они отличаются! Глубина проникновения по двум почти одинаковым границам совершенно разная! В рамках островковой модели это вызывает удивление.

В целом зависимость глубины проникновения при диффузии по ГЗ от угла разворота зерен выглядит так, как показано на рисунке 3,— она немонотонна. В свете этих экспериментальных результатов ни о какой плавности изменения свойств ГЗ говорить уже не приходится.

Порядок и беспорядок на границе

Внести относительную ясность в вопрос о том, почему свойства ГЗ так сильно зависят от угла разворота зерен, помог геометрический подход к проблеме контакта двух кристаллических решеток, начало которому было положено в работах английских кристаллографов М. Кронберга и Ф. Вильсона в 1947 году. Остановимся на этом подходе подробнее.

Нам по-прежнему достаточно будет рассматривать плоские квадратные кристаллические решетки.

Будем разворачивать две квадратные сетки друг относительно друга вокруг оси, перпендикулярной плоскости сеток, постепенно увеличивая угол разворота. При некоторых, вполне определенных, углах разворота вдоль линии контакта сеток возникнут узлы, общие для обеих сеток,— совпадающие узлы (на рисунке 4 они помечены красным цветом). Эти узлы расположены на плоскости с определенной периодичностью и образуют так называемую решетку совпадающих узлов (дальше мы будем обозначать ее РСУ).

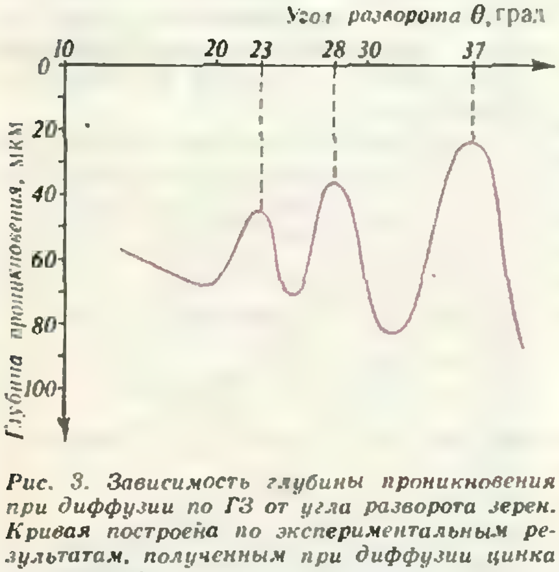


Рис. 3. Зависимость глубины проникновения при диффузии по ГЗ от угла разворота зерен. Кривая построена по экспериментальным результатам, полученным при диффузии цинка в алюминий.

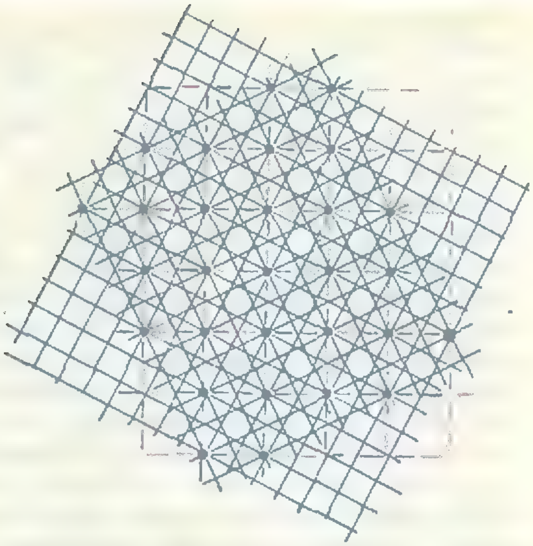


Рис. 4. Схема возникновения РСУ. Красные точки — совпадающие узлы.

Для двух граничащих зерен есть несколько так называемых специальных, «хороших» углов разворота, при которых возникают РСУ с большими плотностями совпадающих узлов.*) Граница зерен в случае таких углов имеет преимущество по сравнению с границами без РСУ — она более упорядочена, значительная часть узлов находится на местах, обусловленных кристаллическими решетками обоих зерен.

Остается только один вопрос: «чувствует» ли реальная ГЗ в металле, что есть такие специальные углы разворота? Ведь пока что речь шла только о плоской геометрической модели ГЗ, не учитывалось, что атомы имеют конечные, а не точечные размеры, что между ними существует взаимодействие, что они могут смещаться относительно кристаллической решетки...

Вернемся к фотографиям на рисунке 2. Межзеренная граница с меньшей глубиной проникновения цинка (рис. 2, *а*) — это граница с углом разворота, почти в точности равным специальному углу. Значит, диффузия по границе зерен с решеткой совпадающих узлов идет медленнее, чем по границам без РСУ. Это подтверждается и зависимостью на рисунке 3 — все минимумы глубины проникновения при зернограничной диффузии соответствуют углам разворота, при которых, согласно вычислениям, возникает РСУ. С точки зрения нашей геометрической модели это можно объяснить — специальные границы более упорядочены, они по структуре ближе к кристаллической решетке зерен, чем границы без РСУ. Поэтому и скорость диффузии в них ближе к скорости диффузии в решетке.

---

*) Нахождение хороших углов — красивая геометрическая задача, связанная с нахождением точек с целочисленными координатами на окружности. Этому вопросу посвящены часть статьи А. Б. Гончарова «Арифметика гауссовых чисел» (см. с. 13) и «Задачи для исследования» (с. 45) в этом номере журнала.

Самым впечатляющим подтверждением того, что решетки совпадающих узлов реально существуют на границах зерен, является прямое наблюдение расположения атомов на границе, ставшее возможным только в последнее время благодаря развитию высокоразрешающей электронной микроскопии. На рисунке 5 приведена фотография атомного строения ГЗ с углом разворота, близким к специальному, полученная на электронном микроскопе. Сравните рисунки 4 и 5. Не правда ли, замечательное сходство простой геометрической схемы и физического объекта — межзеренной границы, которую эта схема моделирует?

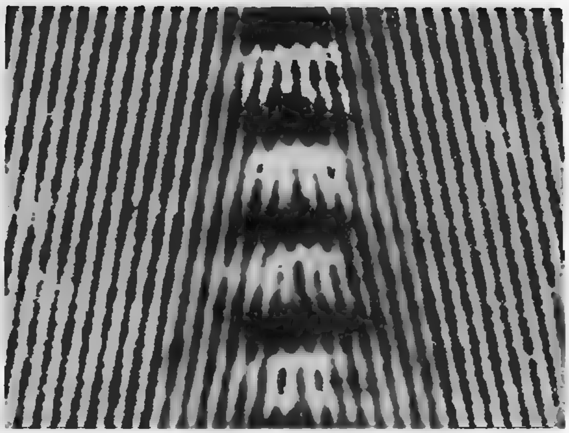


Рис. 5. Атомное строение границы, близкой к специальной. Фотография сделана с помощью электронного микроскопа; увеличение 10^6.

Геометрическая модель — первый шаг на пути построения общей теории границ зерен. Она дает представление об их структуре только при разориентировках, отвечающих специальным углам, остальные границы остаются неохваченными этим рассмотрением. Сейчас на основе модели РСУ разработаны физические модели, учитывающие искажения кристаллических решеток при ориентациях, на несколько градусов отличающихся от специальных. Однако, как устроены ГЗ с углами разворота, далекими от специальных, пока остается неясным.

Структура и текстура

До сих пор мы говорили об отдельных зернах и о том, как на границах между зернами из хаоса возникает порядок. В металле зерен очень много, причем их расположение и форма, как правило, не бывают совершенно случайными. Практически всегда имеется какая-то преимущественная ориентация кристаллических зерен. В таких случаях говорят, что материал обладает текстурой (от латинского слова textura — ткань, упорядоченная структура).

Причины возникновения текстур и сами текстуры бывают различные. На 2-ой странице обложки этого номера приведены две фотографии явно выраженных текстур. Одна из них возникла в металле после значительных деформаций: металлический слиток «прокатали» между двумя твердыми цилиндрами-валками так, что получился тонкий лист (такой метод обработки металлов давлением и называют прокаткой). В результате зерна вытянулись вдоль направления прокатки и сплющились в направлении, перпендикулярном плоскости листа. Это — пример текстуры деформации.

Определенную текстуру имеют и сами слитки (верхнее левое фото на 2-ой странице обложки). Она возникает в процессе затвердевания расплавленного металла и называют ее текстурой роста, текстурой кристаллизации. Процесс кристаллизации жидкого металла, находящегося в специальной ванне, изложнице, начинается в наиболее холодных областях — у стенок. Вначале формируется множество мелких кристалликов, ориентированных беспорядочно. Разрастаясь во все стороны, они как бы «натыкаются» на своих растущих соседей, после чего дальнейший свободный рост их воз-

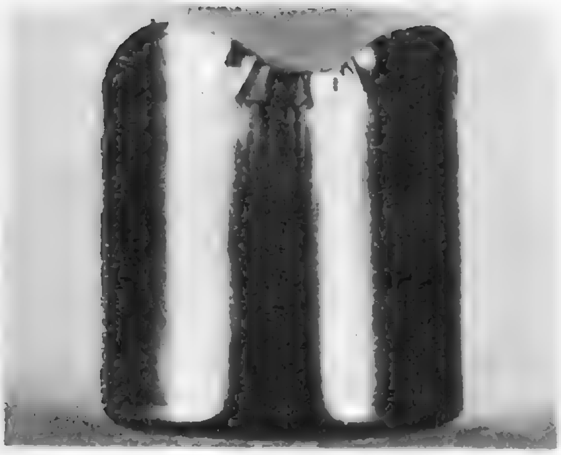


Рис. 6. Образование фестонов при вытяжке алюминиевого листа (штрихи на металле указывают направление прокатки).

можен лишь по направлению к центру слитка. Это приводит к образованию столбчатых кристаллов, которые заполняют весь объем слитка. Первое объяснение столбчатой структуры отливок дал еще в 1878 году замечательный русский ученый-металловед Д. К. Чернов.

Наличие той или иной текстуры оказывает существенное влияние на механические свойства металла. Представьте себе, что из листа металла, например, алюминия, полученного прокаткой, предстоит сделать какое-либо изделие. Скажем, кастрюлю — что может быть проще? Обычно для этого лист «натягивают» на цилиндр нужного диаметра, пуансон (такую операцию называют вытяжкой). Но после прокатки механические свойства листа вдоль различных направлений неодинаковы — вдоль некоторых металл вытягивается легче. В результате в процессе вытяжки образуется полый цилиндр с «ушками», фестонами (рис. 6). Фестоны приходится обрезать и отправлять в переплав. Эта трудоемкая «лишняя» операция — вредное последствие текстуры деформации. Чтобы уменьшить фестоны, металл после прокатки подвергают специальной термической обработке, которая изменяет его текстуру.

Совсем необычно ведут себя зерна металла в процессе так называемой сверхпластической деформации. Металлы и их сплавы обычно не очень пластичны: например, образец из меди может увеличить свою длину при растяжении примерно на 50 %, а затем обязательно появляется узкое место — шейка, и металл разрывается на две части. Но есть такие сплавы, которые без разрушения могут удлиняться на 1000 % и более, испытывая сверхпластические деформации.

В отличие от обычной деформации при такой деформации зерна не вытягиваются в направлении действия силы. Они скользят друг по другу, перекатываются, подобно морским камушкам в прибое. Важную роль в этом процессе играет явление, о котором мы уже говорили,— зернограничное проскальзывание. Оно осуществляется тем легче, чем больше межзеренная поверхность, то есть чем меньше размер зерен. Кроме того, важно, чтобы температура деформации была достаточно высокой (обычно не ниже половины температуры плавления сплава) и выдерживалась определенная скорость деформации.

Сверхпластические сплавы используют, когда требуется изготовить из цельного листа металла деталь очень сложной формы (например, в самолетостроении).

* * *

Наш рассказ о зернах металла подошел к концу. Будем надеяться, нам удалось убедить читателя в том, что, во-первых, эта проблема — важна, во-вторых,— интересна. Добавим еще и в-третьих — недостаточно изучена. До сих пор нет количественной теории, полностью описывающей структуру и свойства поликристаллических металлов. Путь к этой цели еще предстоит найти.

К нашим читателям

Подписка на журнал «Квант» принимается без ограничений в течение всего года в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Арифметика гауссовых чисел

А. Б. ГОНЧАРОВ

Об одной из красивейших арифметических теорий, построенной великим немецким математиком К. Ф. Гауссом, рассказано в этой статье. Гауссовы числа (точки с целыми координатами на плоскости) можно определенным образом складывать и умножать. Возникающая при этом теория делимости, которая напоминает обычную арифметику целых чисел, но имеет и свои характерные особенности, восхищает внутренней стройностью и красотой. Однако теория гауссовых чисел не просто изящная математическая игрушка — это и полезный аппарат, позволяющий находить красивые доказательства различных фактов из теории чисел (пифагоровы тройки, число представлений натурального числа в виде суммы двух квадратов), и даже кристаллографии (см. статью А. Л. Петелина и А. И. Федосеева в этом номере «Кванта»).

Натуральные числа 0, 1, 2, 3, ... являются основой всей математики. Относительно сложения они устроены весьма просто, а именно: 1, 2=1+1, 3=1+1+1, ..., так что единственным исходным кирпичом является 1.

Вводя в игру вычитание, мы попадаем в область целых чисел —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 .... Относительно же умножения тот же ряд целых чисел устроен уже гораздо сложнее. А именно, простейших кирпичей, из которых строятся умножением все ненулевые целые числа, бесконечно много — это все простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Натуральные числа, бо́льшие 1, получаются из них умножением: 2, 3, 2×2, 5, 2×3, 7, 2×2×2, 3×3, ... Для того же, чтобы умножением получить все целые рациональные числа, надо еще привлечь обе единицы 1 и —1.

Следующая теорема объясняет, в каком смысле простые числа являются строительным материалом для *мультипликативного* (то есть относящегося к умножению) построения натуральных чисел.

Основная теорема арифметики целых чисел. *Каждое ненулевое целое число a представляется в виде произведения*

$$\boxed{a=\varepsilon p_1^{e_1} p_2^{e_2}\dots p_n^{e_n}} \tag{1}$$

где $n\geqslant 0$, p_i — различные простые числа, e_i — положительные целые числа, а ε — одна из единиц. Это представление определено однозначно с точностью до порядка сомножителей.

Если простые числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ располагать в порядке возрастания (что естественно), то равенство (1) полностью определяется числом a: и число ε (равное ±1), и простые множители $p_1<p_2<\dots<p_n$, и их показатели $e_1, e_2, \dots, e_n$ однозначно определяются выбором a.

Эта теорема*) была известна еще в древности.

Долгое время математики получали доказательства арифметических теорем о натуральных числах, работая лишь с целыми числами. Однако в начале XIX века Гаусс обнаружил, что некоторые вопросы теории чисел только тогда выступают во всей своей ясности и естественной красоте, когда область арифметики распространяется также и на «числа», которые мы сейчас называем целыми гауссовыми. Что это за числа?

Гауссовы целые числа G — это просто пары целых чисел

$$G=\{(a, b)\,|\,a, b\in \mathbb{Z}\},$$

которые складываются и умножаются по следующим правилам

$$(a;\, b)+(c;\, d)=(a+c;\, b+d), \tag{2}$$

$$(a;\, b)\cdot(c;\, d)=(ac-bd;\, ad+bc). \tag{3}$$

Для наглядности можно представить себе множество G как «целочисленную решетку на плоскости», то есть как множество всех точек на координатной плоскости, у которых и абсцисса, и ордината — целые (рис. 1), или — что то же самое — как множество всех векторов с началом O и концами в этих точках. Тогда сложение гауссовых чисел (2) представляется как обычное сложение векторов по правилу параллелограмма, а вот умножение выглядит несколько сложней — читателю, не зна-

---

*) Доказательство можно найти в «Кванте», 1972, № 6, с. 30; впрочем, вы легко его получите сами, пользуясь дальнейшей теорией (см. замечание на с. 11).

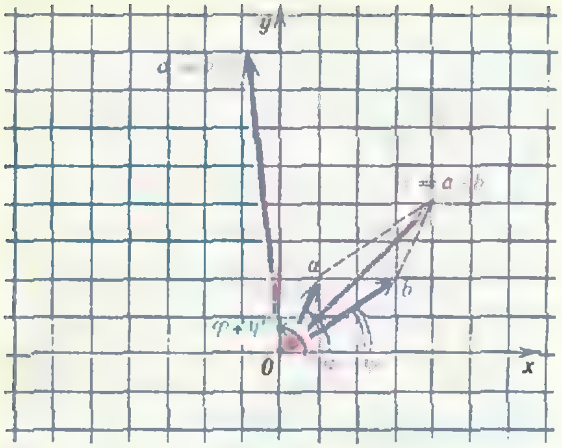


Рис. 1.

Сложение и умножение гауссовых чисел
Упражнение 1. а) Выполните действия $(3+2i)(5-i):(3+i)$.
б) Решите уравнение $(3+i)z=5+7i$
в) Объясните, почему при умножении $a\cdot b$ происходит сложение углов φ и ψ.

комому с формулой (3), мы советуем проделать упражнения, указанные в подписи к рисунку 1 (чтобы привыкнуть к этому умножению).

Читатели, знакомые с комплексными числами, конечно же узнали в формуле (3) обычную формулу умножения комплексных чисел и догадались, что гауссовы числа представляют собой часть $G\subset C$ комплексных чисел C. Для понимания этой статьи, однако, не требуется предварительного знакомства с комплексными числами и формулой (3).

По традиции, гауссовы числа $z\in G$ записывают не в виде пар $z=(a;\ b)$, а в виде сумм $z=a+bi$, где i обозначает единичный вектор оси Oy, то есть пару $(0;\ 1)$. Пары вида $(a;\ 0)$, то есть целые точки, лежащие на оси Ox, принято записывать коротко в виде a, пары же вида $(0;\ b)$, то есть целые точки оси Oy, в виде bi.

Обратите внимание, что

$$i^2=(0;\ 1)\cdot(0;\ 1)=(-1;\ 0)=-1.$$

Таким образом, в области гауссовых чисел иногда удается извлечь корень из отрицательных чисел; так,

$$\sqrt{-1}=\pm i,\quad \sqrt{-9}=\pm 3i \text{ и т. п.}$$

Каждому гауссову числу $z=a+bi\in G$ можно сопоставить его *сопряженное* $\bar z=a-bi\in G$ (см. рисунок 2 и упражнение к нему) и его *норму* — число $N(z)=a^2+b^2\in Z$ (рис. 3)*).

Пользуясь сопряженными числами, нормой и формулой (3), легко получить правило для *деления* гауссовых чисел $z=a+bi$ и $w=c+di$. Именно

$$\frac{z}{w}=\frac{z\bar w}{w\bar w}=\frac{z\bar w}{N(w)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (4)$$

К сожалению, это деление, так же, как деление в области целых чисел, часто выводит за пределы рассматриваемой области. Так:

$$(1+2i):(3-2i)=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i\notin G.$$

Как и целые числа, гауссовы числа относительно сложения (и вычитания) устроены просто: они складываются из простейших кирпичиков — 1 и i. Например

---

*) Впрочем, норма и сопряжение определены точно также и для любых точек $(x;\ y)=x+iy$, $x,\ y\in R$.

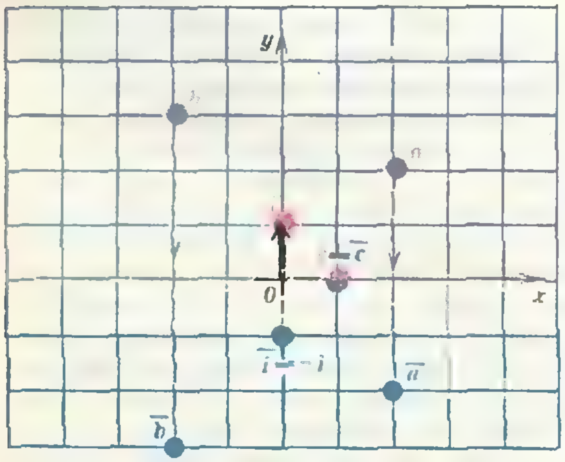


Рис. 2.

Сопряжение гауссовых чисел
Упражнение 2. Докажите аддитивность и мультипликативность сопряжения: $\overline{a+b}=\bar a+\bar b$, $\overline{ab}=\bar a\cdot\bar b$.

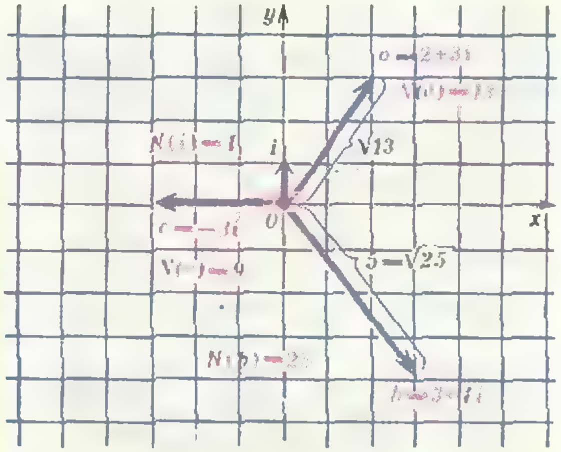


Рис. 3.

Норма гауссовых чисел
Упражнение 3. Докажите мультипликативность нормы: $N(ab)=N(a)\cdot N(b)$.

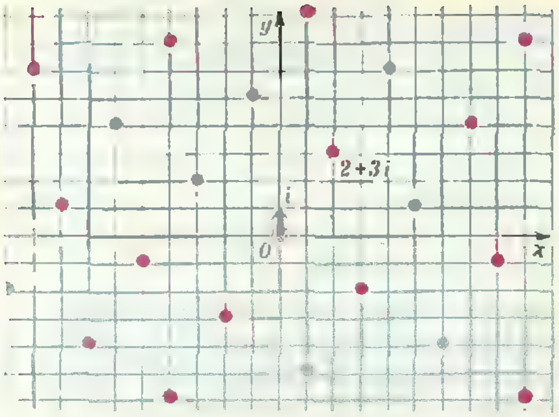


Рис. 4. Гауссовы числа, делящиеся на $2+3i$.

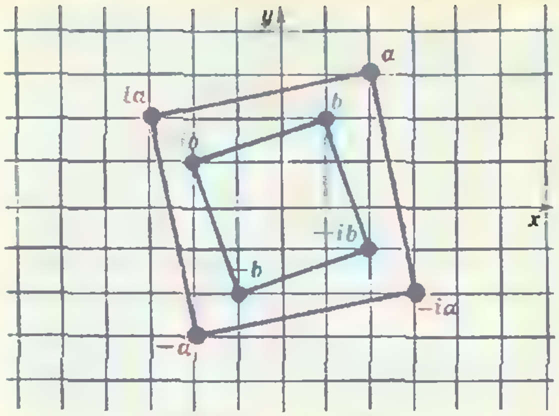


Рис. 5. Союзные числа.

$$5-3i=1+1+1+1+1+1+(-i)+$$
$$+(-i)+(-i).$$

Оказывается, что у гауссовых чисел есть своя «основная теорема арифметики», которая сводит исследование мультипликативного строения гауссовых чисел к изучению простых гауссовых чисел.

Простые гауссовы числа и делимость. Если для двух гауссовых чисел a, b найдется третье число $c\in G$ такое, что $a=b\cdot c$, говорят, что *a делится* на b (запись $a\vdots b$) или *b делит a* (запись $b|a$). Например $2\vdots 1+i$ ибо $2=(1+i)\cdot(1-i)$. На рисунке 4 показаны гауссовы числа, которые делятся на $2+3i$.

Упражнение 4. а) Проверьте, что $1+i \vdots 1-i$. б) Докажите, что для гауссовых чисел выполнены обычные свойства делимости:

$$a\vdots b\Rightarrow ac\vdots bc,$$
$$ac\vdots bc,\ c\neq 0\Rightarrow a\vdots b,$$
$$a\vdots b,\ b\vdots c\Rightarrow a\vdots c.$$

в) Отметьте на координатной плоскости все гауссовы числа, которые делятся на $3-2i$.

В области целых чисел из соотношений $a\vdots b$ и $b\vdots a$ следует, что $a=\pm b$. В области гауссовых чисел, это уже не так, например $a\vdots\pm a$, $a\vdots\pm ia$. Однако верно следующее:

$$\boxed{\begin{gathered}a\vdots b,\ b\vdots a\Rightarrow\\ \Rightarrow a=\pm b \text{ или } a=\pm ib\end{gathered}} \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $a|b=c$, тогда c и $c^{-1}=b|a$ гауссовы числа. Очевидно

$$1=N(1)=N(c\cdot c^{-1})=N(c)N(c^{-1}),$$

откуда $N(c)=N(c^{-1})=1$ (ибо $N(c)$ и $N(c^{-1})$ обычные целые положительные числа). Но существует лишь 4 гауссовых числа с нормой 1 — числа $1, -1, i, -i$, которые мы в дальнейшем будем называть *единицами*.

Назовем два гауссовых числа *союзными*, если их частное — одно из единиц (рис. 5). Гауссово число называется *простым*, если оно не имеет других ненулевых делителей, кроме союзных с ним чисел и единиц. Например, числа 3 и $2+3i$ — простые, а число 5 — нет: $5=(2+i)(2-i)$. (Для доказательства простоты чисел 3 и $2+3i$ нужно воспользоваться соотношением $N(a)N(b)=N(ab)$ и перебрать все гауссовы числа, чья норма является делителем нормы данных чисел.)

Упражнение 5. Разберитесь, какие простые числа от 2 до 30 — простые гауссовы.

Основная теорема арифметики гауссовых чисел. *Каждое ненулевое гауссово число g представляется в виде*

$$\boxed{g=\varepsilon\cdot g_1^{e_1}g_2^{e_2}\ldots g_n^{e_n}} \qquad (6)$$

где ε — одна из единиц, $g_1, g_2, \ldots g_n$ — различные (то есть не союзные) простые гауссовы числа, а *$e_1, e_2, \ldots e_n$ — положительные показатели. Такое разложение единственно в том смысле, что всякое другое разложение g на простые сомножители имеет вид $a=\varepsilon'\cdot h_1^{e_1}h_2^{e_2}\ldots h_n^{e_n}$, где набор простых сомножителей $h_1, h_2, \ldots, h_n$ отличается от набора $g_1, g_2, \ldots, g_n$ перестановкой элементов и заменой некоторых из них на союзные, а наборы показателей состоят из тех же чисел, отличаясь лишь порядком.*

Доказательство. Чтобы доказать существование разложения (6), проведем индукцию по норме $N(g)$ числа g. База индукции: единственные числа с нормой 1 —

единицы ±1, $\pm i$. Шаг индукции: пусть $N(g)=n$ и утверждение уже доказано для гауссовых чисел с нормой меньшей n. Если g — простое гауссово число, все уже доказано, если нет, то $g=b\cdot c$, где $N(b)>1$, $N(c)>1$. Так как $N(g)=N(b)\cdot N(c)$, получаем $N(b)<n$ и $N(c)<n$. Согласно предположению индукции, b и c разлагаются на простые сомножители, значит данное число a — тоже.

Доказательство единственности разложения на простые сомножители сложнее и основано на возможности деления с остатком в области целых гауссовых чисел. А именно, справедлива

Лемма о делении с остатком. *Для каждой пары гауссовых чисел $a\neq0$, b существует такое гауссово число c (неполное частное числа b на a), что $N(b-ca)<N(a)$.*

(Напомним, что при делении целых чисел остаток меньше делимого. Для гауссовых чисел надо сравнивать нормы.)

Доказательство. Пусть $b/a=x+iy$ — частное чисел b и a (полученное по формуле (4)). Это число $x+iy$ не обязательно гауссово (x или y могут быть не целыми), но ему можно сопоставить точку $(x;y)$ на плоскости Oxy (рис. 4). В качестве искомого числа c рассмотрим ближайшее к $(x;y)$ гауссово число. Тогда $(x;y)$ лежит в единичном квадрате с центром в точке c, поэтому расстояние между c и $b/a=x+iy$ заведомо меньше 1, а значит то же верно для нормы их разности (квадрата этого расстояния), то есть $N((b/a)-c)<1$. Поэтому

$$N(b-ca)=N\left(a\left(\frac{b}{a}-c\right)\right)=$$

$$=N(a)N\left(\frac{b}{a}-c\right)<N(a),$$

что и требовалось.

Вернемся к доказательству теоремы. Для удобства переобозначим $a=a_0$, $b=a_1$ и произведем следующую последовательность делений с остатком

$$\begin{aligned}&a_0=q_1a_1+a_2,\ \text{где}\ N(a_2)<N(a_1),\\&a_1=q_2q_2+a_3,\ \text{где}\ N(a_3)<N(a_2),\qquad(7)\\&a_{n-2}=q_{n-1}a_{n-1}+a_n,\ \text{где}\ N(a_n)<N(a_{n-1}),\\&a_n=q_na_{n-1}.\end{aligned}$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока нормы остатков еще больше 0. Так как эти нормы целочисленны и монотонно убывают, через конечное число шагов мы обязательно получим в остатке 0. Через a_n мы и обозначили последний остаток, отличный от 0.

Если пройти последовательность равенств (7) снизу вверх, то легко убедиться, что

$$a_n\,|\,a_{n-1};\ a_n\,|\,a_{n-2};\ \dots;\ a_n\,|\,a_1;\ a_n\,|\,a_0.$$

Пройдя ее сверху вниз, легко доказать, что

$$x\,|\,a_0,\ x\,|\,a_1\Rightarrow x\,|\,a_2;\ x\,|\,a_3;\ \dots;\ x\,|\,a_n.\qquad(8)$$

Спускаясь по последовательности (7), мы получаем далее, что $a_2, \dots, a_n$ представляются в виде $a_i=x_ia_0+y_ia_1$. В частности,

$$a_n=x_na_0+y_na_1.\qquad(9)$$

Замечание. Таким образом, число a_n служит *наибольшим общим делителем* чисел a_0 и a_1 в том смысле, что всякое (гауссово) число, делящее a_0 и a_1, либо союзно с a_n, либо имеет норму, меньшую $N(a_n)$.

Приведенный алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя называется *алгоритмом Евклида*. Из него легко следует

Лемма Евклида. *Если p — простое гауссово число, то*

$$ab\ \vdots\ p\Rightarrow(a\ \vdots\ p\ \textit{или}\ b\ \vdots\ p).$$

Доказательство. Допустим, например, что a не делится на p. Воспользуемся (8), где положено $a_0=a$, $a_1=p$. Тогда $a_n=\varepsilon$ — единица (ибо $a_n\,|\,p, a_n\,|\,a_0$). Отсюда $\varepsilon=x_na+y_np$, значит

$$1=(\varepsilon^{-1}x_n)a+(\varepsilon^{-1}y_n).$$

Умножая на b, получаем:

$$(\varepsilon^{-1}x_n)ab+(\varepsilon^{-1}y_nb)p=b.$$

Согласно условию леммы, $ab\ \vdots\ p$, откуда $b\ \vdots\ p$, что и требовалось доказать.

Теперь уже легко закончить доказательство единственности разложения на простые сомножители. В самом деле, если предположить существование равенства $p_1\cdot\ldots\cdot p_n=q_1\cdot\ldots\cdot q_m$, где p_i, q_j — простые, то, пользуясь леммой, можно последовательно сокращать по одному множителю слева и справа, откуда следует $n=m$ и совпадение (с точностью до единиц) сокращенных простых сомножителей.

Замечание. Читатели, знакомые с обычным доказательством основной теоремы арифметики целых чисел, наверняка заметили, что изложенное выше доказательство для целых гауссовых чисел отличается от обычного только присутствием нормы в алгоритме Евклида. Остальные же читатели теперь без труда могут приспособить это доказательство для случая целых чисел.

Пифагоровы тройки — это тройки натуральных чисел (a, b, c), которые служат длинами сторон прямоугольного треугольника, то есть удовлетворяют условию теоремы Пифагора $a^2+b^2=c^2$. Наша ближайшая цель — применить гауссовы числа к поиску этих троек. Имеем:

$$c^2=(a+bi)(a-bi).$$

Разложим c и $a+bi$ на простые сомножители:

$$c=\varepsilon p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{e_n},$$

$$a+bi=\tilde{\varepsilon}q_1^{f_1}\cdot\ldots\cdot q_m^{f_m}s_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot s_l^{k_l},$$

где $\bar{q}_i=q_i$, $\bar{s}_j\neq s_j$. Тогда

$$c^2=\varepsilon^2 p_1^{2e_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{2e_n}=$$
$$=a^2+b^2=\tilde{\varepsilon}\bar{\tilde{\varepsilon}}q_1^{2f_1}\cdot\ldots\cdot q_m^{2f_m}\cdot s_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot s_l^{k_l}\cdot$$
$$\cdot\bar{s}_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\bar{s}_l^{k_l}.$$

Из основной теоремы сразу следует, что k_i — четные числа, то есть $k_i=2r_i$ $(i=1, \ldots, l)$. Поэтому

$$c=d(u+iv)(u-iv),$$

где $d=q_1^{2f_1}\cdot\ldots\cdot q_m^{2f_m}$,

и $u+iv=s_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot s_l^{r_l}$.

Тогда

$$c^2=d^2(u+iv)^2\overline{(u+iv)}^2=$$
$$=[d(u+iv)]^2\overline{[d(u+iv)]}^2.$$

Снова воспользовавшись однозначностью разложения на простые сомножители, получаем

$$a+bi=d(u+iv)^2=d(u^2-v^2)+(2duv)i;$$

откуда следует, что каждая пифагорова тройка представима в виде

$$a=d(u^2-v^2);\ b=duv;\ c=d(u^2+v^2),$$

где u и v — произвольные натуральные числа.

Простые гауссовы числа. Основная теорема арифметики гауссовых чисел во многом сводит их изучение к изучению их простых сомножителей. Поэтому важно иметь описание всех простых гауссовых чисел.

Теорема 1. *Простые гауссовы числа суть* (А) $1+i$ *и союзные с ним числа;* (Б) *простые натуральные* $p=4k+3$, $k\in\mathrm{N}$ *и союзные с ними числа;* (В) *множители* $a+b_i$ *простого натурального* p *вида* $4k+1$, $k\in\mathrm{N}$.

Упражнение 6. Нарисуйте на плоскости все гауссовы простые числа, по норме меньшие 10.

Доказательство. Рассмотрим любое простое гауссово число q.

Лемма. *Каждое простое гауссово число q — делитель ровно одного натурального простого числа p.*

Доказательство леммы. В самом деле, q делит $N(q)$ и, следовательно, делит его некоторый простой сомножитель. С другой стороны, q не может делить два различных простых l и r, ибо всегда найдутся такие целые m и n, что $ml+nr=1$. (Докажите!)

Итак, данное простое гауссово число q делит некоторое обычное (целое!) простое число p, то есть $q=a+bi\,|\,p$ или $q\cdot t=p$, значит $N(q)N(t)=p^2$. Поэтому, либо $N(t)=1$ и тогда t — единица, а q союзно с p, либо

$$N(q)=a^2+b^2=p,\ t=\bar{q}=a-bi. \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь 3 случая.

1) Если $p=2$, то $p=1^2+1^2=(1+i)(1-i)=i(1-i^2)$; числа $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ суть союзные между собой простые гауссовы числа (это — случай (А) теоремы).

2) Если $p=4k+3$, равенство (10) невозможно, так как квадрат любого целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Поэтому простые числа вида $4k+3$ остаются простыми в области гауссовых чисел (случай (Б)).

3) Если $p=4k+1$, воспользуемся следующим утверждением:

Критерий Эйлера. *Если $p=4k+1$, $k\in\mathrm{Z}$ — простое, то существует натуральное x, для которого $p\,|\,x^2+1$, то есть $p\,|\,(x+i)(x-i)$.*

Доказательство этого утверждения мы здесь не приводим, оставляя его в качестве задачи для читателя. Указание: примените малую теорему Ферма (см. «Квант», 1985, № 6, с. 19, см. также «Квант», 1973, № 1, с. 4).

Таким образом, в нашем случае p не является простым гауссовым. Значит, p делится на некоторое простое гауссово число $g=a+bi$. Тогда по основной теореме p делится и на союзное число $a-bi$. Если p к тому же делится еще на какое-то число $c+di$, не союзное с $a+bi$, то p делится и на $c-di$. Но тогда p делится на

$$(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)=$$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

и не может быть простым (в обычном смысле). Значит, в нашем случае

$$p=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=N(g). \qquad (11)$$

Мы получили утверждение (В) теоремы 1, которая тем самым доказана.

Число представлений числа в виде суммы квадратов. Мы не только перечислили все простые гауссовы числа, но в сущности сумели доказать (см. (11), основную теорему и теорему 1) такое утверждение:

Теорема 2. *Простое натуральное $p>2$ представимо в виде суммы квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4k+1$, и в этом случае такое представление единственно.*

Найдем теперь число разложений $n=a^2+b^2$ для произвольного натурального n. Нам будет удобно считать различными разложения, отличающиеся изменением знаков у a и b или порядком слагаемых. Тогда это число будет равным числу точек с целыми координатами на окружности радиуса $\sqrt{n}$ с центром O.

Теорема 3. *Число целых точек на окружности радиуса $\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$ или (что то же самое) число разложений целого числа n на сумму двух квадратов равно учетверенному избытку числа делителей n вида $4k+1$ над числом делителей вида $4k+3$.*

Например, легко видеть, что окружности радиусов $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, 5 проходят через 4, 4, 4, 12 точек соответственно (проверьте, что во всех трех случаях это число равно соответствующему учетверенному избытку). Более сложный пример разобран на рисунке 6.

Доказательство. Представим n в виде $n=2^a q_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot q_k^{a_k}\cdot p_1^{e_1}\bar{p}_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\bar{p}_m^{e_m}p_m^{e_m}$,

где $\bar{q}_j=q_j>0$ и $\bar{p}_i$, p_i — простые гауссовы числа ($\bar{p}_i$ и p_i — несоюзные). Пусть $n=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. Из основной теоремы легко следует, что $a+bi$ союзно с числом

$$(1+i)^a\cdot q_1^{a_1/2}\cdot\ldots\cdot q_k^{a_k/2}\cdot p_1^{f_1}\cdot\bar{p}_1^{e_1-f_1}\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot p_m^{f_m}\bar{p}_m^{e_m-f_m}, \qquad (12)$$

где $0\leqslant f_j\leqslant e_j$.

Отсюда видно, что число представлений n в виде суммы двух квадратов равно

$$\begin{cases} 0 \text{ — если среди чисел } a_i \text{ есть нечетные числа,} \\ 4(e_1+1)\cdot\ldots\cdot(e_m+1) \text{ — если все } a_i \text{ четные} \end{cases} \qquad (13)$$

(4 появляется в результате того, что выражение (12) отличается от $a+bi$ на единицу, а единиц всего 4).

С другой стороны, любой нечетный делитель x числа n имеет разложение на простые гауссовы числа вида

$$x=q_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot q_k^{b_k}p_1^{f_1}\bar{p}_1^{f_1'}\cdot\ldots\cdot p_m^{f_m}\bar{p}_m^{f_m'},$$

где $b_1\leqslant a_1, \ldots, b_k\leqslant a_k;\ f_1\leqslant e_1, \ldots, f_m\leqslant e_m$.

Но q_i — натуральные числа, являющиеся простыми гауссовыми, поэтому q_i имеет остаток 3 при делении на 4 и

$$(b_1+\ldots+b_k) \vdots 2 \Leftrightarrow x=4k+1 \quad (k\in\mathbf{Z}).$$

Отсюда уже легко вывести (выведите!), что избыток числа делителей вида $4k+1$ над числом делителей вида $4k+3$ равен

$$\begin{cases} 0, \text{ если среди чисел } a_i \text{ есть нечетное,} \\ (e_1+1)\cdot\ldots\cdot(e_m+1), \text{ если все } a_i \text{ — четные числа.} \end{cases} \qquad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получаем доказательство теоремы.

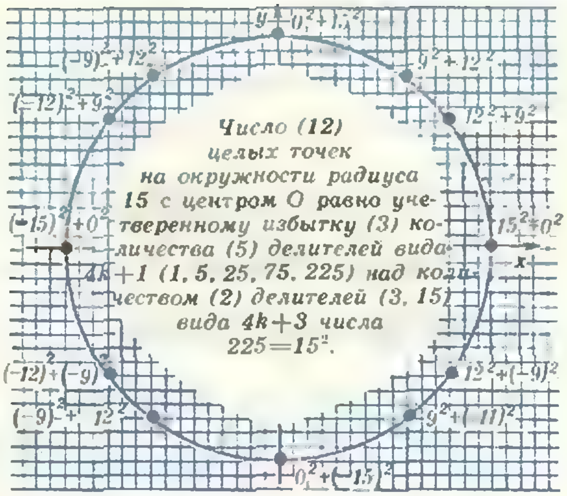

y
0^2+15^2
$(-9)^2+12^2$
9^2+12^2
$(-12)^2+9^2$
12^2+9^2
Число (12) целых точек на окружности радиуса 15 с центром O равно учетверенному избытку (3) количества (5) делителей вида 4k+1 (1, 5, 25, 75, 225) над количеством (2) делителей (3, 15) вида 4k+3 числа 225=15².
$(-15)^2+0^2$
15^2+0^2
x
$(-12)^2+(-9)^2$
$12^2+(-9)^2$
$(-9)^2+12^2$
$9^2+(-12)^2$
$0^2+(-15)^2$

Рис. 6.

Заключение. Мы не объяснили, откуда возникла изложенная выше теория. А дело было так: в 1796 году девятнадцатилетний Гаусс доказал *квадратичный закон взаимности*, являющийся одной из прекраснейших жемчужин теории чисел. Об истории его возникновения и доказательстве рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Золотая теорема» (в «Кванте», 1973, № 1).

Квадратичный закон взаимности позволяет исчерпывающим образом исследовать уравнение вида $x^2-a\equiv 0 \pmod b$, то есть найти все $x \in N$ такие, что число x^2-a делится нацело на b.

Естественно, что аналогичную теорию Гаусс хотел иметь и для уравнений более высокой степени, например $x^4-a\equiv 0 \pmod b$, и поэтому начал поиски «биквадратичного закона взаимности». И тут-то выяснилось, что хотя это уравнение первоначально изучается в области натуральных чисел, законченный результат практически невозможно даже сформулировать (!) без целых гауссовых чисел. Впоследствии (1832 г.), Гаусс писал:

> «После того, как мы начали исследовать эти вопросы в 1805 г., (...) мы скоро пришли к убеждению, что (...) для общей теории необходимо в некотором смысле бесконечно расширить область высшей арифметики. Как только мы вступаем в эту область, тотчас же обнаруживается подход к индуктивному нахождению весьма простых и исчерпывающих всю теорию теорем; однако доказательства их скрыты столь глубоко, что их удалось извлечь на свет только после бесплодных попыток».

Область, о которой пишет Гаусс, и есть теория тех чисел, которые сейчас носят его имя.

Упорядоченные наборы чисел и неравенства

Л. ПИНТЕР, И. ХЕГЕДЫШ

Родители Коли хранят бумажные деньги в конвертах. Однажды они достали три конверта и положили их перед ним. В одном из конвертов лежали рубли, в другом — трешки, а в третьем — пятерки. Родители попросили Колю вытащить из одного из конвертов две, из другого три, а из оставшегося конверта четыре бумажки.

Как Коле выбрать конверты, чтобы получить наибольшую возможную сумму, и как — чтобы набрать сумму, наименьшую из возможных? Чтобы найти набранную сумму при произвольном выборе конвертов, нужно в таблицу 1 в нижнюю строку вместо вопросительных знаков поставить числа 2, 3, 4 в соответствующем порядке, затем взять произведения чисел по столбцам и сложить их.

1	3	5
?	?	?

Таблица 1

Если Коля хочет набрать наибольшую сумму, то он должен вытащить четыре бумажки из конверта с пятерками, три бумажки из конверта с трешками и две бумажки из конверта с рублями:

$$5\cdot 4+3\cdot 3+1\cdot 2=31.$$

Если Коля хочет набрать наименьшую возможную сумму, то он должен вытащить наименьшее число бумажек, то есть две, из конверта с пятерками, три — из конверта с трешками и четыре — из конверта с рублями, то есть

$$5\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 4=23.$$

Упорядоченные тройки

В общем виде эту задачу можно сформулировать так. Пусть даны две тройки положительных чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3.$$

Рассмотрим сумму

$$S=a_1b_i+a_2b_j+a_3b_k,$$

где i, j, k — это числа 1, 2, 3, написанные в каком угодно порядке. Как выбрать этот порядок, чтобы сумма S оказалась наибольшей (соответственно наименьшей) из возможных?

Ясно, что если наибольшее из чисел a умножить на наибольшее из чисел b, среднее из чисел a на среднее из чисел b и наконец наименьшее из чисел a на наименьшее из чисел b и сложить эти произведения, то получится максимальное из возможных значение S (если среди чисел a или среди чисел b имеются равные, то это максимальное значение S получается не единственным способом). Если же наибольшее из чисел a умножить на наименьшее из чисел b, среднее — на среднее и т. д., то получаем наименьшее возможное значение S.

Пользуясь этим методом, можно просто решить задачу М762 (см. «Квант», 1982, № 9)*).

Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+$$
$$+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}. \quad (1)$$

Докажем сначала первое неравенство. Запишем две тройки чисел

$$a^2,\ b^2,\ c^2,$$
$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}.$$

Поскольку числа a, b, c положительны, наибольшее из чисел первой тройки расположено над наименьшим из чисел второй тройки, наименьшее из чисел первой тройки расположено над наибольшим из чисел второй тройки. Поэтому для данных троек сумма

---

*) См. также статью С. В. Дворянинова и Э. А. Ясинового «Как получаются симметричные неравенства» («Квант», 1985, № 7), где эти неравенства доказаны другим способом.

$$a^2\cdot\ \frac{1}{a}+b^2\cdot\ \frac{1}{b}+c^2\cdot\ \frac{1}{c}$$

является минимальной, и следовательно,

$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}\leqslant a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}, \tag{2}$$

$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}\leqslant a^2\frac{1}{c}+b^2\frac{1}{a}+c^2\frac{1}{b}. \tag{3}$$

Складывая неравенства (2) и (3), получим:

$$2(a+b+c)\leqq a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}+a^2\frac{1}{c}+$$
$$+b^2\frac{1}{a}+c^2\frac{1}{b}=\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}.$$

Чтобы получить второе из неравенств (1), рассмотрим тройки чисел

$$a^3,\ b^3,\ c^3,$$
$$\frac{a}{abc},\ \frac{b}{abc},\ \frac{c}{abc}.$$

Под наибольшим (соответственно наименьшим) из чисел первой тройки записано наибольшее (наименьшее) число второй тройки. Поэтому

$$a^3\frac{a}{abc}+b^3\frac{b}{abc}+c^3\frac{c}{abc}\geqslant a^3\frac{b}{abc}+b^3\frac{c}{abc}+$$
$$+c^3\frac{a}{abc}=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}, \tag{4}$$

$$a^3\frac{a}{abc}+b^3\frac{b}{abc}+c^3\frac{c}{abc}\geqslant a^3\frac{c}{abc}+b^3\frac{a}{abc}+$$
$$+c^3\frac{b}{abc}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}. \tag{5}$$

Складывая неравенства (4) и (5), получаем

$$2\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)\geqslant\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+$$
$$+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b},$$

что и требовалось.

Упражнения

Докажите неравенства:

1. $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$.
2. $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab$.
3. $\frac{a^3b}{c}+\frac{a^3c}{b}+\frac{b^3a}{c}+\frac{b^3c}{a}+\frac{c^3a}{b}+\frac{c^3b}{a}\geqslant 6abc$

(здесь $a>0$, $b>0$, $c>0$).

4. Если $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4$, $b_1\geqslant b_2\geqslant b_3$, то

$$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\geqslant(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3).$$

5. Если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Некоторые обобщения

Пусть теперь даны два набора из n чисел

$$\begin{aligned}&a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n,\\&b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\ldots\geqslant b_n.\end{aligned} \tag{A}$$

Рассмотрим всевозможные суммы вида i $\sigma=a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\ldots+a_nb_{i_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., n.

Число таких сумм конечно, и поэтому среди них есть наибольшая S и наименьшая s. Нетрудно сообразить, что $S=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$, а $s=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$.

Докажем это. Предварительно заметим, что для любых четырех чисел a, b, c, d таких, что $a\geqslant b$ и $c\geqslant d$, выполнено неравенство

$$ac+bd\geqslant ad+bc, \tag{*}$$

которое равносильно очевидному неравенству

$$(a-b)(c-d)\geqslant 0.$$

После этого замечания наше утверждение доказывается без труда. В самом деле, если в некоторой сумме σ имеются слагаемые a_eb_q и a_kb_p, для которых $e<k$, $q>p$, то есть $b_p\geqslant b_q$, то, переставив числа b_p и b_q, мы получим не меньшую сумму σ' со слагаемыми a_eb_p и a_kb_q.

Последовательно проводя такие перестановки, мы придем к сумме S, поэтому $S\geqslant\sigma$.

Аналогично, если $b_q\geqslant b_p$, то, меняя эти числа местами, получим сумму, не большую σ.

Так как в результате нескольких перестановок мы можем прийти к сумме s, то $\sigma\geqslant s$.

Итак, для всякой суммы σ

$$s\leqslant\sigma\leqslant S, \tag{Б}$$

причем равенство в (Б) возможно лишь тогда, когда в одном из наборов a_1, ..., a_n, либо b_1, ..., b_n есть равные числа.

Подводя итоги, можно сформулировать общий метод доказательства неравенств: если наборы чисел a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n одинаково упорядочены (то есть из $a_k\geqslant a_l$ следует, что $b_k\geqslant b_l$), то $a_1b_1+a_2b_2+\ldots$ $\ldots+a_nb_n\geqslant a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\ldots+a_nb_{i_n}$, (здесь i_1, i_2, ..., i_n — произвольная перестановка номеров 1, 2, ..., n).

Некоторые замечательные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=G.$$

Доказательство. Можно считать, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Рассмотрим наборы чисел

$$\frac{a_1}{G};\ \frac{a_1a_2}{G^2},\ \ldots,\ \frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}=1,$$

$$\frac{G}{a_1};\ \frac{G^2}{a_1a_2},\ \ldots,\ \frac{G^n}{a_1\ldots a_n}=1.$$

Эти наборы противоположно упорядочены. Поэтому

$$n=\frac{a_1}{G}\cdot\frac{G}{a_1}+\frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G^2}{a_1a_2}+\ldots+\frac{a_1\ldots a_n}{G^n}\,\frac{G^n}{a_1\ldots a_n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_1}{G}\cdot 1+\frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G}{a_1}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}\times$$

$$\times\frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{G}.$$

2. Неравенство Чебышева. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > i$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant$ $\geqslant b_n \geqslant 0$, то

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Доказательство. Сложив n неравенств

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$
$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_nb_1,$$
$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_n+a_2b_1+\ldots+a_nb_n,$$

получим требуемое.

Замечание. Так же доказывается, что, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то $n(a_1b_1+\ldots) \leqslant$ $\leqslant (a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)$.

3. Неравенство о среднем квадратическом:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Доказательство. Можно считать, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Применяя неравенство Чебышева к случаю $a_i=b_i$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$, получим

$$n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \geqslant (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2,$$

откуда без труда получим требуемое неравенство.

Упражнения

6. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны выпуклого n-угольника ($n \geqslant 3$), то

$$\frac{a_1}{p-2a_1}+\frac{a_2}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-2a_n} \geqslant \frac{n}{n-2}$$

(здесь $p=a_1+a_2+\ldots+a_n$ — периметр n-угольника).

7. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неотрицательны, то $n(a_1^{k+m}+a_2^{k+m}+\ldots+a_n^{k+m}) \geqslant (a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k)\times$ $\times(a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m)$.

8. Если a, b, c положительны, то

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

9. (Обобщение задачи М762.) Если $a_1, \ldots, a_n$ положительны, то

$$(n-1)(a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m) \leqslant \frac{a_2^k+a_3^k+\ldots+a_n^k}{a_1^{k-m}}+$$
$$+\frac{a_1^k+a_3^k+\ldots+a_n^k}{a_2^{k-m}}+\ldots+\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_{n-1}^k}{a_n^{k-m}},$$

здесь $k > m > 0$.

Наш календарь

Формула Бальмера

«Как только я увидел формулу Бальмера, мне все сразу же стало ясно»,— так обычно рассказывал Н. Бор о завершающем этапе своей работы над созданием квантовой теории атома.*)

В этом году исполнилось 100 лет с тех пор, как эта формула, которой суждено было сыграть выдающуюся роль в истории науки, стала известна широким кругам ученых. Впервые она была опубликована Бальмером в 1884 году, но о ней почти никто не знал, пока в 1885 году не появилась статья в немецком физическом журнале.

Швейцарец Иоганн Якоб Бальмер (1825—1898), получив университетское математическое образование, с 60-х по 90-е годы прошлого века преподавал математику в Базеле в гимназии для девочек и вел занятия по начертательной геометрии в местном университете.

Круг интересов Бальмера был очень широк — философия и литература, музыка и архитектура, древняя история и история естествознания, медицина... Но как прирожденного математика его больше всего увлекали поиски математической гармонии, конкретно — закономерных числовых отношений: в формах кристаллов, в геометрических параметрах знаменитых памятников архитектуры и т. п. Именно эта увлеченность «магией чисел» и привела базельского преподавателя к его замечательному открытию.

Вот задача, которую ре-

---

*) Об этом этапе жизни и деятельности выдающегося датского физика-теоретика Н. Бора (1885—1962) рассказывается в статье В. А. Фабриканта «Первые шаги Нильса Бора в науке», опубликованной в десятом номере нашего журнала за этот год. (*Примеч. ред.*)

шил Бальмер. Даны четыре числа

6562,10; 4860,74;
4340,10; 4101,2.

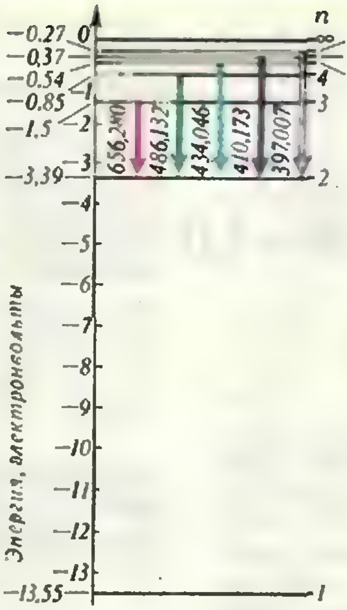
Требуется найти «закон», которому они следуют.

Тот, кто захочет решить эту задачу самостоятельно (а для этого ничего, кроме элементарной математики, не потребуется), должен здесь на время прервать чтение заметки, поскольку чуть дальше приводится ответ.

Числа, закономерность следования которых нашел Бальмер, — это длины волн (в 10^{-10} м) четырех линий в видимой области спектра атома водорода. В физике Бальмер был самое большее дилетантом и к постановке задачи пришел случайно — прослушав лекцию профессора физики по спектральным исследованиям. Надо сказать, что серия линий водородного спектра физикам-профессионалам была хорошо известна по меньшей мере с 1868 года. Но в попытках установить спектральный закон физики неизменно руководствовались, как оказалось впоследствии, не имеющей к делу никакого отношения акустической аналогией: линии серии уподобляли обертонам звука и искали для них выражения вида λ/n, где λ — некоторая основная длина волны, а n — целое число. При этом для спектров различных элементов получали различные наборы целых чисел, между которыми никакой связи не усматривалось.

Вероятно, Бальмеру помогло то, что он не был физиком. Не отягощенный никакими предвзятыми представлениями, он лишь искал простую формулу, максимально точно воспроизводящую обнаруженную экспериментаторами последовательность длин волн спектральной серии. И результатом этих поисков стала знаменитая «формула Бальмера»:

$$\lambda = d\,\frac{n^2}{n^2-2^2}.$$



Здесь λ — длина волны спектральной линии, d — некоторая постоянная (равная $3645{,}6 \cdot 10^{-10}$ м), а n — целые числа. Приведенные четыре водородные линии получаются из этой формулы подстановкой для n значений 3, 4, 5 и 6 соответственно. Как ученый пришел к этой формуле, не известно, но имеются косвенные указания на то, что он опирался на довольно несложное геометрическое построение.

Получив свою формулу, удивительно точно описывающую четыре водородные линии, Бальмер все же сомневался — нашел ли он физическую закономерность или его результат есть лишь следствие поразительного совпадения. Пролистав популярный справочник по новейшим научным достижениям, он узнал, что известна еще одна, пятая линия водородной серии с длиной волны $3969 \cdot 10^{-10}$ м (это уже невидимая ультрафиолетовая область спектра). Подставив в свою формулу $n=7$, Бальмер получил $\lambda=3969 \cdot 10^{-10}$ м! Этот успех существенно подкрепил его доверие к формуле, и он показал ее коллеге по Базельскому университету, профессору физики. Тот отнесся к открытию с большим интересом и сообщил Бальмеру, что на самом деле известны еще девять линий в ультрафиолетовой части водородного спектра. Не составило большого труда убедиться, что и эти линии великолепно описываются «волшебной» формулой (при подстановке $n=8, 9, \ldots, 16$). Сомнений в том, что найден какой-то новый фундаментальный закон природы, больше не оставалось.

В 1890 году шведский физик И. Ридберг (1854—1919) записал формулу Бальмера несколько поиному:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

(ν — частота спектральной линии, c — скорость света, а R — фундаментальная физическая постоянная, которую теперь называют «постоянной Ридберга»). Именно в этой записи формула Бальмера предстала перед Бором в феврале 1913 года. Приняв во внимание выражение для энергии кванта $h\nu$ (h — постоянная Планка), Бор сразу же разгадал физический смысл формулы, остававшийся совершенно таинственным почти три десятилетия. А смысл этот предельно точный и ясный — спектральные линии соответствуют квантам электромагнитного излучения, испускаемым электронами при перескоках с орбиты с номером n ($n=3$, 4 и т. д.) на более близкую к ядру 2-ю орбиту.

Очень часто повторяют два утверждения: 1) крупнейшие научные открытия ученые совершают только в молодости; 2) к таким открытиям нельзя прийти путем «игры с цифрами», не задумываясь о сути явлений. История открытия Бальмера наглядно демонстрирует, что бывают и исключения.

Б. Е. Явелов

Математика 9—10

Метод интервалов

Эта статья предназначена девятиклассникам и десятиклассникам. Она также может быть использована абитуриентами при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

В школьном курсе алгебры неравенствам отводится значительное место: сначала это — линейные неравенства, потом — квадратичные, потом — неравенства, в которых участвуют логарифмические, показательные и тригонометрические функции. Постепенно неравенства усложняются — появляются всевозможные комбинации функций, изучаемых в школе. В этой статье мы на нескольких примерах проиллюстрируем один важный метод решения неравенств, который обычно называют «методом интервалов». Мы будем рассматривать здесь неравенства, правая часть которых равна нулю, а левая часть представлена в виде произведения или частного функций с известными промежутками знакопостоянства. Метод интервалов основан на следующей очевидной идее: знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

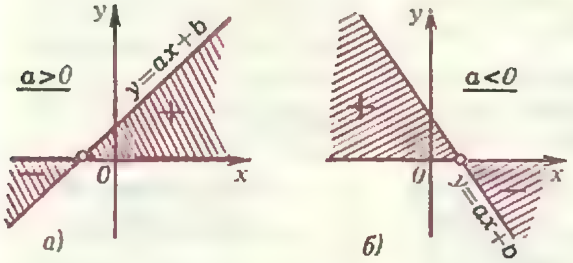


Рис. 1.

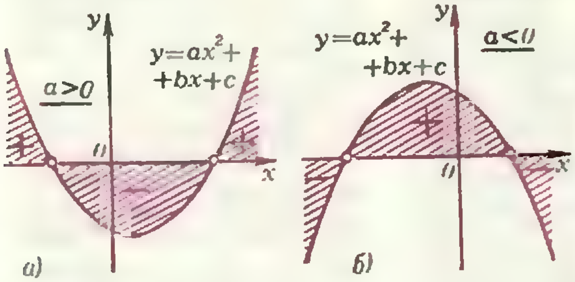


Рис. 2.

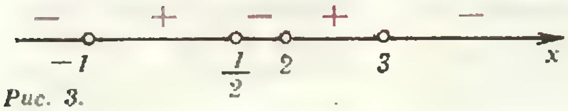


Рис. 3.

Задача 1. *Решить неравенство*

$$\frac{(2x-1)(x^2-x-2)}{3-x}<0.$$

Линейная функция с ненулевым угловым коэффициентом меняет знак при переходе через корень, причем справа от корня знак функции совпадает со знаком углового коэффициента (рис. 1); квадратный трехчлен с положительным дискриминантом тоже меняет знак при переходе через каждый корень, причем правее большего корня знак квадратного трехчлена совпадает со знаком его старшего коэффициента (рис. 2).

Эти соображения приводят к следующей схеме решения неравенства.

1. Находим корни каждого «сомножителя»: $x=\frac{1}{2}$; $x=-1$, $x=2$; $x=3$. Наносим найденные корни на числовую ось (рис. 3).

2. Числовая ось разбилась на пять промежутков. На самом правом из них знак каждого сомножителя совпадает со знаком его старшего коэффициента: $2x-1>0$, $x^2-x-2>0$, $3-x<0$. Следовательно, дробь на этом промежутке отрицательна.

3. При переходе через каждый из отмеченных корней один и только один из сомножителей меняет знак, и потому каждый раз меняется знак дроби. Учитывая это, расставляем в этих промежутках знаки (как показано на рисунке 3).

4. Выбираем промежутки, на которых дробь отрицательна.

Ответ:

$]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]\frac{1}{2};\ 2[\ \cup\ ]3;\ +\infty[.$

Задача 2. *Решить неравенство*

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x}\geqslant 0.$$

Будем решать это неравенство по той же схеме, но не на всей оси, а на промежутке $]0;\ +\infty[$ — области определения логарифмической функции.

1. Корни «сомножителей»: $x=2$; $x=0{,}4$; $x=1$ (рис. 4).

2. Полуось $]0;\ +\infty[$ разбилась на четыре промежутка. На самом правом из них $4-x^2<0$, $5x-2>0$, $\lg x>0$. Следовательно, на этом промежутке левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через каждый корень меняет знак один и только один из сомножителей. Учитывая это, расставляем знаки на остальных промежутках (рис. 4).

4. Мы решили строгое неравенство. Остается присоединить к полученному множеству решений корни уравнения

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x}=0,$$

то есть корни числителя дроби (входящие в область определения неравенства).

Ответ: $]0;\ 0{,}4[\ \cup\ ]1;\ 2]$.

Задача 3. *Решить неравенство*

$$\frac{(10^x-2)(x^2-5x+7)}{x+3}\leqslant 0.$$

Решение изображено на рисунке 5. Квадратный трехчлен в числителе дроби не имеет корней и потому не меняет знак, который совпадает со знаком его старшего коэффициента.

Ответ: $]-3;\ \lg 2]$.

Задача 4. *Решить неравенство*

$$(x^2-2x-3)(6+x-x^2)\geqslant 0.$$

1. Находим корни сомножителей: $x=-1$, $x=3$, $x=-2$, $x=3$.

2. При $x>3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через точку $x=3$ оба сомножителя меняют знак ($x=3$ — их общий корень), так что знак произведения не меняется.

При переходе через каждый из двух других корней левая часть, как и в предыдущих примерах, меняет знак (рис. 6).

Ответ: $[-2;\ -1]\cup\{3\}$.

Из этой задачи видно, что, применяя метод интервалов, необходимо следить за тем, сколько сомножителей меняют знак при переходе через данный корень. Возможны сомножители, которые не меняют знак при переходе через свой корень (например, квадратный трехчлен с дискриминантом, равным нулю).

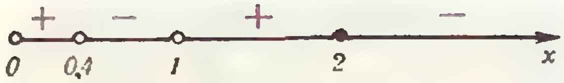


Рис. 4.

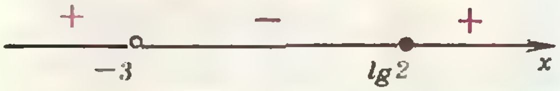


Рис. 5.

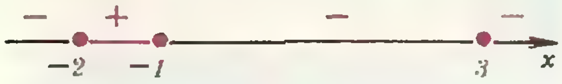


Рис. 6.

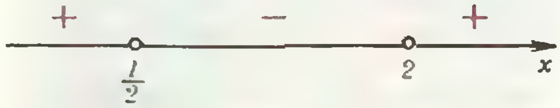


Рис. 7.

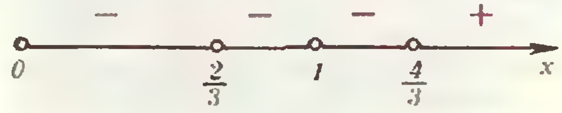


Рис. 8.

Задача 5. *Решить неравенство*

$$\frac{4x^2-4x+1}{2x^2-5x+2}\leqslant 0.$$

$x=\frac{1}{2}$ — корень и числителя, и знаменателя дроби. Однако при переходе через этот корень меняет знак лишь знаменатель; поэтому в этой точке дробь меняет знак (рис. 7).

Ответ: $\left]\frac{1}{2};\ 2\right[$.

Проверьте себя, решив следующую задачу:

Задача 6. *Решить неравенство*

$$\frac{(1+x-2x^2)\lg x}{(4-3x)(9x^2-12x+4)}<0.$$

Ответ: $\left]0;\ \frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};\ 1\right[\cup\left]1;\ \frac{4}{3}\right[$ (рис. 8).

В рассмотренных примерах мы имели дело с линейной, квадратичной, показательной и логарифмической функциями, промежутки знакопостоянства которых изучаются в школьном курсе. Однако метод интервалов можно применять и в более сложной ситуации.

Идея решения следующих неравенств основана на интуитивно ясной теореме, точное доказательство которой дается в курсах математического анализа: *если функция непрерывна на промежутке и не имеет в этом промежутке корней, то она сохраняет в этом промежутке знак.*

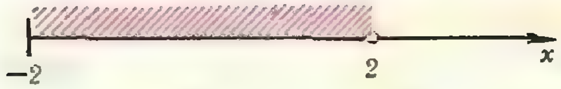


Рис. 9.

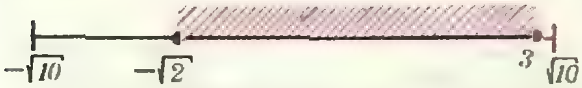


Рис. 10.

Задача 7. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x+2}>x. \qquad (1)$$

Функция $y=\sqrt{x+2}-x$ определена и непрерывна на промежутке $[-2; +\infty[$.

Найдем корни этой функции, то есть решим уравнение

$$\sqrt{x+2}=x. \qquad (2)$$

Возведя обе части уравнения (2) в квадрат, придем к квадратному уравнению $x^2-x-2=0$ с корнями $x=-1$, $x=2$. Проверка показывает, что корнем уравнения (2) является только $x=2$. Эта точка разбивает область определения неравенства (1) на два промежутка: $[-2; 2[$ и $]2; +\infty[$. На каждом из этих промежутков функция $y=\sqrt{x+2}-x$ сохраняет знак, то есть либо все точки такого промежутка удовлетворяют неравенству (1), либо ни одна из них этому неравенству не удовлетворяет. Поэтому достаточно подставить в неравенство (1) по одной точке из каждого промежутка. Выберем точки $x=-2$ и $x=7$. Так как $x=-2$ удовлетворяет неравенству (1), а $x=7$ этому неравенству не удовлетворяет, множеством решений неравенства (1) является промежуток $[-2; 2[$ (рис. 9).

Ответ: $[-2; 2[$.

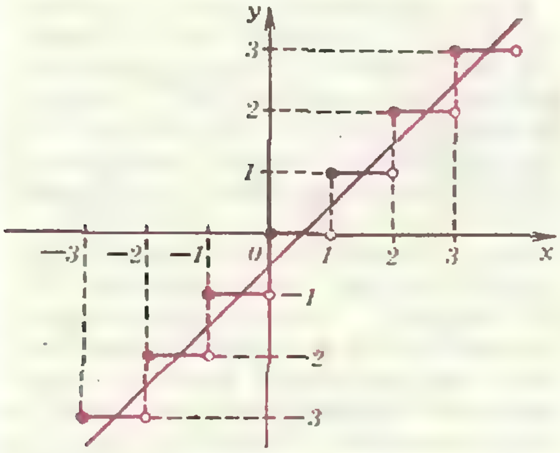


Рис. 11.

Задача 8. *Решить неравенство*

$$x\sqrt{10-x^2}>x^2-6.$$

1. Область определения функции $\sqrt{10-x^2}$: $[-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$.

2. Решаем уравнение:

$$x\sqrt{10-x^2}=x^2-6,$$
$$x^2(10-x^2)=(x^2-6)^2;$$
$$x^4-11x^2+18=0.$$

Получаем четыре корня: $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm 3$. Проверка оставляет два корня: $x=-\sqrt{2}$, $x=3$ (рис. 10).

3. Подставляем в неравенство числа $x=-\sqrt{10}$, $x=0$, $x=\sqrt{10}$. Число $x=0$ удовлетворяет неравенству, а числа $x=\pm\sqrt{10}$ ему не удовлетворяют.

Ответ: $[-\sqrt{2}; 3]$.

Как известно, линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции, а также их композиции и функции, получаемые из них с помощью арифметических действий, непрерывны в своей области определения. Поэтому метод интервалов можно *применять при решении практически* всех неравенств школьного курса. Метод интервалов позволяет представить множество решений неравенства в виде объединения промежутков, границы которых — либо корни соответствующего уравнения, либо граничные точки области определения неравенства.

Требование *непрерывности* существенно для применения метода интервалов. В этом можно убедиться на следующей задаче.

Задача 9. *Решить неравенство*

$$[x]\leqslant x-\frac{1}{2}.$$

Построим графики левой и правой части неравенства (рис. 11). Корнями уравнения $[x]=x-\frac{1}{2}$ являются числа вида $k+\frac{1}{2}$, где k — любое целое число. В то же время множество решений неравенства — объединение промежутков вида $[k+\frac{1}{2}; k+1[$, граничными точками которых являются, в частности, все целые числа, которые *не являются при этом ни корнями* уравнения, ни граничными точками области определения.

Ю. И. Ионин, В. Б. Некрасов

Задачи

1. В числовом ребусе (см. рисунок) использовано 7 букв. Расшифруйте этот ребус, если известно, что ни одна из букв не заменяет цифры 1 и что одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

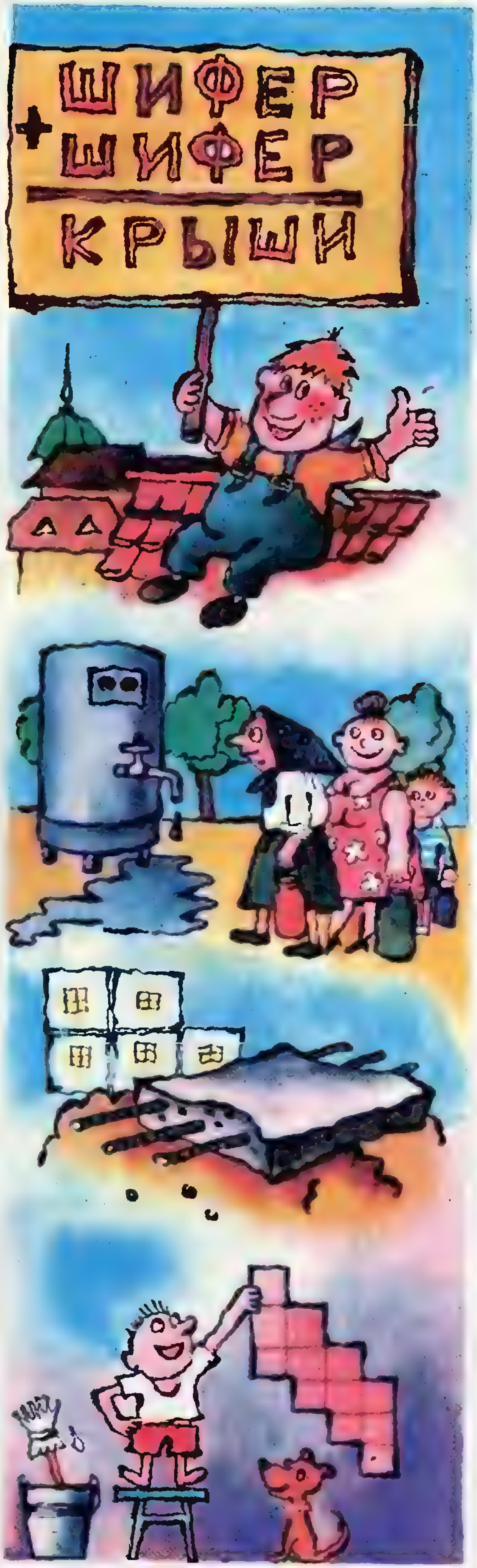
2. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла 2/3 его объема, а в третьем бидоне — 3/4 его объема. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация?

3. Всем известно, что такое железобетон: железную арматуру заливают бетоном, который, застывая, образует с металлом очень прочную конструкцию. Почему в качестве арматуры используется железо?

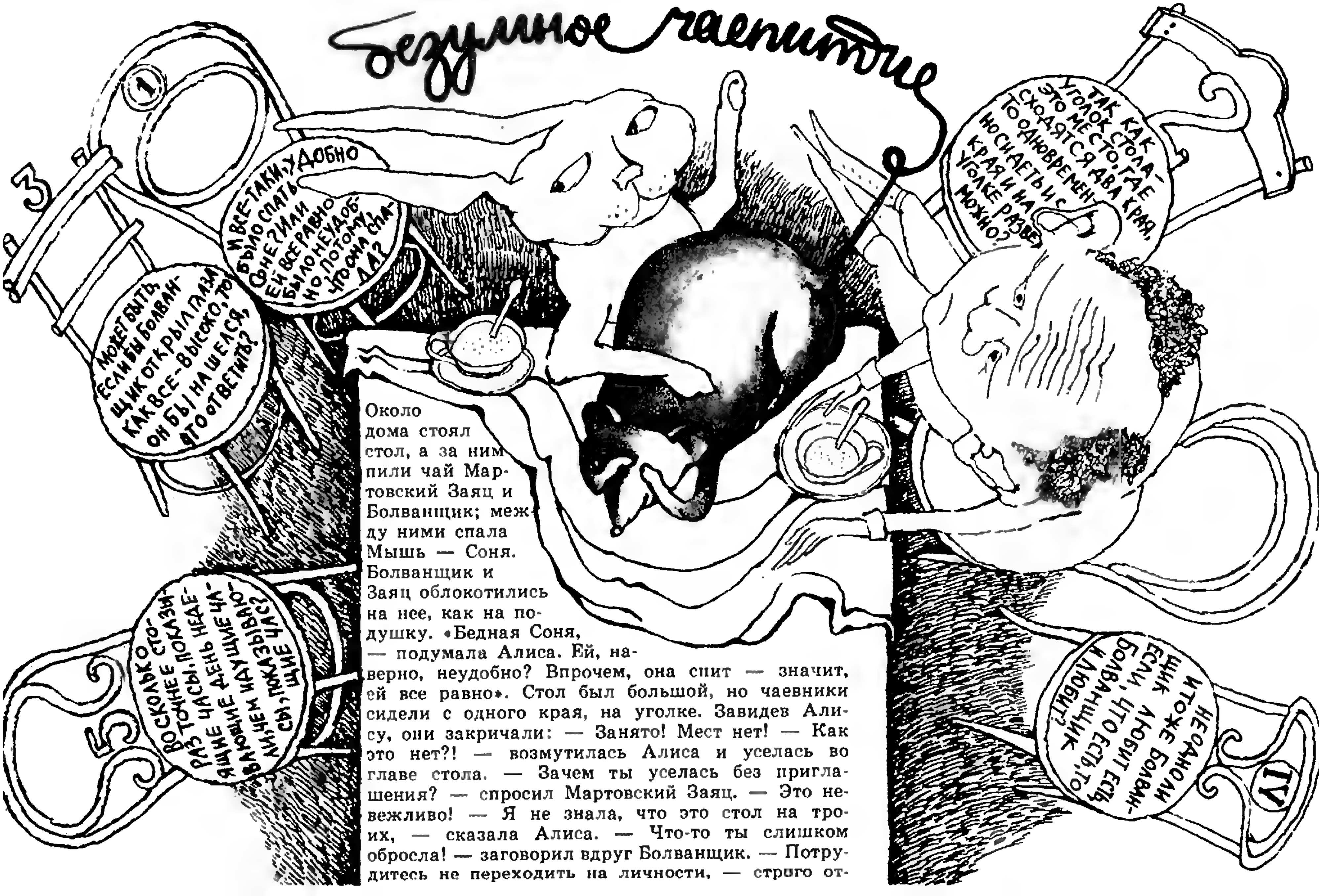
4. На рисунке изображен кусок бумаги. Можно ли оклеить этим куском бумаги, не разрезая его, какой-нибудь кубик?

5. Сумма цифр 20-значного числа N равна 10, сумма цифр числа $7N$ равна 70, сумма цифр числа $19N$ равна 19. Найдите N.

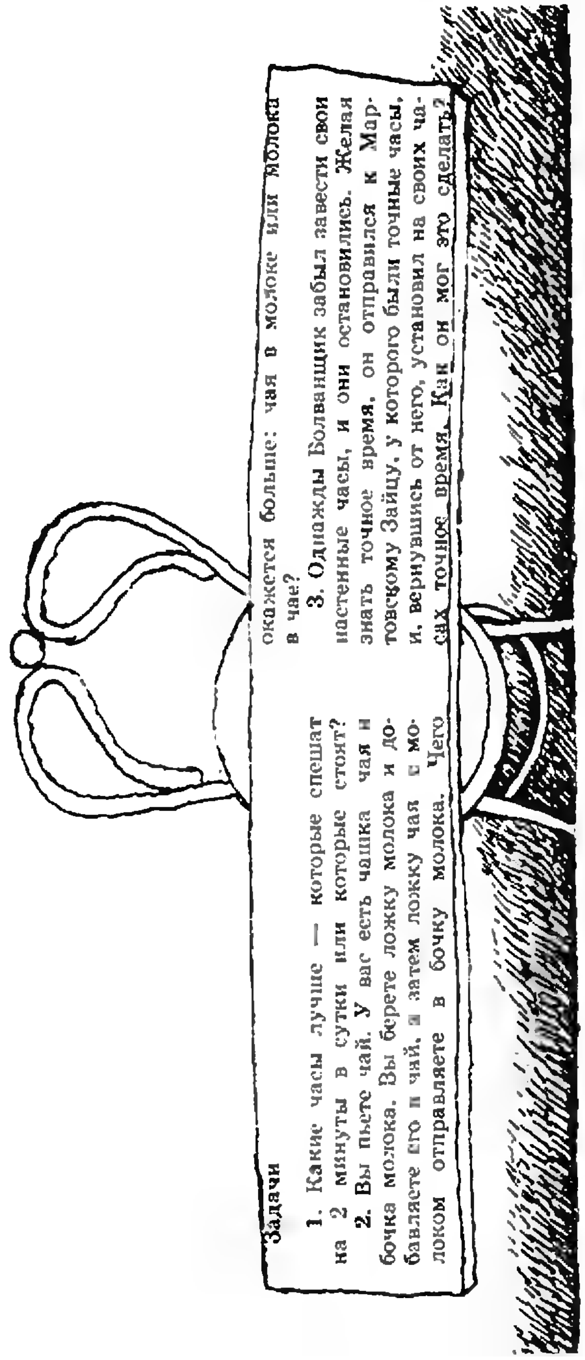
Эти задачи нам предложили *Н. К. Антонович, С. Р. Сефибеков, А. П. Савин, Н. П. Долбилин, Д. Б. Фукс.*



Безумное чаепитие


1
3
5
IV
И ВСЕ-ТАКИ, УДОБНО БЫЛО СПАТЬ СОНЕ? ИЛИ ЕЙ ВСЕ РАВНО БЫЛО НЕУДОБНО, ПОТОМУ, ЧТО ОНА СПАЛА?
МОЖЕТ БЫТЬ, ЕСЛИ БЫ БОЛВАНЩИК ОТКРЫЛ ГЛАЗА КАК ВСЕ-ВЫСОКО, ТО ОН БЫ НАШЕЛСЯ, ЧТО ОТВЕТИТЬ?
ВО СКОЛЬКО РАЗ ТОЧНЕЕ СТОЯЩИЕ ЧАСЫ, ПОКАЗЫВАЮЩИЕ ДЕНЬ НЕДЕЛИ, ЧЕМ ИДУЩИЕ ЧАСЫ, ПОКАЗЫВАЮЩИЕ ЧАС?
ТАК КАК УГОЛОК СТОЛА — ЭТО МЕСТО, ГДЕ СХОДЯТСЯ ДВА КРАЯ, ТО ОДНОВРЕМЕННО СИДЕТЬ И С КРАЯ И НА УГОЛКЕ РАЗВЕ МОЖНО?
НЕ ОДНО ЛИ И ТОЖЕ БОЛВАНЩИК ЛЮБИТ ЕСТЬ, ЕСЛИ, ЧТО ЕСТЬ, ТО БОЛВАНЩИК И ЛЮБИТ?

Около дома стоял стол, а за ним пили чай Мартовский Заяц и Болванщик; между ними спала Мышь — Соня. Болванщик и Заяц облокотились на нее, как на подушку. «Бедная Соня, — подумала Алиса. Ей, наверно, неудобно? Впрочем, она спит — значит, ей все равно». Стол был большой, но чаевники сидели с одного края, на уголке. Завидев Алису, они закричали: — Занято! Мест нет! — Как это нет?! — возмутилась Алиса и уселась во главе стола. — Зачем ты уселась без приглашения? — спросил Мартовский Заяц. — Это невежливо! — Я не знала, что это стол на троих, — сказала Алиса. — Что-то ты слишком обросла! — заговорил вдруг Болванщик. — Потрудитесь не переходить на личности, — строго от-



Задачи

1. Какие часы лучше — которые спешат на 2 минуты в сутки или которые стоят?

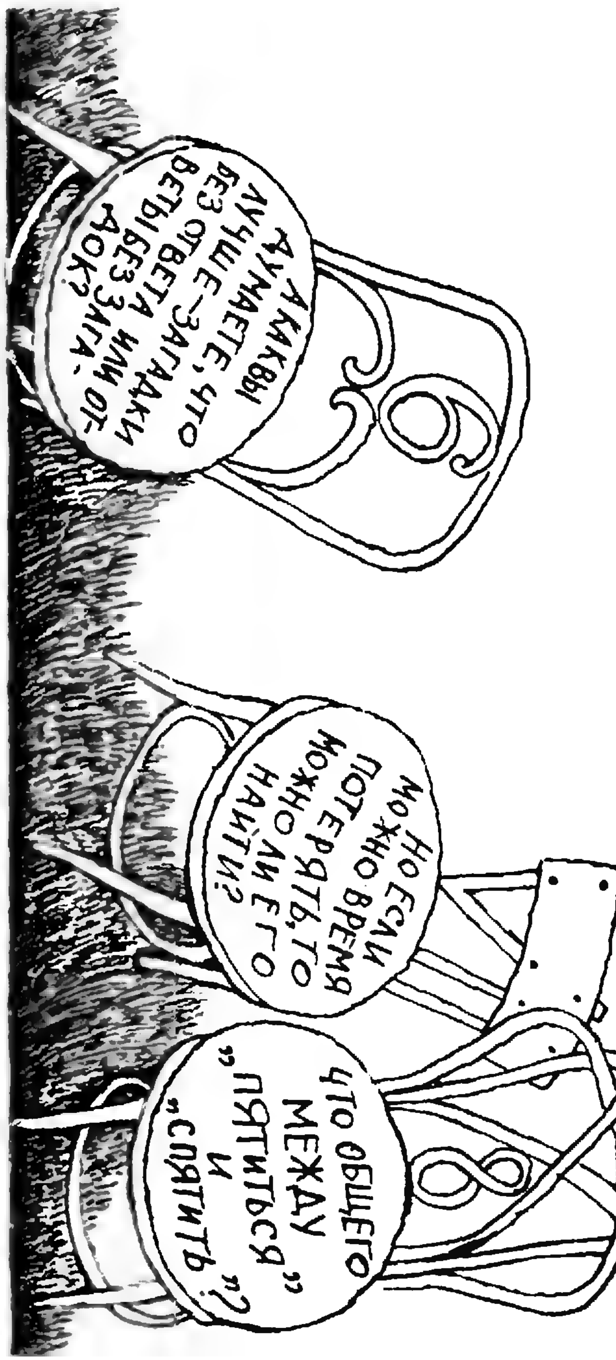
2. Вы пьете чай. У вас есть чашка чая и бочка молока. Вы берете ложку молока и добавляете его в чай, а затем ложку чая с молоком отправляете в бочку молока. Чего окажется больше: чая в молоке или молока в чае?

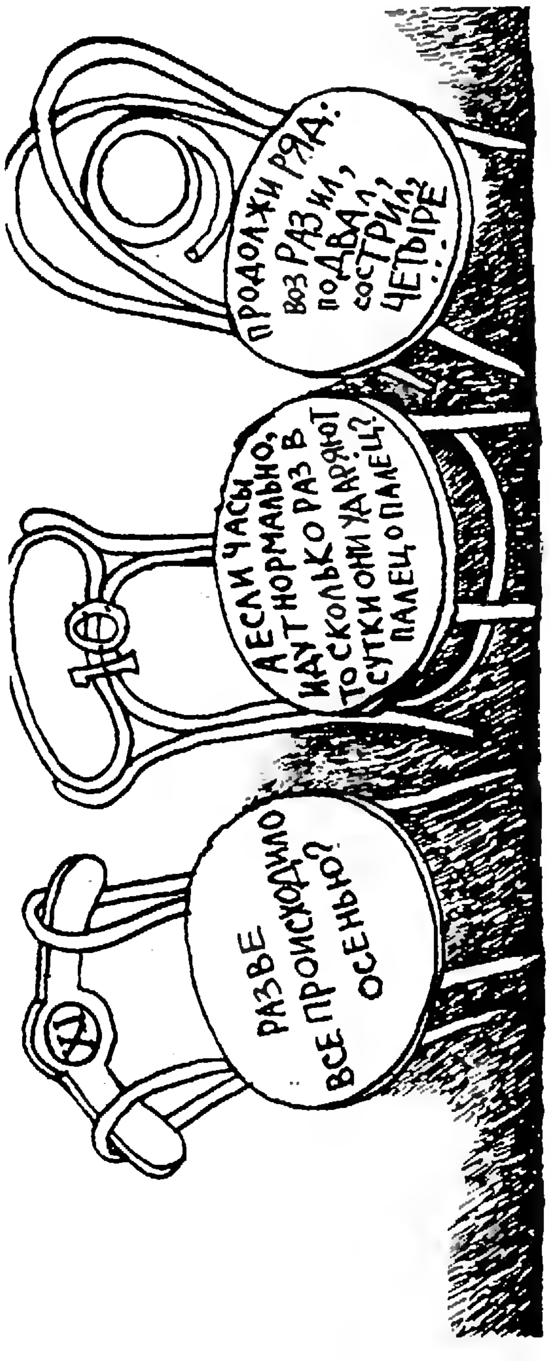
3. Однажды Болванщик забыл завести свои настенные часы, и они остановились. Желая знать точное время, он отправился к Мартовскому Зайцу, у которого были точные часы, и, вернувшись от него, установил на своих часах точное время. Как он мог это сделать?

ветила Алиса. Болванщик широко открыл глаза и не нашелся, что ответить. — Чем ворон похож на конторку? — спросил он. — Это я могу отгадать, — сказала она. — Ты хочешь сказать, что думаешь, будто знаешь ответ? — спросил Мартовский Заяц. — Совершенно верно, — согласилась Алиса. — Так бы и сказала, — заметил Мартовский Заяц. — Нужно всегда говорить то, что думаешь. — Я так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере я всегда думаю то, что говорю... а это одно и то же... — Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик. — Так ты еще скажешь, будто «Я вижу то, что ем» и «Я ем то, что вижу» одно и то же!

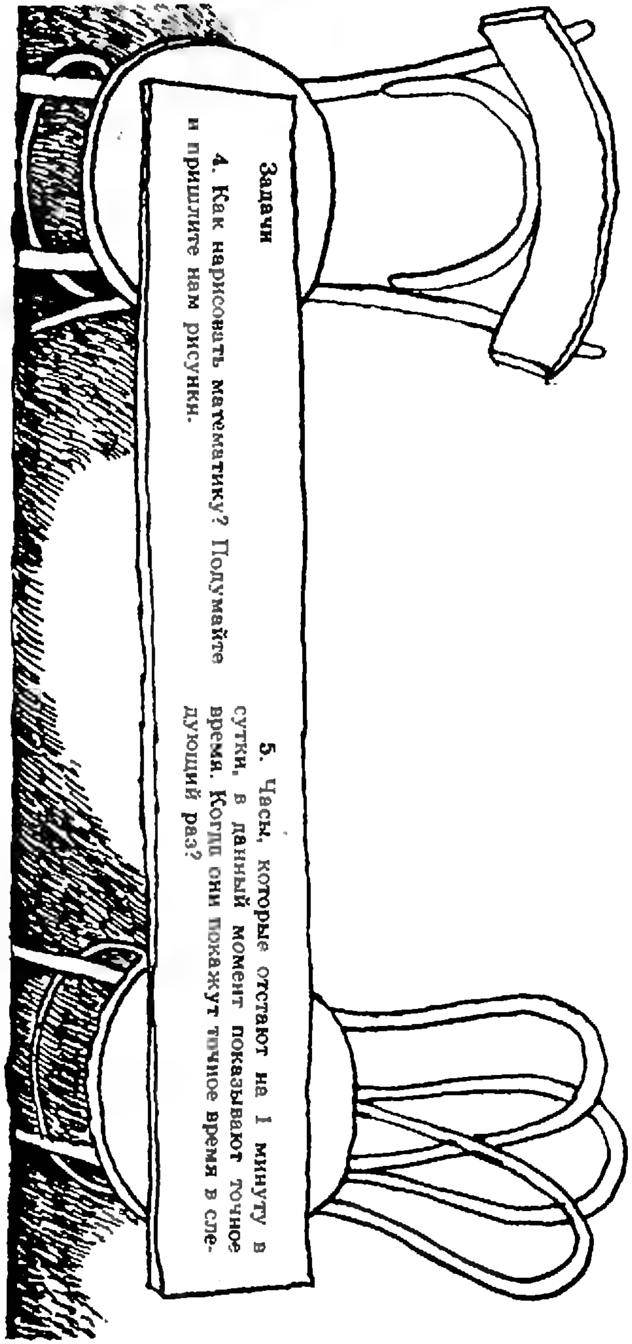
С минуту все сидели молча. Алиса пыталась вспомнить то, что она знала про воронов и конторки. Первым заговорил Болванщик. — Какое сегодня число? — спросил он, вынимая из кармана часы. Алиса подумала и ответила: — Четвертое. — Отстают на два дня, — вздохнул Болванщик. — Какие смешные часы! — заметила Алиса. — Они показывают число, а не час! — А что тут такого? — пробормотал Болванщик. — Разве твои часы показывают год? — Конечно, нет. — Отгадала загадку? — спросил Болванщик. — Нет. Какой же ответ? — Понятия не имею, — сказал Болванщик. — И я тоже, — подхватил Мартовский Заяц. Алиса вздохнула. — Если вам нечего делать, — сказала она с досадой, — придумали бы что-нибудь получше загадок без ответа. А так только попусту теряете время. — Если бы ты знала Время так же хорошо, как я, — сказал Болванщик, — ты бы этого не сказала. Его не потеряешь! — Не понимаю, — сказала Алиса. — Еще бы! — презрительно встряхнул головой Болванщик. — Ты с ним небось никогда и не разговаривала! Мы с ним поссорились в марте — как раз перед тем, как этот (он показал ложечкой на Мартовского Зайца) спятил.

С тех пор, — продолжал грустно Болванщик, — время для меня палец о палец не ударит! и на часах все шесть... Тут Алису осенило. — Поэтому


А КАК ВЫ ДУМАЕТЕ, ЧТО ЛУЧШЕ — ЗАГАДКИ БЕЗ ОТВЕТА ИЛИ ОТВЕТЫ БЕЗ ЗАГАДОК?
6
НО ЕСЛИ МОЖНО ВРЕМЯ ПОТЕРЯТЬ, ТО МОЖНО ЛИ ЕГО НАЙТИ?
ЧТО ОБЩЕГО МЕЖДУ „ПЯТИТЬСЯ“ И „СПЯТИТЬ“?
8


ПРОДОЛЖИ РЯД: ВОЗРАЗИЛ, ПОДВАЛ, СОСТРИЛ, ЧЕТЫРЕ...
А ЕСЛИ ЧАСЫ ИДУТ НОРМАЛЬНО, ТО СКОЛЬКО РАЗ В СУТКИ ОНИ УДАРЯЮТ ПАЛЕЦ О ПАЛЕЦ?
РАЗВЕ ВСЕ ПРОИСХОДИЛО ОСЕНЬЮ?

здесь и накрыто к чаю? — спросила она. — Да, — отвечал Болванщик со вздохом. — Здесь всегда пора пить чай. Мы не успеваем даже посуду вымыть! — Выпьем чашку и пересядем к следующей. — А когда дойдете до конца, тогда что? — рискнула спросить Алиса. — А что, если мы переменим тему? — спросил Мартовский Заяц и широко зевнул. — Надоели мне эти разговоры. Я предлагаю: пусть барышня расскажет нам сказку. — Боюсь, что я ничего не знаю, — испугалась Алиса. — Тогда пусть рассказывает Соня, — закричал Заяц. — Соня, проснись! Рассказывай сказку! — Да, пожалуйста, расскажите, — подхватила Алиса. — Жили-были три сестрички, — быстро начала Соня, — звали их Элси, Лэси и Тилли, а жили они на дне колодца... — А что они ели? — спросила Алиса. Ее всегда интересовало, что люди едят и пьют. — Кисель, — ответила, немного подумав, Соня. — А почему они жили на дне колодца? — Выпей еще чаю, — сказал Мартовский Заяц, наклоняясь к Алисе. — Еще? — переспросила Алиса с обидой. — Я пока ничего не пила. — Больше чаю она не желает, — произнес Мартовский Заяц в пространство. — Ты, верно, хочешь сказать, что меньше чаю она не желает: гораздо легче выпить больше, а не меньше, чем ничего,— сказал Болванщик. — Вашего мнения никто не спрашивал, — сказала Алиса. — А теперь кто переходит на личности? — спросил Болванщик с торжеством. Алиса не знала, что на это ответить. Она налила себе чаю и намазала хлеб маслом. — Мне нужна чистая чашка, — сказал Болванщик. И он пересел на соседний стул. Соня села на его место, Мартовский Заяц — на место Сони, а Алиса скрепя сердце — на место Зайца. Выиграл при этом один Болванщик; Алиса, напротив, сильно проиграла, потому что Мартовский Заяц только что опрокинул себе в тарелку молочник. Алисе не хотелось опять обижать Соню, и она осторожно спросила: — Я не понимаю... Как же они там жили? — Чего там не понимать, — сказал Болванщик. — Живут же рыбы в воде. А эти сестрички жили в киселе! — Но почему? — спросила Алиса Соню. — А еще они



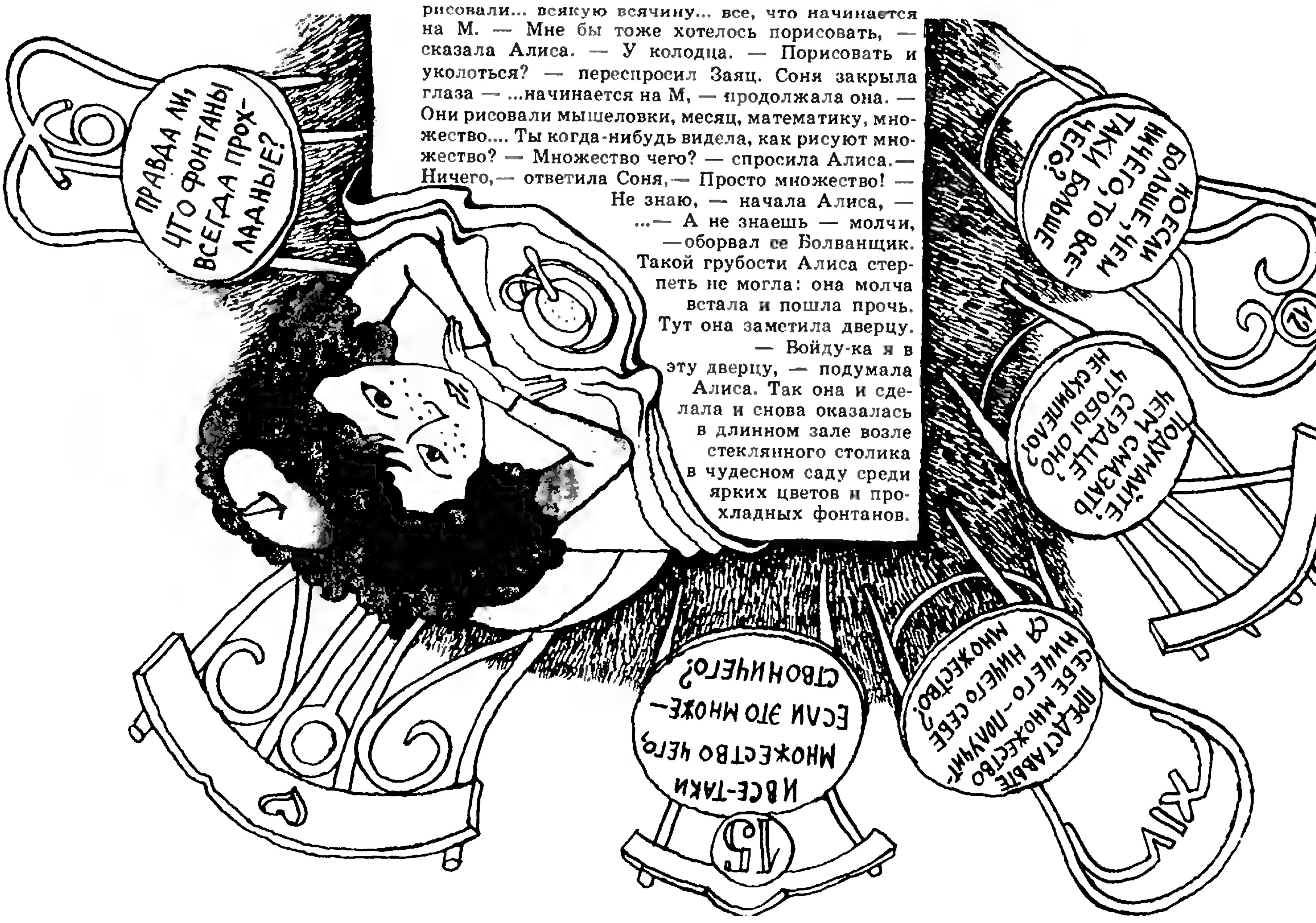
Задачи

4. Как нарисовать математику? Подумайте и пришлите нам рисунки.

5. Часы, которые отстают на 1 минуту в сутки, в данный момент показывают точное время. Когда они покажут точное время в следующий раз?

рисовали... всякую всячину... все, что начинается на М. — Мне бы тоже хотелось порисовать, — сказала Алиса. — У колодца. — Порисовать и уколоться? — переспросил Заяц. Соня закрыла глаза — ...начинается на М, — продолжала она. — Они рисовали мышеловки, месяц, математику, множество.... Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество? — Множество чего? — спросила Алиса. — Ничего, — ответила Соня, — Просто множество! — Не знаю, — начала Алиса, — ...— А не знаешь — молчи, —оборвал ее Болванщик. Такой грубости Алиса стерпеть не могла: она молча встала и пошла прочь. Тут она заметила дверцу.

— Войду-ка я в эту дверцу, — подумала Алиса. Так она и сделала и снова оказалась в длинном зале возле стеклянного столика в чудесном саду среди ярких цветов и прохладных фонтанов.


16
ПРАВДА ЛИ, ЧТО ФОНТАНЫ ВСЕГДА ПРОХЛАДНЫЕ?
12
НО ЕСЛИ БОЛЬШЕ, ЧЕМ НИЧЕГО, ТО ВСЕ-ТАКИ БОЛЬШЕ ЧЕГО?
ПОДУМАЙТЕ, ЧЕМ СМАЗАТЬ СЕРДЦЕ, ЧТОБЫ ОНО НЕ СКРИПЕЛО?
XIV
ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ МНОЖЕСТВО НИЧЕГО — ПОЛУЧИТСЯ НИЧЕГО СЕБЕ МНОЖЕСТВО?
15
И ВСЕ-ТАКИ МНОЖЕСТВО ЧЕГО, ЕСЛИ ЭТО МНОЖЕСТВО НИЧЕГО?

задачник кванта

Задачи

M956—M960; Ф968—Ф972

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M956, M957» или «Ф968». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M957 и M958 (в немного измененной формулировке) предлагались на XXVI Международной математической олимпиаде.

M956. На плоскости проведены четыре окружности одинакового радиуса так, что три из них проходят через точку A и три — через точку B (рис. 1). Докажите, что четыре точки их попарного пересечения, отличные от A и B, — вершины параллелограмма.

В. и И. Каповичи, ученики 10 класса

M957. Докажите, что из 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2,3,...,23, можно выбрать четыре числа, произведение которых — четвертая степень целого числа.

M958*. Пусть $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ — целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена

$$(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\ldots+(1+x)^{i_n}$$

не меньше, чем у многочлена $(1+x)^{i_1}$.

M959*. В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более $1/(k-1)$ часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединенные между собой авиалинией, если а) $k=3$; б) k — любое натуральное число.

А. А. Разборов

M960*. Если разность между кубами двух последовательных натуральных чисел — квадрат некоторого натурального числа n, то число n представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

а) Докажите это утверждение.

б) Вот один пример таких чисел: $8^3-7^3=(2^2+3^2)^2$; приведите еще хотя бы один пример.

в) Докажите, что таких примеров существует бесконечно много.

Р. Лайнесс (Великобритания)

Ф968. На три параллельных оси, соединенных жесткими стержнями, насажены три зацепленных шестеренки с радиусами r_1, r_2 и r_3 (рис. 2). Оси B и C вращаются вокруг неподвижной оси A с угловой скоростью ω_0; при этом размеры треугольника ABC остаются неизменными, а шестеренка радиуса r_3 движется поступательно. С какой угловой скоростью вращается шестеренка радиуса r_1?

В. Вангелов (г. Бургас, НРБ)

Ф969. Две банки, сделанные из одного и того же материала, имеют одну и ту же геометрическую форму, причем все линейные размеры одной банки в k раз меньше, чем другой (рис. 3). В дне каждой банки сделано отверстие. Банки одновременно опускают на воду. Какая банка утонет скорее? Во сколько раз?

И. К. Соболев

Ф970. В тонкостенной непрозрачной сферической оболочке находится шар, радиус которого в несколько раз меньше радиуса оболочки. Предложите способ определения плотности вещества, из которого сделан шар. Масса оболочки неизвестна.

С. А. Хорозов

Ф971. В магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого вертикальна, вращается около вертикальной оси так, как показано на рисунке 4, металлический стержень. Угловая скорость вращения равна ω, R и α заданы. Найти разность потенциалов на концах стержня.

Л. Г. Маркович

Ф972. В высокоскоростном киносъемочном аппарате, применяемом для съемки быстропротекающих процессов, пленка движется непрерывно со скоростью v. Для предотвращения смазывания изображения между пленкой и объективом установлена четырехгранная стеклянная призма с показателем преломления n, вращающаяся с постоянной угловой скоростью (рис. 5). Пренебрегая расфокусировкой изображения, определите, при какой угловой скорости изображение на пленке не смазывается. Определите толщину призмы d при условии, что экспонирование изображения одного кадра проводится в пределах $(-\alpha_0, \alpha_0)$ ее угла поворота, а минимальный размер различимых деталей изображения равен δ.

А. А. Лапидес

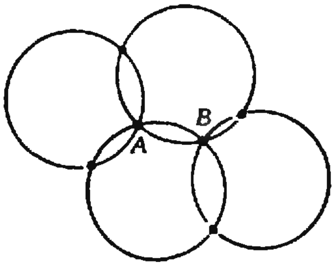


Рис. 1.

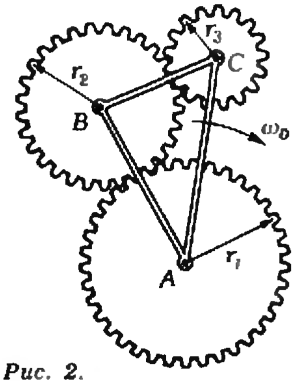


Рис. 2.

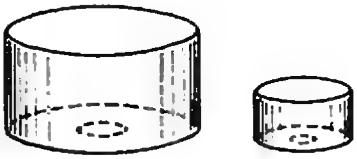


Рис. 3.

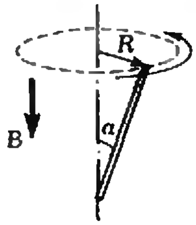


Рис. 4.

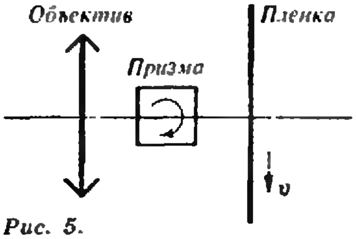


Рис. 5.

Problems

M956—M960; P968—P972

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually

M956. Four circles of the same radius are drawn on the plane so that three pass through the point A and three through the point B (Fig. 1). Prove that the four pairwise interection points (other than A and B) are the vertices of a parallelogram.

V. and I. Kapovich, 10th form students

M957. Prove that it is possible to choose four numbers whose product is the fourth power of an integer from any distinct 1985 natural numbers whose prime divisors are all contained in the set $\{2, 3, \ldots, 23\}$ of the first nine primes.

M958*. Suppose $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ are integers. Prove that the number of odd coefficients of the polynomial

indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in Englich), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M957 and M958 (in somewhat different formulations) were proposed at the 26th International mathematics olympiad.

$$(1+x)^{k_1}+(1+x)^{k_2}+\dots+(1+x)^{k_n}$$

is no less than that of the polynomial $(1+x)^{k_1}$.

M959*. In some country some pairs of cities are joined by airlines. Prove that it is possible to shut down no more than the $1/(k-1)$th part of the airlines so that among any set of k cities at least one pair is not joined by any airline, if

a) $k=3$;

b) k is any natural number.

A. A. Razborov

M960*. If the difference between the cubes of two successive natural numbers is the square of some natural number n, then n can be presented as the sum of squares of two successive integers.

a) Prove this statement.

b) Here is an example of such numbers: $8^3-7^3=(2^2+3^2)^2$; find at least one other example.

c) Prove that there are infinitely many such examples.

R. Lyness (United Kingdom)

R968. Three interlocking cogwheels of radii r_1, r_2, r_3 rotate about three parallel axes joined by rigid rods (Fig. 2 p. 29). The axes B and C rotate around the fixed axis A with angular velocity ω, the size of triangle ABC remaining unchanged, while the cogwheel of radius r_3 moves parallel to itself. What is the angular velocity of the cogwheel of radius r_1?

V. Vangelov (Burgas, Bulgaria)

P969. Two punctured cans made from the same material have the same shape, all the linear measurements of one of them being k times less than that of the other (Fig. 3). The bottoms of the cans have holes. The cans are placed simultaneously on water. Which will sink faster? How much faster?

I. K. Sobolev

P970. A thin-walled spherical shell contains a ball whose radius is several times less than that of the shell. Find a method for determining the density of the material from which the ball is made. The mass of the shell is unknown.

S. A. Khorozov

P971. A metal rod rotates about a vertical axis in a magnetic field with vertical induction B as shown on Figure 4. The angular velocity is ω, R and α are given. Find the difference of potential at the extremities of the rod.

L. G. Markovich

P972. In a high-speed movie camera used for filming rapidly evolving processes, the film moves continuously with velocity v. In order to avoid blurring, a quadrangular glass prism with refraction coefficient n is placed between the film and the lens; the prism rotates with constant angular velocity (Fig. 5). Neglecting the defocussing effect, determine the angular velocity for which the image will not blur. Determine the prism's thickness if the exposure of one square takes place within the limits $(-\alpha_0, \alpha_0)$ of the prism's rotation angle and the minimal size of distinguishable details is δ.

A. A. Lapides

Решения задач

M936 — M940; Ф948 — Ф952

M936. *Докажите, что за $3n+1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжелый из $2n+1$ камней, если а) $n=3$; б) n — любое натуральное число.*

Приведем решение сразу для $2n+2$ камней. Разобьем камни произвольно на пары. За $n+1$ взвешиваний мы найдем в каждой паре более легкий и более тяжелый камень. Ясно, что самый тяжелый из всех $2n+2$ камней находится среди $n+1$ более тяжелых (назовем их «группой Т», остальные — «группой Л»). Поэтому мы можем найти самый тяжелый камень не более чем за n взвешиваний: начав с произвольной пары камней из группы Т,

мы отбрасываем более легкий и сравниваем более тяжелый с новым камнем из группы Т; после отбрасывания n камней останется нужный — самый тяжелый. Аналогично за n взвешиваний из группы Л выделяется самый легкий камень.

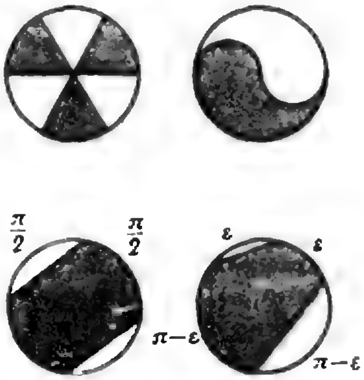
Можно предложить и много других правильных алгоритмов, позволяющих выбрать самый тяжелый и самый легкий камень из $2n+2$ за $3n+1$ взвешиваний. Оставляем читателям более трудную задачу: выяснить, за какое наименьшее число взвешиваний можно выбрать самый тяжелый и самый легкий из N камней. (Похожая задача: за сколько попарных сравнений можно выбрать $k=2, 3, \ldots$ самых тяжелых из N камней — обсуждается в статье «Кто поедет в Рио» Г. Адельсона-Вельского, И. Бернштейна и М. Гервера («Квант», 1972, № 8, с. 2), а также в ряде книг о сортировке и поиске — например, в т. 3 книги Д. Кнута «Искусство программирования» (М.: «Мир», 1978).)

С. В. Фомин,
Н. Б. Васильев

◆

М937. *Существует ли такая фигура F, что ею нельзя накрыть полукруг радиуса 1, а двумя ее экземплярами можно накрыть круг радиуса 1, если F — а) произвольная фигура; б) выпуклая фигура?*

Ответ на оба вопроса а) и б) положительный. Примеры представлены на рисунке. Для ответа на вопрос а), кроме разнообразных вариантов фигуры в виде «пропеллера» или древнекитайского символа «Янь и инь», годится и такой вырожденный пример: из круга радиуса 1 с центром O выкалываются три точки — вершины равностороннего треугольника с центром O. Для ответа на вопрос б) подходит такая фигура: окружность радиуса 1 с центром O разбивается на четыре дуги величиной ε, ε, $\pi-\varepsilon$, $\pi-\varepsilon$ и строится «выпуклая оболочка» двух несмежных дуг. (Левый нижний рисунок соответствует $\varepsilon=\pi/2$.) Заметим, что при малом ε построенная фигура имеет площадь, сколь угодно близкую к площади полукруга.



Доказательство, что построенная фигура не покрывает полукруг, во всех случаях опирается на такое соображение: концы диаметра полукруга находятся на расстоянии 2, следовательно, их могут закрыть лишь такие две точки построенной фигуры, которые являются диаметрально противоположными точками круга радиуса 1, из которого мы ее вырезаем; таким образом, наша фигура должна была бы содержать целый полукруг с центром O радиуса 1.

Тот факт, что двумя экземплярами фигуры можно покрыть круг, очевиден (во всех примерах достаточно повернуть фигуру относительно центра круга на некоторый угол или отразить от некоторой прямой, проходящей через центр).

Н. Б. Васильев

◆

М938. *Радиус круга с центром O равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол $360°/n$ (где n — натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду — положение OM_1, еще через 2 секунды — поло-*

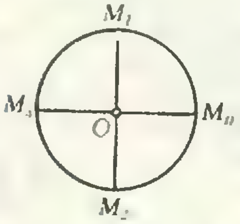
Докажем, что радиусы OM_0, OM_1, ..., OM_{n-1} делят круг на n равных секторов в том и только в том случае, когда $n=2^k$ (k — натуральное число; на рисунках изображены случаи $k=2$ и $k=3$).

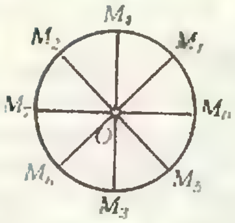
Поскольку все точки M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1} попадают в вершины правильного n-угольника с центром O, для того, чтобы n радиусов OM_0, OM_1, ..., OM_{n-1} делили круг на равные секторы, необхо-

жение OM_2, еще через 3 секунды после этого — положение OM_3 и т. д., еще через $n-1$ секунд — положение OM_{n-1}.

а) Докажите, что если n — степень 2, то радиусы OM_1, ..., OM_{n-1} делят круг на n равных секторов.

б) Возможно ли это при других значениях n?





димо и достаточно, чтобы никакие два из этих радиусов OM_i и OM_j не совпали, то есть суммарный угол φ_{ij} от OM_i до OM_j (отсчитываемый при вращении радиуса) не был кратен $360^\circ=\alpha n$, где $\alpha=360^\circ/n$.

Угол от OM_0 до OM_j равен $\alpha(1+2+\ldots+j)=\alpha j(j+1)/2$, поэтому угол φ_{ij} от OM_i до OM_j, где $0\leqslant i<j\leqslant n-1$, равен

$$\varphi_{ij}=\alpha\frac{j(j-1)}{2}-\alpha\frac{i(i-1)}{2}=\alpha\frac{(j-i)(j+i-1)}{2},$$

то есть радиусы M_i и M_j совпадают, если и только если $\varphi_{ij}/n\alpha=(j-i)(j+i+1)/2n$ — целое число.

Докажем отдельно а) достаточность и б) необходимость условия $n=2^k$ для того, чтобы $(j-i)(j+i+1)$ не делилось на $2n$ ни при каких $0\leqslant i<j\leqslant n-1$.

а) Если $n=2^k$, то, поскольку $j-i$ и $j+i-1$ — числа разной четности, $j-i<n=2^k$ и $j+i-1<2^{k+1}$, произведение $(j-i)(j+i-1)$ не делится на $2^{k+1}=2n$.

б) Пусть n — не степень двойки: $n=2^{m-1}(2q+1)$, где m и q — натуральные числа. Предъявим i и j, при которых $(j-i)(i+j-1)$ делится на $2n=2^m(2q+1)$. Если $2^{m-1}>q$, полагаем

$$\begin{cases} i+j+1=2^m, \\ j-i=2q+1, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} j=2^{m-1}+q<n, \\ i=2^{m-1}-q-1\geqslant 0. \end{cases}$$

Если $2^{m-1}\leqslant q$, полагаем

$$\begin{cases} i+j+1=2q+1, \\ j-i=2^m, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} j=q+2^{m-1}<n, \\ i=q-2^{m-1}\geqslant 0. \end{cases}$$

В. В. Произволов

◆

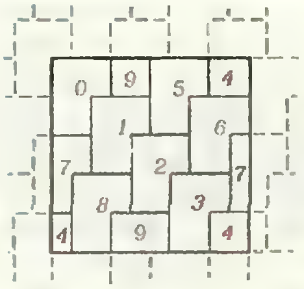
М939. *В клетки таблицы 10×10 записывают каким-либо образом цифры 0, 1, ..., 9 так, чтобы каждая цифра встречается 10 раз.*

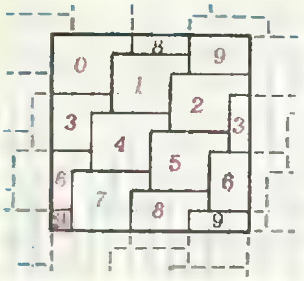
а) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и каждом столбце встречалось не более 4 различных цифр?

б) Докажите, что найдется строка или столбец, в котором встречается не менее 4 различных цифр.*

Ответ на вопрос а) положительный. Два примера *изображены на рисунках: соответствующие* разбиения квадрата 10×10 на 10 частей по 10 клеток в каждой, занумерованных цифрами 0, 1, 2, ..., 9, удовлетворяют условию задачи а). Эти примеры интересны тем, что если мысленно склеить верхнюю сторону квадрата с нижней, а левую — с правой, то все 10 областей, занятых цифрами 0, 1, ..., 9, окажутся одинаковыми — они получаются друг из друга параллельными переносами (на рисунке кусочки областей, примыкающие снаружи к границе исходного квадрата 10×10, показаны пунктиром).

б) Пусть цифра k ($k=0, 1, 2, \ldots, 8$ или 9) встречается в q_k столбцах и r_k строках. Если предположить, что в каждом столбце встречается не более 3 разных цифр, то число разных пар (цифра k; номер столбца, где встречается k) будет не более 30, поэтому $q_0+q_1+\ldots+q_9\leqslant 30$. Аналогично, если в каждой строке не более 3 разных цифр, то $r_0+r_1+\ldots+r_9\leqslant 30$. С другой стороны, поскольку каждая цифра стоит в 10 клетках, то $q_kr_k\geqslant 10$ и поэтому $q_k+r_k\geqslant 2\sqrt{q_kr_k}>6$, так что $(q_0+r_0)+\ldots+(q_9+r_9)\geqslant 7\cdot 10=70$. Полученное противоречие показывает, что в некотором столбце или в некоторой строке должно быть не менее 4 разных цифр. Аналогично можно доказать, что если клет-





ки таблицы $N\times N$ раскрашены в N цветов так, что клеток каждого цвета ровно N, и $N>(n-1)^2$, то найдется строка или столбец, в котором есть клетки n разных цветов (в нашей задаче было $N=10$, $n=4$).

Предлагаем читателям доказать, что эта оценка точная, и подумать над возможными обобщениями этой задачи (например, для прямоугольных таблиц, на трехмерный случай).

Н. Н. Константинов,
Л. Д. Курляндчик

◆

М940*. *а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовем «цепочкой» такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий. Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.*

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата нужно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» — множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют ее целиком, не налегая друг на друга?

Будем называть прямоугольники (в пункте б) — параллелепипеды), на которые разбит квадрат (куб), «кирпичами», а сам квадрат (соответственно, куб) — «домом». Удобно считать, что «дом» — произвольный прямоугольник (прямоугольный параллелепипед).

Оба утверждения а) и б) можно доказывать примерно одинаково — индукцией по числу n кирпичей, составляющих дом. Мы подробно изложим доказательство а), а затем укажем дополнительные соображения, которые нужны в пункте б).

Для $n\leqslant 2$ кирпичей утверждение очевидно. Предположим, что для числа кирпичей, меньшего n, оно доказано. Пусть α и β — два из n кирпичей, составляющих дом, которые мы хотим соединить цепочкой. Будем говорить, что цепочка идет «вдоль стороны a», если проекция составляющих ее кирпичей на a покрывают a в один слой. Заметим, что достаточно построить часть цепочки между α и β, идущей вдоль a (указать кирпичи, проекции которых на a заполняют в один слой отрезок между проекциями кирпичей α и β), — после этого ее легко дополнить до целой цепочки: для этого достаточно дойти от α и β по направлению a до перпендикулярных к a сторон и включить в цепочку встретившиеся при этом кирпичи (рис. 1).

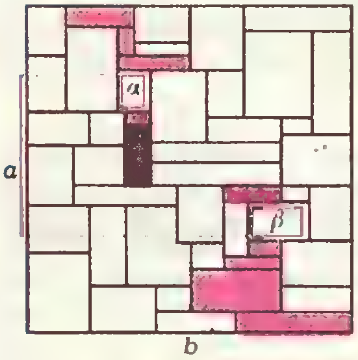


Рис. 1.

Случай, когда кирпичи α и β можно пересечь одной прямой, параллельной стороне дома, очевиден: все кирпичи, пересекаемые такой прямой, образуют нужную цепочку. Поэтому можно считать, что для каждой стороны дома найдется прямая, разделяющая кирпичи α и β. В этом случае найдется вершина кирпича α, ближайшая к β, — обозначим ее A. Среди примыкающих к ней кирпичей найдется, кроме α, еще по крайней мере один кирпич γ, для которого A служит вершиной и который примыкает к α по стороне. Он отделен от α некоторой прямой l (идущей по сторонам α и γ, рис. 2).

Разрезав дом вместе с кирпичами этой прямой l, мы получим содержащий кирпичи γ и β, но меньший исходного (по числу кирпичей) дом. В нем, по предположению индукции, можно соединить γ и β цепочкой; нас интересует ее часть γ, δ_1, δ_2, ..., δ, β от γ до β. Если она идет вдоль направления l, то можно заменить в ней γ на α, и нужная нам часть цепочки от α до β готова: α, δ_1,

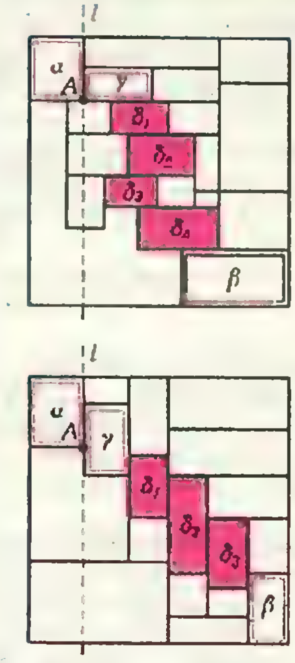


Рис. 2.

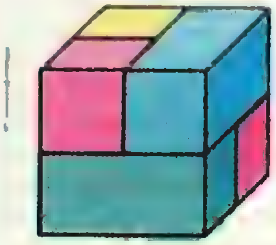


Рис. 3.

$\delta_2, \ldots, \delta, \beta$ (мы пользуемся здесь тем, что A — ближайшая к β вершина α, рис. 2, *а*). Если же цепочка $\gamma, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta, \beta$ идет в перпендикулярном l направлении, то к ней можно просто добавить α (рис. 2, *б*).

Перейдем к решению б). Здесь случай, когда кирпичи α и β можно пересечь плоскостью, параллельной грани дома, сводится к пункту а). Остается случай, когда α и β разделены тремя плоскостями, параллельными разным граням дома. Через ближайшую к β вершину A кирпича α проходят три плоскости его граней. Они делят пространство на 8 октантов, и каждый из примыкающих к A кирпичей занимает один, два или четыре из них (в окрестности A). Поскольку число $8-1=7$ нечетно, среди них найдется, кроме α, еще один кирпич γ, для которого A служит вершиной (занимающий один октант) и который отделен от α некоторой плоскостью p.

Дальше рассуждение проводится так же, как в пункте а): плоскость отрезает меньший дом, содержащий γ и β; остается рассмотреть два случая — когда существующая по предположению индукции цепочка от γ до β идет в направлении, параллельном плоскости p или перпендикулярном ей.

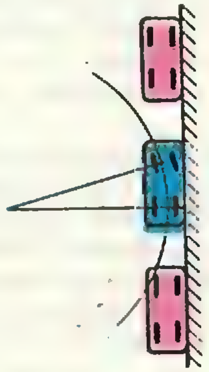
в) Это утверждение, вообще говоря, неверно. Простой пример — куб $2\times2\times2$, составленный из двух кубиков $1\times1\times1$, примыкающих к противоположным вершинам куба, и трех параллелепипедов $2\times1\times1$ (рис. 3). Легко видеть, что кубики здесь не принадлежат одному слою.

Аналогичный пример дома $3\times3\times3$ из трех кубиков $1\times1\times1$, расположенных по диагонали, и шести кирпичей $2\times2\times1$ легко представят себе владельцы «кубика Рубика».

Н. Б. Васильев,
А. И. Гольберг

◆

Ф948. *Известно, что в небольшой «просвет» между машинами, стоящими у тротуара, рекомендуется заезжать задним ходом, а не передним. Почему?*



Пусть машина заехала в небольшой просвет между двумя стоящими у тротуара машинами (см. рисунок). Поставим вопрос так: как легче машине теперь выехать — передним или задним ходом?

При повороте руля сразу поворачиваются передние колеса, а задние сначала сохраняют прежнюю ориентацию; так что при любом маневрировании машины центр окружности, по которой она в данный момент движется (вперед или назад), всегда лежит на прямой, проходящей через центр задних колес.

На рисунке показана траектория, по которой машина может выехать из просвета. Видно, что при выезде задним ходом она скорее заденет соседнюю машину, чем при выезде передним ходом.

Легко понять, что выезд машины — это обращенный во времени въезд. Следовательно, заезжать в небольшой просвет между машинами следует задним ходом.

С. С. Кротов,
Г. Я. Мякишев

Ф949. *Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей жидкости, а другой — в ее глубине?*

Чтобы образовавшийся в жидкости при кипении пузырек, наполненный насыщенным паром, не схлопнулся, давление внутри пузырька должно быть равно внешнему давлению, то есть давлению окружающей пузырек жидкости. Если пузырек находится в глубине жидкости и высота столба жидкости над ним равна h, то внешнее давление равно

$$p=p_0+\varrho gh,$$

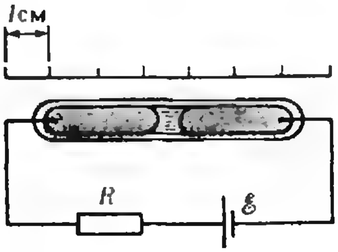
где p_0 — давление над поверхностью жидкости. Следовательно, чем глубже находится пузырек, тем большим должно быть давление $p_н$ насыщенного пара в пузырьке, чтобы он не схлопывался. Но большему значению давления $p_н$ соответствует более высокая температура. Значит, существование пузырьков в глубине кипящей жидкости возможно при более высокой температуре, чем вблизи поверхности.

Оценим, насколько отличается температура T_h на глубине $h=0{,}5$ м от температуры T_0 на поверхности кипящей воды. Дополнительное давление на этой глубине $\Delta p=\varrho gh\approx 5\cdot 10^3$ Па. Считая, что над поверхностью воды давление равно нормальному атмосферному, то есть $p_0=1{,}033\cdot 10^5$ Па, из таблицы зависимости давления насыщенного пара от температуры находим, на сколько температура водяного пара должна быть выше 100 °С, чтобы давление его было больше p_0 на $5\cdot 10^3$ Па: $\Delta T\approx 1$ °С.

Т. С. Петрова

◆

Ф950. *В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита* HgI_2. *Внутренний диаметр трубки* $d=0{,}3$ *мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением* $R=390$ *кОм к батарее с ЭДС* $\mathscr{E}=10$ *В (см. рисунок). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы?*



Протекание электрического тока в электролите связано с переносом массы. В данном случае на катоде происходит восстановление металлической ртути из раствора электролита, а на аноде — окисление ртути, то есть переход ее в раствор электролита. В соответствии с законом электролиза Фарадея масса ртути, которая выделится на катоде за время t, равна

$$m=\frac{1}{F}\frac{M}{n}It,$$

где $F=9{,}65\cdot 10^4$ Кл/моль — число Фарадея, $M=0{,}201$ кг/моль — молярная масса ртути, $n=2$ — валентность рути, I — протекающий ток. Этот ток практически определяется сопротивлением R, так как по сравнению с ним сопротивление металлической ртути и электролита и внутреннее сопротивление источника ничтожно малы. Поэтому $I=\mathscr{E}/R$, и

$$m=\frac{M\mathscr{E}}{FnR}t. \qquad (1)$$

Выделение ртути на катоде и растворение ее на аноде приводит к смещению капельки электролита в сторону анода на расстояние l такое, что

$$m=\varrho\frac{\pi d^2}{4}l, \qquad (2)$$

где $\varrho=13{,}6\cdot 10^3$ кг/м³ — плотность ртути.

Из (1) и (2) находим время, за которое капелька электролита сместится на расстояние l:

$$t = \frac{\pi d^2 F n_0 R l}{4 M I}.$$

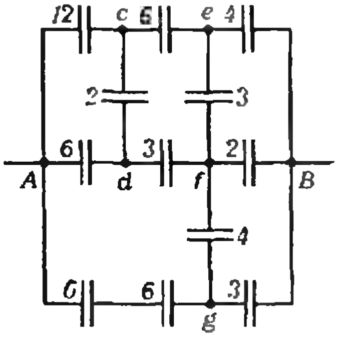
Подставив значения, приведенные в условии, и $l = 1$ см, получим $t = 100$ ч.

Подобные ртутные часы нашли применение в электронной технике в качестве малогабаритных времязадающих устройств, счетчиков времени наработки. Их используют также для измерения заряда — построения кулонметров.

Е. Н. Юносов,
И. В. Яминский

◆

Ф951. *Определить емкость системы конденсаторов, приведенной на рисунке. У каждого конденсатора указано значение его емкости, измеренной в микрофарадах.*



Представить исходную схему как систему параллельно и последовательно соединенных конденсаторов не удается. В таких случаях необходимо, как говорят, упростить схему. Напомним, что под этим подразумевают.

Обычно, исходя из соображений геометрической или физической симметрии, какие-то узлы схемы разъединяют или, наоборот, соединяют, какие-то конденсаторы удаляют и т. п., добиваясь того, чтобы новая схема из последовательно и параллельно соединенных конденсаторов была эквивалентна исходной, то есть чтобы при подаче на исходную и преобразованную схемы одинаковых напряжений схемы заряжались одинаково, — в этом случае емкости схем одинаковы, и рассчитывают емкость именно преобразованной схемы.

В основе применения описанного выше метода лежит теорема единственности, суть которой в нашем случае сводится к следующему. Если на схему подать некоторое напряжение, то напряжения (и, соответственно, заряды) на всех конденсаторах примут единственно возможные значения. Приведем не очень строгое доказательство этой теоремы методом от противного.

Предположим, что существуют две возможности зарядам «рассесться» на конденсаторах схемы при подаче на нее напряжения U_0. Это означает, что по крайней мере на одном из конденсаторов, например, с емкостью C_0, заряды в первом и во втором случаях будут разные. Подадим на схему включенные навстречу источники напряжения U_0 и $-U_0$ (то есть суммарное напряжение, поданное на схему, равно нулю). Вследствие принципа суперпозиции схема независимым образом «отреагирует» на напряжения U_0 и $-U_0$; в первом случае на конденсаторе C_0 окажется заряд q_0, а в ответ на напряжение $-U_0$ конденсатор зарядится зарядом q_0' с противоположной полярностью, причем $|q_0 + q_0'| \neq 0$. Таким образом, на схему было подано нулевое напряжение, работа внешних источников была равна нулю, а на конденсаторе C_0 оказался запас электрической энергии $\frac{(q_0+q_0')^2}{2} \neq 0$. Противоречие.

Обратимся теперь к нашей схеме. Пропорциональность значений емкостей горизонтальных участков схемы наталкивает на следующую стратегию — упрощение схемы путем удаления конденсаторов между парами точек: *c* и *d*, *e* и *f*, *f* и *g*. Действительно, если удалить конденсаторы и подать на упрощенную схему некоторое напряжение, то потенциалы соответствующих точек будут одинаковыми: $\varphi_c=\varphi_d$, $\varphi_e=\varphi_f=\varphi_g$ (покажите это самостоятельно!). Вернем на место удаленные конденсаторы. Перераспределения зарядов на других конденсаторах схемы вследствие теоремы единственности не произойдет. Поэтому емкости исходной и преобразованной схем будут одинаковы.

Емкость преобразованной схемы равна

$$C_{AB}=1:\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+1:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+1:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\ \text{мкФ}.$$

А. И. Буздин,
С. С. Кротов

◆

Ф952. *Наблюдатель рассматривает удаленный предмет и фотографию этого предмета, сделанную из той точки, в которой находится наблюдатель. Что ему кажется бóльшим — предмет или его фотографическое изображение? Во сколько раз? Фотография была сделана аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=3$ см; при печатании снимка было сделано увеличение $k=2.5$.*

Размер изображения предмета на сетчатке глаза прямо пропорционален $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол зрения для данного предмета. Поэтому видимое увеличение при рассматривании предмета на фотографии равно

$$\Gamma=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

где φ_1 — угол зрения, под которым виден предмет на фотографии, φ — угол зрения при непосредственном рассматривании предмета. Если l — размер предмета на снимке, а D — расстояние, с которого рассматривается снимок, то $\operatorname{tg}\varphi_1=l/D$. Найдем l.

При фотографировании удаленных предметов резкое изображение получается в фокальной плоскости. Поэтому расстояние от объектива до фотопленки в этом случае должно быть равно фокусному расстоянию F. Размер изображения на фотопленке равен $l_1=F\operatorname{tg}\varphi$. После печатания размер изображения на фотографии станет равным $l=kl_1=kF\operatorname{tg}\varphi$.

Таким образом,

$$\Gamma=\frac{kF}{D}.$$

При нормальном зрении D не меньше 25 см. Подставив для оценки $D=25$ см, получим $\Gamma=0{,}3$ — при рассматривании фотографии предмет кажется примерно в 3 раза меньшим, чем при непосредственном наблюдении.

Б. С. Рыбин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М911—М925; Ф923—Ф937, справились с задачами М911, М912, М914, М916, М917, М918, Ф924, Ф930, Ф933 и Ф934. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Р. Агаширипов (с. Хурай Аз. ССР) 13; *А. Аксенов* (Великие Луки) 13, 15; *М. Александров* (Москва) 15, 19, 20, 22, 23; *Р. Алексеев* (Магнитогорск) 13, 15; *А. Алиев* (с. Каракая Аз. ССР) 19; *М. Альт* (Одесса) 13, 19—21; *А. Арутюнян* (с. Мерения Гр. ССР) 13, 15, 20; *С. Аршава* (Северодонецк) 13; *А. Асташкевич* (Томск) 13, 15, 22-25; *Е. Баланова* (Рига) 19; *А. Барабанов* (Киев) 13; *А. Баран* (Киев) 23; *Н. Бezденежных* (Нижний Тагил) 13, 15; *Р. Безрукавников* (Калуга) 20; *А. Белопольский* (Киев) 19, 22, 23; *А. Бендерский* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *В. Берездивин* (Донецк) 13, 15; *И. Биндер* (Ленинград) 19, 24, 25; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 15; *М. Бойко* (Киев) 19; *В. Быков* (Киев) 20; *И. Вайнштейн* (Калинин) 15, 19, 20; *Р. Валиев* (Фрунзе) 13; *Я. Варшавский* (Харьков) 13, 15, 19, 20, 23, 24; *В. Васильев* (Воткинск) 19; *Т. Васильева* (Ленинград) 12, 13, 15; *М. Векслер* (Ленинград) 24; *И. Верный* (Киев) 19; *Р. Видгоп* (Баку) 13; *С. Волков* (Нижний Тагил) 19; *В. Ворошило* (Львов) 13; *Г. Габибзаде* (с. Ленинкенд Аз. ССР) 15; *Т. Газарян* (Ереван) 13, 15, 19, 20; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 13, 15, 19, 20; *А. Гамаюнов* (Полтава) 13; *Т. Гамбарян* (Баку) 13; *Г. Гевондян* (с. Меликгюх Арм. ССР) 13, 15; *О. Гендельман* (Харьков) 13, 19; *Р. Гендлер* (Ташкент) 13, 19, 21—23, 25; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 21; *М. Годин* (Ленинград) 19; *В. Годлевский* (Киев) 13, 19; *Р. Гой* (Львов) 23; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 13, 22; *А. Гороховский* (Киев) 13, 19, 21—23; *Ю. Грабовский* (Киев) 13; *Д. Гребнева* (Алма-Ата) 15; *Н. Григорьева* (Андропов) 13, 20, 22, 23, 25; *А. Григорян* (Ереван) 13, 15, 20; *А. Давтян* (Ереван) 13, 15, 20; *Ю. Дейкало* (Киев) 19; *А. Дементьев* (Нальчик) 19; *М. Добрицын* (Москва) 13, 15, 19—25; *А. Донченко* (Киев) 13; *В. Душацкий* (Киев) 19; *А. Дынников* (Жуковский) 13, 15, 19, 20, 22—24; *И. Дынников* (Жуковский) 13, 15, 19—25; *В. Жданов* (Москва) 19; *В. Журавлев* (Гайворон) 13, 15, 20, 21; *П. Задорожный* (Киев) 13; *Р. Зайнуллин* (Белорецк) 19; *Д. Зайцев* (Киев) 13, 19, 22, 23; *А. Запольский* (Москва) 23; *А. Захаров* (Гатчина) 19; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 15; *К. Зварич* (Хмельницкий) 19; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 13, 15, 19, 20, 22—24; *С. Иванов* (Севастополь) 19; *М. Игнатьев* (Саратов) 13, 19, 22; *С. Исмаилов* (Баку) 19, 23; *А. Кадач* (Усть-Каменогорск) 19; *А. Калыбаева* (Алма-Ата) 15; *В.* и *И. Капович* (Хабаровск) 13, 15, 19, 20; *А. Каринский* (Невинномысск) 15; *А. Карнаухов* (Устинов) 13; *О. Кирнасовский* (Винница) 13, 19; *А. Киселев* (Ленинград) 12, 13, 19, 20, 22; *И. Кича* (Киев) 19; *П. Кларк* (Тула) 19; *Д. Клионский* (Ленинград) 19; *А. Козинский* (Гайворон) 13, 15, 20, 21; *И. Козуля* (Жуковский) 13, 19; *Ю. Кондратенко* (Киев) 19; *А. Кононенко* (Киев) 19—21, 23; *Н. Маныч*, *Э. Корчали* (Баку) 13; *А. Красота* (Киев) 19; *Б. Кругликов* (Харьков) 13, 19, 21; *Н. Крылов* (Ленинград) 13, 19; *О. Крылов* (п. Эльдикан ЯАССР) 15, 24; *М. Кукс* (Львов) 13, 19; *А. Кулиев* (Баку) 13; *М. Куринной* (Харьков) 13, 15, 19, 21—24; *М. Курнев* (п. Грибановский Воронежской обл.) 13; *Е. Курская* (Алма-Ата) 15; *С. Кутайцев* (Конаково) 19; *А. Кухарский* (Киев) 13, 19, 20; *А. Кучерявый* (Запорожье) 19; *Н. Кушлевич* (Москва) 13, 15, 19, 20, 22, 24; *С. Кярис* (Молетай) 13, 15, 19; *С. Лакатош* (Москва) 19; *И. Ларцев* (Донецк) 13, 15, 19; *Л. Леняшин* (Ленинград) 13, 15, 19; *О. Лимешко* (Куйбышев) 13, 19, 23; *Л. Лиознов* (Москва) 19; *А. Литвак* (Ленинград) 13, 19; *М. Литвинов* (Киев) 13, 15, 21, 23; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *М. Макаров* (Севастополь) 20; *Н. Манычкин* (Москва) 19; *Ю. Махлин* (Москва) 19; *Мачарадзе* (Тбилиси) 13; *Н. Мельник* (Гайсин) 19, *В. Меньков* (Мончегорск) 13, 15; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 13, 15; *В. Мехрабов* (Баку) 13, 15; *И. Мехрабов* (Баку) 13, 15; *З. Мехтиев* (с. Челикар ДАССР) 13; *А. Минасян* (Ереван) 15; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 19; *Г. Михалкин* (Ленинград) 13, 19, 22, 23; *Е. Мокшин* (Магнитогорск) 15; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 15; *Д. Муралашвили* (Тбилиси) 13, 15, 19, 20; *С. Мушинский* (Новосибирск) 19; *А. Нагорный* (Слуцк) 15; *С. Настенко* (Киев) 13; *О. Никифоргин* (Ивано-Франковск) 25; *О. Ниц* (Одесса) 13, 19, 21; *А. Новичков* (Жуковский) 13, 15, 18—20, 23; *О. Овецкая* (Донецк) 13, 15, 19; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 15; *А. Осолодкин* (Петрозаводск) 13; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 19; *Д. Пастур* (Харьков) 13, 15, 19, 20; *О. Пашко* (Ангарск) 19; *И. Пачин* (Алма-Ата) 15; *Я. Печатников* (Ленинград) 13, 15, 19; *М. Пивень* (Коростень) 13; *С. Пиунихин* (Москва) 13, 19; *В. Плотников* (Курск) 19; *С. Полинов* (Магнитогорск) 13, 15; *М. Померанцев* (Черкассы) 13, 19—21, 23; *В. Попеня* (Алма-Ата) 15; *И. Портной* (Одесса) 21, 23; *А. Пришляк* (Киев) 13, 19, 23, 25; *А. Радаев* (Алма-Ата) 15; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 13, 15, 19—23, 25; *Е. Растигеев* (Барнаул) 19, 22, 23; *В. Ратнюк* (Евпатория) 13, 18, 19; *М. Рзаев* (Баку) 13; *М. Ровинский* (Москва) 19; *А. Розанов* (Киев) 19; *Д. Розман* (Севастополь) 13; А. Ройтерштейн (Ленинград) 13, 19; *К. Ромец* (Киев) 19; *С. Рубан* (Днепропетровск) 15, 19; *А. Рывчин* (Киев) 19; *М. Рябов* (Первомайск Горьковской обл.) 19; *Д. Садыгов* (с. Гаравелли Аз. ССР) 19; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 23; *И. Самовол* (Гайворон) 15, 20, 21, 23; *Б. Самойлов* (Киев) 19; *М. Сапожников* (Ленинград) 13; *Ю. Свирид* (Минск) 19; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) 13; *С. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) 13, 15; *Р. Сибилев* (Ленинград) 13, 19, 22; *И. Симоненко* (Великие Луки) 13, 15, 19, 21—24; *А. Смирнов* (Алма-Ата) 23; *М. Соколова* (Ленинград) 13, 15; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 13, 15, 19, 21, 22; *В. Судаков* (Тбилиси) 13, 15, 19, 23; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 15; *Д. Тамаркин* (Горький) 13, 15, 20, 22, 24, 25; *Б. Тё* (Алма-Ата) 15; *К. Тищенко* (Минск) 13; *Ю. Томилов* (Винница) 13; *Г. Топровер* (Волгоград) 19; *Д. Туляков* (Жданов) 15, 19, 20, 22; *Ю. Тышко* (Ленинград)

(Продолжение см. на с. 51)

Решение задачи о сфере, касающейся боковых ребер пирамиды

Решение задачи с 4-й страницы обложки прошлого номера «Кванта» мы начнем с обоснования двух свойств рассматриваемой конфигурации:

1) центр Z сферы лежит на высоте пирамиды;

2) любая плоскость α, проходящая через вершину S и касающаяся сферы, пересекает плоскость прямоугольника $ABCD$ по касательной l к описанной около него окружности.

Очевидно, что боковые ребра пирамиды равны между собой. Поскольку и расстояния от вершины пирамиды до точек A', B', C', D' касания боковых ребер со сферой также равны между собой, четырехугольник $A'B'C'D'$ гомотетичен $ABCD$ (см. чертеж на обложке) с центром S и коэффициентом гомотетии $|SA'|:|SA|$. Прямая l при этой гомотетии перейдет в прямую l' пересечения плоскостей α и $A'B'C'$, а описанная окружность прямоугольника $ABCD$ — в описанную окружность прямоугольника $A'B'C'D'$, то есть в окружность ω, по которой плоскость $A'B'C'$ пересекается со сферой. Таким образом, достаточно доказать, что прямая SZ перпендикулярна плоскости $A'B'C'$ ($(A'B'C')\parallel(ABC)$) и что прямая l' касается окружности ω. Для доказательства заметим, что точки A', B', C', D', а также точка K' касания плоскости α с данной сферой лежат на одинаковом расстоянии от S, то есть на другой сфере — с центром S и радиусом $|SA|$. Но пересечение этих двух сфер есть окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной их линии центров. Ясно, что эта окружность и есть наша окружность ω. Следовательно, $(SZ)\perp(A'B'C')$. Кроме того, поскольку плоскость α имеет единственную общую точку с данной сферой — точку K', прямая l' имеет единственную общую точку K' с окружностью ω, то есть касается ее, что и требовалось доказать. Подчеркнем, что рассуждения, подобные проведенным нами, доказывающие порой почти очевидные, но необходимые в решении факты, являются неотъемлемой частью решений большинства стереометрических задач на вычисление и часто вызывают более серьезные затруднения, чем сами вычисления. Поэтому мы уделили им здесь основное внимание, а вычисления приведем без подробностей.

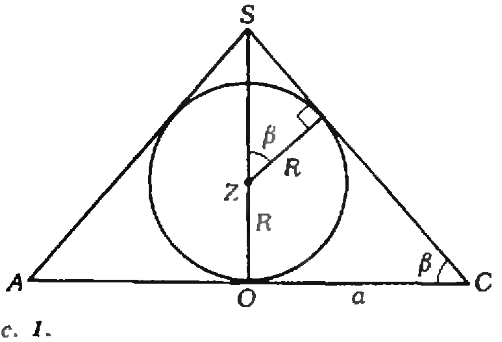


Рис. 1.

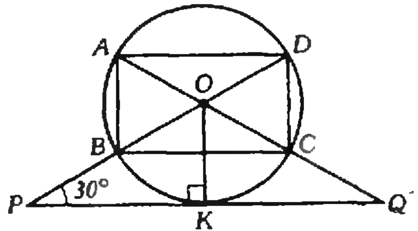


Рис. 2а.

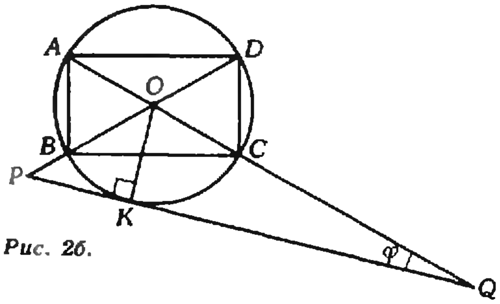


Рис. 2б.

Из утверждения 1) следует, что плоскость SAC пересекает сферу по окружности радиуса R, вписанной в $\triangle SAC$ (рис. 1). Положим

$$\widehat{SCA}=\beta,\ |SO|=h,\ |OC|=a,$$

тогда, поскольку угол между диагоналями прямоугольника $ABCD$ равен 60° ($|AC|=2|AB|$), объем V пирамиды равен

$$V=\frac{2}{3}ha^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h^3\operatorname{ctg}\beta,$$

но $h=R+R/\cos\beta$ (см. рис. 1), а $\cos\beta=|OC|:|SC|=|DC|:|SC|=2\cos\alpha$. Подставляя эти выражения в формулу для объема и выполняя несложные преобразования, получим **ответ** к первой части задачи:

$$V=\frac{(1+2\cos\alpha)^2\cdot R^3}{2\sqrt{3}\cos\alpha(1-2\cos\alpha)}.$$

Переходя ко второй части задачи, мы можем забыть о «стереометрическом происхождении» прямой $l=(PQ)$ (благодаря утверждению 2)) и проводить все рассуждения в плоскости ABC (рис. 2).

В случае а) треугольник POQ — равнобедренный с углом при основании 30° (рис. 2а), поэтому $|OP|=2|OK|=2|OB|$, и значит, **ответ** на вопрос а) —

$$|BP|:|BD|=1:2.$$

В случае б) (рис. 2 б) обозначим через φ угол OQP; тогда

$$\angle OPQ=60^\circ-\varphi,\ \sin\varphi=|OK|:|OQ|=$$
$$=|OC|:(|OC|+6|OC|)=1/7,\ |OK|:|OP|=$$
$$=\sin(60^\circ-\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi=\frac{11}{14}.$$

Отсюда получаем **ответ** на вопрос б):

$$\frac{|BP|}{|BD|}=\frac{|OP|-|OB|}{2|OB|}=\frac{1}{2}\left(\frac{|OP|}{|OK|}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}=\frac{3}{22}.$$

IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН, кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

В прошлых номерах журнала мы рассказали о принципах работы транзисторов. Сегодня речь пойдет о том, каким образом изготавливают современные транзисторы.

В технологии изготовления полевых и биполярных транзисторов так много общего, что достаточно рассмотреть ее на примере только биполярного транзистора, устройство которого несколько сложнее.

На рисунке 1 показана конструкция биполярного транзистора — элемента интегральной схемы (ИС), используемой в ЭВМ. Эта конструкция так сильно отличается от показанного на рисунке 2 схематического изображения транзистора, обсуждавшегося в предыдущей статье, что на первый взгляд трудно поверить, что это один и тот же прибор. Тем не менее, вглядевшись внимательно, нетрудно увидеть на рисунке 1 то же чередование *n—p—n*-областей, что и на рисунке 2.

Конструкция, показанная на рисунке 1, называется планарной, то есть плоской (от английского слова plane — плоский): все операции по изготовлению такого транзистора производятся с одной стороны кремниевой (или арсенид-галлиевой) плоской пластины. Планарная технология при изготовлении интегральной схемы является единственно возможной. Во-первых, поскольку при изготовлении ИС на одной пластине размещаются десятки и сотни тысяч транзисторов размером в несколько микрон, точно совместить отдельные элементы каждого транзистора с двух сторон пластины было бы невозможно. Во-вторых, планарная технология позволяет использовать сравнительно толстые (толщиной сто и более микрон) пластины полупроводника. Такие пластины обладают достаточной механической прочностью и удобны в работе. При двусторонней технологии понадобились бы пластины толщиной в доли микрона. Работать с пластинами такой толщины практически нельзя.

Существует довольно много способов изготовления ИС. Одна из широко распространенных технологий, по которой создаются кремниевые БТ, в упрощенном виде показана на рисунке 3.

1. Поверхность кремниевой пластины окисляется. На ней образуется слой двуокиси кремния SiO_2. Затем поверх окисла наносится тонкий слой светочувствительного полимера — фоторезиста. Фоторезист обладает способностью изменять свои химические свойства под действием света.

К покрытой фоторезистом полупроводниковой пластине прижимается стеклянная пластинка с нанесенным на ней рисунком, составленным из прозрачных и непрозрачных участков, — фотошаблон. После этого фоторезист освещается через фотошаблон, и те участки фоторезиста, на которые попадает свет, приобретают способность растворяться в определенных травителях. Эта операция называется фотолитографией. Она — одна из самых важных в процессе изготовления всех ИС.

Когда пластина с засвеченным фоторезистом погружается в травитель, происходит растворение участков фоторезиста, на которые попадал свет, а также находящихся под ними участков двуокиси кремния. На полупроводниковой пластине в этих местах открываются области чистой поверхности кремния — «окна». Затем в другом травителе, растворяющем незасвеченный фоторезист, но не растворяющем SiO_2, удаляется оставшийся фоторезист. В результате поверхность пластины представляет собой сочетание «окон» с участками, защищенными слоем прочной, устойчивой к высокой температуре двуокиси кремния — «маской».

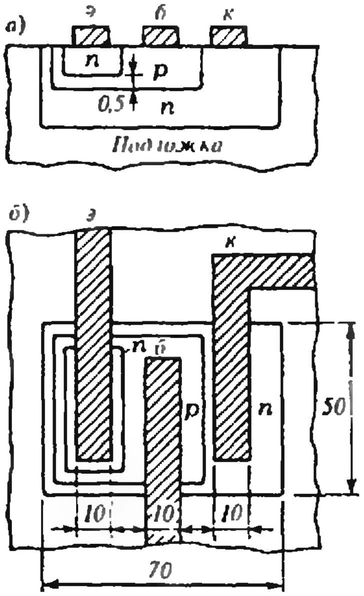


Рис. 1. Планарный биполярный транзистор — элемент ИС на БТ.

а) Транзистор в разрезе.

б) Вид на транзисторную структуру сверху.

Приведены типичные размеры транзистора в мкм; толщина базы W=0,5 мкм.

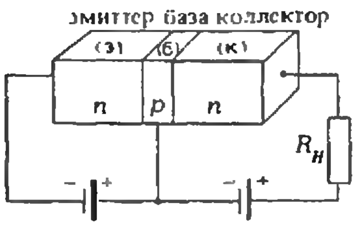


Рис. 2. Схематическое изображение биполярного транзистора.

Современные биполярные транзисторы
Верхний ряд — мощные транзисторы, выдерживающие напряжение между коллектором и базой ~1000 В и способные пропускать токи в десятки ампер.
Средний ряд — мощные транзисторы, предназначенные для усиления и генерации сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний. Современные СВЧ транзисторы способны работать на частотах до нескольких десятков гигагерц (1 ГГц=10^9 Гц).
Нижний ряд — приборы в пластмассовых корпусах. Их появление привело к резкому удешевлению транзисторов. Подлинную революцию в развитии ЭВМ произвело появление интегральных схем (ИС). Внизу справа показана ИС в корпусе. Основа прибора — кремниевая пластина размером 2×3 мм (в центре). На такой пластине размещается до 10^5 БТ.

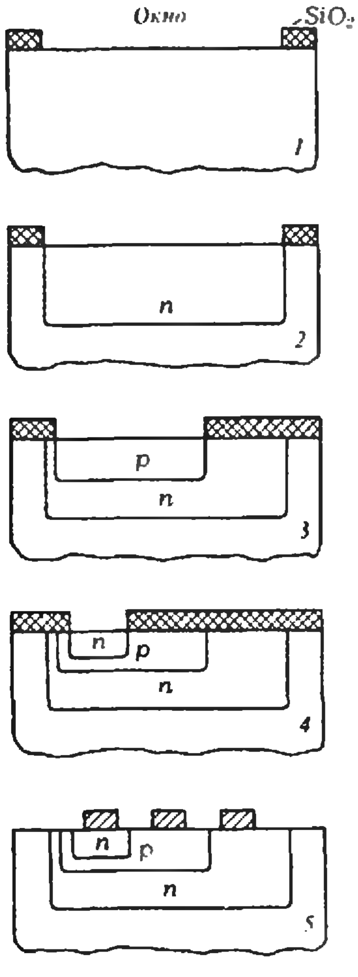


Рис. 3. Этапы изготовления биполярного транзистора.

2. Теперь в пластину при высокой температуре с помощью процесса диффузии вводят атомы мышьяка (As) или сурьмы (Sb), образующих в Si донорную примесь. Там, где поверхность пластины защищена маской SiO_2, атомы примеси не достигают кремния. Таким образом, донорная примесь попадает в кремний только в окнах.

Так одновременно создаются коллекторные области проводимости *n*-типа всех БТ, входящих в ИС.

3. Маска SiO_2 удаляется путем химического травления и создается новая маска с окнами, соответствующими расположению базовых областей транзистора. Через эти окна проводится диффузия бора (B), являющегося акцептором. Концентрация акцепторов берется больше, чем концентрация доноров, так что те области полупроводника, куда попадает бор, будут областями *p*-типа. Происходит, как говорят, перекомпенсация. Акцепторная примесь (B) перекомпенсирует донорную.

4. Снова аналогичным методом создаются окна в SiO_2-маске и диффузией донорной примеси формируются эмиттерные *n*-области. При этом также используется метод перекомпенсации имевшейся здесь акцепторной примеси.

5. На поверхности полученной *n*—*p*—*n*-структуры формируются контакты из алюминия. Для этого пластина покрывается тонкой алюминиевой пленкой толщиной в несколько десятых долей микрона. Затем производится фотолитография с использованием фотошаблона, на котором контактные области и необходимые соединения сделаны непрозрачными. Далее участки засвеченного фоторезиста и находящейся под ним пленки алюминия растворяют в травителях. Полученные таким образом алюминиевые проводники служат элементами, осуществляющими необходимые электрические соединения в ИС.

В больших интегральных схемах (БИС) на каждой пластине расположены десятки тысяч одинаковых транзисторов. В сверхбольших интегральных схемах (СБИС) — сотни тысяч и даже миллионы. И все технологические операции при изготовлении всех транзисторов ИС производятся одновременно. Пластина целиком покрывается окислом. Затем сразу во всех тех местах, куда нужно ввести примесь, в окисле вскрываются окна (то есть сразу изготавливается, например, миллион коллекторов) и так далее. Именно благодаря этой интегрально-групповой технологии все транзисторы имеют одинаковые параметры, а вся ИС стоит лишь немного дороже одного транзистора.

Интерференция света

Кандидат физико-математических наук
Е. И. БУТИКОВ

Волновые свойства света наиболее отчетливо обнаруживают себя в явлениях интерференции и дифракции. Эти явления характерны для волн любой природы. Они сравнительно легко наблюдаются на опыте, например, для звуковых волн или волн на поверхности воды, но для наблюдения интерференции или дифракции света необходимо выполнение определенных условий. О них, в частности, и пойдет речь в этой статье.

Под интерференцией света понимают процесс наложения нескольких световых пучков, при котором результирующая интенсивность света*) в каждой точке не равна сумме интенсивностей отдельных пучков. В некоторых местах интенсивность оказывается больше суммарной, в других меньше, то есть образуются чередующиеся светлые и темные участки — возникает *интерференционная картина.*

Простейший пример интерференции дает наложение двух монохроматических волн одинаковой частоты и с одним и тем же направлением колебаний в складывающихся волнах. В результате в каждой точке происходят колебания с той же частотой и неизменной во времени амплитудой, зависящей, однако, от положения этой точки.

Пусть амплитуды складывающихся колебаний одинаковы, тогда для результирующего колебания $E(t)$ получим

$$E(t)=E_1(t)+E_2(t)=$$
$$=a\cos(\omega t+\varphi_1)+a\cos(\omega t+\varphi_2)=$$
$$=2a\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right), \quad (1)$$

то есть амплитуда $A=2a\left|\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right|$ зависит от разности фаз $\varphi_1-\varphi_2$ складывающихся колебаний и принимает значения от удвоенной амплитуды $2a$ каждой из волн (в точках, где колебания совпадают по фазе) до нуля (в точках, где колебания происходят в противофазе). Энергия колебаний, а следовательно, и интенсивность света I пропорциональна квадрату их амплитуды: $I\sim A^2$. Как видно из формулы (1), результирующая интенсивность I в зависимости от положения точки наблюдения принимает значения от нуля до учетверенной интенсивности отдельной волны $I_0\sim a^2$:

$$I=4I_0\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=$$
$$=2I_0(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2)). \quad (2)$$

Множества точек пространства, которым соответствует одинаковая интенсивность (в частности, максимальная или минимальная), образуют поверхности, зависящие от свойств и расположения источников света.

Вопрос 1. *Два одинаковых точечных источника расположены на некотором расстоянии друг от друга. Какой вид имеют в этом случае поверхности максимальной и минимальной интенсивности?*

Разность фаз $\varphi_1-\varphi_2$ в данной точке зависит от разности хода l волн от синфазных источников: $l=l_1-l_2$. Если разность хода равна целому числу длин волн: $l=k\lambda$ ($k=0, 1, 2, ...$), то волны приходят в точку наблюдения в фазе и при сложении дают колебания с максимальной амплитудой. Если же разность хода равна нечетному числу полуволн: $l=(2k+1)\lambda/2$, то волны приходят в противофазе и «гасят» друг друга. Таким образом, поверхности максимумов и минимумов определяются условиями $l_1-l_2=\text{const}$.

В любой плоскости, содержащей источники, например в плоскости чертежа на рисунке 1, множество точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек — в данном случае от источников S_1 и S_2 — одинакова, представляет собой гиперболу

---

*) Интенсивность света — это световой поток, переносимый пучком света через единичную площадку в направлении нормали к ней. Освещенность экрана и почернение фотопластинки, помещенных в пучок света, пропорциональны его интенсивности.

(S_1 и S_2 — ее фокусы). Из симметрии ясно, что в пространстве множеству точек, удовлетворяющих условию $l_1 - l_2 = \text{const}$, соответствует поверхность вращения гиперболы вокруг прямой, проходящей через источники, — так называемый гиперболоид вращения. Форма интерференционных полос на каком-нибудь экране дается линиями пересечения таких гиперболоидов с плоскостью экрана.

Например, на экране A, перпендикулярном к проходящей через источники S_1 и S_2 прямой, интерференционные полосы имеют вид концентрических окружностей (см. рис. 1). На экране B полосы имеют форму гипербол. Когда расстояния от источников до экрана B много больше расстояния между источниками, в небольшой окрестности точки O интерференционные полосы практически можно считать параллельными прямыми, отстоящими на одинаковые расстояния друг от друга.

Задача 1. *Найдите расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране B, удаленном на $L = 1$ м от источников S_1 и S_2, если они находятся на расстоянии $d = 0{,}5$ мм друг от друга (рис. 2). Длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. По какому закону изменяется освещенность экрана при переходе от максимума к минимуму интерференционной картины?*

Проведем в точку наблюдения P прямую SP из середины отрезка S_1S_2 и обозначим через θ угол, образуемый этой прямой с направлением SO на центр интерференционной картины. При малых θ разность хода $l = l_1 - l_2$ можно найти, опуская перпендикуляр из S_2 на прямую SP до пересечения с S_1P: $l = d \cdot \theta$. Полагая здесь l равным целому числу длин волн $k\lambda$, находим направление θ_k на максимум k-го порядка:

$$\theta_k = k\frac{\lambda}{d},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

Угловое расстояние $\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$ между соседними максимумами равно λ/d, а расстояние h между ними на экране B получим, умножая $\Delta\theta$ на L:

$$h = L\Delta\theta = \frac{\lambda L}{d} = 10^{-3}\ \text{м} = 1\ \text{мм}.$$

Отсюда ясно, что расстояние L, а значит, и интерференционные полосы тем шире, чем ближе друг к другу расположены источники.

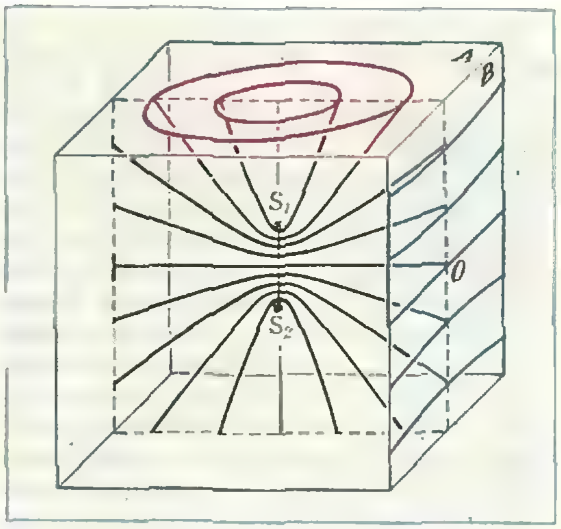


Рис. 1.

Чтобы найти закон изменения интенсивности вдоль прямой OB, достаточно в формуле (2) выразить разность фаз складывающихся колебаний $\varphi_1 - \varphi_2$ через положение точки наблюдения P на экране:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2) = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d\theta.$$

Таким образом, получается, что освещенность экрана зависит от направления θ на точку наблюдения по синусоидальному закону

$$I(\theta) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\right). \qquad (4)$$

График этой функции показан в правой части рисунка 2.

Ослабление световых колебаний в одних местах интерференционной картины и усиление в других не связано с какими-либо превращениями энергии колебаний. Это хорошо видно из формулы (4), согласно которой среднее по всем направлениям значение интенсивности равно $2I_0$, то есть суммарной интенсивности от двух источников.

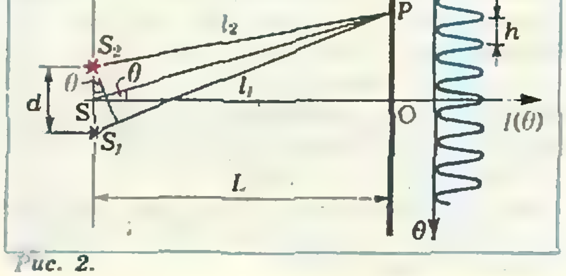


Рис. 2.

До сих пор предполагалось, что источники S_1 и S_2 создают *монохроматические* волны одинаковой частоты. Но для обычных (не лазерных) источников свет никогда не бывает строго монохроматическим. Испускаемая отдельным атомом волна представляет собой не бесконечную синусоиду, а лишь ее отрезок, или, как говорят, цуг синусоидальных волн. Длительность τ такого цуга не превышает 10^{-8} с. Предельная протяженность цуга $c\tau$ составляет около 3 м ($c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света, с которой цуги перемещаются в пространстве), и он содержит несколько миллионов «гребней» и «впадин» ($c\tau/\lambda\approx 10^7$ при $\lambda=5\cdot 10^{-7}$ м).

Если даже считать все цуги, испускаемые различными атомами источника, одинаковыми и характеризовать их одной и той же длиной волны λ, соотношения фаз между ними совершенно случайны, так как акты спонтанного испускания света атомами происходят в случайные моменты времени. Таким образом, свет реальных источников можно рассматривать как хаотическую последовательность синусоидальных волновых цугов. При наложении пучков света от разных источников фазовые соотношения между световыми колебаниями в любой точке за время наблюдения успевают многократно измениться случайным образом. В результате сложения большого числа колебаний со случайными фазами энергия результирующего колебания в каждой точке будет равна сумме энергий складывающихся колебаний, то есть не произойдет характерного для интерференции перераспределения энергии в пространстве.

Отсюда ясно, что для наблюдения интерференции света нужны специальные условия: свет *от одного и того же источника* нужно разделить на два пучка (или несколько пучков) и затем каким-либо способом свести эти пучки вместе. Если разность хода от места разделения до точки наблюдения не превышает длины отдельного цуга, то случайные изменения амплитуды и фазы световых колебаний в двух пучках происходят согласованно. О таких пучках говорят, что они *когерентны*. При наложении когерентных пучков и образуется стационарная интерференционная картина.

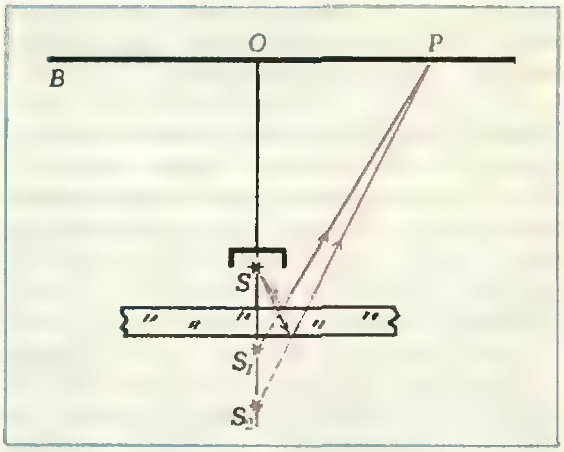


Рис. 3.

Впервые объяснение интерференции света на основе волновых представлений было дано английским ученым Томасом Юнгом в самом начале XIX века. Поставленный им опыт с двумя отверстиями подробно описан в учебнике («Физика 10», § 69). Когерентность световых пучков от отверстий в этом опыте обеспечивается их происхождением из одного первичного пучка.

Другой способ получения когерентных световых пучков основан на использовании отражения первичного пучка от двух поверхностей тонкой прозрачной пластинки.

Вопрос 2. *Какую форму имеют интерференционные полосы на экране В, плоскость которого параллельна граням пластинки (рис. 3)?*

В каждую точку наблюдения P приходят две волны, разность хода которых можно найти, построив изображения точечного источника S в верхней и нижней гранях пластинки. Для простоты можно пренебречь

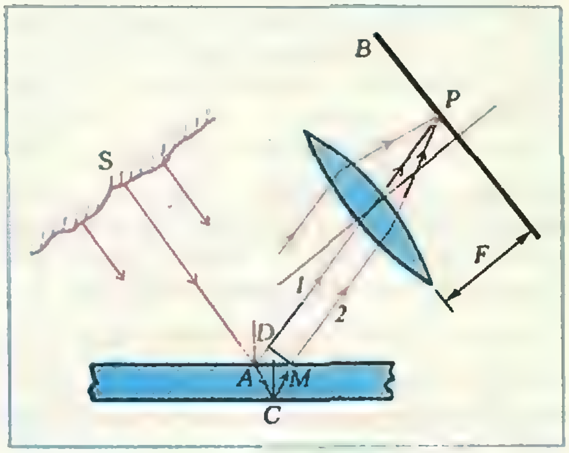


Рис. 4.

преломлением света в пластинке и рассматривать S_1 и S_2 как изображения источника в плоских зеркалах, образуемых гранями пластинки. Линии равной интенсивности образуются при пересечении экрана B гиперболоидом вращения с фокусами в точках S_1 и S_2. Поэтому интерференционные полосы имеют вид концентрических колец с центром в точке O.

В опытах с точечным первичным источником S экран для наблюдения интерференционных полос может располагаться в любом месте, где перекрываются вторичные пучки. В случае протяженного источника интерференционные полосы, создаваемые разными его элементами, обычно смещены друг относительно друга, и вся картина оказывается смазанной. Но при определенных условиях можно наблюдать интерференцию и от протяженных источников.

Задача 2. *Экран B расположен в фокальной плоскости собирающей линзы (рис. 4). На линзу падает свет от протяженного источника S, отраженный двумя гранями плоскопараллельной стеклянной пластинки. Покажите, что интерференционные картины на экране B, создаваемые разными элементами источника S, совпадают друг с другом.*

В каждую точку P экрана приходят лучи, которые до линзы, а значит, и до пластинки были параллельны друг другу, то есть имели вполне определенный наклон к граням пластинки. Рассмотрим один из лучей, идущих от источника. От точки A разделения луча на отраженный и преломленный до точки наблюдения P луч *2* («преломленный») проходит дополнительно расстояние $AC+CM$ в стекле, а в воздухе его путь меньше, чем у луча *1* («отраженного»), на отрезок AD. (От точек D и M оба луча проходят через линзу в точку P за одинаковое время, то есть их оптические пути здесь одинаковы.) Отсюда ясно, что разность хода параллельных лучей *1* и *2*, интерферирующих в точке P, не зависит от положения точки A падения первичного луча на пластинку. Поэтому результат интерференции (максимум, минимум или некоторое промежуточное значение интенсивности) будет одинаковым для всех пар лучей, порожденных разными элементами протяженного источника. Наблюдаемую в таких условиях интерференционную картину называют *полосами равного наклона.*

Другой пример интерференции в случае протяженного источника света дают хорошо знакомые радужные полосы в тонких пленках масла или бензина на поверхности воды, в тонких слоях прозрачных окислов, образующихся на поверхности металлов в процессе закалки, в тонких пленках мыльных пузырей.

Вопрос 3. *Объясните происхождение интерференционных полос при наблюдении поверхности тонкой пленки, освещаемой протяженным источником света (таким, например, как пасмурное небо).*

Когда мы смотрим в точку P на поверхности пленки, на сетчатке глаза возникает изображение этой точки, создаваемое только теми лучами, которые проходят сквозь зрачок, то есть распространяются в пределах узкого конуса с вершиной в P (рис. 5). Рассмотрим луч *1*, образующий угол θ с нормалью к пленке. Он приходит из некоторого элемента S источника, направление на который составляет такой же угол θ с нормалью (в соответствии с законом отражения). Второй когерентный с ним луч *2* приходит в P из того же элемента S после отражения от нижней поверхности пленки (пренебрегаем для простоты преломлением в пленке, то есть считаем $n\approx 1$). Найдем разность хода лучей *2* и *1*:

$$l_2-l_1\approx AB+BP-CP=$$
$$=\frac{2h}{\cos\theta}-2h\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta=2h\cos\theta. \qquad (5)$$

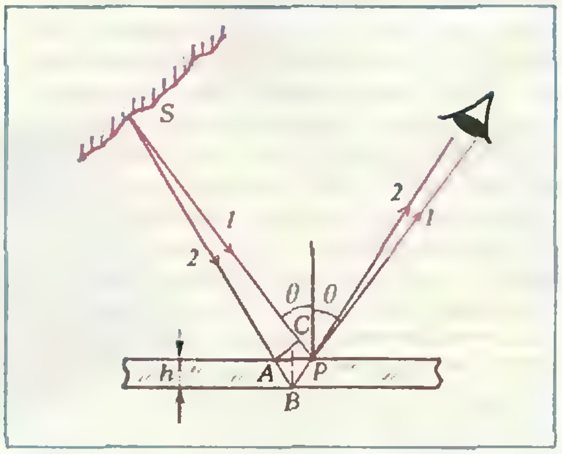


Рис. 5.

Угол θ имеет разные значения для пар лучей, приходящих от разных элементов источника, но в глаз наблюдателя попадают только те лучи, для которых угол θ лежит в узком интервале. Поэтому согласно формуле (5) разность хода для точки P будет практически одинакова у всех пар интерферирующих лучей, создающих изображение точки P на сетчатке глаза.

Если толщина пленки плавно изменяется от точки к точке, то контур каждой интерференционной полосы проходит по тем местам пленки, где ее толщина имеет одно и то же значение (при условии, конечно, что $\cos\theta$ в достаточной степени одинаков для всей области наблюдения). По этой причине такие полосы называют *полосами равной толщины*. Их можно наблюдать, в частности, в тонкой прослойке воздуха между поверхностями двух прозрачных пластинок. Когда направление наблюдения близко к нормальному, переход от какого-либо максимума к соседнему соответствует изменению толщины прослойки на половину длины волны (см. выражение (5)).

Задача 3. *Какой угол α образуют между собой две плоские поверхности стекол, если в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м интерференционные полосы проходят параллельно друг другу на расстоянии $a=2$ см?*

Толщина клиновидной прослойки между плоскостями при перемещении перпендикулярно ребру клина на расстояние a изменяется на величину $\Delta h=\alpha a$. Полагая $\Delta h=\lambda/2$, находим

$$\alpha=\frac{\lambda}{2a}=1{,}5\cdot10^{-5}\ \text{рад}\approx0{,}05'=3''.$$

Таким способом можно измерять малые углы между плоскостями с точностью, недоступной для других методов. По искривлению интерференционных полос можно обнаружить отклонение поверхности от плоской на малую долю длины волны света.

Кольцевые полосы равной толщины, наблюдаемые в воздушном зазоре между соприкасающимися выпуклой поверхностью линзы малой кривизны и плоской поверхностью стекла, называются *кольцами Ньютона*. В отраженном свете их центральное пятно, расположенное в области точки касания, темное. Это объясняется тем, что при толщине воздушной прослойки, много меньшей длины волны, разность фаз интерферирующих волн обусловлена различием в условиях отражения: фаза волны, отражающейся от оптически более плотной среды, изменяется на противоположную, а отражающейся от оптически менее плотной среды остается неизменной.

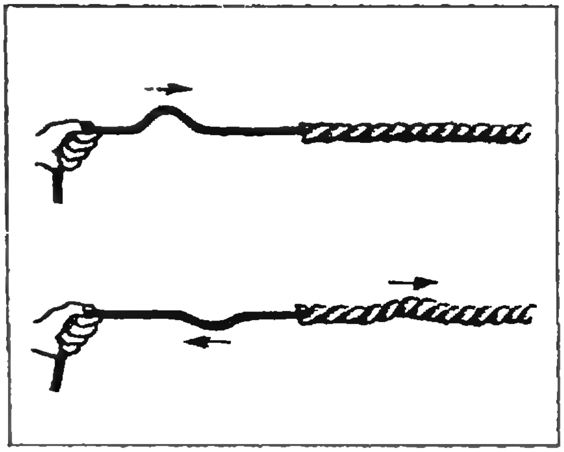


Рис. 6.

Получить представление о характере изменения фазы волны при отражении можно с помощью следующей механической аналогии. Привяжите конец тонкой веревки к толстой и резким движением руки вверх и вниз пошлите вдоль тонкой веревки короткий поперечный импульс (рис. 6). Вы увидите, что отраженный от места соединения веревок импульс имеет противоположную полярность, в то время как прошедший в толстую веревку импульс (аналог световой волны, проникающей в оптически более плотную среду) имеет ту же полярность, что и падающий импульс. Если же послать к месту соединения импульс по толстой веревке, то отраженный назад и прошедший в тонкую веревку импульсы будут иметь ту же полярность, что и падающий.

Вопрос 4. *Можно ли наблюдать кольца Ньютона в проходящем свете?*

В принципе, интерференционная картина возникает и в этом случае. В проходящем свете распределение интенсивности, в соответствии с законом сохранения энергии, будет дополнительным по отношению к отраженному свету: центр картины будет светлым, а затем будут идти чередующиеся темные и светлые кольцевые полосы. Однако из-за малого коэффициента отражения на границе стекло — воздух ($\sim0{,}04$) интенсивности интерферирующих лучей (прошедшего прямо без отражения и испытавшего два отражения) сильно различаются. В результате интерференционные максимумы и минимумы образуются на равномерном светлом фоне, и картина

получается гораздо менее контрастной, чем в отраженном свете.

Упражнения

1. В каких пределах заключена результирующая интенсивность I при интерференции двух когерентных волн различной интенсивности I_1 и $I_2=4I_1$?

2. Для увеличения интенсивности интерференционной картины в опыте Юнга вместо точечных отверстий в первом и втором экранах используют длинные параллельные между собой щели. Объясните, почему это не приводит к ухудшению четкости интерференционных полос.

3. Кольца Ньютона наблюдаются в воздушном зазоре, образованном плоской поверхностью и сферической поверхностью радиусом $R=1$ м. Чему равен радиус пятого темного кольца в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м? Наблюдение ведется в отраженном свете.

4. Объясните происхождение радужной окраски пленок бензина на поверхности воды и мыльных пленок в отраженном белом свете. Почему пленки должны быть очень тонкими? Почему на просвет такие пленки практически бесцветны?

Задачи для исследования

Пересечение решеток

Отметим на координатной плоскости Oxy точки с целочисленными координатами — узлы решетки. Наложим на эту плоскость лист плотной прозрачной бумаги и перенесем на него (другим цветом) решетку узлов. Повернем теперь эту вторую решетку на некоторый угол α вокруг точки $O=(0; 0)$ так, чтобы выполнялось *условие совпадения:* некоторый узел повернутой решетки (отличный от O) совпадает с узлом исходной.

Например, на рисунке 1 узел (1; 3) черной решетки совпадает с узлом (—1; 3) голубой. При этом совпадают и многие другие узлы — они отмечены красным цветом, и пересечение двух решеток само оказывается более крупной решеткой (в статье А. Л. Петелина и А. И. Федосеева она названа «*решеткой совпадающих узлов*», коротко РСУ), то есть узел M принадлежит обеим решеткам, если $\overrightarrow{OM}=k\vec{p}+l\vec{q}$, где k и l — любые целые числа, а $\vec{p}=(2; 1)$ и $\vec{q}=(-1; 2)$ — «базисные векторы» (стороны квадратной ячейки красной решетки).

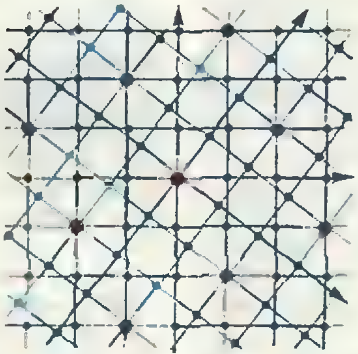


Рис. 1.

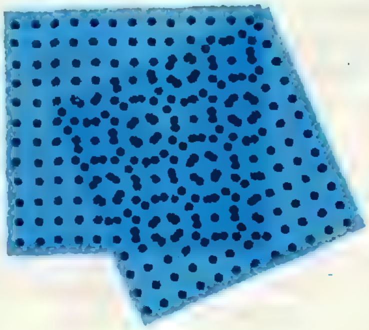


Рис. 2.

а) Нарисуйте РСУ для поворота, при котором узел (8; 1) переходит в узел (7; 4). Каковы в этом случае $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, базисные векторы РСУ?

б) Докажите, что для того, чтобы при повороте на угол α выполнялось условие совпадения, необходимо и достаточно, чтобы $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ были рациональными числами.

в) Докажите, что если это условие выполнено, то совпавшие узлы всегда образуют квадратную решетку.

г) Укажите, как при этом найти *ее базисные векторы.*

д) Перечислите все такие углы α, для которых площадь S_α ячейки РСУ не превосходит 50.

Очень советуем смастерить на прозрачных листках две одинаковые решетки узлов (по образцу рисунка 2), положить их друг на друга и понаблюдать за красивыми «почти периодическими» узорами, которые неожиданно возникают и перестраиваются друг в друга при произвольном смещении одного листка относительно другого. Попробуйте понять, почему возникают новые узоры, в каком смысле они периодичны, как они перестраиваются друг в друга, словом, попробуйте создать небольшую «математическую теорию» этих явлений.

XXVI Международная математическая олимпиада

Т. А. САРЫЧЕВА,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXVI Международная математическая олимпиада (ММО) проходила в Финляндии в городах Хельсинки, Хейнола и Йоутса с 29 июня по 10 июля 1985 года. Популярность этого соревнования увеличивается, число стран-участниц растет постоянно и довольно быстро, что создает определенные трудности для стран — организаторов. В этом году впервые приняли участие в ММО Иран, Исландия, Китайская Народная Республика, Турция, а также присутствовал наблюдатель от Индии.

От 31 страны в ММО приняли участие полные команды по 6 школьников, от Италии и Кувейта — по 5, от Испании и Туниса — по 4, от Исландии и Китая — по 2, от Ирана — 1 участник. Таким образом, в умении решать задачи соревновались 209 школьников из 38 стран всех частей света.

Жюри олимпиады, состоявшее из руководителей команд, работало с 29 июня в небольшом живописном городке Хейнола в 140 км севернее Хельсинки над составлением задач. После соревнования, проходившего в два тура 4 и 5 июля, члены жюри переехали в еще более маленький город Йоутсу, где уже несколько дней размещались школьники в прекрасно оборудованной гостинице в сосновом бору на берегу большого озера. В Йоутсе проходила проверка и координация работ. Последние два дня участники олимпиады провели в Хельсинки, где состоялось закрытие олимпиады, несколько экскурсий, а также веселый заключительный вечер, в котором школьники смогли продемонстрировать свои таланты в песнях, танцах, шутках.

Организаторы олимпиады прекрасно справились со всеми трудностями. Особенно нужно отметить четкую и самоотверженную работу председателя жюри Илпо Лайне, главного координатора Юхи Ойкконена, секретаря олимпиады и руководителя комитета по отбору задач Матти Лехтинена, председателя оргкомитета Хеймо Латвы.

По традиции в каждый из двух дней соревнования предлагалось по 3 задачи на 4,5 часа работы. Каждая задача оценивалась в 7 очков.

Первый день

1 (Великобритания). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, вокруг которого можно описать окружность. Некоторая окружность с центром на стороне AB касается остальных трех сторон. Докажите, что $|AD|+|BC|=|AB|$.

2 (Австралия). Даны взаимно простые целые числа n и k $(0<k<n)$. Каждое из чисел множества $M=\{1,2,\ldots,n-1\}$ окрашивают либо в голубой, либо в белый цвет, так чтобы выполнялись следующие условия:

а) для каждого i из множества M числа i и $n-i$ должны быть окрашены в один цвет;

б) для каждого i из M, отличного от k, числа i и $|k-i|$ должны быть окрашены в один цвет.

Докажите, что все числа множества M будут окрашены в один цвет.

3 (Нидерланды). Для любого многочлена $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k$ с целыми коэффициентами обозначим через $w(P)$ число коэффициентов, которые являются нечетными числами. Пусть $Q_i(x)=(1+x)^i$ для $i=0, 1, 2, \ldots$ Докажите, что если целые числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ удовлетворяют условию $0\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n$, то

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\ldots+Q_{i_n})\geqslant w(Q_{i_1}).$$

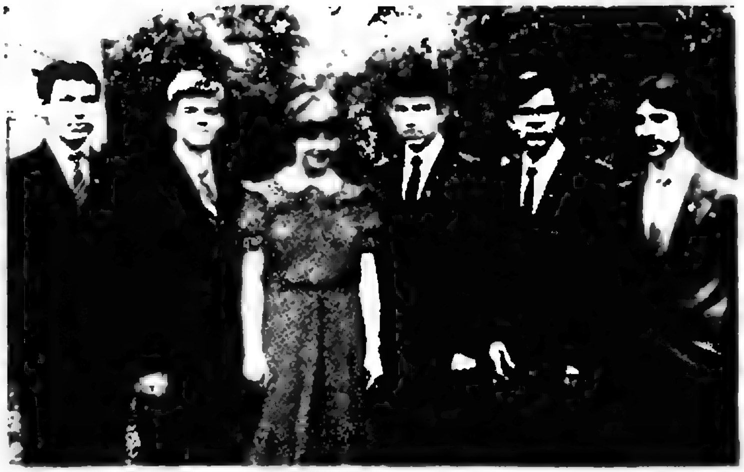
Второй день

4 (Монголия). Дано множество M, состоящее из 1985 различных натуральных чисел. Простые делители каждого числа из множества M не превосходят 26. Докажите, что из множества M можно выбрать четыре попарно различных числа, произведение которых является четвертой степенью некоторого целого числа.

5 (СССР). Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C, которая повторно пересекает отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB прямой.

6 (Швеция). Для каждого действительного числа x_1 строим последовательность $x_1, x_2, \ldots$, полагая

$$x_{n+1}=x_n\cdot\ \left(x_n+\frac{1}{n}\right)$$



Команда СССР на XXVI Международной математической олимпиаде в Хельсинки.

для всех $n \geqslant 1$. Докажите, что существует одно и только одно значение x_1, для которого $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ при всех n.

Команда СССР, состоявшая в этом году из школьников разных городов и разных республик нашей страны, завоевала в трудной борьбе одну золотую, две серебряные и две бронзовые медали.

Ольга Леонтьева из Ленинграда, набрав 36 очков, вошла в шестерку лучших, которые были награждены помимо золотых медалей персональными компьютерами. Ольга была единственной девочкой на олимпиаде, попавшей в число четырнадцати первых призеров.

Олег Бондаренко из г. Горловки Донецкой области и Анатолий Малеванец из Красного Луча Ворошиловградской области, оба воспитанники ФМШ при КГУ, набрав по 29 очков, получили серебряные медали. Воспитанник ФМШ при МГУ Лев Иванов из Саратова, получив 21 очко, возглавил список третьих призеров, в число которых попал и Дмитрий Бибин из Витебска (16 очков). Мати Пентус из Таллина (9 очков) ограничился дипломом участника. Мати, простудившийся накануне олимпиады, выступил ниже своих возможностей, однако, как было сказано на церемонии закрытия, на Международной математической олимпиаде есть победители, но нет побежденных.

Подкомитет жюри, состоявший из шести руководителей команд стран, предложивших задачи, рассмотрел вопрос о специальных призах за оригинальные решения задач. Хотя школьниками были найдены прекрасные решения, в том числе ранее не известные жюри, в особенности по геометрическим задачам, подкомитет решил специальных призов никому не присуждать, так как ни одно из этих решений не было уникальным, а повторялось в ряде работ.

ММО — это соревнование школьников, а не стран. Тем не менее, можно отметить, что школьники социалистических стран выступают традиционно очень хорошо. В числе шести команд, набравших в совокупности наибольшее число очков, пять команд социалистических стран: Румыния (201), Венгрия (168), Болгария (165), Вьетнам (144), СССР (140). Хорошо выступила также команда США (180). Кроме того в десятку лучших вошли команды ФРГ (139), ГДР (136), Франции (125), Великобритании (121).

Всем, кто присутствовал на церемонии закрытия в университете Хельсинки, кто видел счастливые лица победителей и слышал горячие аплодисменты, было понятно, какую большую роль играют ММО в деле развития математического образования в мире, в деле укрепления доверия и дружбы между народами.

Следующая, XXVII Международная математическая олимпиада школьников состоится в Варшаве в июле 1986 года.

XVI Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

XVI Международная олимпиада школьников по физике проходила в Югославии с 23 по 30 июня в курортном городе Порторож на берегу Адриатического моря.

Для участия в олимпиаде прибыли команды из 20 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Исландии, Канады, Кубы, Нидерландов, Норвегии, Польши, Румынии, Советского Союза, Турции, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Впервые в олимпиаде приняли участие команды Канады и Турции. Кроме того, на олимпиаде были представлены наблюдатели из Италии, Китая и США.

По международному статуту физической олимпиады каждая страна может послать команду из пяти школьников. В команду СССР вошли*):

Виктор Барзыкин — выпускник с. ш № 82 п. Черноголовка Московской обл.,
Георгий Григорьев — выпускник ФМШ № 2 г. Киева,
Юрий Жестков — выпускник РФМШ г. Алма-Аты,
Тарас Иваненко — выпускник с. ш. № 145 г. Киева,
Олег Черп — выпускник с. ш. № 50 г. Минска.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР.

Организация и проведение XVI Международной физической олимпиады были поручены югославскому Союзу математических и физических обществ, Обществу математиков, физиков и астрономов СР Словении, Исполнительному Совету СР Словении, Национальному комитету по науке и технике, Министерству науки и технологии СР Словении. Председателем оргкомитета олимпиады был назначен профессор Люблянского университета Антон Мольк, генеральным секретарем — Боян Голли.

Теоретический тур олимпиады проводился в Портороже, а экспериментальный тур — в городе Копер.

Для подготовки задач и проведения теоретического тура были привлечены также ученые Люблянского университета.

Уточнение условий задач, их решений и критериев оценок, а также утверждение результатов проверки работ проводилось на заседаниях Международной комиссии, в которую наряду с председателем оргкомитета и генеральным секретарем входили руководители команд всех стран.

Участникам олимпиады было предложено решить 3 теоретические задачи (за 5 часов) и выполнить 2 экспериментальных задания (за 4 часа). Вот их условия*):

Теоретический тур

Задача 1

Юный радиолюбитель поддерживает радиосвязь с двумя девушками, проживающими в разных городах. Он намерен сконструировать такую систему антенн, которая позволила бы ему разговаривать с одной из девушек (живущей в городе B) с оптимальным качеством связи, но таким образом, чтобы вторая девушка (живущая в городе A) их разговор слышать не могла, и наоборот. Система антенн собирается из двух вертикальных антенн, излучающих с одинаковой интенсивностью во всех горизонтальных направлениях.

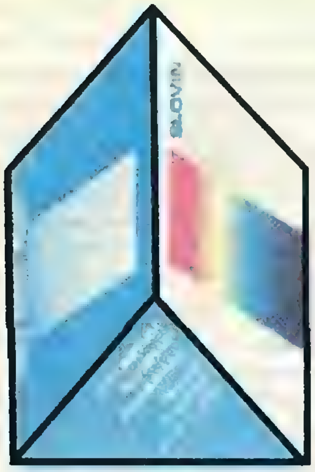
Определите расстояние r между антеннами, угол ψ_0 между плоскостью, проходящей через обе антенны, и направлением на север, и разность фаз $\Delta\varphi$ электрических сигналов, излучаемых антеннами. Расстояние между антеннами должно быть минимальным.

Найдите численное решение в случае, если юноша имеет радиостанцию, работающую на частоте $\nu=27$ МГц, а система антенн установлена в Портороже. Используя карту, юноша выяснил, что углы между направлением на север

---

*) О том, как формируется наша команда, можно прочитать в статье С. С. Кротова «XV Международная физическая олимпиада» («Квант», 1984, № 12).

*) Решения этих задач, приведенные в разделе «Ответы, указания, решения», подготовлены при участии членов нашей команды: В. Барзыкина — теоретическая задача 1, Ю. Жесткова — теоретическая задача 2, Т. Иваненко — теоретическая задача 3, Г. Григорьева — экспериментальная задача 1, О. Черпа — экспериментальная задача 2.



Команда Советского Союза на XVI Международной физической олимпиаде. Слева направо: Т. Иваненко. В. Барзыкин, Г. Григорьев. Ю. Жестков. О. Черп.

и направлениями на города A (Конер) и B (Буне) составляют $\psi_1=72^\circ$ и $\psi_2=157^\circ$ соответственно.

Задача 2

В длинном бруске, имеющем форму разностороннего параллелепипеда ($a>b\gg c$) и сделанном из полупроводникового материала In Sb, течет ток I в направлении ребра a. Брусок находится в магнитном поле, направление вектора индукции $\vec{B}$ которого совпадает с ребром c. Переносчики тока в In Sb — электроны, которые движутся в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ со средней скоростью $v=uE$ (коэффициент u называется подвижностью электронов). При наличии магнитного поля необходимо учитывать действие силы Лоренца на электроны — направление вектора напряженности в этом случае не будет параллельно электрическому току. Этот феномен известен как «эффект Холла».

а) Определите модуль и направление вектора напряженности электрического поля в бруске.

б) Вычислите разность потенциалов между противоположными точками на поверхности бруска в направлении ребра b.

в) Получите аналитическое выражение для постоянной компоненты разности потенциалов, найденной в пункте б), если сила тока и индукция магнитного поля меняются по законам: $I=I_0\sin\omega t$, $B=B_0\sin(\omega t+\varphi)$.

г) Спроектируйте (и объясните) электрическую цепь, в которой возможно использование результата в) для измерения потребления мощности электрическим аппаратом, включенным в сеть переменного тока.

Используйте такие данные: подвижность электронов в In Sb $u=7{,}8$ м^2/(В · с), концентрация электронов $n=2{,}5\cdot10^{22}$ м$^{-3}$; $I=1$ А, $B=0{,}1$ Тл, $b=1{,}0$ см, $c=1$ мм.

Задача 3

В космическом исследовательском проекте запуска космического корабля за пределы Солнечной системы обсуждаются две возможности:

1. Аппарат запускается со скоростью, достаточной для выхода за пределы Солнечной системы, непосредственно с орбиты Земли.

2. Аппарат приближается к одной из внешних планет, с ее помощью изменяет направление движения и приобретает скорость, необходимую для выхода за пределы Солнечной системы.

Можно считать, что во всех случаях корабль движется под действием гравитационного поля только Солнца или планеты, в зависимости от того, чье поле сильнее в данной точке.

а) Определите минимальную скорость корабля $v_а$ и ее направление относительно вектора орбитальной скорости Земли для реализации проекта 1.

б) Предположим, что корабль запущен в направлении, определенном в пункте а), но с другой скоростью $v_б$ относительно Земли. Определите скорость аппарата, когда она пересекает орбиту Марса (то есть найдите параллельную и перпендикулярную составляющие этой скорости относительно орбиты Марса), при условии, что в этот момент Марс находится далеко от аппарата.

в) Предположим, что аппарат вошел в гравитационное поле Марса. Определите минимальную стартовую скорость аппарата $v_в$ с орбиты Земли, необходимую для выхода из Солнечной системы после воздействия на него гравитационного поля Марса. (Вас не должно интересовать точное положение Марса во время взаимодействия с аппаратом.) **Намек:** из результата а) вы знаете оптимальную величину и направление скорости аппарата, необходимой для выхода за пределы Солнечной системы. Найдите связь между этой скоростью и компонентами скорости до вхождения аппарата в гравитационное поле Марса, то есть компонентами, определенными вами в б). Будет ли сохраняться энергия аппарата?

г) Определите максимально возможную часть сбереженной энергии в проекте 2 по сравнению с проектом 1.

Примечания. 1) Можно считать, что все планеты вращаются вокруг Солнца по окружностям в одном направлении и в одной плоскости. Сопротивлением воздуха, вращением Земли вокруг своей оси и энергией, затраченной при выходе из гравитационного поля Земли, пренебречь. 2) Численные данные: скорость Земли вокруг Солнца равна $v_0=30$ км/с, отношение расстояний от Земли и Марса до Солнца равно 2/3.

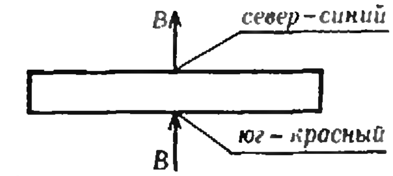


Рис. 1

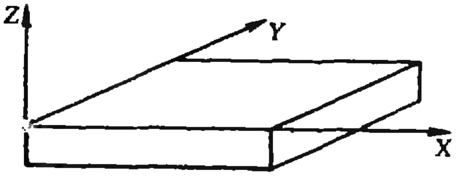


Рис. 2.

Экспериментальный тур

Задача 1

Определите положение центров и ориентацию магнитов, спрятанных в ящике, покрашенном в черный цвет. Магнит изображен на рисунке 1; его координаты x, y и z следует измерять от угла, помеченного красным цветом на рисунке 2. Определите компоненту векторв магнитной индукции $\vec{B}$ в плоскости XY с помощью предварительно откалиброванной измерительной системы. Определите наибольшее значение магнитной индукции, созданной вашим магнитом.

Оборудование: постоянный магнит, такой же, как спрятанные в ящике; источник напряжения (0—24 В); измерительная катушка (1400 витков, $R=230$ Ом); черный ящик со спрятанными магнитами; две катушки для создания магнитного поля (8800 витков в каждой, $R=990$ Ом); вольтметр (с диапазонами измерения 1 В, 3 В, 10 В, рекомендуемыми для использования); электронная схема; амперметр; переменное сопротивление ($R_{\max}=3{,}3$ кОм); соединительные провода; пластина с отверстиями для крепления катушек; резиновые кольца для различного употребления, например для крепления катушек; деревянные палочки для тех же целей; линейка; нитки.

Инструкция

Для исследования можно применить любой не разрушающий магниты метод. Конечный ответ должен содержать результаты измерений, формулу, графики и рисунки (последние должны использоваться вместо комментариев, где это возможно).

Правильное использование измерительной системы показано на рисунке 3. При подключении катушки *1* через электронную схему *2* к вольтметру *3* максимальное отклонение стрелки вольтметра пропорционально изменению магнитного потока через катушку.

Задача 2

Исследуйте процесс ускорения и замедления медного диска, вращаемого мотором переменного тока. Измеряя время полуоборота диска, найдите зависимость угла поворота, угловой скорости и углового ускорения диска от времени. Определите вращающий момент сил и мощность мотора как функцию угловой скорости.

Оборудование: мотор переменного тока с выключателем и медным диском; индуктивный датчик; многоканальный секундомер с компьютером.

Инструкция

Индукционный датчик регистрирует движение двух железных стержней на диске, когда они ближе 0,5 мм от него, и посылает сигнал на секундомер. Секундомер подключен к компьютеру таким образом, что он регистрирует момент времени прохождения железного стержня под датчиком и запоминает его. Для включения секундомера нужно нажать последовательно кнопки «5» и «6» на пульте управления компьютера.

Компьютер высвечивает результаты в графической форме. По вертикальной оси представлены интервалы времени между двумя последовательными моментами регистрации железного стержня, по горизонтальной оси — номера интервалов.

При нажатии кнопки «7» компьютер выдает результаты измерений в виде таблицы. В первой колонке таблицы показан номер измерения, во второй — время, прошедшее с момента начала измерений, в третьей — представлены интервалы времени между последующими моментами прохождения железных стержней около индукционного датчика.

Каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

За первую задачу теоретического тура 10 баллов получили 12 участников (3 — из СССР), за вторую задачу 9,5 баллов (высший балл) получил лишь один участник (из СССР), за третью задачу 10 баллов получили 2 участника (1 — из СССР). Абсолютно лучший результат после теоретического тура был у школьника из Чехословакии П. Шпаниеля — 29 баллов. У Г. Григорьева был второй результат — 27,5 баллов. Далее следовали Т. Иваненко и Р. Бадами (Великобритания) — по 27 баллов. Лучший командный результат после выполнения задач теоретического тура был у команды СССР — 121,0, у команд ФРГ и Великобритании, занявших 2 и 3 места,— 99,5 и 94,5 баллов соответственно.

Максимальное число баллов за первое экспериментальное задание получил школьник из Швеции Х. Свенсон (8,5), за второе задание — школьник из Великобритании Д. Маккэй (9,5) и из Румынии К. Малуреану

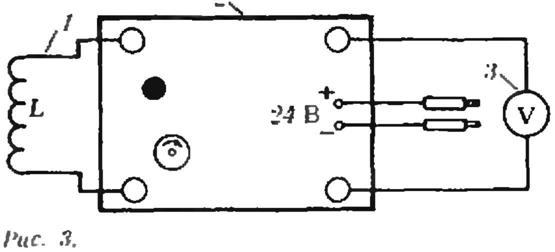


Рис. 3.

(9). Д. Маккей был лучшим и по сумме баллов за экспериментальные задания (15,5). Лучший командный результат за выполнение эксперимента оказался у команды Великобритании — 61, второй результат показала команда ФРГ — 58, затем — команды СССР и Швеции — по 55,5 баллов.

После подведения общих итогов лучшая сумма баллов (42,5) оказалась у П. Шпаниеля (Чехословакия). Он награжден дипломом I степени. Дипломы I степени получили также Р. Бадами из Великобритании (40,5) и 3 участника советской команды: Г. Григорьев (38,5), В. Барзыкин (38) и Т. Иваненко (38). Ю. Жестков получил диплом II степени (33), О. Черп — диплом III степени (29). Общее число первых премий 5, вторых — 6, третьих — 17. В неофициальном командном зачете команда СССР заняла первое место, набрав 176,5 баллов. Остальные команды по сумме баллов расположились следующим образом: ФРГ (157,5), Великобритания (155,5), Румыния (141,5), Чехословакия (131,0), ГДР (128), Нидерланды (123), Швеция (123), Польша (119), Венгрия (113,5), Болгария (110,5), Югославия (108,5), Вьетнам (103,5), Финляндия (89,5), Турция (84,0), Австрия (79,5), Канада (66,0), Норвегия (61,0), Исландия (44,0 — 4 участника), Куба (44,0).

Т. Иваненко получил специальный приз за оригинальное решение третьей задачи теоретического тура. В. Барзыкин получил специальный приз как самый юный участник олимпиады.

Во время олимпиады ее участникам была предложена интересная культурная программа. Школьники познакомились с достопримечательностями города-курорта Порторож, которому скоро исполнится 100 лет, старинного города Копер, посетили конный завод в Липице, знаменитую Постойнскую пещеру (по ее многокилометровым тоннелям ходят поезда туристов), Морской музей и аквариум в Пиране. Для участников олимпиады были организованы концерты классической музыки и народных танцев, морская прогулка на лодках вдоль побережья Адриатического моря и ежедневные купания в море.

Во время проведения олимпиады проходили дружеские беседы между школьниками разных стран. Советский школьник О. Черп дал интервью для Словенского телевидения, а Т. Иваненко — для газеты «Приморские новости» (г. Пиран).

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют всех членов советской команды с большой победой и желают им дальнейших творческих успехов.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 36)

15; *М. Фарадже* (Баку) 13; *Н. Федин* (Омск) 13, 15; *В. Филомоненко* (Свердловск) 15; *Л. Филипенко* (Алма-Ата) 15; *Е. Финк* (Ленинград) 19, 21, 23, 25; *В. Цвиркунов* (Киев) 19, 20, 22; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 13; *С. Чебуков* (Симферополь) 13, 15; *Г. Чевардин* (Челябинск) 13, 19; *И. Шадрин* (Алма-Ата) 15; *М. Шакаев* (Алма-Ата) 15; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 24; *С. Шарапов* (Киев) 13; *С. Шейнин* (Молодечно) 19; *Б. Шойхет* (Москва) 19; *Г. Шпитальник* (Ленинград) 19, 24; *П. Шрабштейн* (Москва) 19; *Б. Шраер* (Ленинград) 13, 19; *В. Шульга* (Евпатория) 13, 19; *Э. Ясиновый* (Куйбышев) 13, 15; *В. Яхинц* (Ташкент) 15.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 25, 28; *К. Абилкаиров* (Алма-Ата) 25, 26; *И. Абрамчук* (Винница) 25, 26; *Г. Адейшвили* (с. Габанери Гр. ССР) 25; *Э. Алиев* (Сумгаит) 29; *С. Анатольев* (Ярославль) 28; *В. Апальков* (Харьков) 23, 25, 27, 35; *С. Бакин* (Орел) 25, 26; *Р. Бакиров* (Первоуральск) 29; *А. Барабаш* (Канев) 23; *Д. Барц* (Харьков) 25, 28, 32; *К. Бедов* (Челябинск) 23, 25, 28, 32; *Ю. Белобородов* (Челябинск) 25; *С. Беловолов* (Красноярск) 23, 25; *М. Белопольская* (Киев) 35; *А. Белопольский* (Киев) 23, 25, 26, 28, 31, 32, 35; *И. Бека* (Васлуй, СРР) 35; *А. Беренгольц* (Кишинев) 23; *Л. Блинов* (Черновцы) 29; *С. Бобылев* (Березники) 23, 25; *С. Болдырев* (Мытищи) 23, 25, 28, 29, 32; *Ю. Боровский* (Киев) 25, 26, 35; *Ш. Бреннер* (Хуст) 25, 26, 28, 29; *А. Буга* (Ульяновск) 32; *М. Валиев* (Самарканд) 29; *И. Ванин* (Москва) 23, 25; *И. Верный* (Житомир) 23, 29, 31; *А. Вильコцкий* (Минск) 25; *А. Володько* (Одесса) 23, 25, 28; *А. Волошин* (ст. Ивановка Кирг. ССР) 28; *А. Гамаюнов* (Полтава) 32, 37; *О. Гендельман* (Харьков) 25, 28, 32; *С. Гершиков* (п. Першотравневое Донецкой обл.) 28, 32; *В. Глухов* (Сарапул) 23; *М. Годин* (Ленинград) 26; *А. Гольдин* (Киев) 25; *Л. Гольдштейн* (Киев) 23, 25, 35; *В. Гринберг* (Москва) 23, 25, 27, 28, 32; *Л. Гуревич* (Кемерово) 28;

(Окончание см. на с. 54)

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1986/87 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит фамилии руководителей и поименный список членов кружка (по классам, с указанием итоговых оценок за вступительное задание). Все материалы по организации кружков следует выслать в адрес ЗФТШ *до 25 мая 1986 года.*

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка проверяют его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике (по программе ЗФТШ) два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетрадной обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Курская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гончаров Олег Витальевич*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*Курчатовская средняя школа № 2*
5. Профессия родителей и занимаемая должность:	
отец	*слесарь*
мать	*машинист котельных установок*
6. Подробный домашний адрес	*307239, Курская обл., г. Курчатов, ул. Космонавтов, д. 10, кв. 76.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№								
Ф.								
М.								

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1986 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1986 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской , Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 4—9 — для учащихся восьмых классов, 8—14 — для учащихся девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для учащихся восьмых классов, 6—12 — для учащихся девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Спортсмены бегут колонной длины l по одному с одинаковой скоростью v. Навстречу бежит тренер со скоростью $u<v$. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, поворачивает и бежит назад с той же скоростью v. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

2. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни сечением $S_1=100$ см^2 и $S_2=10$ см^2. На больший поршень становится человек массой $M=80$ кг. На какую высоту поднимется после этого малый поршень?

3. В цилиндрический сосуд с площадью сечения $S=200$ см^2 и высотой $h=30$ см налито $V=4$ л воды. В сосуд опускают стержень сечением $s=100$ см^2, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

4. Пулемет с водяным охлаждением ствола дает 600 выстрелов в минуту. Заряд пороха в патроне $m=3{,}2$ г, 28 % выделяемого количества теплоты идет на нагревание воды в кожухе ствола. Через какое время вода закипит, если ее было налито $V=4$ л при температуре $t=20$ °C? Теплота сгорания пороха $q=4\times10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$°C).

5. В кастрюлю налили холодной ($t=10$ °C) воды и поставили на электроплитку. Через 10 минут вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$°C), удельная теплота парообразования $L=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.

6. За последнюю секунду свободно падающее без начальной скорости тело пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

7. Вокруг планеты по круговой орбите вращается спутник. Определите радиус орбиты, если период обращения спутника равен T, а масса планеты M.

8. Электрический утюг имеет мощность $P_1=750$ Вт при питании от сети с напряжением $U_1=127$ В, а комнатный обогреватель имеет мощность $P_2=1$ кВт при том же напряжении. Какая мощность будет выделяться в каждом приборе, если их включить последовательно в сеть с напряжением $U_2=220$ В? Сопротивление приборов не изменяется.

9. Цирковой гимнаст падает с высоты $H=1{,}5$ м на упругую предохранительную сетку. Каково будет максимальное провисание гимнаста в сетке, если в случае спокойно лежащего в сетке гимнаста провисание равно $a=0{,}1$ м?

10. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, имеет длину $L=60$ м. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении $\mu=0{,}5$?

11. Найдите формулу соединения азота с кислородом, если $m=1$ г его в газообразном состоянии в объеме $V=1$ л при температуре $t=17$ °C создает давление $p=314$ гПа.

12. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p=b/V^n$, где b и n — некоторые постоянные, причем $0<n<1$?

13. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой M нагревают в цилиндре под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления ($T\sim p^2$) от значения T_1 до значения T_2. Определите работу, совершенную газом при этом процессе.

14. В откачанном герметически закрытом сосуде объема $V=1$ л находится открытая колбочка, содержащая $m=10$ г воды. Сосуд прогревают при температуре $t=100$ °C. Какая масса воды испарится?

Математика

1. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{10^{1985}-1}{10^{1986}-1} \text{ или } \frac{10^{1986}-1}{10^{1987}-1}?$$

2. Расстояние между пунктами A и B равно 5 км. Через A проходит прямолинейная дорога, образующая с прямой AB угол α, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Два туриста одновременно вышли из A и одновременно прибыли в B, но первый двигался из A в B через поле по прямой, а второй сначала шел по дороге, а затем свернул и тоже пошел через поле напрямик. В поле туристы шли со скоростью 4 км/ч, а по дороге — 6 км/ч. Какой путь прошел второй турист?

3. Натуральное число оканчивается на 3. Если эту цифру переставить в начало числа, то оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведены высоты CD и медиана CE. Найдите отношение длин катетов треугольника ABC, если известно, что $AB=3DE$.

5. Найдите все трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

6. Изобразите на координатной плоскости множество точек с координатами (p; q), для которых уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два различных положительных корня и $2q-p<4$.

7. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N, а медиану AD — в точке O. Найдите отношение $AO:OD$, если $MO=3ON$.

8. Решите неравенство:

$$\frac{1}{x^2-x}\leqslant\frac{1}{|x|}.$$

9. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли две группы туристов. Первая группа идет со скоростью 4 км/ч переходами длительностью не более 6 часов, а вторая — со скоростью 5 км/ч переходами длительностью не более 2 часов. Известно, что после перехода длительностью t часов, прежде чем двигаться дальше, первая группа должна отдыхать не менее t часов, а вторая — $2t$ часов. Через какое наименьшее возможное время группы встретятся, если расстояние между A и B равно 48 км?

10. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна l, острый угол равен α. Найдите площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^x\cdot y+3^x\sqrt{1-y^2}=\sqrt{3},\\ 3^x\cdot y-2^x\sqrt{1-y^2}=\sqrt{2}.\end{cases}$$

12. На координатной плоскости даны точки $A(3;\ -4)$ и $B(4;\ -2)$. Точка C лежит на окружности $x^2+y^2=\frac{16}{5}$. Найдите координаты точки C, при которых площадь треугольника ABC будет наименьшей.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 36)

Д. Дворников (Донецк) 29; *А. Деревянкин* (Хабаровск) 32; *Б. Добровольский* (Тбилиси) 35; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 23, 25; *А. Донченко* (Киев) 23, 25, 27; *Д. Дорофеев* (Липецк) 28; *В. Душацкий* (Донецк) 35; *А. Дынников* (Жуковский) 23, 25, 28, 29, 32, 35; *И. Дынников* (Жуковский) 23, 25; *М. Ермаков* (Рига) 25, 29; *С. Ефремов* (Запорожье) 25, 26, 31, 37; *А. Жариков* (Киев) 23, 25, 27—36; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 25; *О. Заблуда* (Киев) 25, 26, 32; *О. Заборонский* (Москва) 23, 27; *В. Заводянный* (с. Калининское Херсонской обл.) 25, 27; *Л. Запольский* (Москва) 29; *А. Захаров* (Гатчина) 28, 29; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 35; *В. Зелов* (Алма-Ата) 25, 35; *И. Иванов* (Калуга) 29; *С. Иванов* (Уфа) 23, 26, 28, 31, 32; *Р. Исаенко* (Сыктывкар) 28; *П. Кадурин* (Киев) 23; *В. Калацкий* (Солигорск) 29; *А. Карнаухов* (Устинов) 23, 25; *Д. Кашин* (Москва) 23, 25; *М. Кельмансон* (Москва) 25, 27; *Д. Киреев* (Москва) 29; *А. Кириленко* (Запорожье) 23, 29; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 23, 28, 29, 32, 35; *А. Киселев* (Ленинград) 29; *М. Кишиневский* (Ташкент) 32, 35; *П. Кларк* (Тула) 23—27, 28, 31, 35; *А. Кленов* (Тейково) 23; *А. Климов* (Донецк) 25, 32, 35; *В. Коллегов* (Березники) 25; *А. Кононенко* (Киев) 25, 26; *А. Краковский* (Харьков) 29; *К. Купцов* (Саратов) 23; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 25, 26, 28; *Д. Кушнер* (Мытищи) 25, 29; *С. Лакатом* (Москва) 32; *А. Левенштейн* (Донецк) 23, 26; *Л. Лиознов* (Москва) 23, 29, 35; *В. Литвин* (Днепропетровск) 25—27; *М. Литвинов* (Киев) 29, 32; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 23, 25; *К. Лопин* (Фрунзе) 25; *И. Лугач* (Винница) 23, 28; *С. Лукьянов* (с. Владимировка Кировоградской обл.) 23, 25, 27; *И. Луценко* (Донецк) 23, 25, 27; *П. Лушников* (Москва) 25—27, 31; *Т. Малащенко* (Воткинск) 29; *Г. Марченков* (Саратов) 28, 35; *Ю. Махлин* (Москва) 25, 28, 31; *З. Мачарадзе* (Тбилиси) 23, 25; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 23, 25, 32, 35; *Р. Мирзафатихов* (п. Аксуек Джамбулской обл.) 29; *Е. Михалюк* (Минск) 23, 27; *А. Мищаненко* (Новосибирск) 25; *Д. Могилевцев* (Шклов) 25, 29; *С. Молчанов* (Свердловск) 27; *А. Мудрик* (Брест) 23; *С. Мягчилов* (Одесса) 23—27; *С. Настенко* (Киев) 31; *А. Недачин* (Киев) 23; *И. Никитин* (Горький) 23—28, 31, 32, 35; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 25, 29; *С. Новиков* (Херсон) 26, 27; *А. Оводенко* (Донецк) 23; *И. Оводов* (п. Менделеево Московской обл.) 23; *О. Осауленко* (Киев) 25, 26; *Р. Паламарчук* (Нежин) 31; *С. Пан* (Алмалык) 27, 29; *А. Панычев* (Магадан) 27—29; *А. Парецкий* (Минск) 27, 28; *В. Песоцкий* (д. Дворец Брестской обл.) 23; *Е. Петров* (Минск) 27, 29; *К. Писарчук* (Рязань) 35; *С. Пиунихин* (Москва) 27—29, 31; *И. Погорелов* (Донецк) 23, 26; *В. Поляков* (Кстово) 29; *О. Посудневский* (Береза) 23, 25, 26, 28, 29, 31, 35; *А. Путилин* (Минск) 25, 29; *А. Пучков* (Ленинград) 35; *Е. Растигеев* (Барнаул) 28; *С. Рахамов* (Казань) 28, 35, 37; *А. Розенвайн* (Киев) 25—27, 32; *Е. Рознощик* (Киев) 27, 32; *Н. Ромец* (Кировоград) 25, 27; *С. Рося* (Минск) 23, 25—29, 35; *А. Рубанов* (Москва) 32; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 23, 27, 29, 31, 35; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 28; *Т. Сагайдак* (Канев) 23, 35, 37; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 25, 35; *Б. Самойлов* (Киев) 23, 29, 31, 35; *А. Сиваченко* (Москва) 25, 28; *М. Ситников* (Климовск) 23, 28, 29, 35; *А. Скачков* (Тула) 29; *М. Скоробогатов* (Киев) 26; *А. Снижко* (Запорожье) 26, 29; *С. Соляник* (п. Протвино Московской обл.) 28; *А. Сомов* (Киев) 25; *А. Сотников* (Губкин) 25, 28; *А. Стеценко* (Харьков) 28, 29; *С. Стрельников* (Салават) 27; *И. Стрешенский* (Киев) 35; *И. Суконников* (Винница) 32, 35; *Д. Сумаков* (Грозный) 27; *В. Сысоев* (Киев) 32; *Л. Таджиков* (Душанбе) 32; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 35; *С. Толмачев* (Минск) 23, 25, 28; *С. Тужанский* (Винница) 25, 26, 32, 36; *С. Ушаков* (Ярославль) 28; *Н. Федин* (Омск) 26, 27; *М. Федоров* (Ульяновск) 23, 25, 28; *С. Федосеенко* (Комсомольск-на-Амуре) 28; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 26, 28, 31, 35; *В. Фокин* (Хабаровск) 32; *А. Хафизов* (п. Красногорский Мар. АССР) 23, 28; *Н. Чеховской* (Орск) 25, 28, 32; *В. Шаповалов* (Донецк) 23, 32; *Г. Швец* (Киев) 23, 25—31, 35; *И. Шендерович* (Северодвинск) 29, 32; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 23, 29, 32; *М. Юдин* (Запорожье) 26, 29; *О. Юсухно* (Киев) 23—32; *В. Яйлиян* (Киев) 25.

Упорядоченные наборы чисел и неравенства

1. Пары чисел ($|a|^3$, $|b|^3$) и ($|a|$, $|b|$) упорядочены одинаково. Поэтому

$$a^4+b^4 \geq |a|^3\cdot|a|+|b|^3\cdot|b| \geq |a|^3\cdot|b|+$$
$$+|b|^3\cdot|a| \geq a^3b+b^3a.$$

2. Тройки чисел a^2, b^2, c^2 и bc, ac, ab противоположно упорядочены. Поэтому

$$a^2bc+ab^2c+abc^2 \leq a^3b+b^3c+c^3a.$$

3. Рассматривая противоположно упорядоченные тройки

$$(a^2b^2,\ b^2c^2,\ c^2a^2);\ \left(\frac{c}{ab};\ \frac{a}{bc};\ \frac{b}{ac}\right),$$

получаем неравенства:

$$\frac{a^3b}{c}+\frac{b^3c}{a}+\frac{c^3a}{b} \geq a^2b^2\cdot\frac{c}{ab}+$$
$$+b^2c^2\cdot\frac{a}{bc}+c^2a^2\cdot\frac{b}{ac}=3abc,$$

аналогично, $\frac{ab^3}{c}+\frac{c^3b}{a}+\frac{ca^3}{b} \geq 3abc$, складывая которые, приходим к требуемому.

4. Сложите 3 неравенства

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \leq a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1,$$
$$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1 \leq a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1,$$
$$a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2 \leq a_1b_3+a_2b_2+a_3b.$$

5. Воспользуйтесь упражнением 4 для троек (a, b, c) и $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$.

6. Решается аналогично предыдущему с использованием неравенства Чебышева.

7. Наборы чисел $a_1^k, \ldots, a_n^k$ и $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m$ одинаково упорядочены.

8. Тройки чисел (a^5, b^5, c^5) и $\left(\frac{1}{b^3c^3}, \frac{1}{a^3c^3}, \frac{1}{a^3b^3}\right)$ одинаково упорядочены. Поэтому

$$\frac{a^5}{b^2c^3}+\frac{b^5}{a^3c^3}+\frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}.$$

Тройки (a^2, b^2, c^2) и $\left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}\right)$ упорядочены противоположно. Поэтому

$$\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

9. Пусть $k=2$, $m=1$. Так как наборы

$$a_1^2, \ldots, a_n^2 \text{ и } \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$$

противоположно упорядочены,

$$a_1^2\cdot\frac{1}{a_1}+a_2^2\cdot\frac{1}{a_2}+\ldots+a_n^2\cdot\frac{1}{a_n} \leq$$
$$\leq a_1^2\frac{1}{a_2}+a_2^2\frac{1}{a_3}+\ldots+a_n^2\frac{1}{a},$$

$$a_2^2\cdot\frac{1}{a_1}+a_2^2\cdot\frac{1}{a_2}+\ldots+a_n^2\cdot\frac{1}{a_n} \leq$$
$$\leq a_1^2\cdot\frac{1}{a_3}+a_2^2\frac{1}{a_n}+\ldots+a_n^2\cdot\frac{1}{a_2},$$

$$a_1^2\cdot\frac{1}{a_1}+a_2^2\cdot\frac{1}{a_2}+\ldots+a_n^2\cdot\frac{1}{a_n} \leq$$
$$\leq a_1^2\cdot\frac{1}{a_n}+a_2^2\cdot\frac{1}{a_1}+\ldots+a_n^2\frac{1}{a_{n-1}}.$$

Осталось сложить полученные неравенства. Общий случай аналогичен разобранному.

«Квант» для младших школьников

1. $46523+46523=93046$.

2. Если обозначить через w объем бака, а через x, y и z объемы бидонов, то получим соотношение: $\frac{w}{3}=\frac{x}{2}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{4}$, или $4w=6x=8y=9z$.

Наименьшее общее кратное чисел 4, 6, 8 и 9 равно 72, поэтому каждое из чисел в последней цепочке равенств должно быть кратно 72. Наименьший объем бака мы получим в том случае, когда каждое из них равно 72, откуда $w=18$, $x=12$, $y=9$, $z=8$.

3. Дело в малой разнице коэффициентов теплового расширения железа и бетона; этим объясняется прочность железобетонных конструкций.

4. См. рисунок 1

5. Пусть наше число N равно $\overline{a_1\ldots a_{20}}$. Тогда

$$7N=7a_{20}+70a_{19}+700a_{18}+\ldots+\underbrace{70\ldots0}_{19}a_1.$$

Очевидно, что сумма цифр суммы нескольких чисел не превосходит суммы сумм цифр этих чисел. Но сумма цифр числа $70\ldots0a_k$ равна сумме цифр числа $7a_k$, последняя же равна самому числу $7a_k$, если $a_k=0$ или 1, и меньше $7a_k$, если $a_k>1$ (сумма цифр любого числа, большего или равного 10, меньше этого числа). Значит, сумма цифр числа $7N$ ровно в 7 раз больше суммы цифр числа N (а именно это верно для нашего N), только если все цифры числа N равны 0 или 1. Значит, N составлено из 10 единиц и 10 нулей. Умножим теперь столбиком такое число на 19.

$$\begin{array}{r} \ldots0110111 \\ \times\quad 19 \\ \hline \ldots0990999 \\ \ldots0110111 \\ \hline \ldots2092109 \end{array}$$

Ясно, что наибольшая возможная сумма цифр результата будет $10\cdot1+10\cdot9=100$, и она уменьшается на 9 всякий раз, как единица оказывается под девяткой. У нас сумма равна $19=100-81$, то есть единица оказывается под девяткой 9 раз. Но это возможно, только если все единицы в числе N идут подряд. Значит,

$$N=\underbrace{1\ldots1}_{10}\underbrace{0\ldots0}_{10}$$

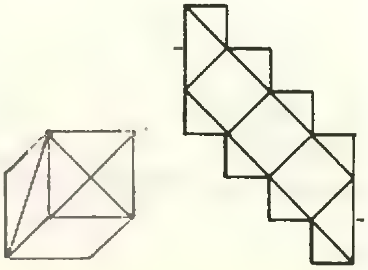


Рис. 1.

Безумное чаепитие

Задачи

1. Часы, которые стоят, так как они чаще показывают точное время.
2. Одинаковые количества.
3. Болванщик должен завести свои часы, запомнить их показания и отправиться к Мартовскому Зайцу. У Зайца он должен посмотреть на часы и тут же отправиться назад. Придя домой и снова посмотрев на свои часы, он узнает, сколько времени он отсутствовал. Теперь Болванщик должен установить на своих часах время, равное времени, которое он знает, уходя от Зайца, плюс половину времени, затраченного им на дорогу туда и обратно.
4. Как нарисовать математику? Присылайте нам рисунки, так как мы этого делать пока не умеем. Некоторые из вас, по-видимому, знают, что математики изображают произвольные множества кружочками на плоскости.
5. Через 720 суток, то есть почти через 2 года.

Интерференция света

1. В точках максимумов световые колебания в каждом из пучков происходят в одинаковой фазе, и их амплитуды складываются, а в точках минимумов — в противофазе, и амплитуды вычитаются. Поэтому $I_{max}=(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2=9I_1$, $I_{min}=(\sqrt{I_2}-\sqrt{I_1})^2=I_1$. Таким образом, результирующая интенсивность лежит в пределах между I_1 и $9I_1$.

3. Выразим толщину воздушного зазора h через расстояние r до точки касания (радиус соответствующего кольца) и радиус сферы (рис. 2):

$$h=R-\sqrt{R^2-r^2}=R(1-\sqrt{1-(r/R)^2})\approx r^2/(2R)$$

(здесь мы воспользовались тем, что $r/R\ll 1$). Так как смещению на одну полосу соответствует увеличение толщины зазора на $\lambda/2$, то пятое темное кольцо соответствует толщине $h_5=5\lambda/2$. Подставляя h_5 в предыдущее выражение, находим радиус искомого кольца:

$$r_5=\sqrt{5\lambda R}\approx 1{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{м}\approx 1{,}7\ \text{мм}.$$

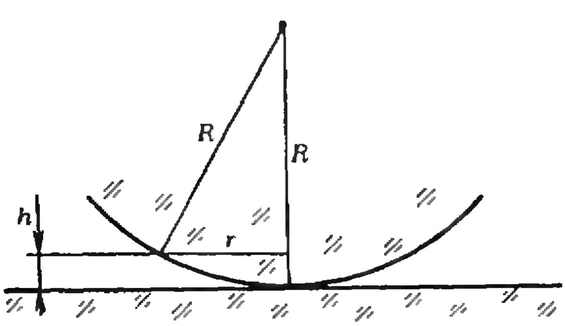


Рис. 2.

XXVI Международная математическая олимпиада

1. Пусть E — точка на отрезке AB такая, что $AE=AD$, а F — точка пересечения биссектрис углов BCD и CDA, по условию лежащая на AB. Точки C, D, E и F лежат на одной окружности (если E лежит на отрезке AF, то $\angle DEA=\angle DCE=(180^\circ-\angle A)/2$), откуда следует, что $EB=CB$ (поскольку $\angle CED=\angle ECB=(180^\circ-\angle B)/2$).

2. Будем вместо слов «окрашены в один цвет» писать значок $\sim$ и называть число m из M «периодом», если выполнено условие: для каждого i из M, отличного от m, $i\sim|m-i|$ (это название оправдывается тем, что при $i>m$ будет $i\sim i-m$). По условию, взаимно простые числа n и k — периоды. Нетрудно доказать, что если $m_1<m_2$ — периоды, то m_2-m_1 — тоже период:

если $i<m_2-m_1$, то $i\sim m_1+i\sim m_2-m_1-i$;
если $m_2-m_1<i<m_2$, то $i\sim m_2-i\sim -m_2+m_1+i$;
если $i=m_2$, то $i\sim m_2-m_1\sim m_2-(m_2-m_1)=m_1$;
если $i>m_2$, то $i\sim i-m_2\sim -m_2+m_1+i$.

Пользуясь этим свойством, мы можем от пары взаимно простых периодов $(n,\ k)$ перейти к такой же паре $(n,\ n-k)$, у которой большее число станет меньше, от нее спуститься дальше и т. д., пока мы не придем к паре, содержащей период 1. Поскольку 1 — период, $1\sim 2\sim 3\sim\ldots\sim n$. (Проделанный «спуск» — вариант алгоритма Евклида для отыскивания наибольшего общего делителя чисел n и k.)

4. **Первое решение** (рис. 3). Пусть P — точка пересечения прямых AC и KN. Поскольку $\angle KMA=\angle BMA-\angle BMK=\angle BCA-\angle BNK=\angle KPA$, точки M, P, A, K лежат на одной окружности. Далее,

$$\angle AMP=\angle AKP=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle AMB$$

(четырехугольник $ACNK$ — вписанный). Следовательно, точка M лежит на отрезке BP. Выразим через $BO=b$, $PO=p$ и радиус R описанной около $ACNK$ окружности произведения

$$BM\cdot BP=BK\cdot BA=b^2-R^2,$$
$$PM\cdot PB=PK\cdot PN=p^2-R^2$$

и сложим эти равенства: $BP^2=b^2+p^2-2R^2$, тогда

$$BM^2-PM^2=\left(\frac{b^2-R^2}{BP}\right)^2-\left(\frac{p^2-R^2}{BP}\right)^2=$$
$$=\frac{(b^2+p^2-2R^2)(b^2-p^2)}{BP^2}=b^2-p^2=BO^2-PO^2,$$

откуда $OM\perp BP$.

Второе решение (рис. 4). Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC и KNB; они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BM. Нам достаточно доказать, что при гомотетии с центром B и коэффициентом $1/2$ прямая OM переходит в этот серединный перпендикуляр, то есть что отрезок BO делится отрезком O_1O_2 пополам. Для этого покажем, что OO_1BO_2 — параллелограмм.

Заметим, что $BO_1\perp KN$ (из равнобедренного треугольника AO_1B получаем, что $\angle KBO_1=(180^\circ-\angle AO_1B)/2=90^\circ-\angle ACB$, но $\angle ACB=180^\circ-\angle AKN=\angle BKN$, следовательно, $\angle KBO_1+\angle BKN=90^\circ$; в случае, когда точки O_1 и C лежат по разные стороны от AB, это рассуждение нужно немного изменить). Аналогично доказывается, что $BO_2\perp AC$. Но OO_2 и OO_1 — серединные перпендикуляры к KN и AC. Таким образом, $BO_1\parallel OO_2$ и $BO_2\parallel OO_1$, что и требовалось доказать.

Если вам удастся найти более короткие и красивые решения, напишите в «Квант» автору задачи И. Ф. Шарыгину.

6. Условие $0<x_n<x_{n+1}<1$ эквивалентно такому:

$$1-\frac{1}{n}<x_n<1. \qquad (1)$$

Определим функцию f_n на отрезке $[0;\ 1]$ равенством $f_n(x_1)=x_n$ и обозначим через a_n и b_n

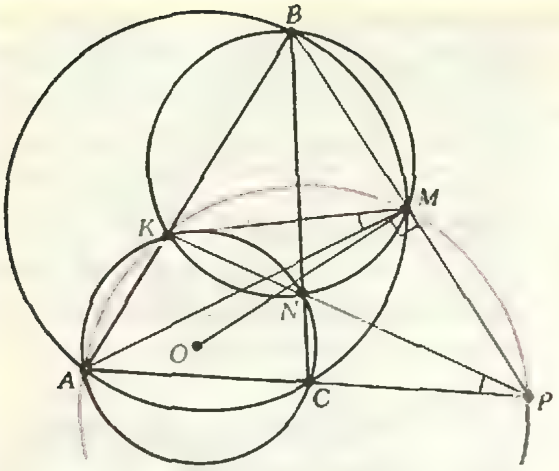


Рис. 3.

решения уравнений $f_n(a_n)=1-1/n$ и $f_n(b_n)=1$. (Эти решения существуют и единственны, причем $a_n<b_n$, так как функция f_n непрерывна, возрастает и принимает на концах отрезка значения $f_n(0)=0$ и $f_n(1)>1$.) Тогда (1) равносильно условию

$$a_n<x_1<b_n, \tag{2}$$

которое должно выполняться при всех $n\geqslant 1$. Последовательность (a_n) возрастает, поскольку $f_{n+1}(a_{n+1}) = 1-1/(n+1)>1-1/n = f_n(a_n) = f_{n+1}(a_n)$, аналогично доказывается, что (b_n) убывает; обе последовательности ограничены. Следовательно, каждая из этих последовательностей имеет предел — соответственно, a и b, $a\leqslant b$. Переходя к пределу в (2), получаем, что число x_1 удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда $a\leqslant x_1\leqslant b$.

Остается доказать единственность x_1, то есть равенство $a=b$. Заметим, что разность $f_n(b)-f_n(a)$ возрастает:

$$f_{n+1}(b)-f_{n+1}(a)=$$

$$=(f_n(b)-f_n(a))(f_n(b)+f_n(a)+\frac{1}{n})>f_n(b)-f_n(a)$$

(мы использовали неравенство $f_n(a)+1/n>f_n(a_n)+1/n=1$). Поэтому $b-a=f_1(b)-f_1(a)<f_n(b)-f_n(a)<f_n(b_n)-f_n(a_n)=1/n$ при всех n, а значит, $b-a=0$.

XVI Международная физическая олимпиада

Теоретический тур

Задача 1

На рисунке 5 показаны положения антенн *1* и *2* (расстояние между которыми r) и направления на города A и B (угол между которыми ψ). Полные фазовые сдвиги колебаний, возбуждаемых обеими антеннами в некоторой точке, а направлениях A и B равны

$$\Delta(A)=2\pi\frac{r\cos\alpha}{\lambda}+\Delta\varphi, \tag{1}$$

$$\Delta(B)=2\pi\frac{r\cos(\psi-\alpha)}{\lambda}+\Delta\varphi, \tag{2}$$

где λ — длина волны передатчика, $\Delta\varphi$ — разность фаз колебаний в антеннах, α — угол между плоскостью, проходящей через обе антенны, и направлением на город A. Запишем условия минимума интенсивности в городе A и максимума интенсивности в городе B:

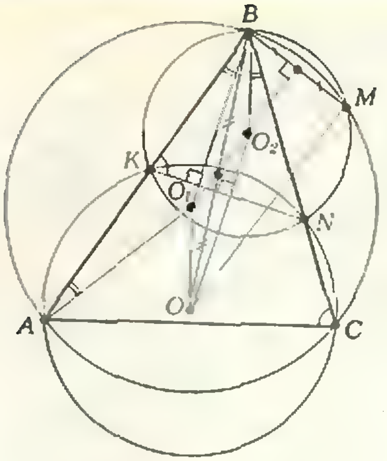


Рис. 4.

$$\Delta(A)=(2n+1)\pi, \tag{3}$$

$$\Delta(B)=2\pi k, \tag{4}$$

где k и n — целые числа. Из выражений (1) — (4) следует

$$\Delta(B)-\Delta(A)=2\pi\frac{r}{\lambda}(\cos(\psi-\alpha)-\cos\alpha)=$$

$$=(2(k-n)-1)\pi,$$

откуда

$$r=\frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)}\,\frac{2(k-n)-1}{\sin(\alpha-\psi/2)}.$$

Расстояние r между антеннами минимально, если $k=n$ и $\alpha-\psi/2=-\pi/2$. В этом случае

$$r_{\min}=\frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)}, \tag{5}$$

$$\alpha=\frac{\psi-\pi}{2}, \tag{6}$$

то есть нормаль к плоскости, проходящей через антенны, является биссектрисой угла ψ. Из выражений (1), (3), (5) и (6) найдем

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Изменение знака $\Delta\varphi$ (от $\pi/2$ до $-\pi/2$) приводит к противоположному эффекту: максимальная интенсивность излучения будет в направлении A, а минимальная — в направлении B. На рисунке 6 показаны положения антенн, направление на север N, а также направления на данные города A и B. Из этого рисунка видно, что

$$\psi=\psi_2-\psi_1=85°,$$

$$r_{\min}=\frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)}=\frac{c}{4\nu\sin(\psi/2)}\approx 4{,}1\ \text{м}.$$

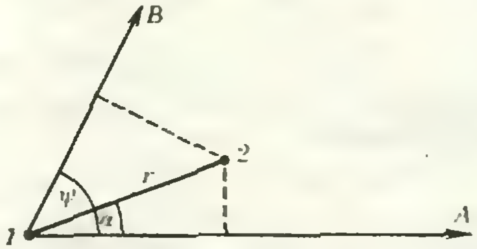


Рис. 5.

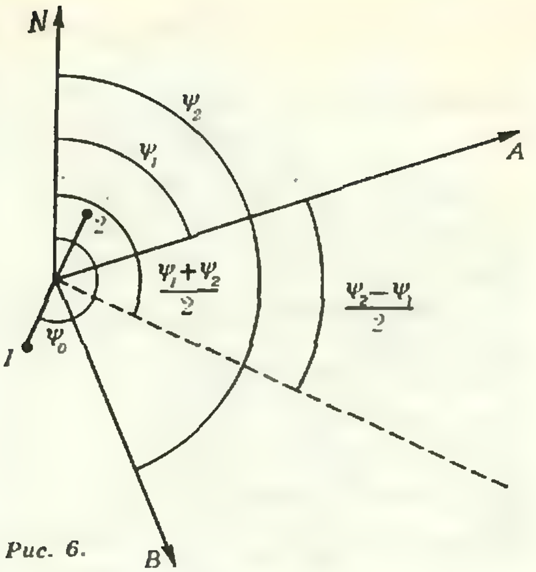


Рис. 6.

$$\psi_0=90^\circ+\frac{\psi_1+\psi_2}{2}=204{,}5^\circ.$$

Обсуждение случая $\psi_1\cong\psi_2$ предоставляется читателю.

Задача 2

а) Под действием силы Лоренца происходит перераспределение электронов по поверхности бруска. Электроны двигаются до тех пор, пока сила $\vec{F}'$, действующая на них со стороны электрического поля с напряженностью $\vec{E}'$, которое создается возникшими поверхностными зарядами, не уравновесит силу Лоренца $\vec{F}_{Л}$ (рис. 7):

$$F_{Л}=F',\ evB=eE',$$
$$E'=vB.$$

Полная напряженность $\vec{E}_п$ электрического поля в бруске равна (рис. 8):

$$\vec{E}_п=\vec{E}+\vec{E}'.$$

Так как сила тока I в бруске равна $I=nevcb$, то

$$v=\frac{I}{necb},\ E'=vB=\frac{IB}{necb},\ E=\frac{v}{u}=\frac{I}{necbu}.$$

Тогда

$$E_п=\sqrt{E^2+E'^2}=\frac{I}{necb}\sqrt{\frac{1}{u^2}+B^2}\approx 4{,}1\ \text{В/м},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}(E'/E)=\operatorname{arctg}(Bu)\approx 38^\circ.$$

б) В направлении ребра b возникнет напряжение

$$U=E'b=\frac{IB}{nec}=2{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{В}.$$

в) Разность потенциалов U будет изменяться по закону

$$U=\frac{IB}{nec}=\frac{1}{nec}I_0\sin\omega t\cdot B_0\sin(\omega t+\varphi)=$$
$$=\frac{I_0B_0}{2nec}\cos\varphi-\frac{I_0B_0}{2nec}\cos(2\omega t+\varphi).$$

Таким образом, напряжение имеет постоянную составляющую

$$U_0=\frac{I_0B_0}{2nec}\cos\varphi.$$

г) Мощность, потребляемая аппаратом, равна $P=IU\cos\varphi_1$, где I и U — действующие значения силы тока и напряжения, φ_1 — разность фаз колебаний силы тока и напряжения. Постоянная составляющая напряжения вдоль ребра b бруска $U_0\sim I_0B_0\cos\varphi_2$, где φ_2 — разность фаз колебаний тока и индукции магнитного поля. Если аппарат включить так, как показано на рисунке 9, то при выполнении условия $R\gg\omega L$ сила тока в катушке, а значит и индукция магнитного поля, будет пропорциональна напряжению на аппарате, сила тока в бруске будет пропорциональна силе тока через аппарат и $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. В этом случае постоянная составляющая напряжения вдоль ребра b бруска будет пропорциональна мощности, потребляемой аппаратом:

$$U_0\sim I_0B_0\cos\varphi\sim IU\cos\varphi=P.$$

Задача 3*)

а) Если принять потенциальную энергию аппарата в поле тяготения Солнца равной нулю при бесконечном удалении от Солнца, то для выхода космического аппарата за пределы Солнечной системы с орбиты Земли необходимо, чтобы в момент старта его полная энергия была больше или равна нулю:

$$E=\frac{mv^2}{2}-G\frac{mM}{r_1}\geqslant 0,\ v^2\geqslant\frac{2GM}{r_1},\qquad(1)$$

где m — масса аппарата, r_1 — радиус земной орбиты, M — масса Солнца, v — скорость аппарата относительно Солнца. Орбитальная скорость Земли v_0 определяется из второго закона Ньютона:

$$G\frac{mM}{r_1^2}=m\frac{v_0^2}{r_1},\ v_0^2=G\frac{M}{r_1}.\qquad(2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$v^2\geqslant 2v_0^2,\ v\geqslant\sqrt{2}v_0.$$

С другой стороны, между стартовой скоростью

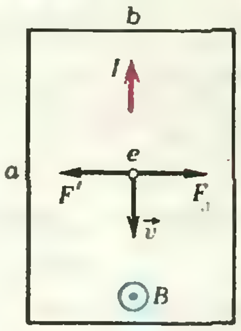


Рис. 7.

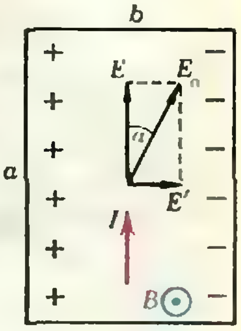


Рис. 8.

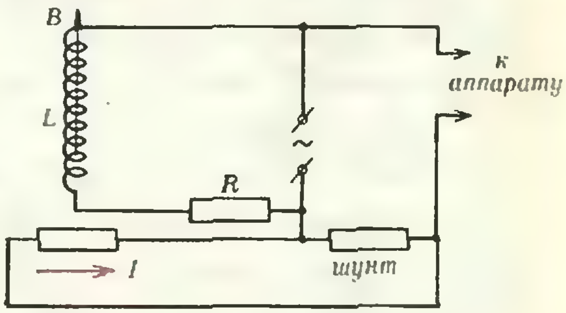


Рис. 9.

---

*) Решение этой и следующих задач несколько выходит за рамки программы по физике для нашей средней школы. (*Примеч. ред.*)

$\vec{v}_{\text{а}}$ и скоростями $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ существует соотношение (рис. 10) $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}_{\text{а}}$. Из рисунка 10 ясно, что $v\leqslant v_0+v_{\text{а}}$, то есть

$$v_{\text{а}}\geqslant v-v_0\geqslant(\sqrt{2}-1)v_0. \qquad (3)$$

Следовательно, минимальное значение искомой скорости

$$v_{\text{а}}=v_0(\sqrt{2}-1)\approx 12{,}4\ \text{км/с}$$

достигается при угле φ между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$, равном нулю ($\varphi=0$).

б) Для нахождения параллельной $\vec{v}_\parallel$ и перпендикулярной $\vec{v}_\perp$ составляющих скорости аппарата $\vec{v}$ в момент пересечения орбиты Марса (рис. 11) воспользуемся законами сохранения момента импульса и энергии:

$$m(v_0+v_{\text{б}})r_1=mv_\parallel r_2,$$

$$\frac{m(v_0+v_{\text{б}})^2}{2}-G\frac{mM}{r_1}=\frac{m(v_\perp^2+v_\parallel^2)}{2}-G\frac{mM}{r_2},$$

где r_2 — радиус орбиты Марса. Отсюда находим

$$v_\parallel=\frac{r_1}{r_2}(v_0+v_{\text{б}}), \qquad (4)$$

$$v_\perp=\sqrt{(v_0+v_{\text{б}})^2(1-r_1^2/r_2^2)-2v_0^2(1-r_1/r_2)}. \qquad (5)$$

в) Перейдем в систему отсчета, связанную с Марсом. Из потенциальности гравитационного поля следует, что в этой системе аппарат, выйдя из гравитационного поля Марса, имеет тот же модуль скорости, что и при входе в поле: $v_s'=v_s$, а только изменяется направление скорости (рис. 12). Для того чтобы после облета Марса корабль покинул Солнечную систему, необходимо, чтобы его скорость v_s' удовлетворяла неравенству, аналогичному неравенству (3):

$$v_s'\geqslant(\sqrt{2}-1)v_M, \qquad (6)$$

где v_M — орбитальная скорость Марса, равная

$$v_M=\sqrt{\frac{GM}{r_2}}=v_0\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \qquad (7)$$

При входе в гравитационное поле Марса корабль имеет скорость v_s, которую можно определить из выражения (рис. 13)

$$v_s=\sqrt{v_\perp^2+(v_\parallel-v_M)^2}. \qquad (8)$$

Из соотношений (6), (7) и (8), условия $v_s=v_s'$ и значений $v_\parallel$ и $v_\perp$ из пункта б) получаем выражение для стартовой скорости корабля $v_{\text{к}}$ относительно Солнца:

$$v_{\text{к}}\geqslant v_0\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}+\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3+2-2\sqrt{2}\,\frac{r_1}{r_2}}\right).$$

Отсюда минимальная скорость запуска $v_{\text{в}}$ относительно Земли равна

$$v_{\text{в}}=v_{\text{к}}-v_0=v_0\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3+2-2\sqrt{2}\,\frac{r_1}{r_2}}-1\right)\approx$$

$$\approx 0{,}185v_0\approx 5{,}5\ \text{км/с}.$$

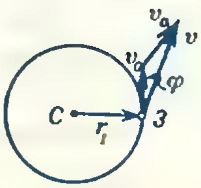


Рис. 10.

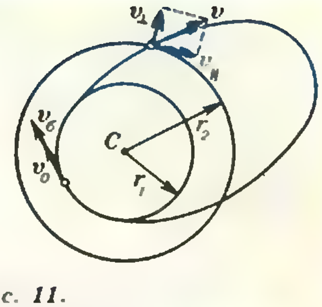


Рис. 11.

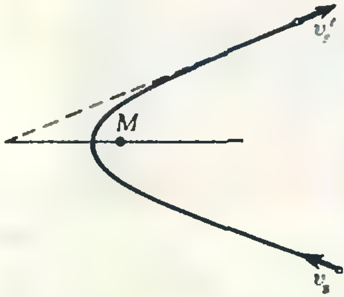


Рис. 12.

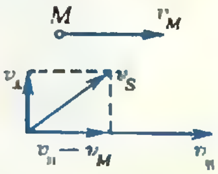


Рис. 13.

Энергия аппарата в системе отсчета, связанной с Солнцем, при таком способе запуска не сохраняется — она возрастает за счет изменения кинетической энергии Марса.

г) Сбереженную часть энергии можно определить по формуле

$$\alpha=\frac{E_1-E_2}{E_1}=\frac{v_{\text{а}}^2-v_{\text{в}}^2}{v_{\text{а}}^2}\approx 0{,}8=80\ \%.$$

Однако для практических целей более важно другое отношение

$$\beta=\frac{m_1-m_2}{m_1},$$

где m_1 и m_2 — массы топлива, необходимые для разгона аппарата в первом и втором случаях. В соответствии с формулой Циолковского

$$m=m_0(e^{\Delta v/u}-1)$$

(m_0 — полезная масса аппарата, u — скорость истечения газов относительно аппарата) получаем

$$\beta=\frac{e^{v_{\text{а}}/u}-e^{v_{\text{в}}/u}}{e^{v_{\text{а}}/u}-1}$$

— ответ перестает быть однозначным и зависит от величины u. При $u\gg v_{\text{а}}$ $\beta\approx 0{,}55$; для современных ракет, у которых $u\approx 5$ км/с, $\beta\approx 0{,}81$.

Экспериментальный тур

Задача 1

Для выполнения работы необходимо было собрать измерительную схему, изображенную на рисунке 3 в статье. Так как электронная схема обеспечивала только пропорциональность между максимальным отклонением стрелки вольтметра U и изменением магнитного потока $\Delta\Phi$ через катушку, надо было найти коэффициент пропорциональности между ними, то есть откалибровать измерительную систему. С этой целью составлялась дополнительная электрическая цепь по рисунку 14. Катушки L_1 и L_2 закреплялись на пластине таким образом, чтобы одна служила продолжением другой (с малым зазором) при одинаковом направлении магнитных полей. В результате

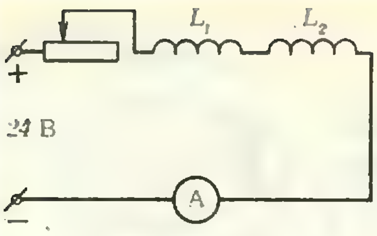


Рис. 14.

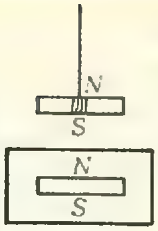


Рис. 15.

с достаточно большой точностью можно было принять, что индукция магнитного поля в середине такой «объединенной» катушки определяется выражением

$$B_0=\mu_0 \frac{In}{l},$$

где I — ток, n — число витков в катушке, l — ее длина, μ_0 — магнитная постоянная. Если внести измерительную катушку в зазор между катушками L_1 и L_2 и резко убрать ее, то максимальное отклонение стрелки прибора U_0 будет пропорционально изменению магнитного потока через катушку, и следовательно, индукции B_0 магнитного поля:

$$U_0 \sim \Delta\Phi \sim \Delta B \sim B_0,\ U_0=aB_0.$$

Отсюда

$$a=\frac{U_0}{B_0}=\frac{U_0 l}{\mu_0 I_0 n}.$$

(Жюри снижало оценку, если не проводилось экспериментальное доказательство зависимости $U/B=\mathrm{const}$ для различных значений U и B.)

Положение центров магнитов в «черном ящике» можно было определить при помощи пробного магнита, подвешенного на нити (рис. 15). Координату z можно было определить, измеряя B_z на определенной высоте над пробным магнитом и сравнивая эту величину с полем в плоскости XY над центрами магнитов. С помощью измерительной схемы определялась зависимость поля B_z от x и y.

По формуле $B_{\max}=U_{\max}/a$ измерялось максимальное значение индукции магнитного поля пробного магнита.

Задача 2

Включив электромотор и запустив секундомер, подключенный к компьютеру, получают на дисплее компьютера таблицу φ — t — Δt, где φ — угол поворота диска, t — время, прошедшее от начала измерений, Δt — время полуоборота диска. По этой таблице строится график $\varphi(t)$ при ускорении и замедлении диска (кривые *а* и *б* на рисунке 16).

Затем составляются новые таблицы для построения графиков $\omega(t)$:

$$\omega(t)=\pi/\Delta t=\pi/(t_2-t_1),$$

где t_1 и t_2 — времена регистрации двух последовательных прохождений стержня около индукционного датчика. Средняя угловая скорость ω рассчитывается для момента времени $t=(t_1+t_2)/2$. Графики зависимости $\omega(t)$ при ускорении и замедлении диска представлены на рисунке 17 (кривые *а* и *б*).

Далее рассчитываются значения углового ускорения β. Среднее угловое ускорение на интервале времени от $(N-1)$-й до $(N+1)$-й регистрации стержня равно

$$\beta_N=\frac{\omega_{N+1}-\omega_{N-1}}{((t_N-t_{N-1})+(t_{N+1}-t_N))/2},$$

где ω_{N-1} — угловая скорость на интервале от t_{N-1} до t_N, а ω_{N+1} — на интервале от t_N до t_{N+1}. Графики зависимости $\beta(t)$ для ускорения и замедления приведены на рисунке 18 (кривые *а* и *б*). Момент сил при ускорении мотора равен $M_{\text{уск}}=I\beta_{\text{уск}}$, где I — момент инерции диска. Так как $M_{\text{уск}}=M_{\text{вр}}-M_{\text{тр}}=M_{\text{вр}}-I\beta_{\text{зам}}$, то $M_{\text{вр}}=I(\beta_{\text{уск}}+\beta_{\text{зам}})$. Эти выражения позволяют построить графики $M_{\text{вр}}(\omega)$, $M_{\text{тр}}(\omega)$ и $M_{\text{уск}}(\omega)$ (кривые *а*, *б*, *в* на рисунке 19). Графики зависимости мощности мотора от угловой скорости строятся, исходя из формул $P_{\text{вр}}=M_{\text{уск}}\omega$, $P_{\text{тр}}=M_{\text{тр}}\omega$, $p_{\text{уск}}=M_{\text{вр}}\omega$ (кривые *а*, *б* и *в* на рисунке 20).

Избранные школьные задачи

(см. «Квант» № 11)

1. 15. Указание. Обозначьте $1/11=a$, $1/13=b$ и перепишите сумму в виде

$$(2+a)(3-b)+(1+2a)(2+b)+(1-a)(7+b).$$

2. $x=1/993$, $y=1/992$, $z=1/994$. Указание. $a+b+c=3\cdot 993$, где $a=1/x$, $b=1/y$, $c=1/z$.
4. 7 ч. 50 мин.
5. Указание. $0=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)\cdot(a+b+c)-3abc$.
6. Обозначьте

$$x=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102},$$

$$y=\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{101}{103},$$

$$z=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{9}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{102}{104}.$$

Поскольку $k/(k+2)>n/(n+2)$ при $k>n>0$, имеем $x<y<z$. Поэтому

$$x^3<xyz=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101\cdot 102}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot 102\cdot 103\cdot 104}=$$

$$=\frac{2}{103\cdot 104}<\frac{2}{100\cdot 100}=\frac{1}{5000}<\frac{1}{17^3},$$

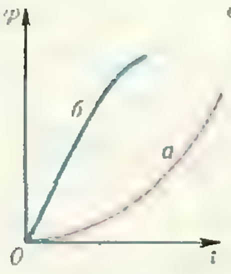


Рис. 16.

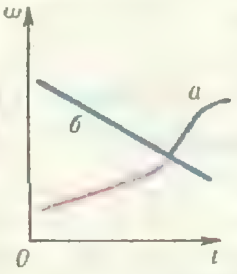


Рис. 17.

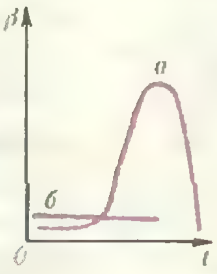


Рис. 18.

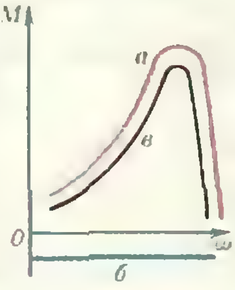


Рис. 19.

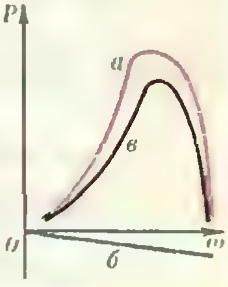


Рис. 20.

BeatriceGloria_personal library

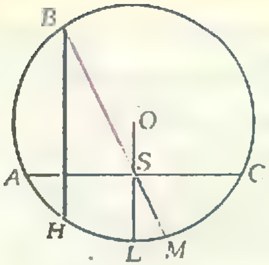
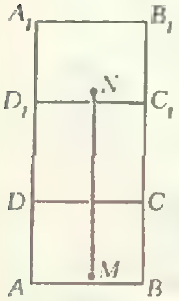


Рис. 21.



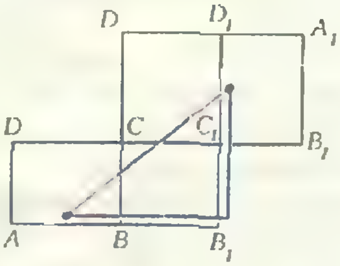


Рис. 22. Рис. 23.

откуда $x < \frac{1}{17}$.

7. $a+b$, $\sqrt{r}$, ab, ar, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{a+\sqrt{r}}$.

8. 5/2. Указание. Положите $x = \frac{a^2+b^2}{ab}$ и докажите, что $x \geqslant 2$.

9. Указание. Пусть H, L, M — точки пересечения с окружностью высоты, биссектрисы и медианы, O — центр окружности. Соедините точки O и L, после чего проведите через H прямую, параллельную OL; тогда вершина B искомого треугольника — точка пересечения этой прямой с окружностью. Соедините точки B и M; пусть S — точка пересечения прямых BM и OL. Проведя через S хорду, перпендикулярную радиусу OL, получите вершины A и C искомого треугольника (см. рисунок 21).

10. $|\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BA_2}+\ldots+\overrightarrow{BA_8}| = 4$. Указание. $\overrightarrow{BA_i}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA_i}$, где O — центр окружности ($i=1, 2, \ldots, 8$), поэтому $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BA_2}+\ldots+\overrightarrow{BA_8} = 8\cdot\overrightarrow{BO}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_8})$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_8}=\vec{0}$.

11. $2^{\sin x}+2^{\cos x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}} =$

$$= 2^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \geqslant 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

12. 2 корня. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $(\ln x)/x=(\ln 3)/3$ и покажите, что функция $(\ln x)/x$ на промежутке $]0; e]$ возрастает, а на промежутке $[e; \infty[$ убывает.

13. Указание. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, тогда $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. По условию $\vec{d}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$, поэтому $\vec{d}\cdot\vec{b}=\vec{d}\cdot\vec{c}$.

14. $\sqrt{1658}$. Указание. На рисунках 22, 23 представлены фрагменты развертки параллелепипеда и два возможных варианта для пути из M в N. В случае рисунка 22 длина пути равна 42, в случае рисунка 23 длина пути равна $\sqrt{1658}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Из условия задачи следует уравнение $(10x+y)-(10y+x)=x+y$, где x и y — цифры первого двузначного числа. Отсюда $x=5y$, а учитывая, что x и y — цифры, получаем $x=5$, $y=4$. Искомый номер 54—45.

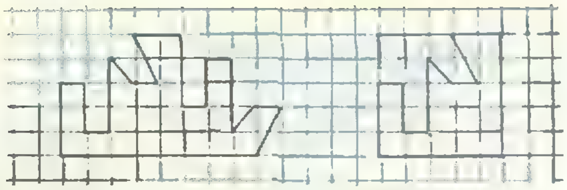


Рис. 24.

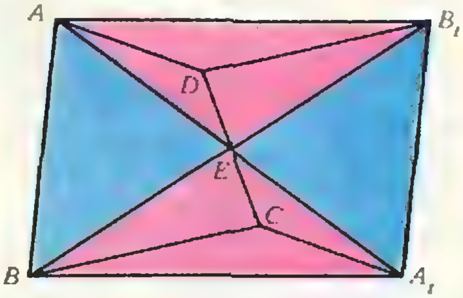


Рис. 25.

2. См. рисунок 24.

3. Сила трения пропорциональна силе нормального давления. Рассмотрим книгу, по которой скользит вытаскиваемая книга. Сила трения ее о лежащую под ней книгу больше, чем о скользящую по ней, на величину, пропорциональную весу одной книги. Именно поэтому она и остается на месте. Тем более остаются на месте книги, лежащие под ней.

4. На 3 оканчиваются только кубы чисел, последняя цифра которых равна 7. Кроме того, какую бы цифру мы ни поставили вместо звездочки, получившееся число будет меньше, чем 30^3, но больше, чем 20^3. Следовательно, наше число должно быть равно 27^3. Чтобы найти искомую цифру, можно не возводить 27 в куб; достаточно заметить, что число 19*83 должно делиться на 9, следовательно, сумма его цифр должна делиться на 9, что возможно лишь при * =6.

5. Отразим четырехугольник $ABCD$ относительно точки E (рис. 25). Четырехугольник ABA_1B_1, где A_1 и B_1 — симметричные точкам A и B точки,— параллелограмм (AA_1 и BB_1 — его диагонали). Заметим, что и в параллелограмме ABA_1B_1, и в шестиугольнике $ABCA_1B_1D$ площади синих и красных частей (см. рис. 25) равны. Но синие части в шестиугольнике и в параллелограмме одинаковы. Значит, должны быть одинаковы и красные части. Отсюда следует, что точки C и D лежат, соответственно, на отрезках BA_1 и AB_1, то есть стороны BC и AD данного четырехугольника параллельны.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 9)

Задание 17 (С. Веселенчук, 1985 г.). **1. Фd7!** Кр:h7 2. Kf6×, 1...Крf8 2.Л:h8×, 1...g6 2.Фf7×, 1...Ф:h7 2.Фе8×.

Задание 18 (А. Семененко, 1985 г.). Многие читатели нашли более короткий путь к цели: 1.Ла4 Кр:b2 2.Лb4+ Кра3 3.Крс3 Кра2 4.Ла4+ Крb1 5.Ла8 Крс1 6.Ла1×. Однако этот путь ... ошибочный. Дело в том, что в начальной позиции ход черных (иначе невозможно указать их предыдущий ход), и решение совсем иное: 0...Кр:а2 1.Крс3 Крb1 2 — 5.g4—g5—g6—g7 Крb1 6.g8Л! Кра2 7.Ла8+ и 8.Ла1×.

Напечатано в 1985 году

День советской науки	4	2
«Кванту» — 15 лет	1	2
К нашим читателям	1	3
Памяти И. К. Кикоина	2	2
С новым учебным годом!	9	2
40 лет Великой Победы	5	2
Гнеденко Б. В. Математика и математики в Великой Отечественной войне	5	9
Кикоин И. К. Физики — фронту	5	3

Статьи по математике

Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения и группы	7	23
Бушмелев А. В., Лавренченко С. А. Многогранники-торы	2	3
Вавилов В. В. Об одной формуле Христиана Гюйгенса	11	9
Гиндикин С. Г. Звездный век циклоиды	6	8
Гончаров А. Б. Арифметика гауссовых чисел	12	8
Земляков А. Н. Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»	9	14
Ляшко О. В. Почему не уменьшится сопротивление	1	10
Петров Ю. С. Висячие мосты	8	22
Понтрягин Л. С. Обобщение чисел	2	6
Понтрягин Л. С. Обобщение чисел	3	2
Почуев В. Р. Приближенные вычисления и формула Тейлора	4	3
Привень А. И. Не беда, что нет функций	6	20
Розов Н. Х., Сендов Бл. Х. Предыстория рождения компьютера	9	3
Сендов Бл. Х., Розов Н. Х. История рождения компьютера	10	8
Соловьев Ю. П., Сосинский А. Б. Геометрия скользящих векторов	8	9
Трофимов В. В. Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки	5	22
Успенский В. А., Семенов А. Л. Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы	7	9

Статьи по физике

Авилов В. В. Физика + Математика + ЭВМ	11	2
Асламазов Л. Г. Соотношение неопределенностей	7	2
Ашкинази Л. А. Что же такое электризация трением?	6	16
Болотовский Б. М. Что мы видим?	6	2
Варламов А. А., Маляровский А. И. Переговорная трубка длиной в экватор?	2	13
Городецкий Е. Е., Есипов В. С. Конвекция и самоорганизующиеся структуры	9	8
Мазин И. И. Приглашение в парную (или Физика в бане)	8	18
Марочник Л. С. Свидание с кометой	5	16
Петелин А. Л., Федосеев А. И. Как живут кристаллы в металле	12	2
Склокин Ф. Н. Белая мгла, или Не верь глазам своим	1	16
Стасенко А. Л. О функциях распределения	4	8
Тарасов Л. В. Мирные профессии лазерного луча	1	4
Фабрикант В. А. Парадокс Вавилова	3	6
Фабрикант В. А. Первые шаги Нильса Бора в науке	10	2
Фабрикант В. А. Что такое нелинейная оптика	8	2
Филонович С. Р. Роберт Гук	7	16
Штейнберг А. С. Репортаж из мира сплавов	3	8

Новости науки

Еще один тип радиоактивности	10	14
Миллисекундные пульсары	2	12
Пульсирующее Солнце	4	12
Топ-кварк и тигренок Топ	1	41

Лаборатория «Кванта»

Боровой А. А. Пузырьки в жидкости	2	19
Боровой А. А. Мостик из бумаги	6	22
Боровой А. А. Осмос	11	15
Бяко А. В. Пинг-понг... в умывальнике	3	15
Варламов А. А. Из старых опытов	7	30
Коломейцев Е. Э. Опыты со светящимися веществами	9	19
Тарасов Л. В., Тарасов М. Л. Струя воды и... движущийся кораблик	7	28

Математический кружок

Белый С. Б., Ровенский Е. А. Обобщенная задача о ферзях	8	26
Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Пары чисел и действия с ними	1	19
Гашков С. Б. Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника	10	15
Дворянинов С. В., Ясиновый Э. А. Как получаются симметричные неравенства	7	33
Крейн М. Г. Диофантово уравнение А. А. Маркова	4	13
Пинтер Л., Хегедыш И. Упорядоченные наборы чисел и неравенства	12	14

Наш календарь

Игорь Евгеньевич Тамм	7	27
Открытие рентгеновских лучей	8	25
Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна	11	26
Формула Бальмера	12	16

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10

Абсолютно черное тело	2	26
Две загадки бета-распада	5	30
Диа- и парамагнетики	4	19
Импульс и кинетическая энергия	5	28
Инерция и инертность	11	20
Какой из трех законов Ньютона важнее?	1	25
Как увидеть невидимое?	3	20
Когда к телу приложены параллельные силы	2	23
Лучи и волны	11	23
На что способен микроскоп?	1	27
О музыкальных звуках и их источниках	9	26
О простых машинах	4	17
Опыты Резерфорда и явление радиоактивности	4	20
Открытие электрона	3	18
О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы	2	25
Правила Кирхгофа	1	26
Скин-эффект	5	30

Стробоскопический эффект и измерение ускорения 9 23
Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины 9 24
Электрический диполь и его электрический момент 11 21

Математика 8, 9, 10

Векторы в геометрических задачах 10 21
Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе 2 29
Метод интервалов 12 18
О теореме Лагранжа 2 30
Откуда взять уравнение 4 22
Отражение кривых и преобразования формул 1 29
С помощью обратной функции 5 34
Избранные школьные задачи 1—5,10,11

«Квант» для младших школьников

Задачи 1 — 12
Фестиваль задач 8 32
Болтянский В. Г. Отгадать день рождения 11 28
Гуревич Г. А. Криптограмма Жюля Верна 9 30
Кротов С. С. О давлении и законе Паскаля, или Почему у сыра круглые дыры 1 36
Кэрролл Л. Бег по кругу и длинный рассказ 2 32
Кэрролл Л. Безумное чаепитие 12 22
Кэрролл Л. Билль вылетает в трубу 6 28
Кэрролл Л. Поросенок и перец 8 36
Кэрролл Л. Синяя гусеница дает совет 7 38
Родина Н. А. О всемирном тяготении, приливах и отливах 8 30
Семенов А. В. Трение: вредное, полезное, интересное... 10 26
Тучинский Л. И. Может ли быть невозможное? 4 30

Калейдоскоп «Кванта» 1, 3—6, 9—11

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 3 24
Призеры конкурса «Задачник «Кванта» 5 15
Задачи М901 — М960; Ф913 — Ф972 1—12
Решения задач М884 — М940; Ф894 — Ф952 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 3, 6, 9, 12
Задача о восьми точках 3 39
Кляксы на плоскости 9 47
Равномерные расположения 7 51

Искусство программирования

Абрамов С. А. Самый знаменитый алгоритм 11 44
Ершов А. П. Алгоритмический язык 10 42
Ершов А. П. Компьютер — алгоритм — алгоритмический язык 9 50

Полупроводниковые элементы вычислительной техники

I. Первое знакомство 9 56
II. Полевые транзисторы 10 46
III. Биполярные транзисторы 11 48
IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах 12 38

Практикум абитуриента

Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И. Метрические соотношения в треугольнике 4 48
Буздин А. И., Кротов С. С. Повторим гидростатику 2 48
Буздин А. И., Кротов С. С. Фазовые превращения 7 54
Бутиков Е. И. Интерференция света 12 40
Габович И. Г., Горнштейн П. И. Сколько корней имеет уравнение? 3 43
Зильберман А. Р. Повторим колебания 10 48
Козел С. М. Парадоксы плоского конденсатора 8 52
Овчинников О. Ю. Механическая работа и механическая энергия 5 46

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году 6 48
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 57
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 4 54
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 56
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 5 53
Московский архитектурный институт 5 55
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 5 52
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 57
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 54
Московский инженерно-физический институт 3 50
Московский институт стали и сплавов 3 51
Московский институт электронного машиностроения 1 56
Московский физико-технический институт 1 55
Московский энергетический институт 3 53
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 5 51

Олимпиады

XI Всероссийская олимпиада школьников 10 52
XIX Всесоюзная олимпиада по математике 11 51
XIX Всесоюзная олимпиада по физике 11 54
Задачи юбилейной Московской городской математической олимпиады 9 58
Заочная олимпиада по программированию 6 26
XXVI Международная математическая олимпиада 12 46
XVI Международная физическая олимпиада 12 48
Новосибирская областная олимпиада по физике 9 58

Информация

Братиславская летняя школа юных программистов 1 51
Вечерняя математическая школа при МГУ 2 18
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 50

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе 1 54
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 52
Заочная физическая школа при МГУ 4 53
Заочная школа при НГУ 8 60
Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа» 3 47
Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция 5 21
VII Московский турнир юных физиков 8 57
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 52
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 1 53
Традиционный праздник юных математиков 8 28
Турнир имени М. В. Ломоносова 11 25
VIII Турнир юных физиков 8 58
Физико-математическая конференция школьников 9 61
Шестой турнир городов 11 50

Игры и головоломки

Африканская головоломка 8 21
Задача о доминировании ферзей 7 60
Кроссворд 10 41
Уголок коллекционера 10 24

«Квант» улыбается

Вокруг «Алисы» 9 55
... и в плутоватости почасту упражнялись 3 49
Названия коллективов в естественных науках 7 53
Нильс Бор и «Журнал шутливой физики» 10 20
Околонаучная информация 8 51
По страницам журнала «Альфа» 11 47
Рыбная ловля глазами ученого 4 47
Сказки 1 40
Что написано на конденсаторе? 6 47
Это любопытно! 8 51

Смесь

Встреча с читателями журнала 8 8
Задачи для исследования 11 19
12 45
Задачи наших читателей 6 19
Курьезное совпадение 11 8
Невозможный тетраэдр 8 17
Советуем купить 4 11
5 55
Советуем прочесть 7 8
Формула площади сегмента 4 46

Шахматная страничка

Возвращение фигур 3 3-я с. обл.
Вычисления на шахматной доске 5 „
Гексагональные шахматы 10 „
Задачи на гексагональной доске 11 „
Инерционность мышления 6 „
Парадоксы пешечного эндшпиля 2
Рейтинги 9 „
Фантастика на шахматной доске 1 „
Фигуры на своих местах 4 „
Цилиндрические шахматы 7 „
Шахматные квартеты 12 „
Шахматы на параллельных досках 8 „
Наша анкета 12 4-я с. обл.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. А. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Б. Ю. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, С. Г. Захаров, Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин
Фото представили:
В. П. Марковский, В. И. Савела

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.10.85. Подписано к печати 21.11.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,56. Т-22334
Тираж 173 335 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2791

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

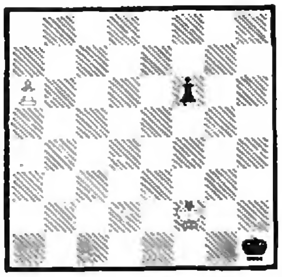
ШАХМАТНЫЕ КВАРТЕТЫ

Чем меньше фигур на доске, тем охотнее мы решаем задачу или этюд. Поскольку два места забронированы королями, четыре фигуры — минимальный материал, позволяющий создать достойное произведение шахматного искусства. Напомним два самых популярных квартета, уже встречавшихся на наших страничках.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Крh6, п. с6; черные: Кра6, п. h5. Белые начинают и делают ничью.

Ж. Барбье, Ф. Сааведра, 1895 г. Белые: Крb6, п. с6; черные: Кра1, Лd5. Белые начинают и выигрывают.

Читателям, не знакомым с решением данных этюдов, остается только позавидовать... Этюды эти составлены давно, да и вообще трудно предположить, что при столь стремительном развитии шахматной теории и шахматной композиции могли еще быть не реализованы какие-нибудь ресурсы четырех персонажей на шахматной доске. Но шахматы неисчерпаемы — и то и дело на свет появляются новые оригинальные квартеты. Приведем несколько примеров, придуманных сравнительно недавно.



Э. Погосянц, 1970 г. Белые начинают и дают мат в 5 ходов.

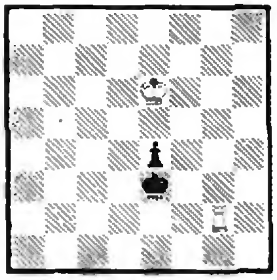
1. а7 Крh2 2. а8Л! Крh3 3. Ла4! f5 4. Лf4! (если бы пешка превратилась в ферзя, сейчас был бы пат) 4... Крh2 5. Лh4×.

Вот еще один похожий пример.

Э. Погосянц, 1977 г. Белые: Крf3, п. b7; черные: Крh3, п. h4. Белые начинают и дают мат в 4 хода.

1. b8Л! **Крh2 2. Крf2!** Крh3 3. Лb4! Крh2 4. Л:h4×; 2... Крh1 3. Лh8 h3 4. Л:h3×.

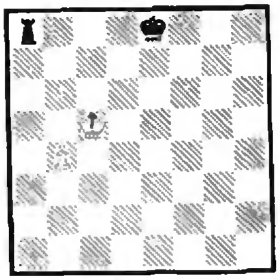
Борьба ладьи против пешки фундаментально исследована ЭВМ, компьютер умеет безошибочно разыгрывать любую позицию такого типа. Однако в огромном множестве положений выделить квартет, отличающийся своим изяществом, иначе говоря, заслуживающий право называться этюдом, машина пока не в состоянии...



Ю. Авербах, 1980 г. Белые начинают и выигрывают.

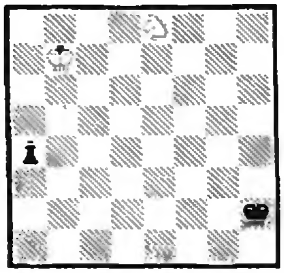
Автор этюда — гроссмейстер и крупный специалист в области эндшпиля. 1. Лg5! Неожиданное вступление, ведущее к двум симметричным вариантам: 1... Крd2 2. Лd5+! Крс2 3. Ле5! Крd3 4. Крf5! е3 5. Крf4 е2 6. Крf3 с выигрышем пешки; 1... Крf2 2. Лf5+! (вновь шах необходим, чтобы выиграть темп) 2... Крg2 3. Ле5! Крf3 4. Крd5 е3 5. Крd4 е2 6. Крd3 и т. д.

Сочетание «пешка против ладьи» проиллюстрируем забавной задачей на кооперативный мат.



А. Грин, 1969 г. Кооперативный мат в 4 хода.

В «кооперативах» начинают черные, которые помогают белым поставить мат в заданное число ходов. 0... 0—0—0! 1. b5 Крb7 2. b6 Кра6 3. b7 Ла8! 4. bаФ×. Засада ферзя в сверхминиатюре выглядит весьма неожиданно.



Э. Погосянц, 1984 г. Белые начинают и делают ничью.

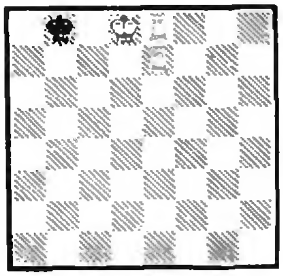
Коню придется немало потрудиться, чтобы остановить пешку. 1. **Кf6! а3 2. Кg4+ Крg1 3. Ке3 а2 4. Кс2 Крf2 5. Крс6! Кре2 6. Крd5! Крd2 7. Ка1 Крс3 8. Кре4! Крb2 9. Крd3 Кр:а1 10. Крс2 пат.**

Н. Гречишников, 1984 г. Белые: Кре3, Сh3, п. h5; черные: Кре8. Белые начинают и выигрывают.

Этюд имеет и теоретическое значение. Черному королю осталось сделать всего один шаг, и он скроется в спасительном углу. Но... 1. **Се6! Кре7 2. h6 Крf6! 3. Сf5! Крf7 4. Сh7! Крf6 5. Крf4**, и слон перехитрил короля, вынужденного пропустить пешку в ферзь.

Конкурсные задания

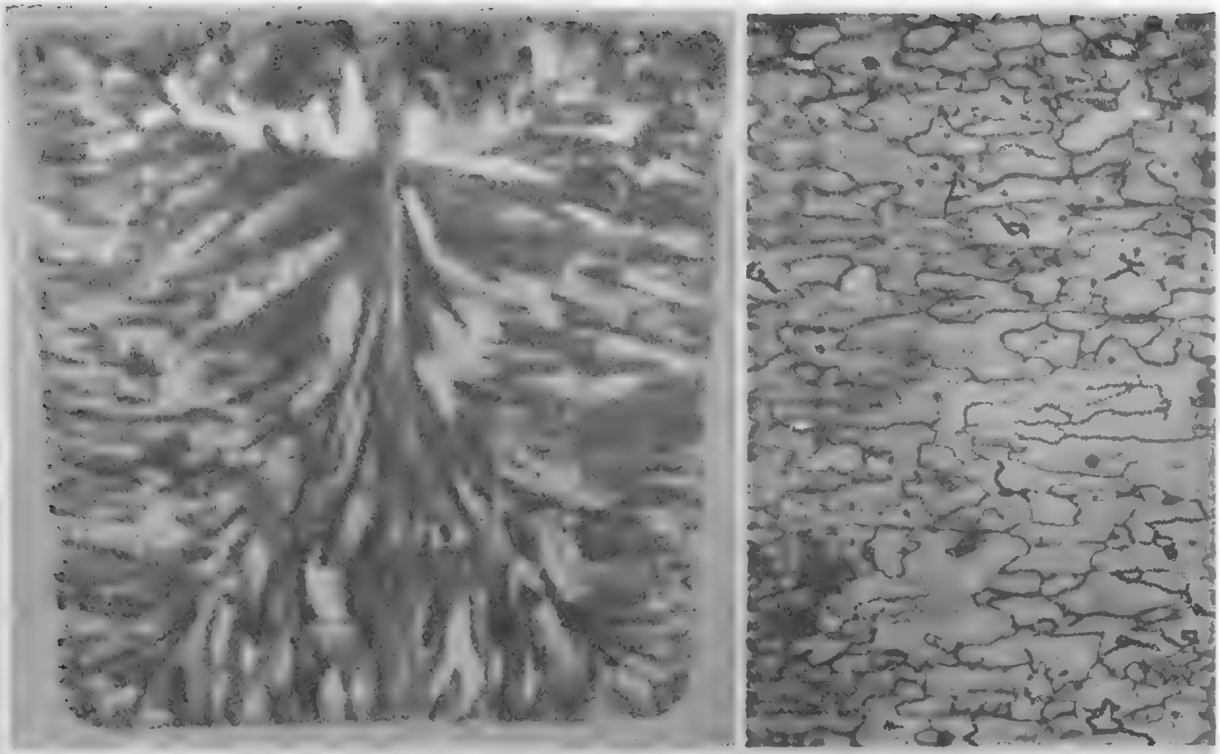
Учитывая, что этот номер новогодний, в качестве заключительных конкурсных заданий предлагаем две задачи-шутки.



23. Белые начинают и дают мат в полхода.

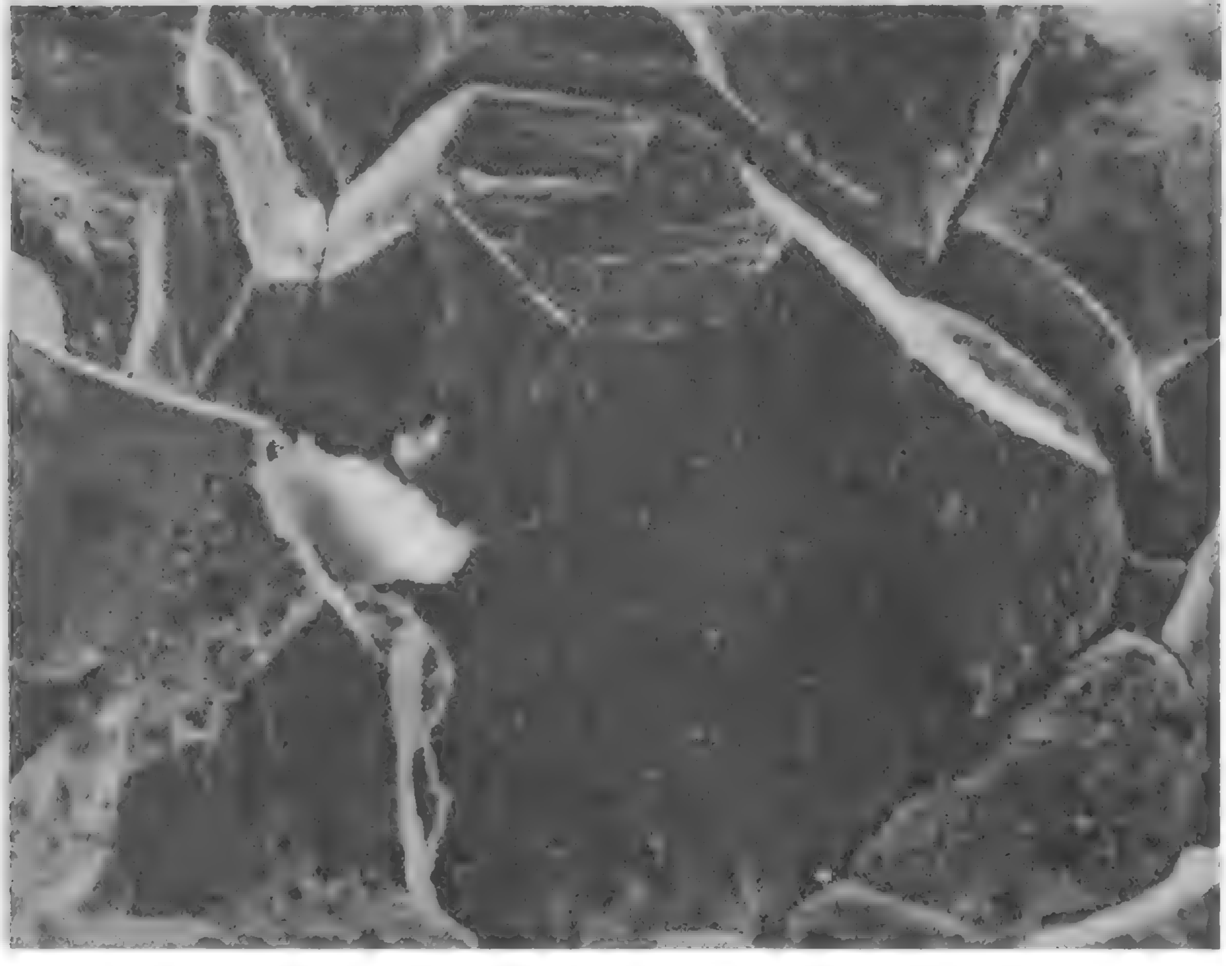
24. Придумайте квартет «король и ферзь против короля и ферзя», в котором бы любой шах ферзем (и белым, и черным) вел бы к его потере.

Срок отправки решений — 25 февраля 1986 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24»).



На верхнем левом снимке — поперечное сечение медного слитка. Подобная структура возникает в процессе затвердевания расплава. На фото справа (увеличение 200) иная структура. Она возникла при прокатке слитка — зерна-кристаллики вытянулись вдоль направления прокатки. На нижнем фото, полученном с помощью электронного микроскопа (увеличение 1000).— картина разрушения, вызванного наличием в металле «опасных» примесей, скапливающихся на границах между зернами-кристаллами.

Какую роль играют в жизни металла межзеренные границы? Этому вопросу посвящена статья А. Л. Петелина и А. И. Федосеева в этом номере журнала.



Индекс 70465
Цена 40 коп.

Наша анкета

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам хотелось бы знать ваше мнение о материалах, опубликованных в «Кванте» в 1985 году. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

1. Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность) и возраст.

2. Наиболее и наименее интересные, по вашему мнению, статьи по математике этого года.

3. Наиболее и наименее интересные статьи по физике этого года.

4. Самая удачная и неудачная, на ваш взгляд, обложка журнала в этом году.

5. Какие рубрики журнала вам нравятся, какие новые рубрики следовало бы ввести?

6. Какие материалы этого года помогли в вашей учебе; что вы искали в «Кванте» в 1985 году, но не нашли?

7. О чем хотели бы вы прочитать на страницах нашего журнала в 1986 году?

Ответы посылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1986 года.

квант
1
2
3
4
Москва,
К-6,
ул. Горького,
32/1
"КВАНТ"
"Анкета"
103006